

GERAÇÃO DE MALHAS PARA DOMÍNIOS TRIDIMENSIONAIS ARBITRÁRIOS EM
COORDENADAS GENERALIZADAS USANDO MÉTODO ELÍPTICO

Carlos Henrique Marchi e José Valerim Júnior

Grupo de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos
e Transferência de Calor - SINMEC
Depto. Engenharia Mecânica - UFSC
Cx. Postal, 476 - 88049 - Florianópolis - SC

INTRODUÇÃO

Para resolver numericamente problemas de mecânica dos fluidos e transferência de calor a geometria do problema deve ser discretizada.

Existem vários métodos para discretização, ou geração de malhas, como os manuais, algébricos e elípticos.

Neste artigo apresentamos um método elíptico para discretização de domínios tridimensionais, com geometria arbitrária em coordenadas que se adaptam às fronteiras, através da solução numérica de três equações de Poisson; e dois exemplos de aplicação.

MÉTODO ELÍPTICO PARA GERAÇÃO DE MALHAS TRIDIMENSIONAIS

Para a obtenção de um sistema de coordenadas existem vários métodos, como os descritos em [1]. O sistema de geração de coordenadas apresentado aqui é coincidente com as fronteiras e obtido através da solução de equações diferenciais [2]. A motivação principal para a utilização de equações diferenciais elípticas na geração de coordenadas tem base na solução de problemas de condução de calor [3].

O sistema de equações para a geração de malhas tridimensionais é dado por

$$\xi_{xx} + \eta_{xx} + \gamma_{xx} = P(\xi, \eta, \gamma) \quad (1)$$

$$\xi_{yy} + \eta_{yy} + \gamma_{yy} = Q(\xi, \eta, \gamma) \quad (2)$$

$$\xi_{zz} + \eta_{zz} + \gamma_{zz} = R(\xi, \eta, \gamma) \quad (3)$$

onde os subescritos representam derivadas parciais de segunda ordem e P, Q e R são expressões utilizadas para concentrar linhas coordenadas nas regiões de interesse; existem vários tipos dessas expressões, como aquelas apresentadas em [4].

Manter as coordenadas X, Y e Z como variáveis independentes nas Eq. (1), (2) e (3) requer a solução de equações diferenciais parciais em domínios irregulares, exatamente o problema que deseja-se evitar devido a necessidade de interpolações para aplicação das condições de contorno. A alternativa é transformar o sistema de equações do espaço físico (X,Y,Z) para o espaço transformado (ξ, η, γ). Após esta transformação as variáveis ξ, η e γ se tornam as variáveis independentes e X, Y e Z as dependentes. Desta forma, as condições de contorno são os valores de X, Y e Z que definem a geometria e, ao mesmo tempo, especificam a distribuição das linhas coordenadas ao longo das fronteiras. As equações transformadas podem ser apresentadas na forma genérica dada pela Eq. (4), onde ϕ representa X, Y ou Z. A equação transformada genérica é dada por

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\phi_{\xi\xi} + \alpha_{22}\phi_{\eta\eta} + \alpha_{33}\phi_{\gamma\gamma} + 2(\alpha_{12}\phi_{\xi\eta} + \alpha_{13}\phi_{\xi\gamma} + \alpha_{23}\phi_{\eta\gamma}) \\ + \frac{1}{J^2}(P\phi_{\xi} + Q\phi_{\eta} + R\phi_{\gamma}) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= (z_{\gamma}y_{\eta} - z_{\eta}y_{\gamma})^2 + (z_{\eta}x_{\gamma} - z_{\gamma}x_{\eta})^2 + (y_{\gamma}x_{\eta} - y_{\eta}x_{\gamma})^2 \\ \alpha_{22} &= (z_{\xi}y_{\gamma} - z_{\gamma}y_{\xi})^2 + (z_{\gamma}x_{\xi} - z_{\xi}x_{\gamma})^2 + (y_{\xi}x_{\gamma} - y_{\gamma}x_{\xi})^2 \\ \alpha_{33} &= (z_{\eta}y_{\xi} - z_{\xi}y_{\eta})^2 + (z_{\xi}x_{\eta} - z_{\eta}x_{\xi})^2 + (y_{\eta}x_{\xi} - y_{\xi}x_{\eta})^2 \\ \alpha_{12} &= (z_{\gamma}y_{\eta} - z_{\eta}y_{\gamma})(z_{\xi}y_{\gamma} - z_{\gamma}y_{\xi}) + (z_{\eta}x_{\gamma} - z_{\gamma}x_{\eta})(z_{\gamma}x_{\xi} - z_{\xi}x_{\gamma}) + (y_{\gamma}x_{\eta} - y_{\eta}x_{\gamma})(y_{\xi}x_{\gamma} - y_{\gamma}x_{\xi}) \\ \alpha_{13} &= (z_{\gamma}y_{\eta} - z_{\eta}y_{\gamma})(z_{\eta}y_{\xi} - z_{\xi}y_{\eta}) + (z_{\eta}x_{\gamma} - z_{\gamma}x_{\eta})(z_{\xi}x_{\eta} - z_{\eta}x_{\xi}) + (y_{\gamma}x_{\eta} - y_{\eta}x_{\gamma})(y_{\eta}x_{\xi} - y_{\xi}x_{\eta}) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\alpha_{23} = (z_{\xi} y_{\gamma} - z_{\gamma} y_{\xi}) (z_{\eta} y_{\xi} - z_{\xi} y_{\eta}) + (z_{\gamma} x_{\xi} - z_{\xi} x_{\gamma}) (z_{\xi} x_{\eta} - z_{\eta} x_{\xi}) + (y_{\xi} x_{\gamma} - y_{\gamma} x_{\xi}) (y_{\eta} x_{\xi} - y_{\xi} x_{\eta})$$

são as componentes do tensor métrico e o jacobiano da transformação J é

$$J = [x_{\xi} y_{\eta} z_{\gamma} + x_{\eta} y_{\gamma} z_{\xi} + x_{\gamma} y_{\xi} z_{\eta} - x_{\xi} y_{\gamma} z_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi} z_{\gamma} - x_{\gamma} y_{\eta} z_{\xi}]^{-1} \quad (6)$$

Os subscritos das Eq. (5) e (6) representam derivadas parciais de primeira ordem. As derivadas de primeira e segunda ordens das Eq. (4) a (6) foram aproximadas numericamente através de diferenças finitas central [4], resultando em

$$\begin{aligned} A_p \phi_P &= A_e \phi_E + A_w \phi_W + A_n \phi_N + A_s \phi_S + A_d \phi_D + A_f \phi_F + \\ &A_{ne} \phi_{NE} + A_{sw} \phi_{SW} + A_{nw} \phi_{NW} + A_{se} \phi_{SE} + A_{de} \phi_{DE} + A_{fw} \phi_{FW} + \\ &A_{fe} \phi_{FE} + A_{dw} \phi_{DW} + A_{dn} \phi_{DN} + A_{fs} \phi_{FS} + A_{fn} \phi_{FN} + A_{ds} \phi_{DS} \end{aligned} \quad (7)$$

onde

$$\begin{aligned} A_p &= 2(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}) \\ A_e &= \alpha_{11} + \frac{P}{2J^2} & A_w &= \alpha_{11} - \frac{P}{2J^2} \\ A_n &= \alpha_{22} + \frac{Q}{2J^2} & A_s &= \alpha_{22} - \frac{Q}{2J^2} \\ A_d &= \alpha_{33} + \frac{R}{2J^2} & A_f &= \alpha_{33} - \frac{R}{2J^2} \\ A_{ne} &= A_{sw} = \frac{\alpha_{12}}{2} & A_{nw} &= A_{se} = \frac{-\alpha_{12}}{2} \\ A_{de} &= A_{fw} = \frac{\alpha_{13}}{2} & A_{fe} &= A_{dw} = \frac{-\alpha_{13}}{2} \\ A_{dn} &= A_{fs} = \frac{\alpha_{23}}{2} & A_{fn} &= A_{ds} = \frac{-\alpha_{23}}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

Os subscritos das Eq. (7) e (8) seguem a nomenclatura da Fig. 1.

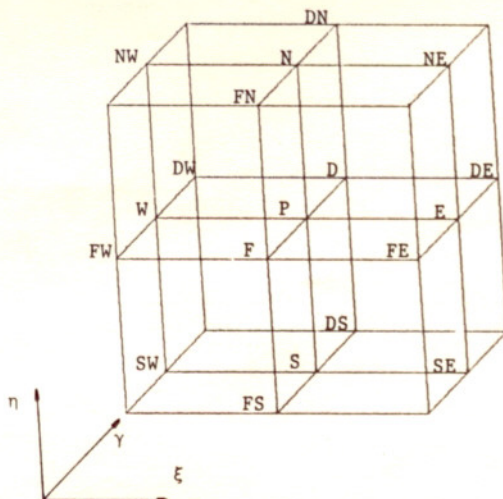


Figura 1. Nomenclatura utilizada para aproximar numericamente as derivadas das Eq. (4) a (6).

Os três sistemas lineares de equações, representados pela Eq. (7), foram resolvidos numericamente usando o método SOR (sobre-relaxações sucessivas).

EXEMPLOS DE MALHAS TRIDIMENSIONAIS GERADAS USANDO O MÉTODO ELÍPTICO

Dois exemplos de geração de malhas tridimensionais são apresentados abaixo.

O primeiro, mostrado na Fig. 2, é a discretização de um quarto de um duto, que começa com face circular e termina com face retangular e não paralela à face circular, com atração das linhas coordenadas para os lados esquerdo, direito, inferior e superior. Na Fig. 2 são representadas as faces frontal e dorsal, que são condições de contorno, e duas superfícies internas que foram geradas.

O segundo exemplo, mostrado nas Fig. 3 a 5, apresenta a geração de uma malha tridimensional sobre a parte frontal de um foguete tipo hammer-head. A Fig. 3 mostra o corpo do foguete cuja superfície é condição de contorno. Na Fig. 4 é representado o foguete mostrado na

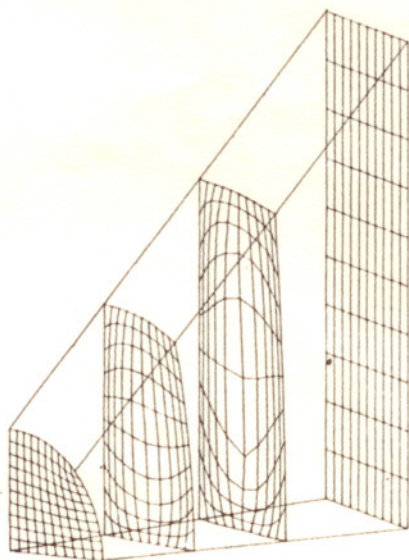


Figura 2. Planos γ de uma malha 3D sobre um duto.

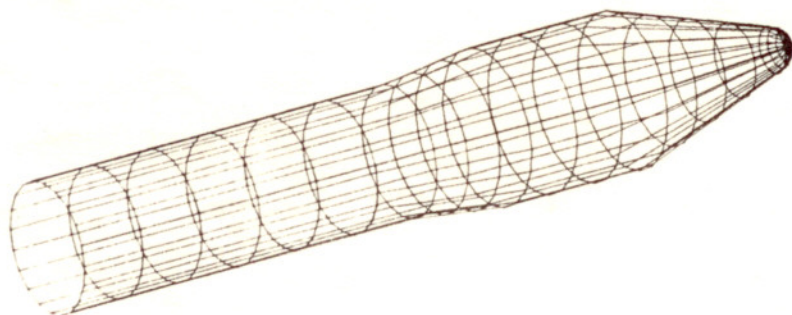


Figura 3. Discretização do corpo de um foguete tipo hammer-head.

figura anterior e três planos ξ ; o plano direito é condição de contorno; e os planos esquerdo e aquele que está quase perpendicular à folha são planos gerados. Na Fig. 5 é apresentado um plano η gerado que é uma superfície que envolve o foguete.

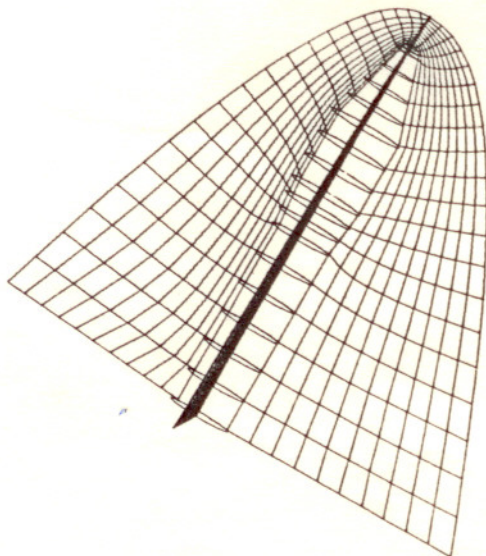


Figura 4. Três planos ξ da malha 3D sobre um foguete.

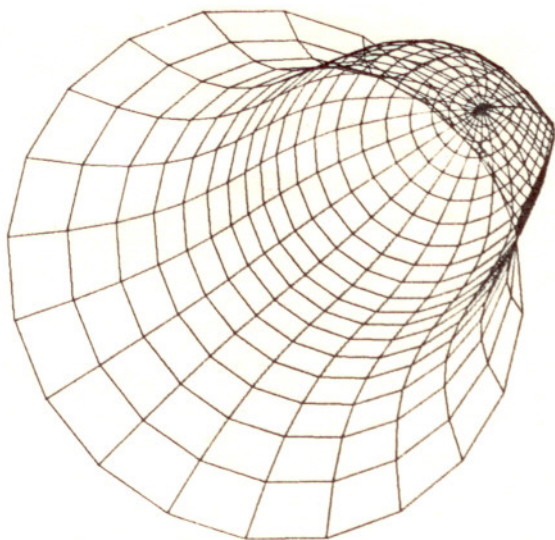


Figura 5. Superfície 3D gerada sobre um foguete.

CONCLUSÃO

Descrevemos um método elíptico para geração de malhas tridimensionais sobre geometrias arbitrárias em coordenadas generalizadas, fazendo-se uso de três equações de Poisson.

Foram apresentados dois exemplos de aplicação do método descrito, sobre um duto arbitrário e parte frontal de um foguete.

Para visualizar malhas tridimensionais geradas há necessidade de um software capaz de efetuar rotações da malha, desenhar planos e blocos especificados e, principalmente, o desenho das regiões da malha que um observador tivesse condições de visualizar, isto é, omitir o desenho das regiões escondidas atrás da própria malha.

REFERÊNCIAS

- [1] Thompson, J.F., Warsi, Z.U.A. and Mastin, C.W. "Numerical grid generation - foundations and applications". Elsevier Science Publishing Co., Inc., U.S.A., 1985.
- [2] Thompson J.F., Thames, F.C. and Mastin, C.W. "Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for field containing any number of arbitrary two-dimensional bodies". J. Comp. Phys., 15, p.299-319, 1974.
- [3] Maliska, C.R. "Solução numérica de problemas de transferência de calor e mecânica dos fluidos em coordenadas generalizadas". Anais do I Encontro Nacional de Ciências Térmicas, Rio de Janeiro, pp. 27-38 (1986).
- [4] Marchi, C.H. "Dedução de equações para discretização de domínios tri-dimensionais arbitrários em coordenadas generalizadas; relatório interno". SINMEC/EMC/UFSC, Florianópolis, agosto, 1988.