

## Verificação e validação do coeficiente de arrasto frontal para escoamento supersônico e hipersônico de ar sobre cones

### **Guilherme Bertoldo**

Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)  
85601-970, Francisco Beltrão, PR  
E-mail: [gbertoldo@utfpr.edu.br](mailto:gbertoldo@utfpr.edu.br)

### **Carlos H. Marchi, Luciano K. Araki, Diego F. Moro**

Depto. Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Paraná (UFPR), Curitiba, PR  
E-mails: [marchi@ufpr.br](mailto:marchi@ufpr.br); [lucaraki@ufpr.br](mailto:lucaraki@ufpr.br); [difmoro@ufpr.br](mailto:difmoro@ufpr.br)

### **Eduardo M. Germer**

Depto. Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Curitiba, PR  
E-mail: [eduardomg@utfpr.edu.br](mailto:eduardomg@utfpr.edu.br)

### **Jonas J. Radtke**

Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)  
85601-970, Francisco Beltrão, PR  
E-mail: [jonas@utfpr.edu.br](mailto:jonas@utfpr.edu.br)

**Resumo:** *O coeficiente de arrasto frontal sobre cones calculado com o código Mach2D, para os modelos de Euler e de Navier-Stokes, é verificado e validado para alguns escoamentos de ar com número de Mach nos regimes supersônico e hipersônico. São utilizados como critérios para verificação e validação a convergência da ordem aparente e a comparação com resultados teóricos e experimentais de outros autores. A solução numérica e sua estimativa de erro são calculadas com o estimador convergente. Estima-se que o erro numérico não exceda 0,15% da solução exata e o erro de modelagem da solução numérica deve ser no máximo de 0,66% do resultado experimental.*

**Palavras-chave:** coeficiente de arrasto de cones, escoamento supersônico e hipersônico, erro de discretização, ordem de acurácia, extrapolação de Richardson.

## **1 Introdução**

Em Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD), um código é considerado uma ferramenta mais confiável para predições após ter sido verificado e validado [1]. De modo sucinto, a verificação consiste em estimar o erro da solução numérica quando comparada com a solução exata das equações que modelam um escoamento, ao passo que a validação consiste em estimar o erro do modelo matemático quando comparados os seus resultados com dados experimentais do referido escoamento.

Neste contexto, este trabalho apresenta alguns resultados da verificação e validação do coeficiente de arrasto produzido pelo código Mach2D [2]. De modo mais específico, é considerado neste estudo o coeficiente de arrasto frontal sobre cones (Figura 1) em escoamentos invíscidos e viscosos. As simulações são realizadas para duas razões de aspecto (comprimento/raio), a fim de se comparar os resultados obtidos com dados numéricos e experimentais de outros autores.

## **2 Metodologia**

### **2.1 Resolução do escoamento**

O código Mach2D (mais precisamente, Mach2D-5.8.2.2 revisão SVN 366), está programado para considerar escoamentos estacionários, axissimétricos, em meio contínuo,

invíscidos ou viscosos (laminar), compressíveis e com propriedades termofísicas constantes ou variáveis. Este código utiliza um algoritmo construído com base no método dos volumes finitos (formulação co-localizada, malha estruturada, coordenadas curvilíneas), com aproximação de primeira ordem para os termos advectivos e segunda ordem para os termos difusivos. O regime estacionário é obtido resolvendo-se o escoamento transiente distorcido. O escoamento é modelado pelas equações de Euler (escoamento invíscido) e de Navier-Stokes (escoamento viscoso e laminar). Os detalhes sobre a forma destas equações aplicadas no código Mach2D podem ser vistos em [2].

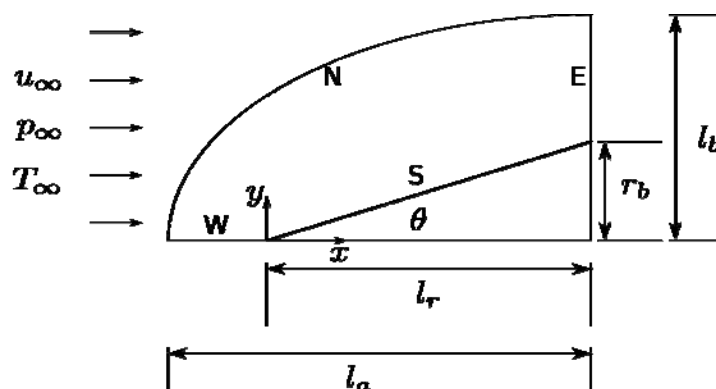


Figura 1: Ilustração esquemática do domínio de cálculo

O domínio de cálculo considerado na verificação é mostrado esquematicamente na Figura 1. Nesta figura, o escoamento é considerado não perturbado sobre o contorno norte (N), simétrico no contorno oeste (W) e localmente parabólico no contorno leste (E). No contorno sul (S), isto é, na superfície do cone, o gradiente normal de temperatura e de pressão é nulo, enquanto a condição de contorno para a velocidade é de deslizamento no modelo de Euler e de não deslizamento no modelo de Navier-Stokes.

Os principais parâmetros de entrada do código, número de Mach  $M_\infty$ , pressão  $p_\infty$  e temperatura  $T_\infty$  da corrente livre, bem como os parâmetros geométricos indicados na Figura 1 são apresentados na Tabela 1. Além destes parâmetros, considera-se que o ar é uma mistura de Ar, O<sub>2</sub> e N<sub>2</sub> nas frações molares de 1%, 21% e 78%, respectivamente. As propriedades termofísicas são consideradas constantes e calculadas conforme McBride et al. [3].

Parâmetros	Euler						Navier-Stokes		
	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	8,0	3,0	4,0	5,0
$M_\infty$	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	8,0	3,0	4,0	5,0
$p_\infty$ (Pa)	300	300	300	300	300	300	2045,6	828,5	322,2
$T_\infty$ (K)	300	300	300	300	300	300	300	300	300
$l_a$ (m)	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,1	3,2	3,2	3,2
$l_b$ (m)	2,2	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
$l_r$ (m)	2,836	2,836	2,836	2,836	2,836	2,836	3,0	3,0	3,0
$r_b$ (m)	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5

Tabela 1: Principais parâmetros de entrada do código Mach2D

## 2.2 Verificação e validação

O procedimento de verificação pode ser dividido em duas partes: a verificação do código e a verificação da solução. A primeira consiste em determinar se o código foi implementado corretamente, enquanto a segunda consiste em estimar o erro da solução numérica decorrente das aproximações aplicadas na resolução das equações que modelam o problema.

Das diversas fontes do erro numérico [1], estima-se que o código Mach2D seja principalmente afetado pelo erro de discretização. Neste caso, a verificação de solução depende essencialmente da estimativa deste tipo de erro.

Neste trabalho, a estimativa do erro de discretização será realizada através do estimador convergente [1]. Este estimador é baseado no estimador de Richardson, que, por sua vez é baseado na hipótese de que a estimativa do erro  $U(h)$  de uma solução numérica  $\phi(h)$  obtida em uma malha com partição  $h$  possa ser escrita como

$$U(h) = \phi - \phi_\infty = K h^{p_L} \tag{1}$$

onde  $\phi_\infty$  é uma estimativa da solução exata,  $K$  é uma constante e  $p_L$  é a ordem assintótica do erro de discretização nas equações que modelam o problema. No caso do Mach2D,  $p_L = 1$ . A constante  $K$  e a estimativa  $\phi_\infty$  são determinadas a partir de duas soluções numéricas obtidas em malhas com partições diferentes.

O estimador convergente depende ainda do conceito de ordem aparente ( $p_U$ ), que surge quando o expoente da Equação 1 também é estimado (o expoente, neste caso, é chamado de ordem aparente). Como há uma incógnita a mais, são necessárias três soluções numéricas em malhas com partições diferentes para que se possa determinar  $\phi_\infty$ ,  $K$  e  $p_U$ . Detalhes sobre o estimador convergente e de outros estimadores podem ser vistos na tese de Marchi [1].

O conceito de ordem aparente também é importante para a verificação de código. Segundo Roy [4], o critério mais indicado para a verificação de código é a análise da convergência da ordem aparente  $p_U$  para a ordem assintótica  $p_L$  com o refino da malha, pois é um dos mais difíceis de satisfazer. Outro critério aplicável, porém menos rigoroso que o primeiro, é a comparação dos resultados obtidos com os produzidos por outros autores. Estes dois critérios serão aplicados nas análises que seguem.

A estimativa do erro de modelagem é feita pela diferença entre os resultados numéricos e experimentais.

### 3 Resultados

#### 3.1 Euler

No modelo de Euler, a variável de interesse é o coeficiente de arrasto invíscido frontal  $C_{Df}^p$ . Os parâmetros geométricos e do escoamento são dados na Tabela 1. As simulações foram feitas em cinco malhas ( $m_1, m_2, m_3, m_4$  e  $m_5$ ) com 60, 120, 240, 480 e 960 volumes em cada direção do sistema coordenado curvilíneo. Os valores da ordem aparente  $p_U$  obtidos com estes dados são mostrados na Tabela 2. Desta tabela, observa-se que, para todos os números de Mach simulados, a ordem aparente aumenta (tendendo para 1) à medida que a malha é refinada. A concordância é melhor para valores mais elevados de  $M_\infty$  pois nestes casos a onda de choque se aproxima da superfície do cone, onde a malha é mais concentrada.

Malhas	$p_U$					
	$M_\infty = 2$	3	4	5	6	8
$(m_1, m_2, m_3)$	0,58	0,66	0,66	0,71	0,77	0,85
$(m_2, m_3, m_4)$	0,70	0,72	0,75	0,81	0,86	0,92
$(m_3, m_4, m_5)$	0,76	0,76	0,82	0,88	0,92	0,96

Tabela 2: Ordem aparente de  $C_{Df}^p$  para diversos números de Mach (Euler)

A Tabela 3 compara os valores de  $C_{Df}^p$  obtidos neste trabalho com base nas equações de Euler com os resultados de Sims [5] baseados na equação de Taylor-Maccoll. Os valores de

$C_{Df}^p$  (Euler), apresentados na tabela, foram obtidos com o estimador convergente (malhas  $m_3$ ,  $m_4$  e  $m_5$ ). O algarismo entre parênteses indica a incerteza estimada do último algarismo de cada número (estima-se que este erro não exceda 0,15% da solução exata). A diferença relativa entre os resultados das duas teorias não excede 0,35%.

Teoria	$C_{Df}^p$					
	$M_\infty = 2$	3	4	5	6	8
Euler	0,10447(4)	0,08747(9)	0,0794(1)	0,0747(1)	0,0717(1)	0,0682(1)
T-M	0,10445829	0,087475175	0,079393438	0,074756914	0,071828508	0,068471989

Tabela 3: Comparação de  $C_{Df}^p$  de acordo com as equações de Euler e Taylor-Maccoll (T-M) [5]

### 3.2 Navier-Stokes

No modelo de Navies-Stokes, o coeficiente de arrasto  $C_{Df}$  sobre a superfície frontal do cone tem duas contribuições: o coeficiente de arrasto devido à distribuição de pressão  $C_{Df}^p$  e o coeficiente de arrasto devido aos efeitos viscosos  $C_{Df}^\mu$ , isto é,  $C_{Df} = C_{Df}^p + C_{Df}^\mu$ .

Seguindo as mesmas análises feitas para o modelo de Euler, a Tabela 4 mostra as ordens aparentes obtidas para  $C_{Df}^p$  e  $C_{Df}^\mu$ . Observa-se que, em ambos os casos, as ordens aparentes tendem para 1.

Malhas	$p_U(C_{Df}^p)$			$p_U(C_{Df}^\mu)$		
	$M_\infty = 3$	4	5	3	4	5
$(m_1, m_2, m_3)$	0,53	0,63	0,71	1,75	1,96	2,29
$(m_2, m_3, m_4)$	0,66	0,71	0,78	1,39	1,50	1,68
$(m_3, m_4, m_5)$	0,72	0,79	0,86	1,20	1,27	1,36

Tabela 4: Ordem aparente de  $C_{Df}^p$  e  $C_{Df}^\mu$  versus Mach (Navier-Stokes)

A Tabela 5 mostra os coeficientes  $C_{Df}^p$ ,  $C_{Df}^\mu$  e  $C_{Df}$  obtidos com o estimador convergente nas malhas  $m_3$ ,  $m_4$  e  $m_5$  e suas estimativas de erro (entre parênteses). Estima-se que o erro numérico não exceda 0,15% da solução exata. Também são mostrados os resultados experimentais de Eggers et al. [6] e Perkins et al. [7]. O erro de modelagem da solução numérica deve ser no máximo de 0,66% do resultado experimental. Porém há um incerteza de até 6,4% no valor de cada resultado experimental devido a sua extração de um gráfico.

$M_\infty$	$C_{Df}^p$ (numérico)	$C_{Df}^\mu$ (numérico)	$C_{Df}$ (numérico)	$C_{Df}$ (experimental)
3	0,08027(8)	0,003718(8)	0,08399(9)	0,084(3) [7]
4	0,0729(1)	0,004797(7)	0,0777(1)	0,078(5) [6]
5	0,0688(1)	0,006616(7)	0,0755(1)	0,076(5) [6]

Tabela 5: Coeficientes de arrasto numérico (Navier-Stokes) e experimental

#### 4 Conclusão

Com base nos resultados obtidos, verificou-se que o código Mach2D atende dois dos critérios de verificação de código: a convergência da ordem aparente para a ordem assintótica e a concordância dos seus resultados com os de outros autores.

Estima-se que o erro numérico da solução numérica não exceda 0,15 % da solução exata. E o erro de modelagem da solução numérica deve ser no máximo de 0,66% do resultado experimental.

#### Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro do CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), AEB (Agência Espacial Brasileira) através do Programa Uniespaço, e CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior). O segundo autor é bolsista do CNPq.

#### Referências

- [1] C. H. Marchi, “Verificação de Soluções Numéricas Unidimensionais em Dinâmica dos Fluidos”, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, 2001.
- [2] C. H. Marchi, L. K. Araki, “Relatório técnico do projeto CFD-10/UFPR: códigos Mach2D 6.1 e RHG2D 1.0”, UFPR, Curitiba, 2009.
- [3] B. J. McBride, S. Gordon, M. A. Reno, “Coefficients for calculating thermodynamic and transport properties of individual species”, NASA, 1993.
- [4] C. Roy, Review of code and solution verification procedures for computational simulation, *Journal of Computational Physics*, vol. 205, pp. 131-156, (2005).
- [5] J. L. Sims, “Tables for Supersonic Flow Around Right Circular Cones at Zero Angle of Attack”, USA, 1964.
- [6] A. J. Eggers Jr., M. M. Resnikoff, D. H. Dennis, “Bodies of revolution having minimum drag at hypersonic airspeeds”, 1956.
- [7] E. W. Perkins, L. H. Jorgensen, S. C. Sommer, “Investigation of the drag of various axially symmetric nose shapes of fineness ratio 3 for Mach numbers from 1.24 to 7.4”, 1952.