

Verificação e Validação da Solução Numérica do Código Mach2D para Problemas de Propulsão de Foguetes

Jonas Joacir Radtke

Coordenação do Curso de Tecnologia em Alimentos, COALM, UTFPR
65601-970, Francisco Beltrão, PR
E-mail: jonas@utfpr.edu.br

Carlos H. Marchi, Luciano K. Araki

Depto. Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Paraná (UFPR), Curitiba, PR
E-mails: marchi@ufpr.br; lucaraki@ufpr.br

Guilherme Bertoldo

Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
85601-970, Francisco Beltrão, PR
E-mail: gbertoldo@utfpr.edu.br

Diego F. Moro

PG-Mec, Universidade Federal do Paraná (UFPR), Curitiba, PR
E-mail: difmoro@ufpr.br

Eduardo M. Germer

Depto. Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Curitiba, PR
E-mail: eduardomg@utfpr.edu.br

Resumo: *O presente trabalho apresenta a verificação e validação do código computacional Mach2D utilizado para a simulação numérica do escoamento de fluidos no interior de tuberias de motores-foguete. Para resolver o sistema de equações de conservação de massa, quantidade de movimento linear e energia, o código computacional utiliza o Método de Volumes Finitos baseado em uma formulação adequada a qualquer regime de velocidade, arranjo co-localizado de variáveis e funções de interpolação de primeira ou segunda ordem. O método SIMPLEC é utilizado para o acoplamento pressão-velocidade. As estimativas de erro numérico são calculadas utilizando o estimador GCI. Para o coeficiente de descarga da tubeira, a diferença entre a solução numérica na malha mais fina e o resultado experimental é de 0,60%.*

Palavras-chave: tubeira, motor-foguete, propulsão, verificação, validação.

1 Introdução

A determinação das características do escoamento de um fluido é de fundamental importância no desenvolvimento de projetos de tuberias de motores-foguete. Tais características podem ser determinadas resolvendo-se um sistema de equações diferenciais parciais. O Método de Volumes Finitos pode ser empregado para a resolução deste sistema de equações.

A confiabilidade dos resultados numéricos do escoamento de um fluido necessita que o modelo matemático represente com fidelidade o fenômeno e que a solução do sistema de equações seja acurada. A verificação e a validação são ferramentas que possibilitam avaliar tal confiabilidade e acuidade.

No presente trabalho é apresentado um estudo sobre a qualidade da solução numérica obtida com o código computacional Mach2D [5] para simular o escoamento de um fluido no interior da tubeira de motores-foguete. O fluido é considerado invíscido e o modelo matemático axissimétrico é apresentado na seção seguinte.

2 Modelagem Matemática e Estimativa de Erro

O fluxo dos fluidos no interior da tubeira possui natureza tridimensional, porém, por diversas vezes tal comportamento é idealizado por meio de um modelo bidimensional axissimétrico. O modelo é baseado nas equações da conservação da massa, da quantidade de movimento linear (equações de Euler), da energia, e na equação de estado, dadas respectivamente por:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial(y\rho v)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial(y\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial(y\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$c_p \frac{\partial(\rho Tu)}{\partial x} + \frac{c_p}{y} \frac{\partial(y\rho Tv)}{\partial y} + \frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial(ypv)}{\partial y} = 0$$

$$p = \rho RT$$

sendo ρ, u, v, p e T as variáveis dependentes, representando a massa específica, a velocidade axial, a velocidade radial, a pressão e a temperatura, respectivamente; e x e y , nesta ordem, as direções axial e radial.

Sob o sistema de equações de conservação são aplicadas condições de contorno a fim de solucionar de forma única o problema. As condições de contorno utilizadas neste trabalho são apresentadas na Figura 1, juntamente com a geometria da tubeira.

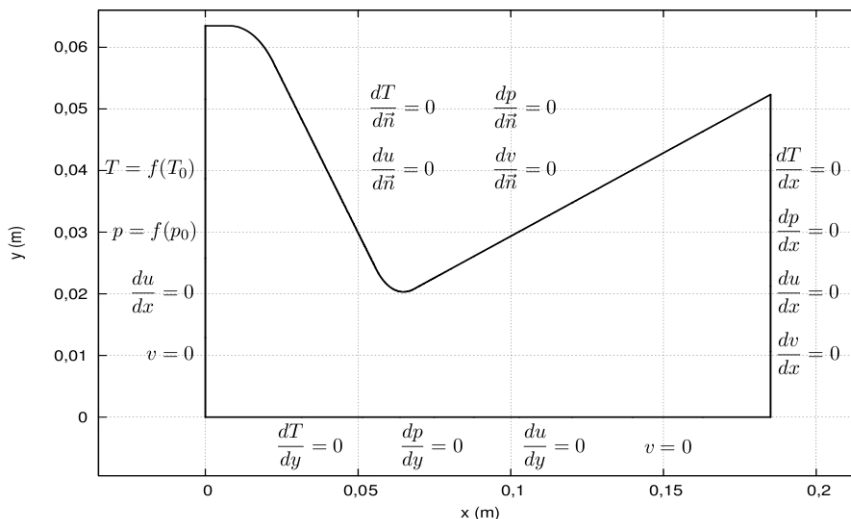


Figura 1: Condições de contorno aplicadas ao escoamento no interior da tubeira

A tubeira do tipo convergente-divergente utilizada nos experimentos possui comprimento total igual a 0,185039 m, sendo os comprimentos da câmara e das seções convergente e divergente iguais a 0,007874 m, 0,056998 m e 0,120167 m, respectivamente. A câmara é

seguida de um arco de circunferência com raio igual a 0,02032 m e uma parede convergente com inclinação de 44,86°. A geometria da garganta é dada por um arco de circunferência com raio igual a 0,0127 m, e a parede da seção divergente possui inclinação de 15,11° (Figura 1).

O experimento considera o escoamento de ar com pressão de estagnação igual a 1.725.069 Pa e temperatura de estagnação igual a 833,33 K. A constante dos gases perfeitos para o ar é igual a 287 J/(kg.K) e a razão entre calores específicos igual a 1,35. O calor específico do ar igual a 1106,33 J/(kg.K) foi obtido por interpolação linear dos resultados experimentais apresentados em [2].

O modelo numérico utilizado neste trabalho é baseado no Método de Volumes Finitos com arranjo co-localizado de variáveis [4,5], implementado em linguagem Fortran 95 e compilado com o compilador GFortran, versão 4.6.3, no sistema operacional Linux Ubuntu 12.04. Volumes fictícios são utilizados para a aplicação das condições de contorno.

Funções de interpolação de primeira ordem (UDS) ou de segunda ordem (CDS) são utilizadas para calcular as derivadas de primeira e segunda ordens do modelo matemático. O acoplamento pressão-velocidade é realizado empregando-se o método SIMPLEX para escoamentos a qualquer regime de velocidade [4,5]. O sistema linear resultante da discretização das equações de conservação é resolvido pelo método MSI (*Modified Strongly Implicit*).

A discretização do domínio é realizada utilizando malhas base de 4 x 2 para o esquema UDS e 50 x 5 para o esquema CDS. Malhas mais finas são obtidas com razão de refino igual a 2. A distribuição dos vértices dos volumes é uniforme na direção radial. Na direção axial o comprimento de cada volume é calculado com tamanho proporcional ao raio local da tubeira, gerando uma concentração na garganta.

A incerteza da solução numérica é calculada com o estimador GCI (U_{GCI}) [6], dado por

$$U_{GCI} = F_S \frac{\phi_1 - \phi_2}{r^{p_U} - 1}$$

onde F_S é um fator de segurança com valor igual a três para aplicações em geral; ϕ_1 e ϕ_2 são as soluções numéricas obtidas com as malhas fina e grossa, isto é, com malhas cujo tamanho (h) dos elementos é h_1 e h_2 , respectivamente; p_U é a ordem aparente do erro de discretização e r é a razão de refino da malha, dadas por

$$p_U = \frac{\log\left(\frac{\phi_2 - \phi_3}{\phi_1 - \phi_2}\right)}{\log(r)} \quad \text{e} \quad r = \frac{h_2}{h_1} = \frac{h_3}{h_2}$$

onde h_3 e ϕ_3 são, respectivamente, a métrica e a solução numérica da malha supergrossa.

3 Resultados

Simulações numéricas foram realizadas com os esquemas UDS e CDS. O tempo de simulação para a malha mais fina, 2048 x 1024 nós com o esquema UDS, foi de aproximadamente 72 horas.

Para a comparação dos resultados numéricos com os resultados experimentais disponíveis na literatura [1], o primeiro passo foi a extração dos resultados experimentais apresentados graficamente. Para avaliar a qualidade da extração destes resultados, foram realizadas cinco leituras com o programa G3Data Graph Analyzer, versão 1.5.2. Isso permitiu obter a incerteza da leitura dos resultados experimentais.

O coeficiente de descarga (Cd) obtido numericamente é mostrado na Tabela 1, bem como a sua incerteza numérica. A solução analítica de Kliegel e Levine [3] para o mesmo problema, mas considerando-se escoamento potencial, é $Cd = 0,982021$. Com base nos resultados

experimentais para o coeficiente de descarga foi estimado que $Cd = 0,9770 \pm 0,0051$. Esta incerteza leva em conta as incertezas da leitura e do experimento. Portanto, a diferença entre a solução numérica na malha mais fina e a solução analítica é de 0,088%. E a diferença entre a solução numérica na malha mais fina e o resultado experimental é de 0,60%.

Soluções numéricas para o coeficiente de empuxo no vácuo e para o impulso específico no vácuo resultaram em $1,57816 \pm 0,00058$ e $118,42 \pm 0,38$ s, respectivamente.

n_x	n_y	h	Cd	p_U	$U_{GCI}(p_U)$
256	128	0,0007228086	0,99068024415500	0,781	0,0330
512	256	0,0003614043	0,98628347185598	0,846	0,0165
1024	512	0,0001807021	0,98402338912627	0,960	0,0072
2048	1024	0,0000903511	0,98288577660574	0,990	0,0035

Tabela 1: Solução numérica do coeficiente de descarga

Os resultados experimentais da pressão, bem como os resultados numéricos obtidos com UDS e CDS são mostrados na Tabela 2 para 20 coordenadas x ao longo da parede da tubeira. As incertezas experimentais e numéricas também são mostradas nesta tabela. A incerteza da leitura das coordenadas experimentais no gráfico é superior a 1% apenas nos três primeiros pontos experimentais. A leitura da pressão experimental apresenta incerteza menor do que 1,5% em 17 dos 20 pontos. A maioria das diferenças entre os resultados numéricos e experimentais são menores do que a incerteza experimental.

ponto	x (m)	p experimental (Pa)	p com UDS (Pa)	p com CDS (Pa)
1	$0,020330 \pm 0,000307$	1725679 ± 88513	$1723606 \pm -$	$1723603,7 \pm 2,3$
2	$0,025730 \pm 0,000303$	1723093 ± 88164	1721458 ± 41	$1721445,9 \pm 1,2$
3	$0,030088 \pm 0,000328$	1720450 ± 87899	1718973 ± 46	$1718959,7 \pm 3,2$
4	$0,035284 \pm 0,000236$	1715007 ± 88591	1714321 ± 52	$1714306,4 \pm 5,8$
5	$0,044344 \pm 0,000260$	1706988 ± 20660	1694889 ± 102	1694862 ± 24
6	$0,049020 \pm 0,000237$	1681402 ± 19789	1668315 ± 226	1668253 ± 70
7	$0,052987 \pm 0,000213$	1641063 ± 20633	1614574 ± 841	1614337 ± 186
8	$0,057055 \pm 0,000421$	1480069 ± 24860	1371040 ± 603	1369494 ± 355
9	$0,062195 \pm 0,000053$	917106 ± 13208	870176 ± 629	870515 ± 1657
10	$0,062544 \pm 0,000033$	843280 ± 11555	835372 ± 549	835755 ± 1693
11	$0,067103 \pm 0,000297$	416088 ± 8080	414076 ± 260	414534 ± 1782
12	$0,068008 \pm 0,000142$	381127 ± 10616	343775 ± 1189	344091 ± 1286
13	$0,071367 \pm 0,000057$	338061 ± 7508	338003 ± 3348	$336726 \pm -$
14	$0,078940 \pm 0,000132$	319421 ± 5157	308335 ± 1272	307875 ± 87
15	$0,091799 \pm 0,000080$	219190 ± 3560	219896 ± 471	219718 ± 52
16	$0,100407 \pm 0,000122$	164990 ± 3888	169814 ± 608	169599 ± 25
17	$0,116914 \pm 0,000158$	104524 ± 2410	104768 ± 769	$104508,7 \pm 5,2$
18	$0,134001 \pm 0,000068$	61169 ± 1642	66769 ± 709	$66532,4 \pm 8,1$
19	$0,152117 \pm 0,000168$	37955 ± 664	43957 ± 573	$43766,9 \pm 3,0$
20	$0,169309 \pm 0,000058$	26520 ± 1871	31077 ± 452	$30926,2 \pm 4,9$

Tabela 2: Resultados experimentais e numéricos para a pressão (p) na parede da tubeira

4 Conclusão

As soluções numéricas obtidas pelo código Mach2D para escoamento invíscido possuem bom concordância com dados experimentais disponíveis na literatura.

A diferença entre a pressão calculada numericamente e o resultado experimental é menor do que a incerteza experimental na maioria dos pontos avaliados.

Para o coeficiente de descarga da tubeira, a diferença entre a solução numérica na malha mais fina e a solução analítica é de 0,088%. E a diferença entre a solução numérica na malha mais fina e o resultado experimental é de 0,60%.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro do CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), AEB (Agência Espacial Brasileira) através do Programa Uniespaço, e CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior). O segundo autor é bolsista do CNPq. O quinto autor é bolsista da CAPES.

Referências

- [1] L. H. Back, P. F. Massier, H. L. Gier, Comparison of measured and predicted flows through conical supersonic nozzles with emphasis on transonic region, *AIAA Journal*, vol. 3, pp. 1606–1614, (1965).
- [2] F. P. Incropera, D. P. DeWitt, “Fundamentos de transferência de calor e de massa”, Livros e Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 4 ed., 1998.
- [3] J. R. Kliegel, J. N. Levine, Transonic flow in small throat radius of curvature nozzles, *AIAA Journal*, vol. 7, pp. 1375–1378, (1969).
- [4] C. R. Maliska, “Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional”, LTC, Rio de Janeiro, 2 ed., 2010.
- [5] C. H. Marchi, L. K. Araki, “Relatório técnico do projeto CFD-10/UFPR: códigos Mach2D 6.1 e RHG2D 1.0”, UFPR, Curitiba, 2009.
- [6] P. J. Roache, Perspective: a method for uniform reporting of grid refinement studies, *ASME Journal of Fluids Engineering*, vol. 116, pp. 405-413, (1994).