

XXIV CILAMCE

CONGRESSO IBERO LATINO-AMERICANO DE
MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA

OURO PRETO, 2003

**ESTIMATIVA DE ERROS DE ITERAÇÃO EM
DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL**

Márcio André Martins

Departamento de Matemática, Universidade Federal do Paraná
81531-990, Curitiba, PR, Brasil
marciom@cesec.ufpr.br

Carlos Henrique Marchi

Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Paraná
81531-990, Curitiba, PR, Brasil
marchi@demec.ufpr.br

Resumo. *Analisa-se o desempenho do estimador empírico. Este estimador fornece uma estimativa do erro de iteração com base na taxa de convergência da variável de interesse. O erro de iteração pode ser definido pela diferença entre a solução numérica exata e a solução numérica em uma determinada iteração. São resolvidos sistemas de equações gerados a partir da aplicação dos métodos de diferenças finitas e volumes finitos sobre malhas unidimensionais e bidimensionais uniformes, de problemas de transferência de calor e de mecânica dos fluidos. Estes sistemas de equações foram resolvidos com a utilização de vários métodos iterativos. O desempenho do estimador empírico pode ser dividido em três intervalos: nas iterações iniciais, em geral a acurácia é baixa; quando o número de iterações é muito elevado, os erros de arredondamento predominam sobre os erros de iteração mas, mesmo assim, a acurácia é relativamente boa; no intervalo entre esses dois extremos, a acurácia tende a melhorar à medida que se aumenta o número de iterações. Não se recomenda o uso do estimador empírico em processos iterativos que envolvem a aplicação da técnica multigrid pois, em geral, sua acurácia é baixa. Constatou-se que o estimador empírico é equivalente a outros estimadores disponíveis na literatura.*

Palavras-chave: *Simulação numérica, Erros de iteração, Estimadores de erro, Dinâmica dos fluidos, Verificação.*

1. INTRODUÇÃO

Segundo Ferziger e Peric (1999), Oberkampf e Blottner (1998), Roache (1998), Tannehill *et al.* (1997), Celik e Zhang (1995) e Demuren e Wilson (1994), o erro numérico é causado por diversas fontes: erros de truncamento (E_T), erros de arredondamento (E_π), erros de programação (E_p) e erros de iteração (E_n). Simbolicamente, tem-se

$$E(\phi) = E(E_T, E_\pi, E_p, E_n) \quad (1)$$

onde ϕ é a variável de interesse, podendo ser local ou global, primária ou secundária. Essas quatro fontes de erro podem ter magnitudes e sinais diferentes, o que pode resultar em cancelamentos parciais ou totais entre esses erros. A definição, o efeito e a origem de cada uma destas quatro fontes de erro são discutidas no texto de Marchi (2001).

No presente trabalho, são analisados erros de soluções numéricas causados somente por erros de iteração. Nas próximas seções, caracteriza-se o erro de iteração e são apresentados procedimentos para estimar o erro de iteração utilizando-se o *estimador empírico*. São apresentados exemplos de aplicação que envolvem difusão de calor unidimensional e bidimensional em regime permanente e escoamento bidimensional isotérmico de fluido incompressível. As soluções numéricas destes problemas são obtidas através dos métodos de diferenças finitas e de volumes finitos. Finalmente, apresenta-se a conclusão do trabalho.

2. ERRO DE ITERAÇÃO

Roy e Blottner (2001), Ferziger e Peric (1999), Roache (1998), Kim *et al.* (1998) e Demuren e Wilson (1994) são exemplos de trabalhos que discutem sobre erros de iteração. De acordo com Ferziger e Peric (1999), considerando-se uma determinada variável de interesse (ϕ), o erro de iteração (E) é a diferença entre a solução exata (Φ) das equações discretizadas e a solução numérica em uma determinada iteração (ϕ_n), ou seja,

$$E(\phi_n) = \Phi - \phi_n \quad (2)$$

onde as equações discretizadas resultam da aplicação de um método numérico sobre um modelo matemático; n representa o número da iteração corrente no processo de solução do sistema de equações algébricas, obtido das equações discretizadas do modelo matemático.

Entre outros, alguns fatores que geram erros de iteração são:

- o emprego de métodos iterativos para resolver o sistema de equações algébricas;
- o uso de métodos segregados na obtenção da solução de modelos matemáticos constituídos por mais de uma equação diferencial; e
- a existência de não-linearidades no modelo matemático.

A característica principal dos erros de iteração envolvidos em processos iterativos que apresentam taxa de convergência monotônica é que, quando se aumenta o número de iterações, em geral, seu valor diminui em escala logarítmica e tende a uma inclinação constante. Isso pode ser observado na Fig. 1 onde é mostrado o erro de iteração resultante da solução de uma equação quadrática ($x^2 - 5x + 6 = 0$) através do Método da Iteração Linear (Ruggiero, 1998), com condição inicial $x_0 = 0$. Portanto,

$$E(\phi_n) = C 10^{-np_L} \quad (3)$$

onde C é uma constante; p_L é a ordem assintótica, que representa a inclinação para a qual tende a curva do erro quando $n \rightarrow \infty$. Quanto maior é esta inclinação em relação ao eixo das abscissas (Fig. 1), maior é a taxa de redução do erro de interação (E) com o aumento de n . Além disso, para um mesmo número de iterações, menor é o erro.

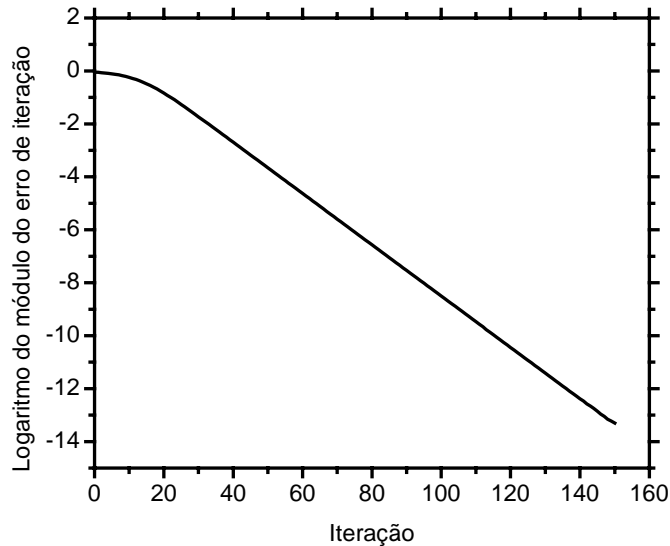


Figura 1 – Comportamento apresentado pelos erros de iteração.

O valor do erro de iteração só pode ser calculado com a Eq. (2) quando se conhece a solução exata do sistema de equações resultante da discretização do modelo matemático. Mas em termos práticos isso não ocorre, em geral. Conseqüentemente, é necessário estimar qual é o valor da solução exata. Com este fim, um método é apresentado na próxima seção.

3. ESTIMADOR EMPÍRICO

A incerteza (U) da solução numérica de uma variável de interesse (ϕ) é calculada pela diferença entre a estimativa da solução exata (ϕ_∞) do sistema de equações e a sua solução numérica em uma iteração n (ϕ_n), isto é,

$$U(\phi_n) = \phi_\infty - \phi_n \quad (4)$$

onde a incerteza também é denominada de erro de iteração estimado. Por analogia à Eq. (3), admite-se que

$$U(\phi_n) = k 10^{-np_U} \quad (5)$$

onde k é uma constante; e p_U é a ordem aparente da incerteza que representa a inclinação local da curva da incerteza (U) versus o número de iterações (n) num gráfico como o da Fig. 1. Considerando-se as iterações n_1, n_2 e n_3 , com $n_1 < n_2 < n_3$, e as Eqs. (4) e (5), tem-se

$$\begin{cases} \phi_{\infty} - \phi_{n_1} = k 10^{-n_1 p_U} \\ \phi_{\infty} - \phi_{n_2} = k 10^{-n_2 p_U} \\ \phi_{\infty} - \phi_{n_3} = k 10^{-n_3 p_U} \end{cases} \quad (6)$$

No sistema de Eqs. (6), as incógnitas são ϕ_{∞} , k e p_U . Resolvendo-o para ϕ_{∞} , obtém-se

$$\phi_{\infty} = \phi_{n_3} + \frac{(\phi_{n_3} - \phi_{n_2})}{(\psi - 1)} \quad (7)$$

onde

$$\psi = \frac{\phi_{n_2} - \phi_{n_1}}{\phi_{n_3} - \phi_{n_2}} \quad (8)$$

e a expressão para a ordem aparente (p_U) pode ser vista no trabalho de Martins (2002). Substituindo este resultado na Eq. (4), chega-se a

$$U(\phi_{n_3}) = \frac{(\phi_{n_3} - \phi_{n_2})}{(\psi - 1)} \quad (9)$$

que se constitui no *estimador empírico* para erros de iteração. Marchi e Silva (2002) demonstraram que estimativas de erro baseadas em equações semelhantes à Eq. (9) são válidas apenas para $\psi > 1$ ou $\psi < -1$.

3.1 Critérios para medir o desempenho de uma estimativa de erro

A qualidade de uma estimativa de erro pode ser avaliada através da sua efetividade (θ), que é definida pela razão entre a incerteza (U) e o erro (E) (Zhu e Zienkiewicz, 1990), isto é,

$$\theta = \frac{U}{E} \quad (10)$$

Uma estimativa de erro ideal é aquela cuja efetividade é igual à unidade ($\theta = 1$), ou seja, quando a incerteza é igual ao erro ($U = E$). Quando a magnitude da incerteza é maior do que a magnitude do erro de iteração e ambas têm o mesmo sinal, pode-se dizer que a estimativa do erro é confiável (Marchi, 2001), isto é,

$$\theta \geq 1 \quad (11)$$

Se a magnitude da incerteza é aproximadamente igual à magnitude do erro de iteração, diz-se que a estimativa do erro é acurada (Chapra e Canale, 1994), ou seja,

$$\theta \approx 1 \quad (12)$$

A definição quantitativa do que é uma estimativa de erro acurada depende do quão próximo da unidade deve estar a efetividade, o que é função de cada caso.

4. RESULTADOS

Nesta seção são descritos e apresentados resultados numéricos de três problemas usados para ilustrar, através de exemplos de cálculo, a aplicação do *estimador empírico* para erros de iteração. Muitos outros resultados podem ser vistos no trabalho de Martins (2002).

4.1 Equação de Poisson Unidimensional

O problema 1 consiste na difusão de calor unidimensional, em regime permanente, com absorção de calor (Incropera e DeWitt, 1992), o que resulta na equação de Poisson, dada por

$$\frac{d^2\Lambda}{dx^2} = 12x^2 \quad (13)$$

com condições de contorno do tipo Dirichlet nos dois contornos: $\Lambda(0) = 0$ e $\Lambda(L) = 1$; com $L = 1$. O modelo numérico é constituído pelo método de diferenças finitas (Tannehill et al., 1997), com aproximações numéricas de 2ª ordem através de diferença central e malha uniforme.

Foram definidos, neste problema, quatro variáveis de interesse (ϕ), que são: os resultados numéricos em três nós específicos da malha, isto é, $\Lambda(L/2)$, $\Lambda(9L/10)$ e $\Lambda(L/5)$ e a média aritmética dos resultados numéricos obtidos em todos os nós da malha. Para cada variável de interesse foram analisados seu erro de iteração (E), a estimativa do erro de iteração (U), a razão de convergência (ψ), a ordem aparente (p_U) e a efetividade (θ).

As soluções numéricas foram obtidas para malhas com $N = 11, 101$ e 201 nós. O sistema de equações resultante da discretização do modelo matemático foi resolvido com o método iterativo de Gauss-Seidel (Kreyszig, 1999), utilizando-se três tipos de condições iniciais: nula, unitária e linear com x . Considerou-se como critério de convergência para o processo iterativo a queda mínima de cinco ordens de grandeza na magnitude do erro de iteração, para todas as variáveis de interesse.

Na Tabela 1 são apresentados resultados para $\Lambda(L/2)$, em função do número de nós da malha, para condição inicial nula, na iteração em que é satisfeito o critério de convergência. Pode-se observar nesta tabela que as estimativas de erro apresentam acurácia elevada ($\theta \approx 1$). Para as demais variáveis de interesse, em todos os casos, obteve-se comportamento análogo. Com a variação das condições iniciais, descritas anteriormente, e do número de nós da malha, foram considerados nove casos descritos na Tabela 2. Verifica-se nesta tabela que a razão de convergência (ψ) e a ordem aparente (p_U) variam somente com o número de nós da malha. Portanto, não sofrem alteração com a mudança das condições iniciais ou da variável de interesse.

Tabela 1. Resultados numéricos para $\Lambda(L/2)$, Problema 1

Malha	n	ϕ_n	E_n	$\frac{U(\phi_n)}{E_n}$
11 nós	150	6,49999E-02	8,17368E-08	9,99999E-01
101 nós	15933	6,25249E-02	2,78104E-08	1,00030E+00
201 nós	63688	6,25062E-02	2,72793E-08	9,97596E-01

Tabela 2. Razão de convergência (ψ) e ordem aparente (p_U) para o Problema 1

N	Casos	ψ	p_U
11	1, 2, 3	1,10557	0,04358
101	4, 5, 6	1,00098	0,00042
201	7, 8, 9	1,00024	0,00010

Com os resultados do Problema 1 verificou-se dois tipos de comportamento. Nas iterações iniciais, as estimativas de erro são inaccuradas e sem confiabilidade, de forma geral. Após estas iterações iniciais, as estimativas são cada vez mais acuradas. Pode-se observar na Fig. 2, por exemplo, que existe discordância ente incerteza e erro somente nas iterações iniciais. Foi constatado que nestas iterações a razão de convergência apresenta valores menores que um ($\psi < 1$), o que torna inadequada a aplicação do *estimador empírico*, conforme Marchi e Silva (2002).

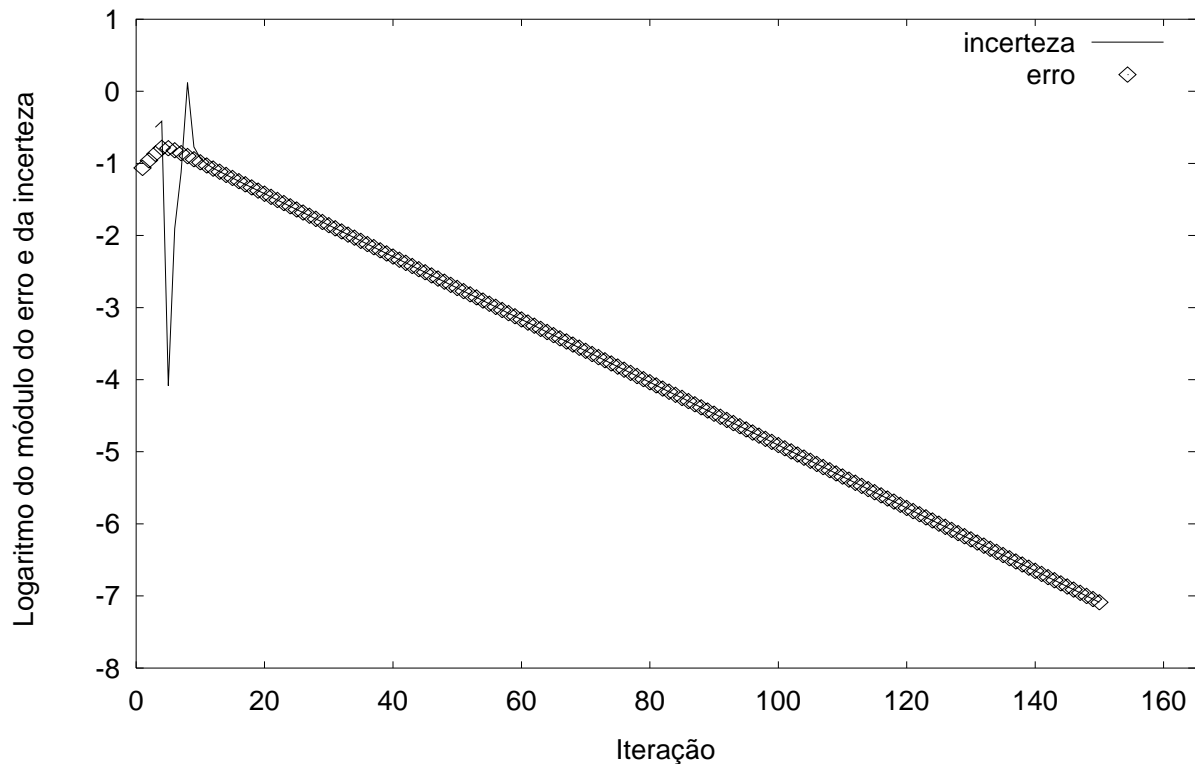


Figura 2 – Erro (E) e incerteza (U) para $\Lambda(1/2)$, Problema 1, malha de 11 nós.

4.2 Equação de Laplace Bidimensional

O problema 2 consiste na difusão de calor bidimensional, em regime permanente, sem geração de calor e com condutividade térmica constante (Incropera e DeWitt, 1992), o que resulta na equação de Laplace, dada por

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2} = 0 \quad (14)$$

com condições de contorno de Dirichlet, dadas por: $\Lambda(0, y) = \Lambda(x, 0) = 0$, $\Lambda(L, y) = y$, $\Lambda(x, L) = x$; e um domínio quadrado de lado unitário ($L=1$). O modelo numérico é constituído pelo método de diferenças finitas (Tannehill et al., 1997), com aproximações numéricas de 2ª ordem através de diferença central e malhas uniformes. Neste caso, não existe erro de discretização (Ferziger e Peric, 1996), o que facilita a análise dos erros de iteração. Neste Problema as variáveis de interesse são: a temperatura no centro do domínio, isto é, $\Lambda(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; e a temperatura média no domínio (Λ_m).

As soluções numéricas foram obtidas para três malhas diferentes, conforme a Tabela 3. O sistema de equações resultante da discretização do modelo matemático foi resolvido através do método iterativo de Gauss-Seidel. Também utilizou-se uma técnica *multigrid* para problemas lineares, cujo algoritmo é descrito nas páginas 169 e 170 do livro de Tannehill *et al.* (1997). Em todos os casos, empregou-se condição inicial nula. O critério de convergência adotado foi a queda mínima de sete ordens de grandeza na magnitude do erro de iteração para as duas variáveis de interesse.

Na Tabela 3 são apresentadas algumas soluções numéricas do Problema 2, Eq. (14), calculadas para a temperatura no centro do domínio, cuja solução exata é $\Phi = 2,50000E-01$, na iteração em que é satisfeito o critério de convergência em cada caso. Sem a utilização da técnica *multigrid*, constatou-se comportamento semelhante ao apresentado no Problema 1, ou seja, existe discordância entre incerteza e erro somente nas iterações iniciais, conforme a Fig. 3. Nesta figura também mostra-se o comportamento apresentado por outros estimadores de erro de iteração disponíveis na literatura, estimador de Ferziger e Peric (1999) e estimador de Roy e Blottner (2001). Todos os estimadores apresentaram resultados semelhantes. Após estas iterações iniciais, as estimativas são cada vez mais acuradas.

Tabela 3. Resultados numéricos para $\Lambda(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, Problema 2

Malha	Método	n	ϕ_n	$E(\phi_n)$	$\frac{U(\phi_n)}{E(\phi_n)}$
17 × 17	Sem <i>multigrid</i>	397	2,49999E-01	9,80008E-08	1,00000E+00
33 × 33	Sem <i>multigrid</i>	1596	2,49999E-01	9,92262E-08	1,00002E+00
65 × 65	Sem <i>multigrid</i>	6331	2,49999E-01	9,98782E-08	1,00135E+00
17 × 17	Com <i>multigrid</i>	22	2,50000E-01	-5,34994E-08	1,71884E+00
33 × 33	Com <i>multigrid</i>	29	2,50000E-01	-7,68770E-08	2,77543E+00
65 × 65	Com <i>multigrid</i>	35	2,49999E-01	2,70002E-08	1,54320E+01

Com a utilização da técnica *multigrid*, observou-se que o erro de iteração não apresenta comportamento monotônico. Como resultado, o *estimador empírico* torna-se ineficiente em qualquer iteração, apresentando acurácia baixa e não sendo confiável. Isso pode ser visto na Fig. 4. Também pode-se notar nesta figura o comportamento apresentado pelos demais estimadores. Todos são inadequados quando se usa a técnica *multigrid*.

Pode-se notar na Tabela 4, que a razão de convergência (ψ) e a ordem aparente (p_U) variam com o número de nós da malha. Para a malha mais fina (65 × 65) existe uma pequena diferença entre a razão de convergência de $\Lambda(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e Λ_m , provavelmente devido ao efeito dos erros de arredondamento. Apesar de que segundo Roache (1998), diferentes variáveis envolvidas em um mesmo processo iterativo podem apresentar diferentes taxas de convergência.

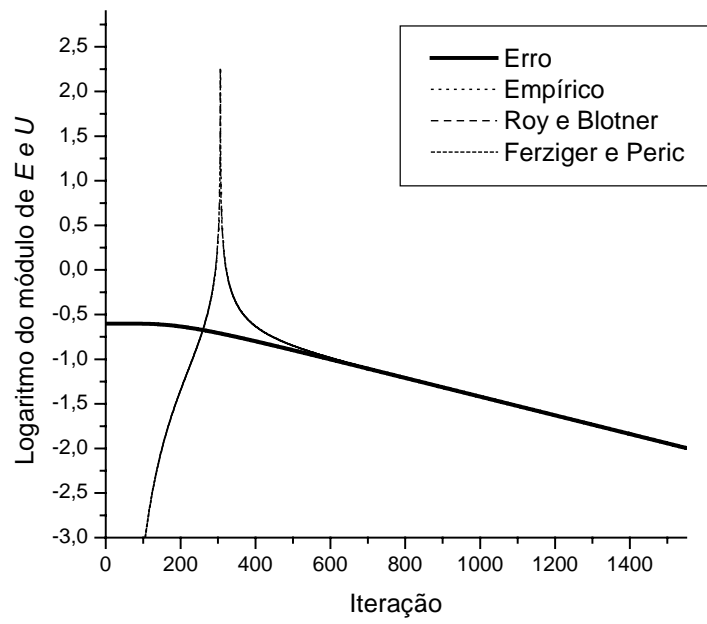


Figura 3 – Erro (E) e incerteza (U) para $\Lambda(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, Problema 2, malha de 65×65 nós, sem *multigrid*.

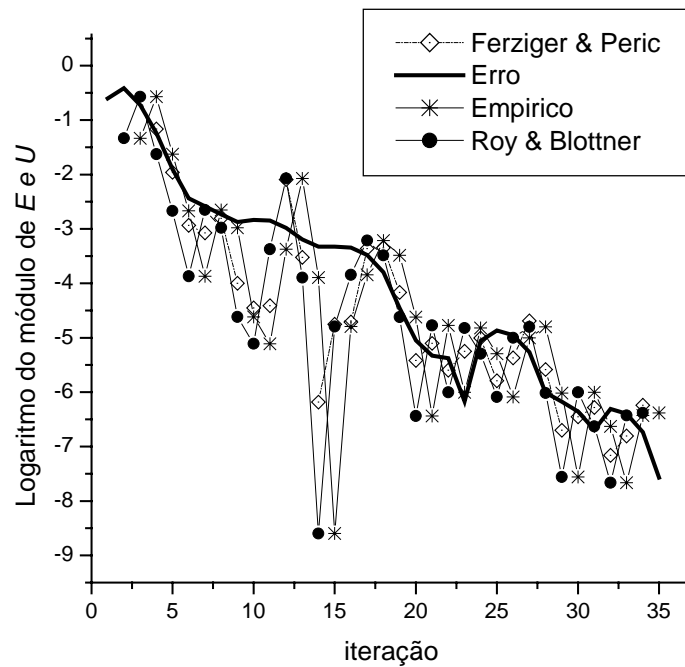


Figura 4 – Erro (E) e incerteza (U) para $\Lambda(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, Problema 2, malha de 65×65 nós, com *multigrid*.

Tabela 4. Razão de convergência (ψ) e ordem aparente (p_U) para o Problema 2

Malha	Variável	ψ	p_U
17 × 17	$\Lambda(L_1/2, L_2/2)$	1,03956	0,01685
17 × 17	Λ_m	1,03956	0,01685
33 × 33	$\Lambda(L_1/2, L_2/2)$	1,00970	0,00419
33 × 33	Λ_m	1,00970	0,00419
65 × 65	$\Lambda(L_1/2, L_2/2)$	1,00241	0,00104
65 × 65	Λ_m	1,00238	0,00103

4.3 Equações de Navier-Stokes Bidimensionais

O Problema 3 consiste no escoamento bidimensional, em regime permanente, de um fluido incompressível dentro de uma cavidade quadrada, de lado unitário, cuja tampa se movimentava, fazendo o fluido em seu interior escoar. Este problema é modelado pelas equações de Navier-Stokes e descrito na seção 2 do trabalho de Shih *et al.* (1989). O modelo matemático envolve as equações de conservação da massa, e da quantidade de movimento linear nas direções x e y , com viscosidade e massa específica constantes. Acrescenta-se um termo fonte com o intuito de obter-se uma solução analítica do problema para suas três incógnitas: duas componentes de velocidade (u, v) e a pressão (p). A solução analítica deste problema é dada por Shih *et al.* (1989).

A solução numérica deste problema é obtida através do método de volumes finitos (Maliska, 1995), com aproximações numéricas de 2^a ordem através de diferença central, malha uniforme e arranjo co-localizado de variáveis. Para resolver os sistemas de equações resultantes da discretização do modelo matemático utilizou-se o método iterativo MSI (Schneider & Zedan, 1981). Neste caso existe erro de discretização. Portanto, para análise dos erros de iteração não são consideradas as soluções analíticas. Considera-se, então, a solução iterativa “exata” no limite do “erro de máquina”, ou seja, a solução numérica obtida ao longo do processo iterativo quando não se tem mais erros de iteração, restando apenas os erros de arredondamento.

Para análise do desempenho do *estimador empírico* foram consideradas quatro variáveis de interesse: os resultados numéricos de u , v e p no centro do domínio, isto é, $u(1/2, 1/2)$, $v(1/2, 1/2)$, $p(1/2, 1/2)$; e o fluxo de massa que circula na cavidade (μ). As soluções numéricas foram obtidas para malhas com 16x16, 32x32 e 64x64 volumes de controle. Analogamente aos Problemas 1 e 2, para todas as malhas e cada variável de interesse, foram analisados o erro de iteração (E), a estimativa do erro de iteração (U), a razão de convergência (ψ), a ordem aparente (p_U) e a efetividade (θ). Na Tabela 5 apresenta-se o número de iterações (n) que foi necessário para satisfazer o critério de convergência adotado: queda mínima de sete ordens de grandeza na magnitude do resíduo (R^*) adimensionalizado das equações discretizadas (Kim *et al.*, 1998).

Na Tabela 5, pode-se notar que em todas as malhas consideradas, para as variáveis $u(1/2, 1/2)$ e $p(1/2, 1/2)$, o *estimador empírico* apresentou resultados confiáveis, isto é, $\theta > 1$, e

acurados ao final do processo iterativo. Na Fig. 5 mostra-se o comportamento obtido para o erro numérico e para a incerteza do fluxo de massa que circula na cavidade (μ) e malha 64×64 volumes de controle. Para as demais variáveis e casos o comportamento é semelhante. Observa-se na Tabela 6 que para este problema a razão de convergência (ψ) e a ordem aparente (p_U) variam com o número de volumes da malha, o que também ocorreu nos Problemas 1 e 2.

Tabela 5. Resultados numéricos para $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e $p(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, Problema 3

Variável	Malha	n	ϕ_n	E_n	$\frac{U(\phi_n)}{E_n}$
u	16×16	728	-2,43644E-01	-9,36800E-11	1,00418E+00
u	32×32	1171	-2,48363E-01	-1,11803E-09	1,00027E+00
u	64×64	2160	-2,49587E-01	-2,18090E-10	1,04103E+00
p	16×16	728	1,54559E+00	-7,18439E-10	1,01397E+00
p	32×32	1171	1,54543E+00	2,13074E-09	1,02625E+00
p	64×64	2160	1,54533E+00	1,08271E-09	1,09693E+00

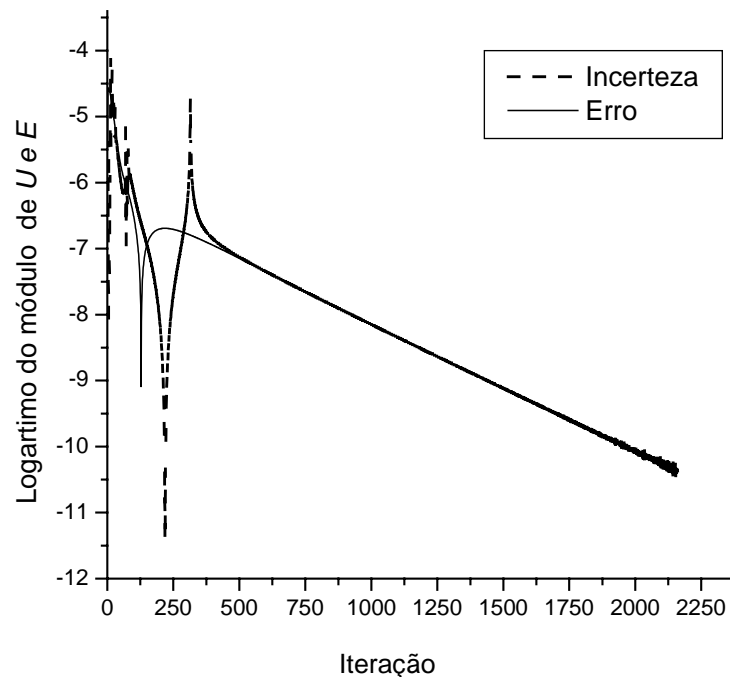


Figura 5 – Erro (E) e incerteza (U) para μ , Problema 3, malha 64×64 .

Tabela 6. Razão de convergência (ψ) e ordem aparente (p_U) para o problema 3

Malha	Variável	ψ	p_U
16×16	$u^{(L_1/2, L_2/2)}$	1,03612E+00	1,54100E-02
16×16	$v^{(L_1/2, L_2/2)}$	1,01655E+00	7,13009E-03
16×16	$p^{(L_1/2, L_2/2)}$	1,01580E+00	6,80914E-03
16×16	μ	1,01439E+00	6,20720E-03
32×32	$u^{(L_1/2, L_2/2)}$	1,00881E+00	3,81185E-03
32×32	$v^{(L_1/2, L_2/2)}$	1,00948E+00	4,09874E-03
32×32	$p^{(L_1/2, L_2/2)}$	1,00928E+00	4,01360E-03
32×32	μ	1,00881E+00	3,81259E-03
64×64	$u^{(L_1/2, L_2/2)}$	1,00459E+00	1,98928E-03
64×64	$v^{(L_1/2, L_2/2)}$	1,00505E+00	2,18967E-03
64×64	$p^{(L_1/2, L_2/2)}$	1,00446E+00	1,93694E-03
64×64	μ	1,00460E+00	1,99342E-03

5. CONCLUSÃO

Analisou-se o desempenho do *estimador empírico* para prever o erro de iteração em simulações numéricas, onde o erro de iteração foi definido como a diferença entre a solução numérica exata do sistema de equações e a solução numérica em uma determinada iteração. Este estimador fornece uma estimativa do erro de iteração com base na taxa de convergência da variável de interesse, conforme a teoria apresentada.

Através da razão entre incerteza e erro, analisou-se o desempenho do *estimador empírico* quanto à sua acurácia e confiabilidade. Nos testes com a equação de Poisson, Problema 1, verificou-se dois tipos de comportamento. Nas iterações iniciais, no máximo 13% do número total de iterações, as estimativas de erro (incertezas) são inacuradas e sem confiabilidade. Após estas iterações iniciais, as estimativas são cada vez mais acuradas.

Nos testes realizados com a equação de Laplace, Problema 2, sem a utilização da técnica *multigrid* constatou-se comportamento semelhante ao obtido no Problema 1, ou seja, existe discordância entre incerteza e erro somente nas iterações iniciais. No entanto, nestes testes as iterações iniciais correspondem a, no máximo, 9% do número total de iterações. Para os testes envolvendo a aplicação da técnica *multigrid* o *estimador empírico* não se mostrou eficiente pois apresentou acurácia baixa e resultados pouco confiáveis.

Ao se analisar o comportamento do erro de iteração envolvido na solução numérica das equações de Navier-Stokes, Problema 3, constatou-se que o próprio erro de iteração apresentou oscilações nas iterações iniciais, além da incerteza. Isso não havia ocorrido nos dois problemas anteriores. Quanto à eficiência do estimador de erro, obteve-se resultados semelhantes aos Problemas 1 e 2, embora, no Problema 3, as iterações iniciais correspondem a no máximo 17 % do número total de iterações envolvidas no cálculo.

De maneira geral, nos testes numéricos realizados o desempenho do *estimador empírico* pode ser dividido em três intervalos: (1) nas iterações iniciais a acurácia é baixa, em geral; (2)

quando o número de iterações é muito elevado, os erros de arredondamento afetam a acurácia, que mesmo assim é boa; e (3) no intervalo entre esses dois extremos, a acurácia tende a ser grande à medida que se aumenta o número de iterações. Não se recomenda usar o *estimador empírico* em processos iterativos que empreguem métodos *multigrid*. Isso se deve à constatação que o erro de iteração não apresenta comportamento monotônico. Constatou-se que existe equivalência entre o *estimador empírico* e alguns estimadores de erro de iteração disponíveis na literatura: estimador de Ferziger e Peric (1999) e estimador de Roy e Blottner (2001).

Agradecimentos

O primeiro autor agradece à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE), da Universidade Federal do Paraná (UFPR), pelo apoio recebido no desenvolvimento deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- Celik, I. & Zhang, W. M., 1995, Calculation of numerical uncertainty using Richardson extrapolation: application to some simple turbulent flow calculations, *ASME Journal of Fluids of Fluids Engineering*, vol. 117, pp. 439-445.
- Chapra, S. C & Canale, R. P., 1994, *Introduction to Computing for Engineers*, n. 2, McGraw-Hill, New York.
- Demuren, A. O. & Wilson, R. V., 1994, Estimating uncertainty in computations of two-dimensional separated flows, *ASME Journal of Fluids Engineering*, vol. 116, pp. 216-220.
- Ferziger, J. H. & Peric, M., 1996, Further discussion of numerical errors in CFD, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 23, pp.1263-1274.
- Ferziger, J. H. & Peric, M., 1999, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, 2nd ed., Springer, Berlin.
- Incropera, F. P. & DeWitt, D. P., 1992, *Fundamentos de Transferência de Calor e Massa*. 3^a ed., Guanabara Koogan, Rio de Janeiro.
- Kim, N., Anand, N. K. and Rhode, D. L., 1998, A study on convergence criteria for a simple-based finite-volume algorithm, *Numerical Heat Transfer*, vol. 34, pp. 401 – 417.
- Kreyszig, E., 1999, *Advanced Engineering Mathematics*, 8nd, John Wiley & Sons, New York.
- Maliska, C. R., 1995, *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*, LTC, Rio de Janeiro.
- Marchi, C. H., 2001, *Verificação de Soluções Numéricas Unidimensionais em Dinâmica dos Fluidos*, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil.
- Marchi, C. H. & Silva, A. F. C., 2002, Unidimensional numerical solution error estimation for convergent apparent order, *Numerical Heat Transfer, Part B*, vol. 42, pp. 167-188.
- Martins, M. A., 2002, *Estimativa de Erros de Iteração em Dinâmica dos Fluidos Computacional*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil.
- Oberkampf, W. L. & Blottner, F. G., Issues in computational fluid dynamics code verification and validation, *AIAA Journal*, vol. 36, n. 5, pp. 687-695.
- Roache, P. J., 1998, *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa, Albuquerque.

- Roy, C. J. & Blottner, J. R., 2001, Assessment of one- and two-equation turbulence models for hypersonic transitional flows, *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 38, n. 5, pp. 699-710.
- Schneider, G.E. & Zedan, M., 1981, A Modified strongly implicit procedure for numerical solution of field problems, *Numerical Heat Transfer*, vol. 4, pp. 1-19.
- Shih, T. M., Tan, C. H. and Hwang, B. C., 1989, Effects of grid staggering on numerical schemes, *International Journal for numerical methods in fluids*, vol. 9, pp. 193-212.
- Tannehill, J. C., Anderson, D. A. and Pletcher, R. H., 1997, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Taylor & Francis, Washington, DC.
- Zhu, J. Z. & Zienkiewicz, O. C., 1990, Superconvergence recovery technique and a posteriori error estimates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 30, pp. 1321-1339.