

MÚLTIPLAS EXTRAPOLAÇÕES DE RICHARDSON PARA REDUZIR E ESTIMAR O ERRO DE DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE 2D

Carlos Henrique Marchi

marchi@ufpr.br

Universidade Federal do Paraná (UFPR)
Departamento de Engenharia Mecânica
Curitiba, PR, Brasil

Leandro Alberto Novak

leandron@sanepar.com.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Paraná (UFPR)
Curitiba, PR, Brasil

Cosmo D. Santiago

cosmo@unibrasil.com.br

Faculdades do Brasil – Unibrasil, Curitiba, PR, Brasil

Resumo. *O objetivo deste trabalho é avaliar, aperfeiçoar e generalizar o uso de Múltiplas Extrapolações de Richardson (MER) para reduzir e estimar o erro de discretização de soluções numéricas. É considerado um problema de condução de calor governado pela equação de Laplace bidimensional (2D), que é resolvida através do método de diferenças finitas. O domínio de cálculo é quadrado e discretizado com malhas uniformes. São empregadas aproximações de segunda ordem de acurácia, condições de contorno de Dirichlet, solver MSI com multigrid, malhas com até milhões de nós, precisão dupla e quádrupla, número de iterações suficiente para atingir o erro de arredondamento de máquina e até doze extrapolações de Richardson. São obtidos resultados para as seguintes variáveis: temperatura no centro do domínio e em outro ponto; média do campo de temperaturas; taxa de transferência de calor em dois contornos; e norma do erro de discretização. Mostra-se que: (1) MER reduz significativamente o erro de discretização; (2) o estimador de erro de Richardson funciona para resultados numéricos obtidos com MER; e (3) resultados mais efetivos com MER são obtidos usando precisão quádrupla nos cálculos, maior número de extrapolações, maior número de malhas e ordens corretas do erro.*

Palavras-chave: *erro numérico, estimativa de erro, diferenças finitas, CFD, ordens de erro, Verificação.*

1. INTRODUÇÃO

A técnica de múltiplas extrapolações de Richardson (MER) foi criada há muito tempo (Richardson, 1910; e Richardson e Gaunt, 1927) com o objetivo de reduzir o erro de discretização (Roache, 1998) de soluções numéricas. Para usar MER é necessário ter a solução numérica, da variável de interesse, em três ou mais malhas com número de nós diferentes. MER se baseia na extrapolação de Richardson, que é mais usada como um estimador do erro de discretização, ou é a base para outros estimadores, como o GCI (Grid Convergence Index) de Roache (1994).

Ainda hoje, MER é muito pouco empregado. Apesar disso, alguns trabalhos (Benjamin e Denny, 1979; Schreiber e Keller, 1983; e Erturk *et al.*, 2005) obtiveram bons resultados com MER para diminuir o erro de discretização em problemas de CFD (*Computational Fluid Dynamics*). Porém, estes autores utilizaram este procedimento com no máximo quatro malhas, resultando em até três extrapolações para a malha mais fina usada. Em nenhum destes trabalhos foi proposto um estimador de erro associado ao uso de MER. Mas, a estimativa quantitativa do erro numérico é um dever dos analistas de CFD (Oberkampf e Trucano, 2002).

O objetivo deste trabalho é avaliar, aperfeiçoar e generalizar o uso de múltiplas extrapolações de Richardson (MER) para reduzir e estimar o erro de discretização. Pretende-se mostrar que o uso de MER é extremamente efetivo na redução do erro. Isso significa que MER pode ser usado de duas formas. A primeira, para obter o mesmo erro de discretização com uma malha que tem muito menos nós, resultando na redução do esforço computacional (memória e tempo de CPU). A segunda, para reduzir o erro de discretização em uma malha com o mesmo número de nós, resultando em erros muito menores e maior confiabilidade da solução; esta forma é indicada especialmente para obter *benchmarks*.

É considerado neste trabalho um problema de condução de calor modelado pela equação de Laplace bidimensional (2D), que é resolvida através do método de diferenças finitas. O domínio de cálculo é quadrado e discretizado com malhas uniformes. São empregadas aproximações de segunda ordem de acurácia, condições de contorno de Dirichlet, solver MSI com multigrid, malhas com até milhões de nós, precisão dupla e quádrupla, número de iterações suficiente para atingir o erro de arredondamento de máquina e até doze extrapolações de Richardson. São obtidos resultados para as seguintes variáveis: temperatura no centro do domínio e em outro ponto; média do campo de temperaturas; taxa de transferência de calor em dois contornos; e norma do erro de discretização.

2. MODELO MATEMÁTICO

O modelo matemático considerado neste trabalho é a equação de Laplace bidimensional com condições de contorno de Dirichlet, definida por

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, & 0 < x, y < 1, \\ T(x,1) = \text{sen}(\pi x), & T(x,0) = T(0, y) = T(1, y) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

onde x e y são as direções coordenadas e T representa a temperatura. Fisicamente, esta equação pode modelar um problema de condução de calor em regime permanente, com propriedades constantes, em uma placa plana (Ozisik, 1993).

As variáveis de interesse neste trabalho são: (1) a temperatura no centro do domínio, isto é, em $x=y=1/2$, representada por T_c ; (2) a temperatura em $x=1/2$ e $y=3/4$, representada por T_2 ; (3)

a média do campo de temperaturas (Tm); (4) a média da norma l_1 do erro de discretização (L); e as taxas de transferência de calor nos contornos de $x=1$ (5) e $y=1$ (6), representadas respectivamente por Qe e Qn .

A variável L é definida na seção 3. As variáveis Tm , Qe e Qn são definidas matematicamente por

$$Tm = \int_0^1 \int_0^1 T(x, y) dx dy, \quad (2)$$

$$Qe = -k \int_0^1 \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=1} dy, \quad (3)$$

$$Qn = -k \int_0^1 \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=1} dx, \quad (4)$$

onde k é a condutividade térmica do material, com valor unitário.

A solução analítica da Eq. (1) é

$$T(x, y) = \text{sen}(\pi x) \frac{\text{senh}(\pi y)}{\text{senh}(\pi)}. \quad (5)$$

3. MODELO NUMÉRICO

3.1 Solução numérica sem extrapolação

A Eq. (1) é discretizada com o método de diferenças finitas, malhas uniformes e diferença central (CDS – Central Differencing Scheme) (Tannehill et al., 1997), resultando em

$$\frac{(T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j})}{h^2} + \frac{(T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1})}{h^2} = 0, \quad (6)$$

onde i e j representam cada nó da malha, e h é a distância entre dois nós consecutivos da malha; neste trabalho, h também será denominado de tamanho da malha.

Escrevendo-se a Eq. (6) para todos os N nós da malha, obtém-se um sistema de equações algébricas que é resolvido através do *solver Modified Strongly Implicit Method* (MSI) (Schneider e Zedan, 1981). Para acelerar a convergência, utiliza-se o método *multigrid* geométrico (Wesseling, 1992), com o esquema *Full Approximation Scheme* (FAS), ciclo V, restrição por injeção, prolongação por interpolação bilinear e razão de engrossamento dois.

Utilizou-se o valor nulo como estimativa inicial da solução de cada problema. O número de vezes que o ciclo V do método *multigrid* é repetido é denominado de iterações externas. O processo iterativo foi levado até ser atingido o erro de arredondamento de máquina para a solução numérica das variáveis Tc e Tm .

Foram implementados dois programas computacionais em linguagem Fortran 95, versão 9.1 da Intel, um usando precisão dupla (Real*8) e o outro, precisão quádrupla (Real*16). As simulações foram realizadas em um microcomputador com processador Intel (Xeon Quad Core X5355 2,66 GHz), 16 GB RAM e sistema operacional Windows xp 64 bits.

A solução numérica das variáveis Tc e $T2$ é obtida diretamente dos respectivos nós da malha após a obtenção da solução numérica da Eq. (6); isso ocorre porque sempre são usadas malhas com número ímpar de nós. A solução numérica da Eq. (2), para Tm , é obtida através de integração numérica pela regra do trapézio (Kreyszig, 1999). A solução numérica das Eqs. (3) e (4), para Qe e Qn , é obtida através de integração numérica pela regra do trapézio antecedida pelo uso do esquema UDS (*Upstream Differencing Scheme*) (Tannehill *et al.*, 1997) de 2ª ordem de acurácia em cada nó do contorno.

A média da norma l_1 do erro de discretização é definida matematicamente por

$$L = \frac{\sum_{P=1}^N |T_P^{\text{analítico}} - T_P^{\text{numérico}}|}{N}, \quad (7)$$

onde P representa cada um dos N nós i,j da malha.

3.2 Solução numérica com extrapolação

A solução numérica (ϕ) para qualquer variável de interesse na malha g , com m extrapolações de Richardson, é dada por

$$\phi_{g,m} = \phi_{g,m-1} + \frac{\phi_{g,m-1} - \phi_{g-1,m-1}}{r^{p_m} - 1}. \quad (8)$$

A Eq. (8) é válida para $m = 1$ a $M-1$, e $g = m+1$ a M ; onde m é o número de extrapolações; M é o número de malhas diferentes sobre as quais foram obtidas soluções numéricas (ϕ) sem qualquer extrapolação, conforme descrito na subseção anterior; g representa cada uma das malhas; $g=1$ é a malha mais grossa do conjunto de malhas, isto é, aquela na qual a distância h entre dois nós consecutivos tem o maior valor; $g=M$ é a malha mais fina do conjunto de malhas, isto é, aquela na qual a distância h entre dois nós consecutivos tem o menor valor; $r=h_{g-1}/h_g$ é a razão de refino de malha; para $m = 0$ tem-se a solução numérica (ϕ) sem qualquer extrapolação, obtida conforme descrito na subseção anterior; e p_m são as ordens verdadeiras (Marchi e Silva, 2002) do erro de discretização, obtidas através do procedimento explicado na próxima seção.

4. ERRO NUMÉRICO E SUA ESTIMATIVA

O erro numérico (E) da solução numérica (ϕ) de uma variável de interesse pode ser definido por

$$E(\phi) = \Phi - \phi, \quad (9)$$

onde Φ é a solução analítica exata da variável de interesse. O erro numérico é causado por cinco fontes (Versteeg e Malalasekera, 2007): erros de discretização, de iteração, de arredondamento, de programação e de usuário.

Quando o erro numérico é causado apenas pelo erro de discretização, tem-se (Marchi e Silva, 2002)

$$E(\phi) = C_0 h^{p_0} + C_1 h^{p_1} + C_2 h^{p_2} + \dots, \quad (10)$$

onde C_0, C_1, C_2, \dots são coeficientes que independem de h ; p_0, p_1, p_2, \dots são as ordens verdadeiras de $E(\phi)$, que são números inteiros e positivos, e seu conjunto é representado por p_V ; e p_0 é a ordem assintótica ou de acurácia de $E(\phi)$. Os valores de p_V podem ser obtidos *a priori* com um procedimento que emprega a série de Taylor (Tannehill et al., 1997).

4.1 Obtenção de ordens do erro

Os valores de p_V , obtidos *a priori*, podem ser confirmados *a posteriori* com o conceito de ordem efetiva (p_E) (Marchi, 2001) do erro de discretização, que generalizado para múltiplas extrapolações de Richardson é dado por

$$(p_E)_{g,m} = \frac{\log \left[\frac{E(\phi_{g-1,m})}{E(\phi_{g,m})} \right]}{\log(r)}. \quad (11)$$

A Eq. (11) é válida para $m = 0$ a $M-2$, e $g = m+2$ a M . As demais definições da subseção 3.2 se aplicam aqui. Deve-se perceber que para obter cada valor de p_E é necessário conhecer o erro da solução numérica em duas malhas. Teoricamente, à medida que $h \rightarrow 0$, os valores de $(p_E)_{g,m}$ devem tender à ordem verdadeira (p_m) do respectivo nível de extrapolação (m) da Eq. (10).

Conforme a Eq. (11), p_E é função do erro da variável de interesse. Portanto, a Eq. (11) não pode ser aplicada em problemas cuja solução analítica é desconhecida. Além disso, a Eq. (11) não deve ser usada quando se quer confirmar *a posteriori* os valores de p_m sem utilizar soluções numéricas extrapoladas com os próprios valores de p_m . Neste último caso, pode-se usar o conceito de ordem aparente ou observada (p_U) (De Vahl Davis, 1983) do erro de discretização, que generalizado para múltiplas extrapolações de Richardson é dado por

$$(p_U)_{g,m} = \frac{\log \left[\frac{\theta_{g-1,m} - \theta_{g-2,m}}{\theta_{g,m} - \theta_{g-1,m}} \right]}{\log(r)}. \quad (12)$$

A Eq. (12) é válida para $m = 0$ a $\text{Int}((M-3)/2)$, $g = 2*m+3$ a M , e r constante entre as três malhas, onde $\text{Int}(a)$ representa a parte inteira de “a”. As demais definições da subseção 3.2 se aplicam aqui. Teoricamente, à medida que $h \rightarrow 0$, os valores de $(p_U)_{g,m}$ devem tender à ordem verdadeira (p_m) do respectivo nível de extrapolação (m) da Eq. (10).

Deve-se perceber que para obter cada valor de p_U na Eq. (12) são necessárias soluções numéricas relacionadas a três malhas. Estas soluções não são obtidas com a Eq. (8), por isso a mudança de variável; elas são obtidas por extrapolação através de

$$\theta_{g,m} = \theta_{g,m-1} + \frac{\theta_{g,m-1} - \theta_{g-1,m-1}}{r^{(p_U)_{g,m-1}} - 1}. \quad (13)$$

A Eq. (13) é válida para $m = 1$ a $\text{Int}((M-1)/2)$, e $g = 2*m+1$ a M . As demais definições da subseção 3.2 se aplicam aqui.

Neste trabalho, os valores de p_m usados na Eq. (8) são obtidos de $(p_U)_{g,m}$ da Eq. (12). Eles são números inteiros e positivos que são obtidos, para cada nível de extrapolação (m), da tendência dos valores de $(p_U)_{g,m}$ para $h \rightarrow 0$.

4.2 Estimador do erro

Uma estimativa (U) do erro de discretização da solução numérica (ϕ) para qualquer variável de interesse, na malha g , com m extrapolações de Richardson, é dada por

$$U(\phi_{g,m}) = \frac{\phi_{g,m} - \phi_{g-1,m}}{r^{p_m} - 1}. \quad (14)$$

A Eq. (14) é válida para $m = 0$ a $M-2$, e $g = m+2$ a M . As demais definições da subseção 3.2 se aplicam aqui. A Eq. (14) é uma generalização do estimador de Richardson (Roache, 1994).

Como será mostrado na próxima seção, com o uso de múltiplas extrapolações de Richardson, é comum se ter h no qual o erro de arredondamento é maior do que o erro de discretização. Nessa situação, a Eq. (14) não é acurada para prever o erro numérico. Analisando-se os resultados obtidos neste trabalho, verificou-se que a Eq. (14) pode ser empregada em cada h no qual são satisfeitas as seguintes condições:

$$1) \text{ A razão } \frac{d\phi_{g-1,m-1}}{d\phi_{g,m}} = \Delta_{g,m} = \frac{\phi_{g-1,m-1} - \phi_{g-2,m-1}}{\phi_{g,m} - \phi_{g-1,m}} \text{ deve ser crescente para } h \rightarrow 0. \quad (15)$$

$$2) \text{ A razão } \frac{\Delta_{g,m}}{\Delta_{g-1,m-1}} \text{ deve ser crescente para } h \rightarrow 0 \text{ e tender a } r^{p_1 - p_0}. \quad (16)$$

5. RESULTADOS

Usando precisão dupla (Real*8), foram obtidas soluções numéricas para as seis variáveis de interesse em malhas com 3x3, 5x5, 9x9, ... até 8193x8193 nós; portanto $M=13$ malhas. Já com precisão quádrupla (Real*16), a malha mais fina foi de 4097x4097 nós; portanto $M=12$ malhas. Para atingir o erro de arredondamento de máquina, foram necessários no máximo seis e doze iterações externas, respectivamente para precisão dupla e quádrupla; porém, foram realizadas 50 e 20 iterações externas respectivamente para precisão dupla e quádrupla. Para atingir o erro de arredondamento de máquina, o tempo máximo de CPU foi de 20 min e 1 h 5 min, respectivamente para precisão dupla e quádrupla. O número de algarismos significativos das soluções numéricas sem extrapolação é no mínimo de 12 e 30, respectivamente para precisão dupla e quádrupla; isto significa que nestes algarismos as soluções não têm erro de arredondamento.

Para medir o erro numérico com a Eq. (9), a solução analítica (Φ) de cada variável de interesse foi obtida através do software Maple com 30 e 64 algarismos, respectivamente para as soluções numéricas obtidas com precisão dupla e quádrupla.

5.1 Redução e estimativa do erro

Para as seis variáveis de interesse e precisão quádrupla, a Fig. 1 apresenta, em função do tamanho da malha (h): Eh, que é o erro da solução numérica de ϕ (sem qualquer extrapolação,

obtida conforme descrito na subseção 3.1 para $g = 1$ a M), calculado com a Eq. (9); U_h , que é a estimativa de E_h , calculado com a Eq. (14) para $m = 0$ e $g = 2$ a M ; E_{mer} , que é o erro da solução numérica de ϕ com extrapolação (obtida conforme descrito na subseção 3.2 através da Eq. (8) para $m = 1$ a $M-2$ e $g = m+2$), calculado com a Eq. (9); U_{mer} , que é a estimativa de E_{mer} , calculado com a Eq. (14) para $m = 1$ a $M-2$ e $g = m+2$; e $d\phi = \phi_{g,m} - \phi_{g-1,m}$, que é o numerador da Eq. (14) e está envolvido nas Eqs. (15) e (16), onde $\phi_{g,m}$ é obtido através da Eq. (8), conforme descrito na subseção 3.2, para $m = 1$ a $M-2$ e $g = m+2$.

Embora não seja possível ver na Fig. 1, U_h praticamente coincide com E_h em qualquer h e para todas as seis variáveis. É possível ver na Fig. 1 que U_{mer} em geral está próximo de E_{mer} em qualquer h e para todas as seis variáveis; isso só não ocorre nas malhas mais finas, com menor h , devido ao fato do erro de arredondamento ser maior que o erro de discretização. Portanto, a Eq. (14) é suficientemente acurada para prever o erro de discretização de soluções numéricas obtidas através da Eq. (8) com múltiplas extrapolações de Richardson.

Comparando-se as curvas de E_h com E_{mer} da Fig. 1 fica evidente que o uso de múltiplas extrapolações de Richardson (MER) é extremamente eficiente na redução do erro de discretização. As Tabelas 1 e 2 ajudam a mostrar isso para a variável T_c ; nestas duas tabelas, a letra “e” representa a notação científica para números. Para três malhas específicas, a Tabela 1 mostra o efeito da redução do erro de discretização, medido pela razão E_h/E_{mer} , ao se refinar a malha e aumentar o número de extrapolações (m). Por exemplo, na malha 33×33 , mesmo com apenas três extrapolações, o erro já é reduzido em mais de 100 mil vezes.

Para três níveis de erro específicos, a Tabela 2 mostra o efeito de MER na redução do número de nós de uma malha para obter o mesmo erro de discretização. Por exemplo, para o nível de erro $-9e-7$, sem MER é necessário usar a malha 513×513 para atingir este nível de erro, e a malha 17×17 com MER; portanto, com MER é necessária uma malha com 911 vezes menos nós. Esta razão entre o número de nós das malhas de E_h e E_{mer} indica o nível de redução do esforço computacional (memória e tempo de CPU) ao se usar MER em relação a não usá-lo.

Tabela 1. Redução do erro para malhas fixas

Malha	33x33	129x129	1025x1025
h	3,12e-2	7,81e-3	9,76e-4
E_h	-2,30e-4	-1,44e-5	-2,25e-7
E_{mer}	-1,61e-9	-1,21e-16	-9,83e-32
m para E_{mer}	3	5	8
E_h / E_{mer}	1,43e+5	1,19e+11	2,29e+24

Tabela 2. Redução de nós de malha para erros fixos

Nível do erro	-2e-4	-9e-7	-3e-9
E_h	-2.30e-4	-9,01e-7	-3,52e-9
E_{mer}	-1,56e-4	-8,67e-7	-1,61e-9
m para E_{mer}	1	2	3
Malha de E_h	33x33	513x513	8193x8193
Malha de E_{mer}	9x9	17x17	33x33
Razão entre o número de nós das malhas de E_h e E_{mer}	13,4	911	61639

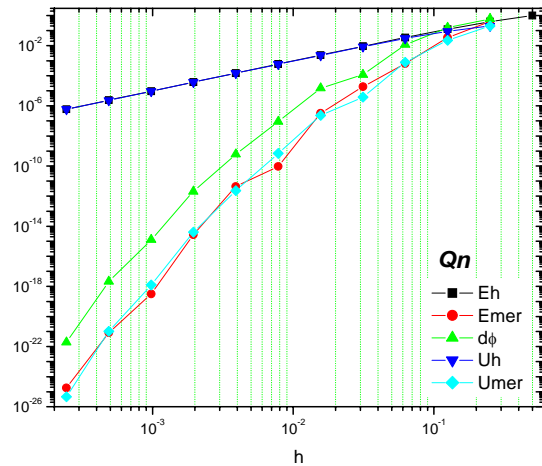
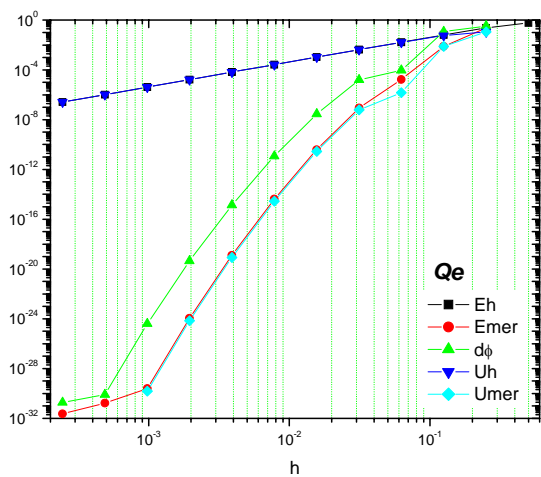
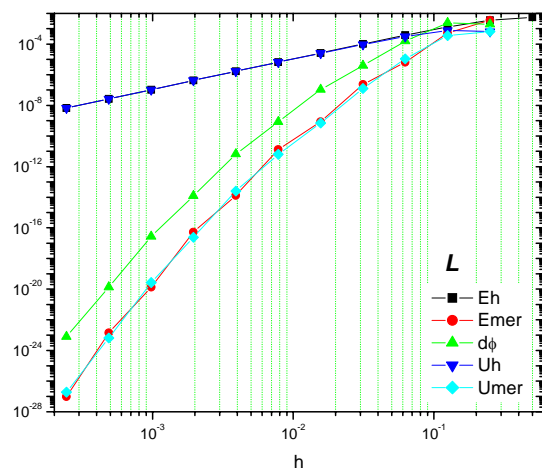
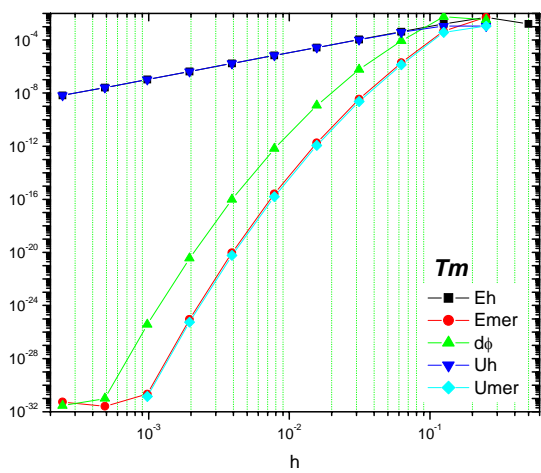
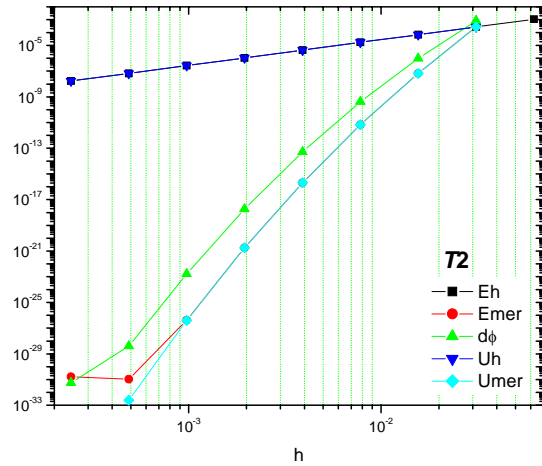
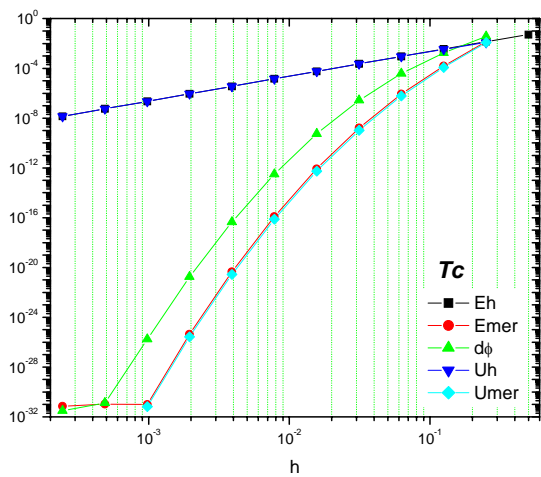


Figura 1 – Erros (E) e suas estimativas (U) versus tamanho da malha (h).

5.2 Efeito da precisão dos cálculos

Para as seis variáveis de interesse, a Fig. 2 apresenta, em função do tamanho da malha (h): $Eh(\text{real}^*8)$, que é o erro da solução numérica de ϕ (sem qualquer extrapolação, obtido com precisão dupla conforme descrito na subseção 3.1 para $g = 1$ a M), calculado com a Eq. (9); $Emer(\text{real}^*16)$, que é o erro da solução numérica de ϕ (com extrapolação, obtido com precisão quádrupla conforme descrito na subseção 3.2 através da Eq. (8) para $m = 1$ a $M-2$ e $g = m+2$), calculado com a Eq. (9); e $Emer(\text{real}^*8)$, que é o mesmo parâmetro anterior mas obtido com precisão dupla.

Pode-se observar na Fig. 2 que o erro de soluções numéricas obtidas com múltiplas extrapolações ($Emer$) é reduzido muito mais quando se usa precisão quádrupla do que dupla. Com precisão dupla, $Emer$ é reduzido até uma ordem que fica no intervalo de 10^{-16} a 10^{-14} quando o erro de arredondamento ($E\pi$) passa a ser a principal fonte do erro numérico. No caso de precisão quádrupla, para algumas variáveis, $Emer$ é reduzido até uma ordem que fica no intervalo de 10^{-32} a 10^{-31} quando $E\pi$ passa a ser a principal fonte do erro numérico; para outras variáveis, não se atinge $E\pi$ e $Emer$ é reduzido até uma ordem que fica no intervalo de 10^{-27} a 10^{-25} . Para precisão dupla, $E\pi$ é atingido em h da ordem de 10^{-2} e para precisão quádrupla, da ordem de 10^{-3} ou menor.

5.3 Efeito do número de extrapolações e malhas

Para a variável Tc obtida com precisão quádrupla, a Fig. 3 apresenta, em função do tamanho da malha (h), uma curva do erro da solução numérica de ϕ para cada número de extrapolações, partindo de $m = 0$ (sem extrapolação) até $m = M-1$, para $g = m+1$ a M , onde $M=12$ malhas.

Com a Fig.3, pode-se perceber o efeito do número de extrapolações sobre a redução do erro, bem como do número de malhas usadas. É evidente que quanto maior o número de extrapolações (m) e maior o número de malhas (g), maior é a redução do erro, até que se atinja o erro de arredondamento de máquina.

5.4 Verificação de ordens do erro

Para as seis variáveis de interesse, a Fig. 4 apresenta, em função do tamanho da malha (h), a ordem aparente $(p_U)_{g,m}$, calculada com a Eq. (12) para $m = 0, 1$ e 2 , $g = 2*m+3$ a M , onde $M=12$ malhas e $r=2$.

Teoricamente, à medida que $h \rightarrow 0$, os valores de $(p_U)_{g,m}$ devem tender à ordem verdadeira (p_m) do respectivo nível de extrapolação (m). Na Fig. 4, está claro que, para $h \rightarrow 0$, os valores de p_0, p_1 e p_2 são 2, 4 e 6 para Tc , $T2$, Tm e Qe , e 2, 3 e 4 para L e Qn .

Para a variável Tc obtida com precisão quádrupla, a Fig. 5 apresenta, em função do tamanho da malha (h), uma curva da ordem efetiva (p_E), calculada com a Eq. (11), para cada número de extrapolações, partindo de $m = 0$ (sem extrapolação) até $m = M-2$, para $g = m+2$ a M , onde $M=12$ malhas. Nas malhas com os menores valores de h , alguns pontos de p_E têm seu valor afetado pelo erro de arredondamento ($E\pi$), quando este passa a ser a principal fonte do erro numérico em vez do erro de discretização. Isso ocorre principalmente para $m \geq 5$. Mas está claro na Fig. 5 que, para $h \rightarrow 0$, os valores de $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$ e p_6 são respectivamente 2, 4, 6, 8, 10, 12 e 14 para a variável Tc .

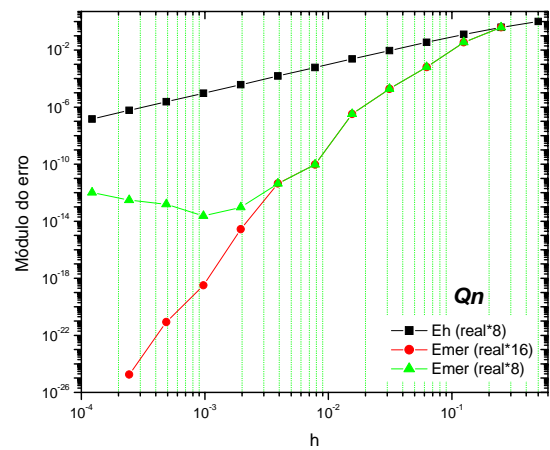
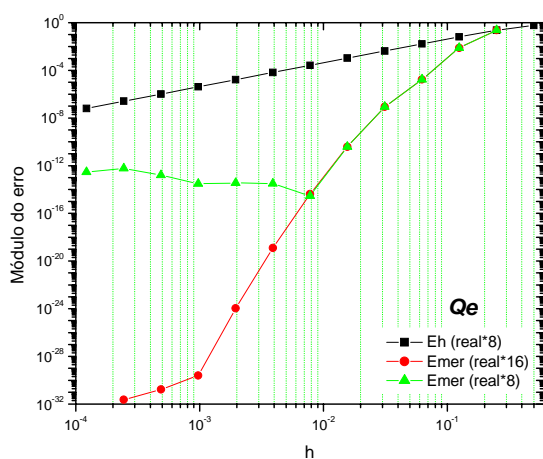
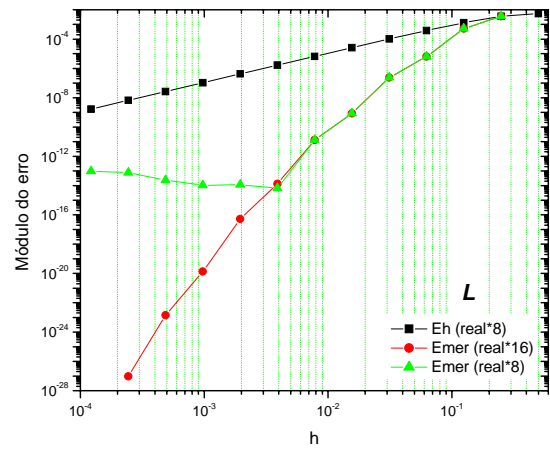
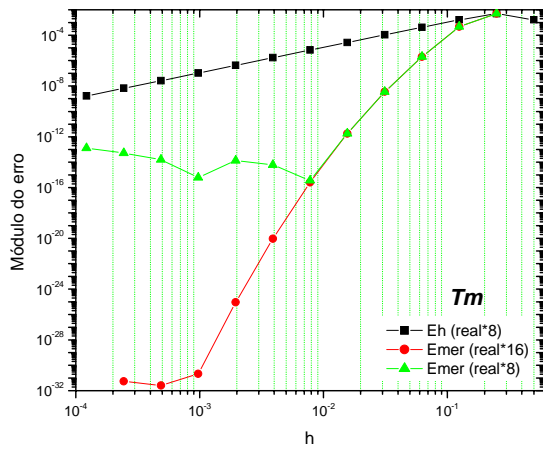
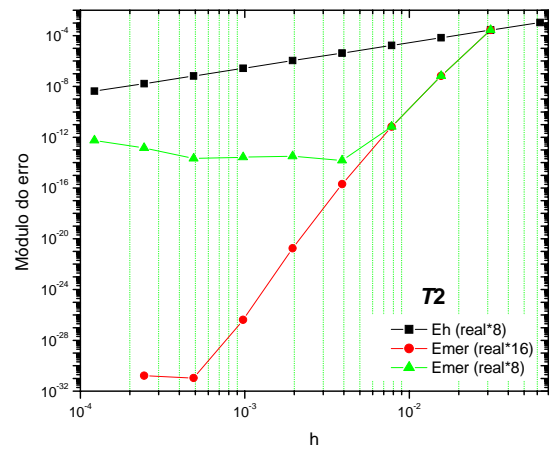
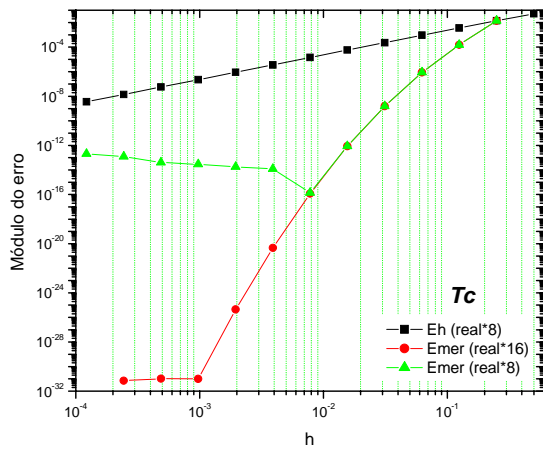


Figura 2 – Erros (E) versus tamanho da malha (h) com precisão dupla (real*8) e quádrupla (real*16).

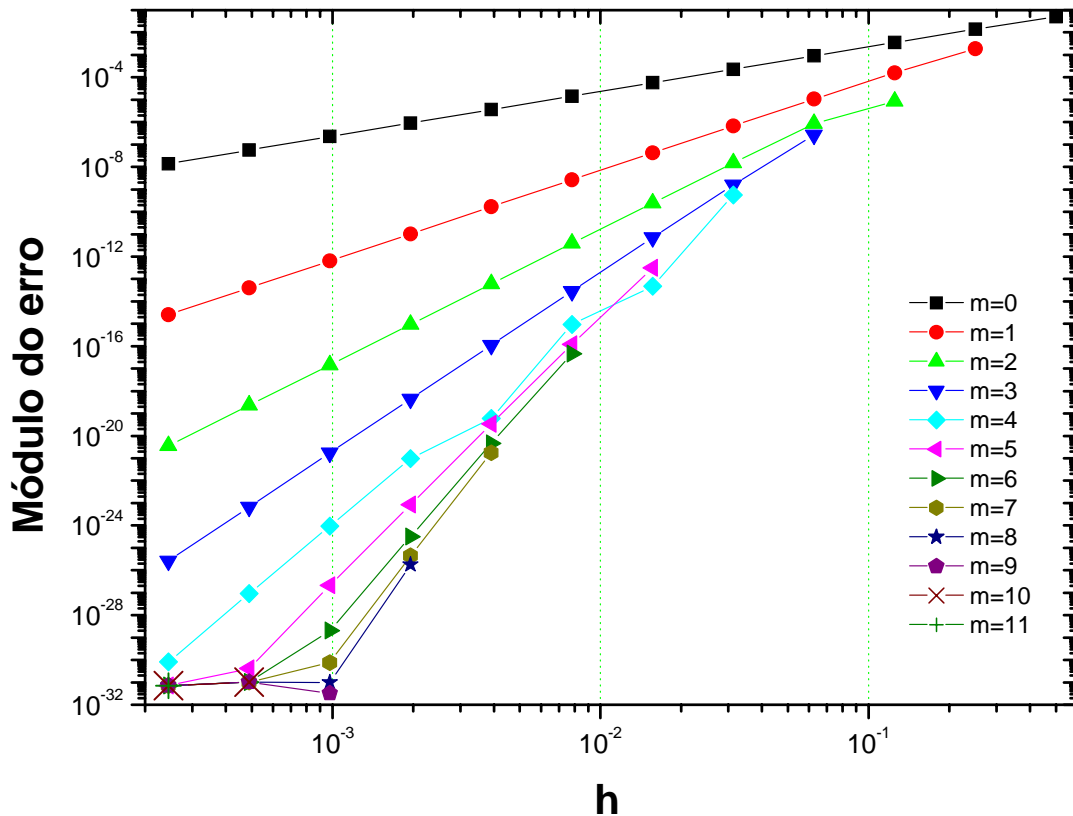


Figura 3 – Erro (E) versus tamanho da malha (h) e número de extrapolações (m).

6. CONCLUSÃO

Com a realização deste trabalho, verificou-se que:

- 1) A técnica de múltiplas extrapolações de Richardson (MER) é extremamente eficiente na redução do erro de discretização.
- 2) O estimador de erro de Richardson funciona para resultados numéricos obtidos com MER.
- 3) Resultados mais efetivos com MER são obtidos ao se usar precisão quádrupla nos cálculos, maior número de extrapolações, maior número de malhas e ordens corretas do erro.
- 4) O procedimento proposto na Eq. (12) para obter as ordens do erro, dos diversos níveis de extrapolação, funciona bem.
- 5) É correta a Eq. (8) proposta para obter a solução numérica de uma variável de interesse com qualquer número extrapolações de Richardson, bem como a Eq. (14) para estimar o seu erro.
- 6) O erro de arredondamento pode ser um limitador do uso de MER na redução do erro numérico.

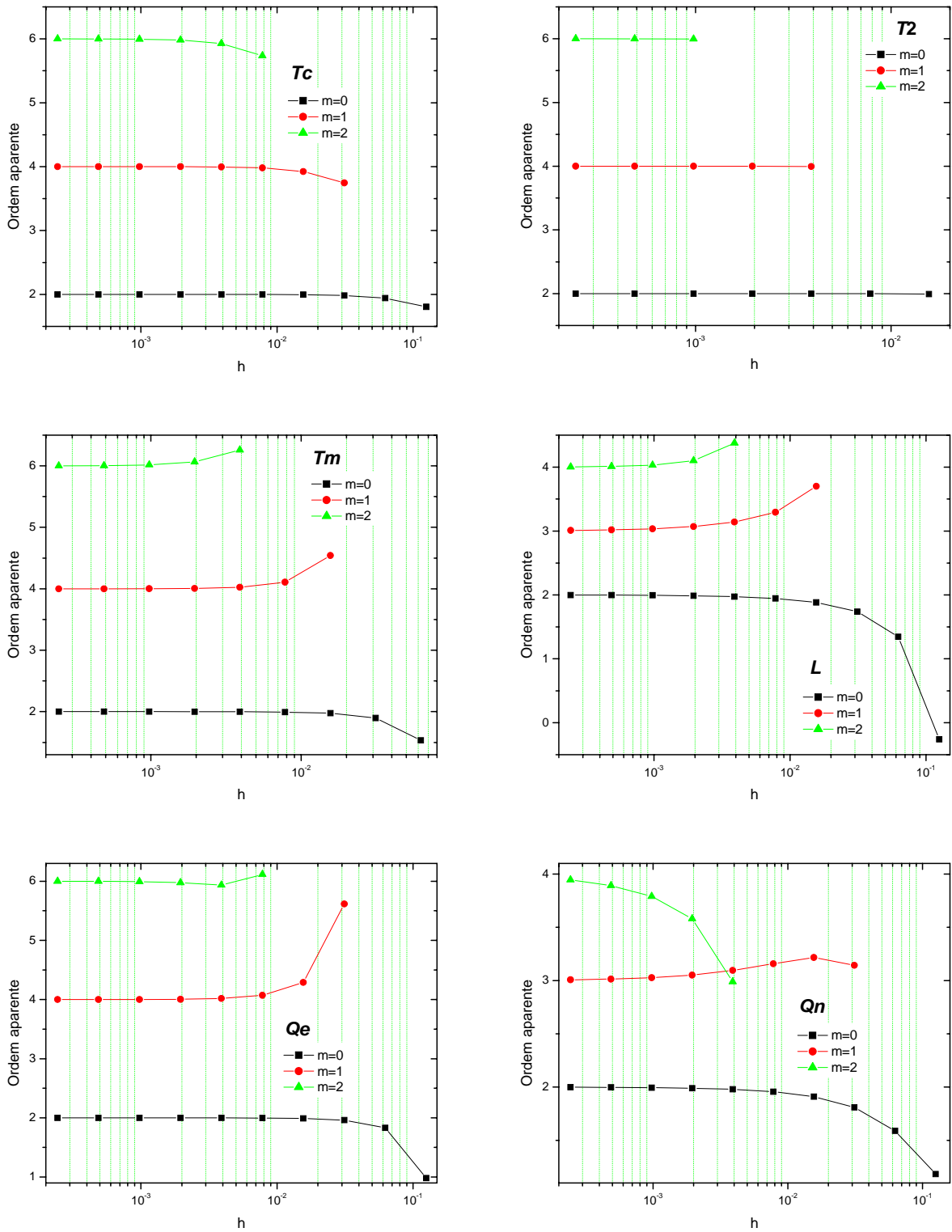


Figura 4 – Ordem aparente (p_v) versus tamanho da malha (h) e número de extrapolações (m).

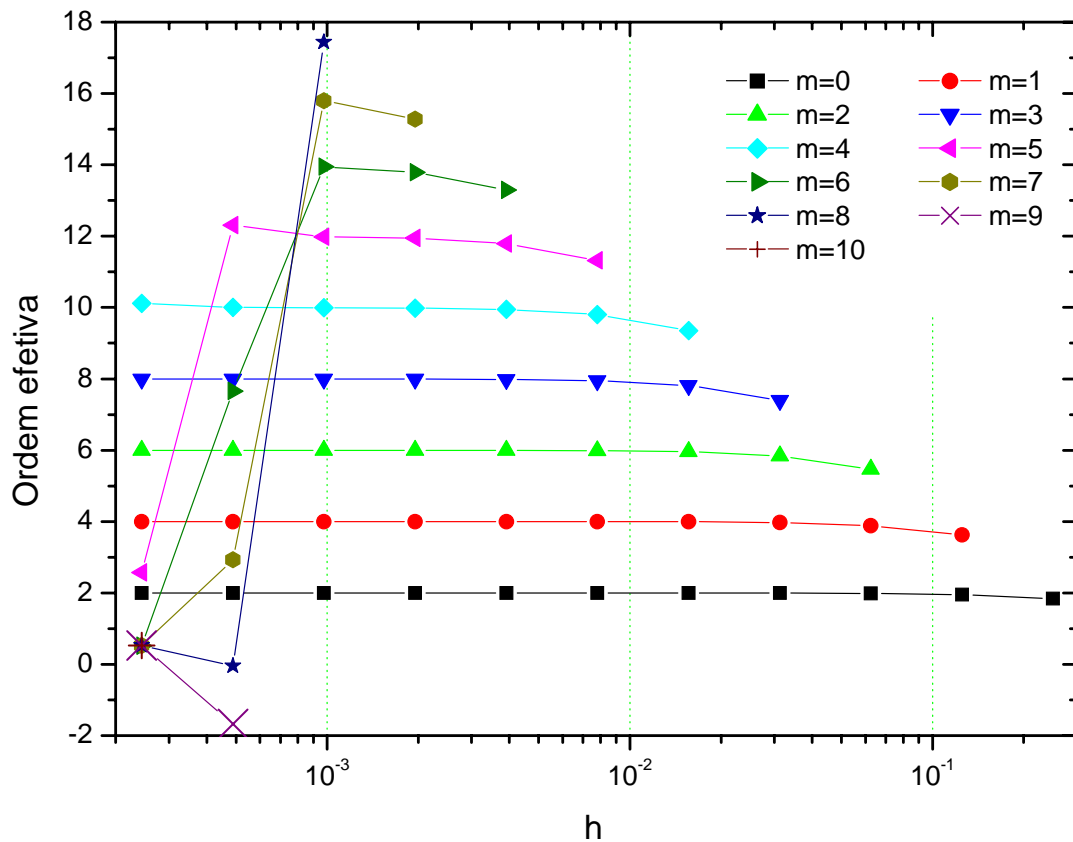


Figura 5 – Ordem efetiva (p_E) versus tamanho da malha (h) e número de extrapolações (m).

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro do MCT/CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, do Brasil) e do Programa UNIESPAÇO da AEB (Agência Espacial Brasileira). O primeiro autor é bolsista do CNPq.

REFERÊNCIAS

- Benjamin, A. S. and Denny, V. E., 1979. On the Convergence of Numerical Solutions for 2-D Flows in a Cavity at Large Re. *Journal of Computational Physics*, Vol.33, pp. 340-358.
- De Vahl Davis, G., 1983. Natural Convection of Air in a Square Cavity: a Bench Mark Numerical Solution. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.3, pp. 249-264.
- Erturk, E., Corke, T. C. and Gökçöl, C., 2005. Numerical Solutions of 2-D Steady Incompressible Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol.48, pp. 747-774.

- Kreyszig, E., 1999. *Advanced Engeneering Mathematics*. 8 ed., Wiley.
- Marchi, C. H., 2001. *Verificação de soluções numéricas unidimensionais em dinâmica dos fluidos*. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina. Tese de doutorado em Engenharia Mecânica.
- Marchi, C. H. and Silva, A. F. C., 2002. Unidimensional Numerical Solution Error Estimation for Convergent Apparent Order. *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol.42, pp. 167-188.
- Oberkampf, W. L.; Trucano, T. G., 2002. Verification and validation in computational fluid dynamics. *Progress in Aerospace Sciences*, v. 38, p. 209-272.
- Ozisik, M. N., 1993. *Heat Conduction*. 2 ed. Wiley.
- Richardson, L. F., 1910. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam. *Phylosophical Proceedings of the Royal Society of London Serial A*, v. 210, p. 307-357.
- Richardson, L. F.; Gaunt, J. A., 1927. The deferred approach to the limit. *Phylosophical Proceedings of the Royal Society of London Serial A*, v. 226, p. 299-361.
- Roache, P. J., 1994. Perspective: a Method for Uniform Reporting of Grid Refinement Studies. *ASME Journal of Fluids Engineering*, Vol.116, pp. 405-413.
- Roache, P. J., 1998. *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*. Hermosa, 446 p.
- Schneider, G. E. and Zedan, M., 1981. A Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems. *Numerical Heat Transfer*, Vol.4, pp. 1-19.
- Schreiber, R. and Keller, H. B., 1983. Driven Cavity Flows by Efficient Numerical Techniques. *Journal of Computational Physics*, Vol.49, pp. 310-333.
- Tanehill, J. C.; Anderson, D. A.; Pletcher, R. H., 1997. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. 2 ed. Taylor & Francis.
- Versteeg, H. K.; Malalasekera, W., 2007. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics, The Finite Volume Method*. 2 ed. Pearson.
- Wesseling, P., 1992. *An introduction to multgrid methods*. Wiley.