



**EFEITO DA ANISOTROPIA FÍSICA SOBRE O MÉTODO *MULTIGRID*
NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO 2D**

Roberta Suero

robertasuero@demec.ufpr.br

Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia
Universidade Federal do Paraná
Curitiba, PR, Brasil

Marcio Augusto Villela Pinto

marcio_villela@yahoo.com.br

Departamento de Matemática e Estatística
Universidade Estadual de Ponta Grossa
Ponta Grossa, PR, Brasil

Carlos Henrique Marchi

marchi@ufpr.br

Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Paraná (UFPR)
Curitiba, PR, Brasil

Resumo. *O objetivo deste trabalho é verificar o efeito causado pela anisotropia física sobre o tempo de CPU necessário para resolver três problemas bidimensionais (2D): difusão pura (velocidades nulas), e advecção-difusão com velocidades constantes e variáveis. Utiliza-se o método de diferenças finitas com malhas uniformes e esquemas numéricos de primeira e segunda ordens de acurácia respectivamente para os termos de advecção e difusão. O sistema de equações algébricas é resolvido com o método MSI, associado ao método multigrid geométrico com esquema de aproximação completa (FAS), prolongação por interpolação bilinear, restrição por injeção, ciclo V e engrossamento padrão (razão dois). Estuda-se a influência de: número de iterações internas no solver; número de malhas; e número de incógnitas. A principal conclusão é que a anisotropia física afeta pouco o desempenho do método multigrid. Isso ocorre porque quanto maior o número de nós da malha, mais próximo do isotrópico fica o problema. A ordem p do solver MSI com o método multigrid, para velocidades nulas, constantes e variáveis, é respectivamente 1,07, 1,08 e 1,10.*

Palavras-chave: *solver, CFD, diferenças finitas, otimização, transferência de calor*

1. INTRODUÇÃO

Para métodos convencionais de solução de sistemas de equações, a taxa de convergência é alta no início das iterações, passando a decair sensivelmente à medida que o processo iterativo avança (Briggs et al., 2000) ou com o aumento do número de incógnitas. O objetivo do método *multigrid* é aumentar a taxa de convergência de um esquema iterativo convencional (Tannehill et al., 1997). Desta forma, o *multigrid* pode ser aplicado quando se deseja obter resultados em malhas muito refinadas, que são necessárias quando o objetivo, por exemplo, é minimizar os erros de discretização e quando se tem problemas práticos a serem resolvidos, como os de aerodinâmica tridimensional sobre um avião completo.

De acordo com Wesseling (1992), o método *multigrid* consiste no uso de malhas auxiliares mais grossas (com menor número de nós) do que a malha na qual se quer resolver o problema. Para transferir as informações da malha fina para a malha imediatamente mais grossa (restrição) e da malha grossa para a malha imediatamente mais fina (prolongação) são utilizados operadores de transferência. A seqüência com que as diversas malhas são visitadas caracteriza um ciclo *multigrid*, que pode ser do tipo V, W e F, entre outros (Briggs et al., 2000; Trottenberg et al., 2001). Os sistemas lineares em cada malha são resolvidos com um método iterativo (*solver*) com propriedades de reduzir rapidamente os erros oscilatórios (propriedades de suavização). Podem ser usados dois tipos de esquemas (Briggs et al., 2000): o esquema de correção (*Correction Scheme*, CS) e o esquema de aproximação completa (*Full Approximation Scheme*, FAS). De acordo com Briggs et al. (2000) e Trottenberg et al. (2001), o esquema CS é geralmente aplicado a problemas lineares e o FAS, a problemas não-lineares.

O método *multigrid* é caracterizado por suas componentes: procedimentos de suavização (*solvers*), estratégia de engrossamento, operador de malha grossa, operadores de transferência de malhas finas para malhas grossas e vice-versa e tipo de ciclo (Trottenberg et al., 2001). Uma simples modificação do algoritmo pode resultar em uma redução significativa no tempo de CPU (Trottenberg et al., 2001).

Um estudo do efeito de parâmetros sobre o tempo de CPU para a equação de advecção-difusão unidimensional é apresentado por Pinto et al. (2005). Entre os parâmetros estudados estão: número de iterações internas, número de malhas, razões de engrossamento, tolerância e estimativa inicial. Neste trabalho, a equação é discretizada com o método de diferenças finitas, o método *multigrid* é aplicado com formulação CS, ciclo V e *solver* Gauss-Seidel.

A resolução da equação de advecção-difusão bidimensional, com o uso do método *multigrid*, já foi investigada por Rabi e de Lemos (2001). A equação é discretizada com o método de volumes finitos, e o método *multigrid* é aplicado com o esquema CS, *solver* Gauss-Seidel, utilizando ciclos V e W. Estes autores apresentam um estudo para diferentes campos de velocidades (considerado nulo e com valor constante), número de malhas, número de passos de suavização em cada nível e combinações distintas do algoritmo de solução iterativa.

Vários autores tratam da equação de advecção-difusão aplicando o esquema compacto de diferenças finitas de 4ª ordem, como Gupta et al. (1997), Zhang (2000), Zhang et al. (2002), Karaa e Zhang (2002), Sun et al. (2003). No trabalho de Gupta et al. (1997) é testada a eficiência do algoritmo com vários *solvers* e operadores de transferência entre as malhas. O algoritmo mostra uma taxa de convergência independente da malha e produz soluções com alta acurácia.

Zhang (2000) compara os resultados obtidos para a equação de advecção-difusão com três esquemas de diferenças finitas (CDS, UDS e esquema compacto de diferenças finitas de 4ª ordem). A equação de advecção-difusão apresenta número de Reynolds, sendo que sua magnitude determina a razão de advecção para difusão. São apresentadas soluções para

malhas de até 129x129 nós e vários números de Reynolds. Verificou-se que a taxa de convergência deteriora com o aumento do Reynolds.

Karaa e Zhang (2002) apresentam um estudo da equação de advecção-difusão 2D para coeficientes (campo de velocidades) constantes e variáveis. Concluem que o método *multigrid* diverge para os casos em que o número de Reynolds é alto. O trabalho de Sun et al. (2003) traz comparações entre diferenças finitas de 2ª ordem e de 4ª ordem. Neste trabalho, pode-se observar que o número de iterações internas para os dois esquemas é o mesmo, e o tempo de CPU é praticamente o mesmo.

No presente trabalho, pretende-se avaliar o efeito da anisotropia física sobre o tempo de CPU para diversos parâmetros do método *multigrid* geométrico. Para atingir este objetivo, a equação de advecção-difusão bidimensional será analisada em três situações diferentes: (1) quando o vetor velocidades (que está multiplicando os termos advectivos) é considerado nulo, resultando na equação de Laplace; (2) quando este vetor assume um valor constante; e (3) quando o vetor velocidades é totalmente variável. A influência dos seguintes parâmetros do método *multigrid* sobre o tempo de CPU é analisada: iterações internas (número de iterações do *solver*), aqui denotado por *ITI*, variando entre 1 e 20; número de malhas (número de malhas percorridas no ciclo), denotado por *L*, sendo que serão testados todos os níveis de malhas possíveis; e número de incógnitas, denotado por *N*, sendo abordados problemas com $N = 5 \times 5$ até 2049×2049 .

Este artigo está organizado da seguinte forma: na seção 2 são apresentados os modelos matemático e numérico. Na seção 3 são apresentados os experimentos numéricos e seus resultados, e na seção 4 é apresentada a conclusão deste trabalho.

2. MODELOS MATEMÁTICO E NUMÉRICO

2.1 Definição do problema e sua discretização

A equação de advecção-difusão 2D, com propriedades constantes, em regime permanente, com condições de contorno de Dirichlet, pode ser representada matematicamente da seguinte forma

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + S, \quad 0 < x, y < 1, \quad (1)$$

onde T é a temperatura, α é a difusividade térmica, u e v são as componentes do vetor velocidade nas direções x e y , respectivamente, S é um termo fonte dado conforme o campo de velocidades adotado.

Os três problemas abordados neste trabalho, destacados na Tabela 1, são diferenciados pelo valor das velocidades. Quando o campo de velocidades é nulo, $u = v = 0$, o problema resulta na equação de Laplace, ou seja, é um problema puramente difusivo. Para o campo de velocidades considerado constante, adota-se $u = \sqrt{3}/2, v = 1/2$; neste caso, o vetor velocidades forma um ângulo de 30° com a direção horizontal x . Finalmente, tem-se o caso em que o campo de velocidades é totalmente variável e obtido de Shih et al. (1989):

$$u(x, y) = 8(x^4 - 2x^3 + x^2)(4y^3 - 2y), \quad (2)$$

$$v(x, y) = -8(4x^3 - 6x^2 + 2x)(y^4 - y^2). \quad (3)$$

Para este último caso, o campo de velocidades corresponde ao escoamento recirculante em uma cavidade quadrada com tampa móvel, ou seja, para cada ponto do domínio de cálculo, tem-se um valor diferente para a velocidade.

Tabela 1. Problemas abordados a partir da equação de advecção-difusão

Campo de velocidades	Termo fonte	Solução Analítica	Condições de Contorno
Nulo	$S = 0$	$T(x, y) = \text{sen}(\pi x) \frac{\text{senh}(\pi y)}{\text{senh}(\pi)}$	$T(x,0) = T(0, y) = T(1, y) = 0$ $T(x,1) = \text{sen}(\pi x)$
Constante	$S = u^2 v y + uv^2 x$	$T(x, y) = uvxy$	$T(x,0) = T(0, y) = 0$ $T(1, y) = uv y, T(x,1) = uvx$
Variável	$S = u^2 v y + uv^2 x$	$T(x, y) = uvxy$	$T(x,0) = T(0, y) = 0$ $T(1, y) = uv y, T(x,1) = uvx$

A discretização do domínio de cálculo é feita através de malha uniforme com um número de nós dado por $N = N_x N_y$, onde N_x e N_y são os números de nós nas direções coordenadas x e y respectivamente, incluindo os contornos. A Eq. (1) discretizada com o método de diferenças finitas (Tannehill et al., 1997), com UDS (*Upstream Differencing Scheme*) nos termos advectivos e CDS (*Central Differencing Scheme*) nos termos difusivos, resulta em

$$u \left(\frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{h} \right) + v \left(\frac{T_{i,j} - T_{i,j-1}}{h} \right) = \alpha \frac{(T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j})}{h^2} + \alpha \frac{(T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1})}{h^2} + S_p, \quad (4)$$

onde h é a distância entre dois nós consecutivos na direção x ou y ; a difusividade térmica é constante, ou seja, $\alpha = 1$; e os campos para as velocidades u e v variam de acordo com o problema abordado, conforme a Tabela 1. A Eq. (4) pode ser representada por um sistema de equações algébricas do tipo

$$AT = b, \quad (5)$$

onde a matriz dos coeficientes A é pentadiagonal N por N definida positiva (Briggs et al., 2000), e b representa o termo fonte.

2.2 Método *multigrid* e detalhes numéricos

A Eq. (5) é resolvida com o método *multigrid*, esquema FAS, e ciclo V partindo da malha mais fina. Foi utilizado o esquema FAS, pois este apresentou bons resultados para a equação de Laplace bidimensional, resolvida por Pinto e Marchi (2006). São utilizados operadores de restrição por injeção e prolongação por interpolação bilinear (Briggs et al., 2000; Trottenberg et al., 2001). É utilizado engrossamento padrão com razão dois. Os sistemas de equações são resolvidos com o *solver* MSI (*Modified Strongly Implicit*) (Schneider e Zedan, 1981).

Para resolver os três problemas, foi implementado um programa computacional em linguagem FORTRAN 95, com o uso do aplicativo Compaq Visual Fortran 6.6, utilizando aritmética de precisão dupla nos cálculos. As simulações foram realizadas em um microcomputador com processador Intel Core 2 Quad de 2,66 GHz, 8 GB de RAM e sistema operacional Windows xp 32 bits.

Tem-se o valor ótimo de um parâmetro quando a solução do problema é obtida no menor tempo de CPU para valores fixos dos demais parâmetros. Assim, denota-se por $ITI_{\text{ótimo}}$ o número ótimo de iterações internas no *solver*, e por $L_{\text{ótimo}}$ o número ótimo de níveis de malha. Cada N terá um $ITI_{\text{ótimo}}$ bem como um $L_{\text{ótimo}}$. O parâmetro $L_{\text{máximo}}$ representa o número máximo possível de malhas que se pode usar para uma dada malha e com a malha mais grossa tendo apenas um nó interno. Por exemplo, se $N = 513 \times 513$ nós, as malhas são de 513×513 , 257×257 , 129×129 , 65×65 , 33×33 , 17×17 , 9×9 , 5×5 e 3×3 nós, portanto $L_{\text{máximo}} = 9$.

O critério de parada utilizado para interromper o número de iterações externas (*ITE*), isto é, o número de vezes que o ciclo V é repetido, é baseado na média da norma l_1 do erro de iteração, dada por

$$\bar{l}_1[E_n(\phi)]_n = \frac{\sum_{i=1}^N |(\phi_{n \rightarrow \infty} - \phi_n)_i|}{N}, \quad (6)$$

onde $\phi_{n \rightarrow \infty}$ é a solução obtida quando o problema é resolvido até que se atinja o erro de arredondamento de máquina, ϕ_n é a solução obtida em cada iteração n , N é o número total de nós na malha; E_n é o erro na iteração n ; \bar{l}_1 denota a média da norma do erro na iteração n ; e i denota cada nó da malha. Este critério já foi utilizado por Santiago e Marchi (2007). O processo iterativo é interrompido quando $\bar{l}_1[E_n(\phi)]_n$ é menor ou igual a 10^{-12} . Utilizou-se o valor nulo como estimativa inicial da solução de cada problema.

O objetivo deste trabalho é minimizar o tempo de CPU, que é o tempo gasto para gerar as malhas, atribuir a estimativa inicial, calcular os coeficientes e resolver o sistema linear dado pela Eq. (5). Este tempo é obtido utilizando-se a função TIMEF da biblioteca Portlib do Fortran/95. Para todas as malhas cujo tempo de simulação foi inferior a 10 segundos, acrescentou-se ao programa principal um ciclo mais externo, que faz com que o número de simulações seja repetido até que o tempo de CPU seja igual ou superior a 10 segundos. O tempo de uma simulação é uma média do tempo obtido em todas as simulações. Esse procedimento foi adotado a fim de reduzir a incerteza da função TIMEF, que é aproximadamente $\pm 0,05$ s (Pinto et al., 2005).

3. RESULTADOS

Cerca de 400 simulações foram realizadas. Para cada problema definido na Tabela 1, foram variados os seguintes parâmetros: número de iterações internas (*ITI*), número de malhas (L) e número de incógnitas (N).

3.1 Iterações internas (*ITI*)

Para a obtenção do número ótimo de iterações internas, cada problema, em cada malha, foi resolvido utilizando o número máximo possível de níveis de malha, ou seja, $L_{\text{máximo}}$. Foram testados valores de *ITI* entre 1 e 10, 15 e 20. Estes valores foram escolhidos, pois acredita-se que o valor ótimo para este parâmetro esteja entre 1 e 10, conforme constatado por Pinto e Marchi (2006), Oliveira et al. (2006) e Santiago e Marchi (2007).

A Fig. 1 mostra a influência de ITI sobre o tempo de CPU para os três problemas resolvidos em quatro malhas. O valor de N não afeta significativamente o comportamento das curvas para o mesmo tipo de campo de velocidades. Tanto para velocidades constantes quanto variáveis, $ITI_{\text{ótimo}} = 3$. Para velocidades nulas, $ITI_{\text{ótimo}} = 4$. Estes mesmos resultados foram observados para malhas mais grossas, até 65×65 nós. Deve-se notar que quando se diminui ou aumenta o valor de ITI em relação a $ITI_{\text{ótimo}}$, aumenta o tempo de CPU. Este aumento do tempo de CPU pode ser significativo dependendo do valor usado para ITI . Com base nestes resultados, pode-se concluir que a anisotropia física exerce pouca influência sobre $ITI_{\text{ótimo}}$.

Estes resultados concordam com os obtidos por Oliveira et al. (2006), que resolveram a equação de advecção-difusão 1D, com o método *multigrid*, ciclo V, e esquema CS. Neste trabalho, os autores recomendam usar $ITI = 4$. Outros trabalhos que trazem estudos sobre esta equação, fixam o número de iterações internas em $ITI = 1$ ou 2.

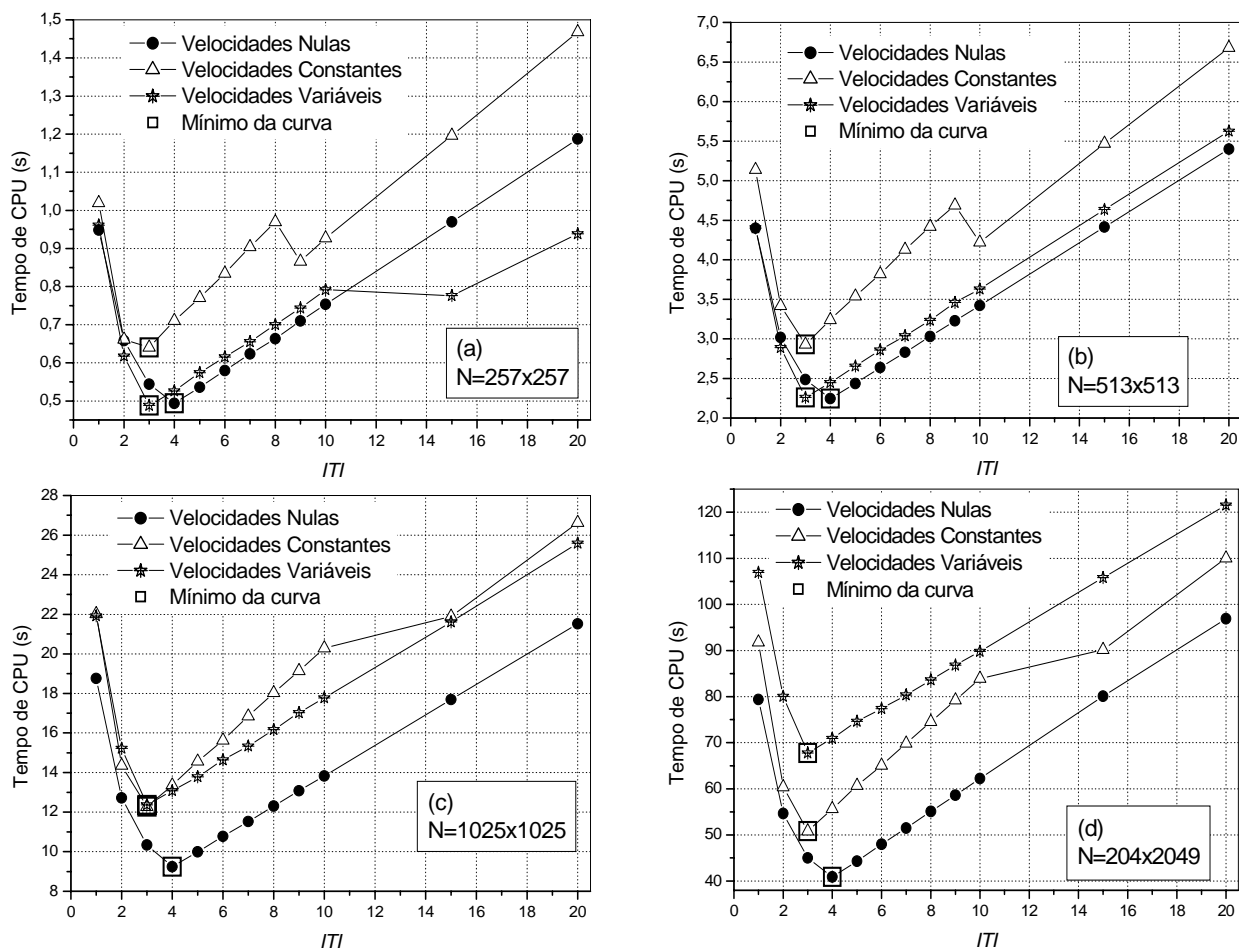


Figura 1 – Tempo de CPU versus ITI (número de iterações internas).

3.2 Número de malhas (L)

Para se fazer o estudo a respeito do número de níveis de malha (L) foram utilizados os valores ótimos já obtidos para o número de iterações internas, ou seja, $ITI = 4$ para velocidades nulas e $ITI = 3$ para velocidades constantes e variáveis. Os resultados são apresentados na Fig. 2 para os três problemas e três malhas. Verificou-se que

$L_{\text{ótimo}} = L_{\text{máximo}} - 2$ em qualquer problema e malha; portanto, a anisotropia física não afeta o número ótimo de malhas.

Para $L < L_{\text{ótimo}}$, o tempo de CPU aumenta significativamente. Mas para $L > L_{\text{ótimo}}$, o tempo de CPU é praticamente o mesmo, como se pode ver na Tabela 2. A maior diferença do tempo de CPU entre $L_{\text{máximo}}$ e o $L_{\text{ótimo}}$ é de 4,7%. Desta forma, adota-se $L = L_{\text{máximo}}$ para os resultados da próxima seção, já que *a priori* não se tem conhecimento do número ótimo de malhas.

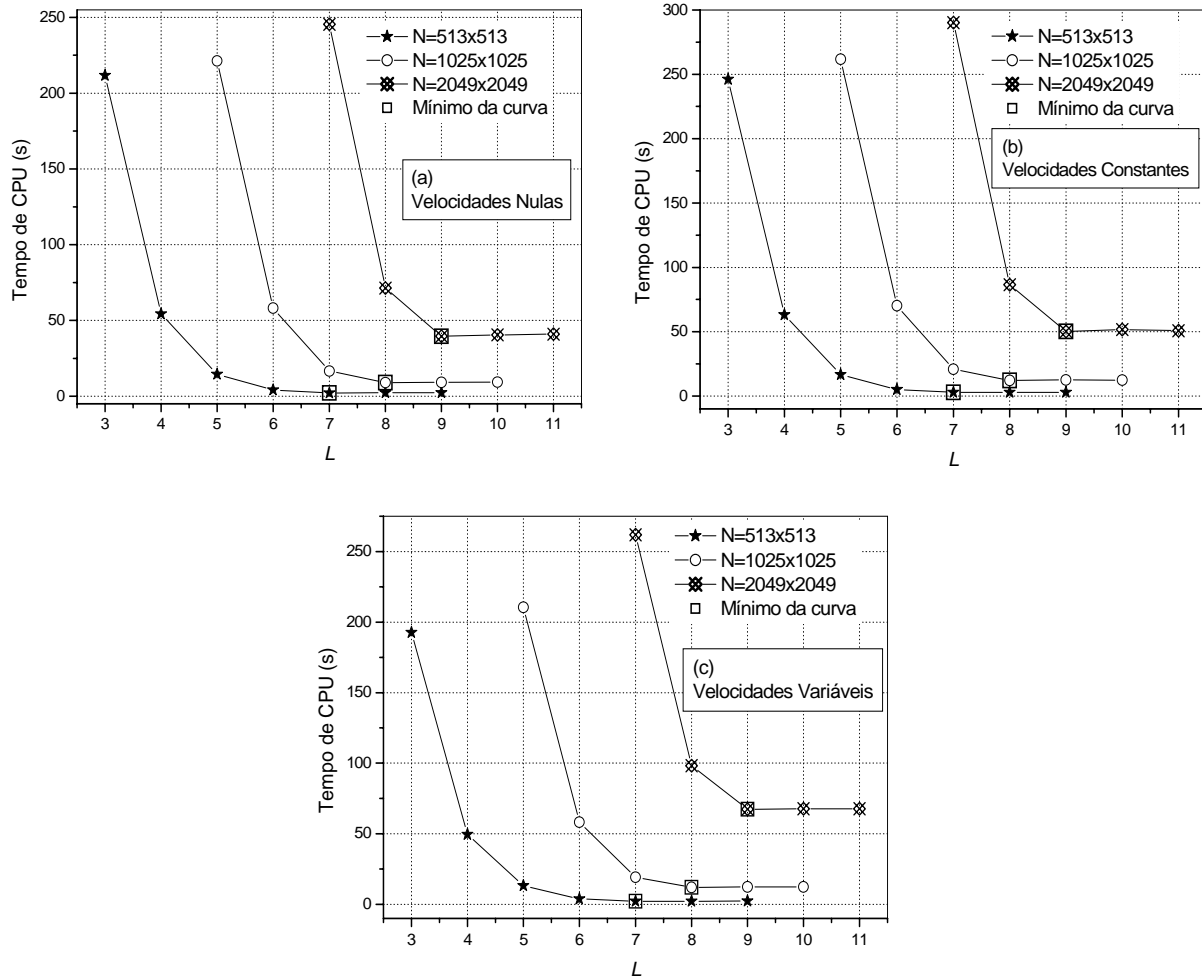


Figura 2 – Tempo de CPU *versus* L (número de malhas).

Tabela 2. Número ótimo de malhas

N	$L_{\text{máximo}}$	$L_{\text{ótimo}}$	V. nula	V. constante	V. variável
			$\frac{t_{\text{CPU}}(L_{\text{máximo}})}{t_{\text{CPU}}(L_{\text{ótimo}})}$	$\frac{t_{\text{CPU}}(L_{\text{máximo}})}{t_{\text{CPU}}(L_{\text{ótimo}})}$	$\frac{t_{\text{CPU}}(L_{\text{máximo}})}{t_{\text{CPU}}(L_{\text{ótimo}})}$
129x129	7	5	1,012	1,003	1,021
257x257	8	6	1,024	1,007	1,047
513x513	9	7	1,009	1,005	1,045
1025x1025	10	8	1,029	1,015	1,026
2049x2049	11	9	1,035	1,011	1,001

Os resultados aqui obtidos para o número de malhas concordam com os obtidos por Gupta et al. (1997) e Rabi e de Lemos (2001), que tratam da equação de advecção-difusão bidimensional. Também estão de acordo com os resultados obtidos por Pinto e Marchi (2006), que apresentam um estudo sobre o número de malhas para a equação de Laplace 2D. Concordam também com Pinto et al. (2005) que trazem estudos para a equação de advecção-difusão 1D. Todos recomendam usar o número máximo de malhas.

3.3 Número de incógnitas (N)

Para avaliar o efeito do número de incógnitas sobre o tempo de CPU foram utilizados: os valores ótimos do número de iterações internas ($ITI = 4$ para velocidades nulas, e $ITI = 3$ para velocidades constantes e variáveis); e o número máximo de malhas ($L_{máximo}$). Os resultados são mostrados na Fig. 3. Para o método *multigrid*, com o *solver* MSI, são apresentados resultados para malhas com 5×5 a 2049×2049 nós; rótulo MG-MSI. No caso do método de malha única, aqui chamado de *singlegrid*, também com o *solver* MSI, são apresentados resultados para malhas com 5×5 a 513×513 nós; rótulo SG-MSI. Ainda para o método *singlegrid*, mas agora com o *solver* Eliminação de Gauss, são apresentados resultados para malhas com 5×5 a 65×65 nós; rótulo SG-EG.

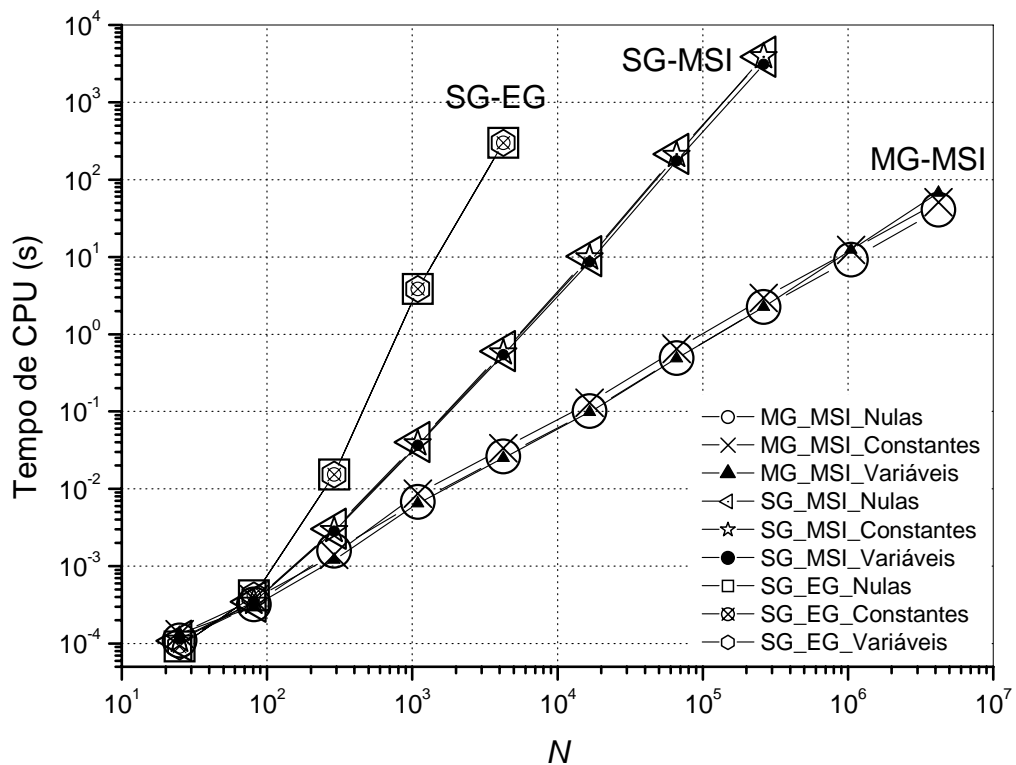


Figura 3 – Tempo de CPU versus N (número de incógnitas).

Para problemas com malhas mais finas ($N > 10^3$), pode-se observar na Fig. 3 que o tempo de CPU do método *multigrid*, com o *solver* MSI, é significativamente menor que o obtido para o *singlegrid*, também com o MSI. E o tempo de CPU deste, por sua vez, é significativamente menor que o tempo de CPU do *singlegrid* com Eliminação de Gauss. Nota-se que quanto maior o N , mais afastadas ficam as curvas *multigrid* do *singlegrid*.

Pode-se observar na Fig. 3 que a inclinação das curvas do método *multigrid* é a mesma para os três problemas. O mesmo ocorre entre as curvas do *singlegrid* com *solver* MSI, bem como para as curvas do *singlegrid* com Eliminação de Gauss. Portanto, a anisotropia física causada pelos campos do vetor velocidade influencia muito pouco o tempo de CPU do método *multigrid* e do *singlegrid*.

A Tabela 3 apresenta a inclinação p de cada curva da Fig. 3, obtida por ajuste geométrico de mínimos quadrados, considerando a seguinte expressão

$$t_{CPU} = cN^p, \quad (7)$$

onde p representa a ordem do *solver* associado ao método empregado, e c é um coeficiente relativo ao método e ao *solver*. Para cada método, quanto mais próximo da unidade estiver o expoente p , melhor é o seu desempenho. O método *multigrid* ideal é aquele cujo $p=1$, ou seja, o tempo de CPU cresce linearmente com o número de incógnitas (N).

Tabela 3. Ordem p dos métodos

Problema	SG-Eliminação de Gauss	SG-MSI	MG-MSI
Velocidades nulas	3,06	1,93	1,07
Velocidades constantes	3,06	1,93	1,08
Velocidades variáveis	3,06	1,90	1,10

De acordo com a Tabela 3, a anisotropia física não exerce muita influência sobre o tempo de CPU, pois para os diferentes campos de velocidades analisados os expoentes mantiveram-se próximos ou iguais. Pode-se observar ainda que o melhor método é o *multigrid* com *solver* MSI, conforme esperado, pois apresentou valores de p mais próximos da unidade.

3.4 Anisotropia dos coeficientes

Para os problemas com velocidades constantes e variáveis, foram calculadas todas as razões possíveis entre os coeficientes da matriz A da Eq. (5), que se originam da Eq. (4), visando avaliar o comportamento da anisotropia nos diversos valores de N . Dentre as razões calculadas, foram tomados os valores máximo e mínimo para cada uma das malhas em estudo. Por exemplo, para a malha com $N=515 \times 513$, foram calculados os coeficientes para todos os nós (AP, AW, AE, AN, AS). Na sequência, foram obtidas todas as razões possíveis entre os coeficientes (AP/AW, AP/AE, AP/AN, AP/AS, AW/AE, AW/AN, AW/AS e assim sucessivamente). Por último, foram tomados os valores máximo e mínimo dentre todas as razões calculadas.

Pode-se observar na Fig. 4 como as razões entre os coeficientes se comportam para os problemas em que as velocidades são constantes e variáveis, respectivamente, à medida que o número de incógnitas (N) varia. Nota-se que tanto o mínimo da razão entre os coeficientes quanto o máximo tendem à unidade. Para as velocidades nulas, esta razão é constante e igual à unidade. Este resultado ajuda a explicar o bom desempenho obtido pelo método *multigrid* para o problema com velocidades totalmente variáveis. Quanto mais refinada é a malha, mais próximo do isotrópico fica o problema pois a razão entre os coeficientes se aproxima da unidade.

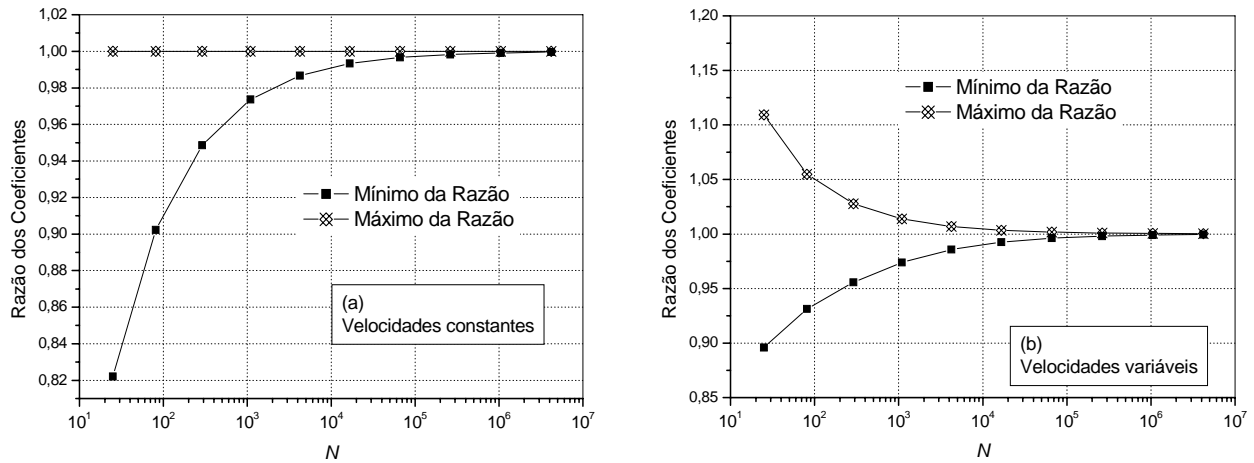


Figura 4 – Razão entre os coeficientes.

4. CONCLUSÃO

Utilizando-se o método *multigrid* geométrico foram avaliados os efeitos de diversos parâmetros sobre o tempo de CPU necessário para se resolver o problema de advecção-difusão bidimensional, com condições de contorno de Dirichlet. A equação governante foi discretizada com o método de diferenças finitas, com o uso de esquemas de primeira e segunda ordens de acurácia. O método *multigrid* foi aplicado com esquema FAS, ciclo V, engrossamento padrão, *solver* MSI e estimativa inicial nula. Com o objetivo de avaliar o efeito da anisotropia física apresentada por este problema, foram considerados campos com velocidades nulas, constantes e variáveis. Foram analisados os efeitos do número de iterações internas, número de malhas e número de incógnitas sobre o tempo de CPU.

Com base nos resultados deste trabalho, verificou-se que:

- 1) A anisotropia física influencia pouco o número ótimo de iterações internas ($ITI_{ótimo}$). Para velocidades nulas foi encontrado $ITI_{ótimo} = 4$, e para velocidades constantes e variáveis, $ITI_{ótimo} = 3$.
- 2) A anisotropia física não influencia o número ótimo de malhas, ou seja, $L_{ótimo} = L_{máximo} - 2$. Além disso, $t_{CPU}(L_{ótimo}) \approx t_{CPU}(L_{máximo})$.
- 3) A anisotropia física causada pelos três tipos de campos de velocidades influencia muito pouco o tempo de CPU do método *multigrid* e do *singlegrid*.
- 4) A ordem p do *solver* MSI com o método *multigrid* fica próxima da unidade. Para velocidades nulas, constantes e variáveis tem-se respectivamente $p = 1,07$, $1,08$ e $1,10$.
- 5) Mesmo para velocidades constantes e variáveis, quanto maior o número de nós da malha, mais próximo do isotrópico fica o problema.

Agradecimentos

Os dois primeiros autores agradecem ao Laboratório de Experimentação Numérica (LENA), do Departamento de Engenharia Mecânica da UFPR, por disponibilizar sua infraestrutura, aos amigos do LENA e à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo suporte financeiro. Os autores agradecem ao MCT/CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, do Brasil) pelo apoio financeiro. O terceiro autor é bolsista do CNPq.

REFERÊNCIAS

- Briggs, W. L., Henson, V. E., & McCormick, S. F., 2000. *A multigrid tutorial*, 2^a ed., SIAM.
- Gupta, M. M., Kouatchou, J., & Zhang, J., 1997. A compact multigrid solver for convection-diffusion equations. *Journal of Computational Physics*, vol. 132, pp. 123-129.
- Karaa, S., & Zhang, J., 2002. Convergence and performance of iterative methods for solving variable coefficient convection-diffusion equation with a fourth-order compact difference scheme. *An International Journal Computers and Mathematics with applications*, vol. 44, pp.457-479.
- Oliveira, F., Pinto, M. A. V., Santiago, C. D., & Marchi, C. H., 2006. Efeito de Parâmetros do Método *Multigrid* CS e FAS sobre o Tempo de CPU em Problemas 1D lineares e não-lineares. *Proceedings of CILAMCE*.
- Pinto, M. A. V., Santiago, C. D., & Marchi, C. H., 2005. Effect of parameters of a multigrid method on the CPU time for one-dimensional problems. *Proceedings of COBEM*.
- Pinto, M. A. V., & Marchi, C. H., 2006. Efeito de Parâmetros do Método *Multigrid* CS e FAS sobre o tempo de CPU para a Equação de Laplace bidimensional. *Proceedings of ENCIT*.
- Rabi, J. A., & de Lemos, M. J. S., 2001. Optimization of convergence acceleration in multigrid numerical solutions of conductive-convective problems. *Applied Mathematics and Computational*, vol. 124, pp. 215-226.
- Santiago, C. D., & Marchi, C. H., 2007. Optimum Parameters of a Geometric *Multigrid* for a Two-Dimensional Problem of Two-Equations. *Proceedings of COBEM*.
- Schneider, G. E., & Zedan, M., 1981. A modified Strongly Implicit Procedure for Numerical Solution of Field Problems. *Numerical Heat Transfer*, vol. 4, pp. 1-19.
- Shih, T. M., Tan, C. H., & Hwang, B. C., 1989. Effects of grid staggering on numerical scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 9, pp. 193-212.
- Sun, H., Kang, N., Zhang, J., & Carlson, E. S., 2003. A fourth-order compact difference scheme on face centered cubic grids with multigrid methods for solving 2D convection-diffusion equation. *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 63, pp. 651-661.
- Tannehill, J. C., Anderson, D. A., & Pletcher, R. H., 1997. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Taylor & Francis.
- Trottenberg, U., Oosterlee, C., & Schüller, A., 2001. *Multigrid*, Academic Press.
- Wesseling, P., 1992. *An Introduction to Multigrid Methods*, John Wiley & Sons.
- Zhang, J., 2000. Preconditioned iterative methods and finite difference schemes for convection-diffusion. *Applied Mathematics and Computational*, vol. 109, pp. 11-30.

Zhang, J., Sun, H., & Zhao, J. J., 2002. High order compact scheme with multigrid local mesh refinement procedure for convection diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 191, pp. 4661-4674.