

## Efeito do tipo de norma sobre a ordem de acurácia do erro de soluções numéricas em CFD

**Márcio A. Martins**

Depto. de Matemática, Universidade Estadual do Centro Oeste, UNICENTRO  
85040-080, C.P. 3010, Guarapuava, PR; E-mail: [mandre@unicentro.br](mailto:mandre@unicentro.br)

**Carlos H. Marchi, Marcio A. V. Pinto, Luciano K. Araki, Simone F. T. Gonçalves**

Depto. de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Paraná, UFPR, Curitiba, PR  
E-mails: [marchi@ufpr.br](mailto:marchi@ufpr.br); [marcio\\_villela@ufpr.br](mailto:marcio_villela@ufpr.br); [lucaraki@ufpr.br](mailto:lucaraki@ufpr.br); [simone.tg@ufpr.br](mailto:simone.tg@ufpr.br)

**Luciane Grossi, Giuliano G. La Guardia**

Depto. de Matemática e Estatística, Universidade Estadual de Ponta Grossa, UEPG, Ponta Grossa, PR  
E-mails: [lg\\_bombacini@yahoo.com.br](mailto:lg_bombacini@yahoo.com.br); [gg\\_la\\_guardia@yahoo.com.br](mailto:gg_la_guardia@yahoo.com.br)

**Resumo:** Neste trabalho analisa-se o emprego de sete tipos de normas vetoriais (baseadas nas normas  $l_1$ ,  $l_2$  e  $l_\infty$ ) sobre o erro de discretização em Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD). Constatou-se que, apesar dessas normas serem equivalentes, a ordem de acurácia resultante pode ser distinta. As deduções analíticas foram corroboradas pelos resultados numéricos. Os modelos matemáticos considerados foram: equação de advecção-difusão 1D, equação de Poisson 2D e equações de Burgers 2D. Os métodos numéricos empregados foram: Diferenças Finitas (MDF) e Volumes Finitos (MVF), com aproximações de diversas ordens ( $P$ ). Verificou-se que o emprego das normas investigadas pode manter, degenerar ou aumentar  $P$ . As normas que mantêm o valor de  $P$  são: a média da norma  $l_1$ , a norma  $l_2$  da média dos quadrados dos erros nodais e a norma  $l_\infty$ .

**Palavras-chave:** erro de discretização, norma vetorial, ordem de acurácia, equação de Burgers, equação de advecção-difusão.

### 1 Introdução

Na literatura vigente é comum a utilização de normas vetoriais em procedimentos de verificação numérica onde se estima, basicamente, o erro numérico ( $E$ ) envolvido e sua ordem de acurácia ( $P$ ) [7]. A determinação de  $P$  é importante, sobretudo, nos seguintes aspectos: 1) utilização de estimadores de  $E$ , como  $GCI$  (Grid Convergence Index) [6] e Richardson [3]; 2) para confirmação de  $P$  teórica do modelo numérico utilizado; e 3) para a estimativa de  $P$  quando o resultado teórico é desconhecido. Ao se investigar  $P$ , para um número fixo de variáveis e intervalo de discretização, a escolha da norma a ser empregada pode acarretar diferentes resultados, e isso pode levar a interpretações equivocadas.

O objetivo deste trabalho é, então, avaliar o uso de sete tipos de normas na verificação de soluções numéricas em CFD. Mais especificamente, pretende-se mostrar que, no presente contexto (espaços vetoriais reais de dimensão finita), as normas vetoriais podem revelar diferentes  $P$ , e identificar quais são as que mantêm  $P$  teórica do modelo numérico adotado. Para tanto, são abordados alguns aspectos teóricos sobre  $E$  e normas vetoriais, e são apresentados resultados de experimentos numéricos considerando-se o emprego de malhas uniformes em domínios uni e bidimensionais (1D e 2D). Como trabalho futuro, pretende-se abordar também outros tipos de malhas.

### 2 Verificação numérica em CFD

O erro numérico ( $E$ ) pode ser definido como a diferença entre a solução analítica ( $\Phi$ ) de uma variável de interesse e a sua solução numérica ( $\phi$ ), entretanto ao se considerar o emprego de um método de discretização em um domínio de cálculo  $\Omega$ , o erro de discretização pode ser considerado a principal fonte de  $E$  [7], e com essa perspectiva, segue a sua representação [3, 6]

$$E = \Phi - \phi = k_0 h^{p_0} + k_1 h^{p_1} + k_2 h^{p_2} + k_3 h^{p_3} + \dots, \quad (1)$$

em que os coeficientes  $k_j, j = 0, 1, 2, 3, \dots$  são números reais obtidos em função da variável dependente (do problema) e de suas derivadas, mas independem de  $h$  (espaçamento entre os pontos nodais da malha  $\Omega^h$ ).

Por definição, as ordens verdadeiras,  $p_V$ , são os expoentes de  $h$  na Eq. (1) e, são números reais que seguem a relação:  $1 \leq p_0 < p_1 < p_2 < p_3 \dots$ . O menor expoente,  $p_0$ , é denominado ordem assintótica e, muitas vezes, é tratada na literatura por ordem do erro ou ordem de acurácia e denotada por  $P$  [7]. Quando  $h \rightarrow 0$ , a primeira parcela da Eq. (1) é a principal componente de  $E$ , isto é, domina o seu valor total [3]; admite-se então,  $E$  de ordem  $P = p_0$ , para  $h \rightarrow 0$  (refinamento de  $\Omega^h$ ), isto é,

$$E = \Phi - \phi \cong k_0 h^{p_0} = c h^P. \quad (2)$$

$P$  pode ser calculada através das ordens efetiva ( $P_E$ ) e/ou aparente ( $P_U$ ). Para isso, consideram-se as soluções numéricas  $\phi_F$ ,  $\phi_G$ , e  $\phi_{SG}$  obtidas nas malhas fina ( $\Omega^{h_F}$ ), grossa ( $\Omega^{h_G}$ ), e supergrossa ( $\Omega^{h_{SG}}$ ), respectivamente, geradas com razão de refino constante  $r = h_G / h_F = h_{SG} / h_G$  [3];  $E(\phi_F)$  e  $E(\phi_G)$  correspondem aos respectivos  $E$  de  $\phi_F$  e  $\phi_G$ ;

$$P_E = \frac{\log[E(\phi_G) / E(\phi_F)]}{\log(r)}; \quad \text{e} \quad P_U = \frac{\log[(\phi_G - \phi_{SG}) / (\phi_F - \phi_G)]}{\log(r)}. \quad (3)$$

Em cada ponto  $i$  de  $\Omega^h$ , tem-se um  $E$  associado ( $E_i$ ), entretanto, busca-se normalmente quantificar  $E$  e  $P$  inerente a todos os pontos nodais de  $\Omega^h$ . Nesse caso,  $E$  é denominado erro de discretização global ( $E_g$ ) [7].

Para  $\Omega^h$  1D com  $N$  pontos nodais,  $E_g$  pode ser expresso por

$$E_g = \Lambda \sum_{i=1}^N c_i h^P \quad (4)$$

em que o operador  $\Lambda$  envolve todos os valores locais (nodais) (Eq. (2))  $E_i = c_i h^P, i = 1, \dots, N$ .

Para  $\Omega^h$  2D, são considerados: os eixos cartesianos  $x$  e  $y$ ;  $h_x = h_y = h$ ;  $P_x = P_y = P$ ; as Eqs. (2) e (4), e o texto [4], de maneira que se obtém

$$E = c_x h^{P_x} + c_y h^{P_y} = c_x h^P + c_y h^P = (c_x + c_y) h^P = d_{x,y} h^P = d h^P \Rightarrow E_g = \sum_{i=1}^N d_i h^P, \quad (5)$$

em que  $N = n_x \times n_y = n \times n = n^2$  pontos nodais de  $\Omega^h$  (2D).

Usualmente  $\Lambda$  corresponde a uma norma vetorial. Considera-se então,  $E_g$  com as normas dadas na Tabela 1.

Norma	$\ E\ _1$	$\ \bar{E}\ _1$	$\ E\ _2$	$\ \bar{E}\ _2$	$\ E/N\ _2$	$\ E\ _\infty$	$\ \bar{E}\ _\infty$
Expressão	$\sum_{i=1}^N  E_i $	$\ E\ _1 / N$	$\sqrt{\sum_{i=1}^N E_i^2}$	$\ E\ _2 / N$	$\sqrt{\sum_{i=1}^N E_i^2} / N$	$\max_{1 < i < N}  E_i $	$\ E\ _\infty / N$

Tabela 1: Definição das normas para  $E \in R^N$

### 3 Problemas-modelo

Nos problemas considerados adotou-se  $\Omega = [0,1]$  (1D) no caso 1, e  $\Omega = [0,1] \times [0,1]$  (2D) nos casos 2 e 3 (Tabela 2).

Caso	Equações	Solução analítica
(1) Advecção difusão	$Pe \frac{dT}{dx} = \frac{d^2T}{dx^2}; T(0) = 0; T(1) = 1.$	$T(x) = \frac{e^{Pe x} - 1}{e^{Pe} - 1}.$
(2) Poisson	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = S; \begin{cases} T(0, y) = T(1, y) = 0, \\ T(x, 0) = T(x, 1) = 0. \end{cases}$	$T(x, y) = (x^4 - x^2)(y^4 - y^2),$ $S$ proposto em [5].
(3) Burgers	$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$ $\frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - S;$ $\begin{cases} u(x,0) = u(0, y) = u(1, y) = v(x,0) = v(0, y) = 0 \\ v(1, y) = v(x,1) = 0, u(x, 1) = 16(x^4 - 2x^3 + x^2). \end{cases}$	$u(x, y) = 8(x^4 - 2x^3 + x^2)(4y^3 - 2y),$ $v(x, y) = -8(4x^3 - 6x^2 + 2x)(y^4 - y^2),$ $p$ e $S$ propostos em [8].

Tabela 2: Definição dos Problemas-modelo

As soluções numéricas foram obtidas: no caso 1 com MVF e  $P = 1, 2$  e  $3$  [1]; no caso 2 com MDF e  $P = 2$  [5]; e no caso 3 com MVF e  $P = 2$  [2].

### 4 Resultados e Conclusão

Em todos os esquemas numéricos adotados observou-se que, para o ponto nodal situado no centro de  $\Omega$ ,  $P_E \cong P_U \cong P$ ,  $h \rightarrow 0$ ; ou seja, há confirmação de  $P$  teórica de  $E$  local. Sobre  $E_g$ , com base nas Eqs. (4) e (5), e na Tabela 1, são considerados os próximos itens.

i)  $\|E\|_1$  e  $\|\bar{E}\|_1$ :

para  $\Omega = [0,1]$ ,  $\|E\|_1 = \bar{c} h^{P-1} \Rightarrow \|\bar{E}\|_1 = \bar{c} h^{P-1} / N = \bar{c} h^{P-1} h = \bar{c} h^P$ , em que  $\bar{c}$  é determinado com base no conceito de limite superior (maior valor de aderência), isto é,  $\bar{c} = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |c_i| < \infty$  (1D);

e para  $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ ,  $\|E\|_1 = \bar{d} h^{P-2} \Rightarrow \|\bar{E}\|_1 = \bar{d} h^{P-2} / N = \bar{d} h^{P-2} h^2 = \bar{d} h^P$ , onde

$$\bar{d} = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |d_i| < \infty \text{ (2D)}.$$

ii)  $\|E\|_\infty$  e  $\|\bar{E}\|_\infty$ :

para  $\Omega = [0,1]$ ,  $\|E\|_\infty = c^* h^P \Rightarrow \|\bar{E}\|_\infty = \|E\|_\infty / N = c^* h^P h = c^* h^{P+1}$ , com  $c^* = \lim_{N \rightarrow \infty} (\max_{1 \leq i \leq N} |c_i|) < \infty$  (1D);

e para  $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ ,  $\|E\|_\infty = d^* h^P \Rightarrow \|\bar{E}\|_\infty = \|E\|_\infty / N = d^* h^P h^2 = d^* h^{P+2}$ , em que

$$d^* = \lim_{N \rightarrow \infty} (\max_{1 \leq i \leq N} |d_i|) < \infty \text{ (2D)}.$$

iii)  $\|E/N\|_2$ ,  $\|E\|_2$  e  $\|\bar{E}\|_2$ :

para  $\Omega = [0,1]$ ,  $\|E/N\|_2 = \sqrt{\hat{c}} h^P$ ,  $\|E\|_2 = \sqrt{\hat{c}} h^{P-1/2}$ ,  $\Rightarrow \|\bar{E}\|_2 = \sqrt{\hat{c}} h^{P+1/2}$ , em que

$$\hat{c} = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N c_i^2 < \infty \quad (1D);$$

e para  $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ ,  $\|E/N\|_2 = \sqrt{\hat{d}} h^P$ ,  $\|E\|_2 = \sqrt{\hat{d}} h^{P-1}$ ,  $\|\bar{E}\|_2 = \sqrt{\hat{d}} h^{P+1}$ , com

$$\hat{d} = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i^2 < \infty \quad (2D).$$

Os resultados numéricos obtidos corroboram essas deduções analíticas, e indicam que  $\|\bar{E}\|_1$ ,  $\|E\|_\infty$  e  $\|E/N\|_2$ , mantém  $P$  teórica do modelo numérico adotado. Como ilustração, na Tabela 3, consideram-se  $\|\bar{E}\|_1$  (mantém  $P$ ) e  $\|E\|_2$  (degenera  $P$ ) sobre os casos 2 e 3; e na Figura 1, consideram-se  $\|E/N\|_2$  (mantém  $P$ ) e  $\|\bar{E}\|_\infty$  (eleva  $P$ ) sobre o caso 1 com  $P = 1, 2$  e 3.

$\Omega^h$ $n \times n$	Ordem de $\ \bar{E}\ _1$				Ordem de $\ E\ _2$			
	Caso 2		Caso 3		Caso 2		Caso 3	
	$P_E$	$P_U$	$P_E$	$P_U$	$P_E$	$P_U$	$P_E$	$P_U$
$4 \times 4$	--	--	--	--	--	--	--	--
$8 \times 8$	1,8535	--	2,7044	--	0,9305	--	1,7146	--
$16 \times 16$	1,9653	1,8129	1,6771	3,0051	1,0000	0,9860	0,7516	2,4906
$32 \times 32$	1,9914	1,9564	1,6527	1,6883	1,0001	1,0000	0,7091	0,8159
$64 \times 64$	1,9978	1,9893	1,8462	1,5706	1,0000	1,0002	0,8498	0,5121
$128 \times 128$	1,9994	1,9973	1,9285	1,8157	1,0000	1,0000	0,9264	0,7596
$256 \times 256$	1,9998	1,9993	1,9655	1,9156	1,0000	1,0000	0,9639	0,8860
$512 \times 512$	1,9999	1,9998	1,9830	1,9595	1,0000	1,0000	0,9821	0,9449
$1024 \times 1024$	1,9999	1,9999	1,9916	1,9801	1,0000	1,0000	0,9911	0,9730
$2048 \times 2048$	1,9999	1,9999	1,9958	1,9902	1,0000	1,0000	0,9955	0,9866

Tabela 3: Ordens práticas para a resolução numérica dos casos 2 e 3 (Tabela 2), com  $P = 2$

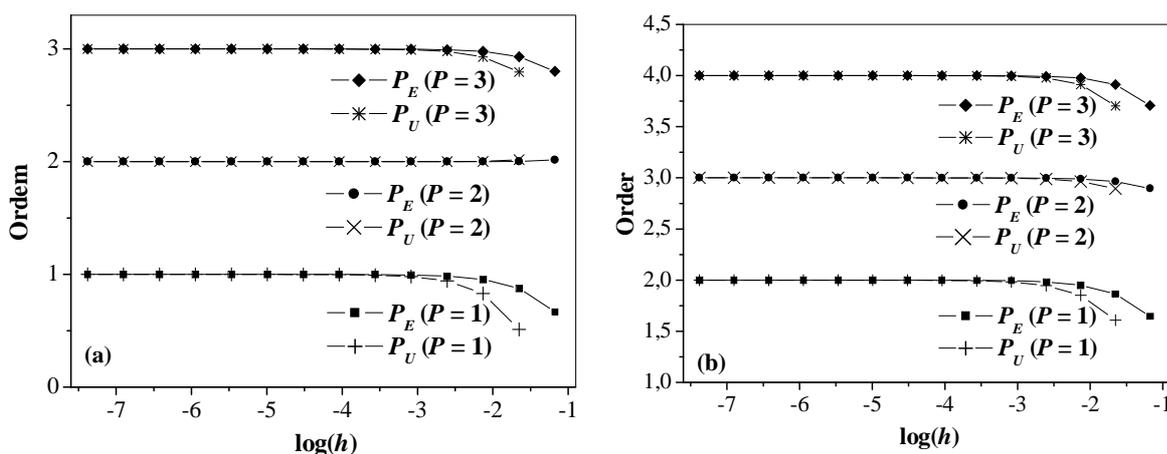


Figura 1: Ordens práticas de (a)  $\|E/N\|_2$  e (b)  $\|\bar{E}\|_\infty$  na resolução numérica do caso 1

### Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro do CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), AEB (Agência Espacial Brasileira) através do Programa Uniespaço,

Fundação Araucária (Paraná) e CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior). O primeiro autor agradece a UNICENTRO. O segundo autor é bolsista do CNPq.

### Referências

- [1] E. M. Germer, “Verificação de funções de interpolação em advecção-difusão 1D com Volumes Finitos”, Dissertação de Mestrado, PGMEC-UFPR, Curitiba, 2009.
- [2] S. F. T. Gonçalves, “Estudo de parâmetros do método multigrid geométrico para equações 2D e volumes finitos”, Tese de doutorado, PGMEC-UFPR, Curitiba, 2013.
- [3] C. H. Marchi, A. F. C. Silva, Unidimensional numerical solution error estimation for convergent apparent order, Num. Heat Transfer, Part. B, vol. 42, pp. 167-188, (2002).
- [4] C. H. Marchi, A. F. C. Silva, Multi-dimensional discretization error estimation for convergent apparent order, Journal of the Brazilian Soc. of Mech. Sc. and Eng., vol. 27, pp. 432-439, (2005).
- [5] F. Oliveira, “Efeito de malhas anisotrópicas bidimensionais sobre o desempenho do método multigrid geométrico”, Tese de doutorado, PGMEC-UFPR, Curitiba, 2010.
- [6] P. J. Roache, “Verification and validation in computational science and engineering”, Hermosa, Albuquerque, 1998.
- [7] J. C. Roy, W. L. Oberkampf, A comprehensive framework for verification, validation, and uncertainty quantification in scientific computing, Comp. Meth. in Appl. Mech. Eng., vol. 200, pp. 2131-2144, (2011).
- [8] T. M. Shih, C. H. Tan, B. C. Hwang, Effects of grid staggering on numerical scheme, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 9, pp. 193-212, (1989).