

OTIMIZAÇÃO AERODINÂMICA NOS REGIMES SUPERSÔNICO E HIPERSÔNICO COM BASE NAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Guilherme Bertoldo

Jonas Joacir Radtke

UTFPR - Universidade Tecnológica Federal do Paraná,
Câmpus Francisco Beltrão,
85601-970, Francisco Beltrão, PR,
gbertoldo@utfpr.edu.br, jonas@utfpr.edu.br

Carlos Henrique Marchi

Universidade Federal do Paraná (UFPR)
Departamento de Engenharia Mecânica
Curitiba, PR
marchi@ufpr.br

Resumo: *O problema de otimização aerodinâmica de Newton é abordado, aproximadamente, com base nas equações de Navier-Stokes (laminar) nos regimes supersônico e hipersônico, considerando-se dois valores para a razão de aspecto (comprimento/diâmetro) e um amplo intervalo do número de Reynolds. O estudo representa um avanço em relação ao estado da arte na descrição mais realista do escoamento e na determinação da influência dos efeitos viscosos sobre as formas otimizadas. O procedimento empregado consiste em prescrever um perfil geométrico que é descrito por funções com coeficientes ajustáveis. O coeficiente de arrasto sobre estas formas é calculado com base no método dos volumes finitos e os coeficientes ajustáveis são determinados com base em um algoritmo que combina o algoritmo de evolução diferencial com o método das superfícies de resposta. Resultados parciais foram obtidos para formas do tipo lei de potência em que o expoente é o coeficiente ajustável. Estes resultados indicam que as formas otimizadas tendem a se tornar mais pontiagudas com o aumento dos efeitos viscosos. O coeficiente de arrasto das formas otimizadas foi comparado ao das formas de von Kármán, Newton e Kraiko et al.*

Palavras-chave: *CFD, Otimização, Supersônico, Hipersônico*

1 Introdução

O problema de otimização aerodinâmica de Newton, em um escoamento axissimétrico, consiste em determinar a forma aerodinâmica de simetria axial, com razão de aspecto (comprimento/diâmetro) prescrita, que minimiza o coeficiente de arrasto frontal. Este problema foi enunciado e resolvido pela primeira vez por Newton (Newton, 1946). Newton utilizou o cálculo variacional e uma fórmula aproximada para a distribuição de pressão sobre a geometria do objeto e determinou que a forma otimizada deveria ter uma face plana seguida por um arco suave. O problema ficou adormecido até o século XX, quando foi retomado devido às pesquisas em aeronáutica e astronáutica (Miele, 1965). Algumas das principais contribuições para a resolução do problema desde Newton são apresentadas na Tab. (1), que discrimina os trabalhos de acordo com o modelo utilizado para descrever o escoamento e o método de otimização. Estes dois aspectos são destacados, pois tipicamente os modelos mais precisos para a descrição do escoamento são otimizados de forma aproximada, enquanto os modelos mais simples são otimizados com o cálculo variacional. A única exceção é o trabalho de Kraiko *et al.* (2003), que pode ser considerado um benchmark. Ainda assim, o trabalho de Kraiko *et al.* não leva em consideração os efeitos viscosos, que segundo Bryson Jr. (Miele, 1965) e Horstmann *et al.* (2002) mudam significativamente o perfil da forma otimizada. Estes dois trabalhos modelam os efeitos viscosos de formas diferentes e levam a resultados contraditórios. Segundo Bryson Jr., à medida que os efeitos viscosos se tornam mais importantes, o perfil geométrico deve ser mais pontiagudo, ao contrário do que afirmam Horstmann *et al.*

Neste contexto, o objetivo deste trabalho é contribuir para o entendimento de como as formas otimizadas se comportam à medida que os efeitos viscosos se tornam mais importantes com base em um modelo mais realista para o escoamento. O problema de Newton é resolvido aproximadamente com base nas equações de Navier-Stokes e no método de otimização de forma (Lee *et al.*, 2001; Ferlauto; Marsilio, 2006). Resultados parciais são apresentados para formas do tipo lei de potência, obtidos para três valores do número de Mach ($M = 1,5; 3; 6$), seis valores do número de Reynolds, baseado nas propriedades da corrente livre e no comprimento do cone nasal, ($Re = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, \infty$) e para dois valores da razão de aspecto ($f = 2; 4$) (comprimento/diâmetro). Os números de Mach foram escolhidos para investigar os efeitos viscosos desde o limiar do regime supersônico

ao limiar do regime hipersônico, os números de Reynolds foram escolhidos de modo a investigar de forma gradual a influência dos efeitos viscosos, e as razões de aspecto foram escolhidas de modo a considerar corpos curtos e longos.

Tabela 1. Principais contribuições para o problema de otimização aerodinâmica de Newton

Modelo para o escoamento	Método de otimização	Autores
Escoamento supersônico linearizado para corpos delgados	Cálculo Variacional	von Kármán <i>apud</i> Miele (1965)
Escoamento supersônico linearizado	Cálculo Variacional	Parker (1954)
Lei de pressão de Newton	Cálculo Variacional	Newton (NEWTON, 1946), Eggers <i>et al.</i> (1956)
Lei de pressão de Newton com correção de Busemann	Cálculo Variacional	Hayes e Probstein (1959), Miele (1965)
Lei de pressão de Newton+coeficiente de fricção constante	Cálculo Variacional	Bryson Jr. (MIELE, 1965)
Lei de pressão de Newton+fórmula <i>ad hoc</i> para a tensão viscosa	Cálculo Variacional	Horstmann <i>et al.</i> (2002)
Euler (método das características)	Cálculo Variacional	Kraiko <i>et al.</i> (2003)
Euler (método dos volumes finitos)	Método de Otimização de Forma	Manson e Lee (1994)

2 Metodologia

2.1 Resolução do escoamento

O escoamento é resolvido através de um algoritmo (código Mach2D) construído com base no método dos volumes finitos (formulação colocalizada, malha estruturada, coordenadas curvilíneas), com aproximação de primeira ordem para os termos advectivos e segunda ordem para os termos difusivos. O regime estacionário é obtido resolvendo-se o escoamento transiente distorcido. O escoamento é modelado pelas equações de Euler (escoamento invíscido, i.e., $Re \rightarrow \infty$) e de Navier-Stokes (escoamento viscoso e laminar). Os detalhes sobre a forma destas equações aplicadas no código Mach2D podem ser vistos no relatório de Marchi e Araki (2009). O gás (ar) é uma mistura de Ar, O₂ e N₂ nas frações molares de 1%, 21% e 78%, respectivamente. As propriedades termofísicas são consideradas constantes e calculadas para cada espécie conforme McBride *et al.* (1993) e para a mistura de acordo com Sutton e Biblarz (2001) (Cap. 5) e Bird *et al.* (2002) (Caps. 1 e 9). A temperatura da corrente livre é 200 K e a pressão é ajustada de acordo com o número de Reynolds prescrito.

O domínio de cálculo é mostrado esquematicamente na Fig. (1). Nesta figura, o escoamento é considerado não perturbado sobre o contorno norte (N), simétrico no contorno oeste (W) e localmente parabólico no contorno leste (E). No contorno sul (S), o gradiente normal de temperatura e de pressão são nulos, enquanto a condição de contorno para a velocidade é de deslizamento no modelo de Euler e de não deslizamento no modelo de Navier-Stokes. O contorno sul representa o cone nasal que se deseja otimizar seguido por um cilindro. O cilindro foi utilizado para que as condições de contorno a jusante não interfiram significativamente no resultado da otimização. A malha é gerada de modo que os volumes fiquem concentrados sobre o contorno sul, na ponta do cone nasal e na junção cone nasal-cilindro.

2.2 Otimização

Dada a razão de aspecto f do cone nasal e os parâmetros que definem o escoamento, o problema de otimização consiste em determinar o perfil geométrico $g(x)$ que minimiza o coeficiente de arrasto frontal C_{DF} .

A função $g(x)$ será aproximada pelo método de otimização de forma, de acordo com o qual, $g(x)$ é expressa em termos de funções conhecidas e coeficientes ajustáveis. Os coeficientes devem ser determinados de modo a minimizar C_{DF} .

Formalmente, é possível expressar $g(x)$ de modo exato em termos de uma série de funções de base com infinitos coeficientes. Entretanto, isto não é necessário e nem viável, pois quanto maior o número de coeficientes, maior é o custo computacional para resolver o problema. Alguns testes realizados com base na lei de pressão de Newton mostram que se a expressão para $g(x)$ for adequadamente escolhida, poucos coeficientes são necessários para se obter bons resultados.

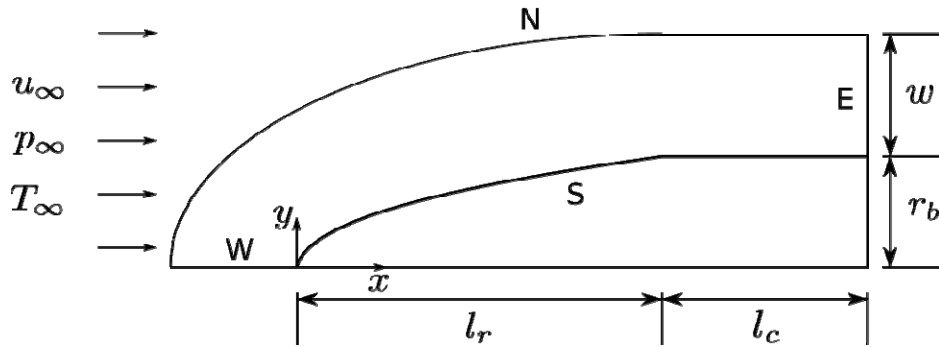


Figura 1. Ilustração esquemática do domínio de cálculo

Neste trabalho, $g(x)$ é expressa em termos de uma lei de potência

$$g(x) = r_b \left(\frac{x}{l_r} \right)^n \quad (1)$$

onde o expoente n é o coeficiente ajustável. Esta forma foi escolhida devido à experiência já relatada em diversos trabalhos (Perkins *et al.*, 1952; Eggers *et al.*, 1956; Miele, 1965; Manson; Lee, 1994). Outras expressões, com mais coeficientes, estão sendo estudadas, mas ainda não há resultados conclusivos, por isso não serão descritas aqui.

Para determinar os coeficientes que minimizam o coeficiente de arrasto frontal, aplicou-se o algoritmo de evolução diferencial (Price *et al.*, 2005; Feoktistov, 2006) acoplado ao método das superfícies de resposta (Khuri, 2006; Myers *et al.*, 2009). Este acoplamento é benéfico pois combina as vantagens dos dois métodos. O algoritmo de evolução diferencial é adequado para tratar funções com muitos mínimos, descontínuas ou com precisão insuficiente para o cálculo numérico de suas derivadas (caso comum em dinâmica dos fluidos computacional). O método das superfícies de resposta é adequado nas vizinhanças do mínimo, pois sua taxa de convergência é maior que a do algoritmo de evolução diferencial, o que acelera a convergência do algoritmo híbrido.

3 Resultados e discussão

3.1 Formas tipo lei de potência otimizadas

Para cada um dos três parâmetros considerados neste estudo (Reynolds, Mach e razão de aspecto), as otimizações foram realizadas em três malhas com 90×60 , 180×120 e 360×240 volumes, respectivamente. O objetivo foi avaliar a influência da malha sobre as formas otimizadas. Os expoentes otimizados para $f = 2$ e $f = 4$ são apresentados nas Tabs. (2) e (3), respectivamente, que também são apresentados na Fig. (2) para facilitar a discussão. Nas Tabs. (2) e (3), ε representa o desvio absoluto entre as soluções na malha mais fina e na intermediária.

Com relação à influência do número de Mach, mantendo-se Re e f fixos, a forma otimizada varia mais significativamente no limiar do regime supersônico, o que está ligado ao princípio da independência do número de Mach (Anderson Jr, 1989). Para $f = 2$, a diferença de n obtido entre $M = 1,5$ e 3 é de no máximo 20%, enquanto que a diferença entre $M = 3$ e 6 não excede 1,3%. Para $f = 4$ estas diferenças são, no máximo, 14% e 4%, respectivamente.

Mantendo-se M e Re fixos, observa-se que n pode variar em até 29% com a variação de f de 2 para 4. As variações são mais significativas para valores menores de Re e para $M = 1,5$.

Por fim, o caso mais relevante neste estudo. Para M e f fixos, à medida que Reynolds aumenta, os valores de n obtidos através das equações de Navier-Stokes tendem assintoticamente ao valor obtido com base nas equações de Euler ($Re \rightarrow \infty$). Por outro lado, a medida que os efeitos viscosos se tornam mais importantes, isto é, quando Reynolds diminui, o corpo otimizado tende a ficar mais pontiagudo (n aumenta), tendendo a um cone ($n = 1$) para Reynolds suficientemente baixo. Em especial, para $f = 4$, observa-se que n poderia aumentar ainda mais, mas foi limitado na otimização a $n = 1$. É como se para se tornar mais eficiente, o corpo precisasse ficar mais pontiagudo. Estes resultados estão qualitativamente de acordo com os de Bryson Jr. (Miele, 1965). Segundo este autor, as formas otimizadas tendem a se tornar mais pontiagudas com o aumento do coeficiente de fricção médio. Além disso, existe um valor crítico do coeficiente de fricção em que o corpo otimizado é um cone e acima do qual, passa a ser uma agulha (spike) seguida por um cone. Apesar desta concordância qualitativa, ainda é

premature afirmar que este seja o comportamento típico das formas otimizadas com o aumento dos efeitos viscosos. É preciso que outras formas otimizáveis (com mais coeficientes ajustáveis) sejam estudadas.

Tabela 2. Expoente n otimizado obtido em diversas malhas, números de Reynolds Re e Mach M e seu desvio absoluto ε para a malha mais fina. Razão de aspecto $f = 2$

M	Re\Malha	n			ε
		90×60	180×120	360×240	
1,5	∞	0,562	0,556	0,552	4×10^{-3}
	10^7	0,564	0,558	0,555	3×10^{-3}
	10^6	0,569	0,564	0,561	3×10^{-3}
	10^5	0,585	0,581	0,579	2×10^{-3}
	10^4	0,633	0,633	0,633	3×10^{-4}
	10^3	0,851	0,854	0,857	3×10^{-3}
3	∞	0,659	0,659	0,659	2×10^{-4}
	10^7	0,658	0,659	0,660	6×10^{-4}
	10^6	0,660	0,661	0,661	5×10^{-4}
	10^5	0,667	0,669	0,669	6×10^{-4}
	10^4	0,711	0,712	0,712	4×10^{-4}
	10^3	0,935	0,944	0,947	3×10^{-3}
6	∞	0,669	0,668	0,667	4×10^{-4}
	10^7	0,668	0,668	0,667	3×10^{-4}
	10^6	0,667	0,667	0,667	2×10^{-4}
	10^5	0,671	0,671	0,671	8×10^{-5}
	10^4	0,712	0,709	0,709	6×10^{-4}
	10^3	0,968	0,951	0,941	9×10^{-3}

Tabela 3. Expoente n otimizado obtido em diversas malhas, números de Reynolds Re e Mach M e seu desvio absoluto ε para a malha mais fina. Razão de aspecto $f = 4$

M	Re\Malha	n			ε
		90×60	180×120	360×240	
1,5	∞	0,619	0,616	0,616	7×10^{-4}
	10^7	0,622	0,621	0,620	3×10^{-4}
	10^6	0,631	0,630	0,631	5×10^{-4}
	10^5	0,669	0,670	0,673	2×10^{-3}
	10^4	0,873	0,877	0,880	3×10^{-3}
	10^3	1,000	1,000	1,000	5×10^{-6}
3	∞	0,672	0,673	0,675	1×10^{-3}
	10^7	0,672	0,674	0,676	2×10^{-3}
	10^6	0,683	0,686	0,688	2×10^{-3}
	10^5	0,736	0,739	0,741	2×10^{-3}
	10^4	0,991	1,000	1,000	8×10^{-7}
	10^3	1,000	1,000	1,000	2×10^{-5}
6	∞	0,692	0,692	0,693	2×10^{-4}
	10^7	0,692	0,694	0,694	6×10^{-4}
	10^6	0,706	0,706	0,706	1×10^{-4}
	10^5	0,776	0,771	0,769	2×10^{-3}
	10^4	1,000	1,000	1,000	1×10^{-5}
	10^3	1,000	1,000	1,000	4×10^{-5}

3.2 Comparação entre formas otimizadas

A fim de comparar a eficiência das formas otimizadas deste trabalho com a de outros autores, o coeficiente de arrasto frontal C_{Df} foi calculado para as formas tipo lei de potência otimizadas da seção anterior, para a forma de von Kármán e para a forma de Newton. O cálculo foi realizado em quatro malhas com 120×120 , 240×240 , 480×480 e 960×960 volumes, respectivamente. Poucas simulações não convergiram na malha mais fina, porém, isto não impediu o cálculo da solução numérica estimada e da sua estimativa de erro. A solução numérica estimada, obtida com o estimador de Richardson (Marchi, 2001) com ordem assintótica $p_L = 1$, e sua estimativa

de erro U , obtida com o estimador GCI (Marchi, 2001) com fator de segurança 1,25, são apresentadas na Tab. (4), para $f = 2$, e na Tab. (5), para $f = 4$. Estas tabelas também apresentam C_{Df} das formas de Kraiko *et al.* (2003) para $Re \rightarrow \infty$. Não foi possível calcular C_{Df} para os demais parâmetros, pois estes autores não publicaram a forma otimizada que obtiveram.

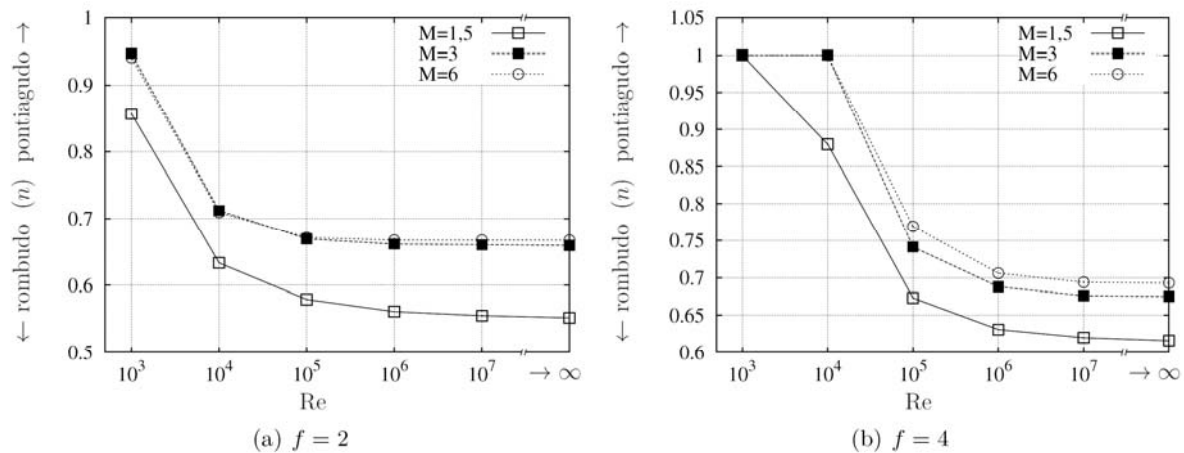


Figura 2. Exponente n otimizado como função de Reynolds, Mach e da razão de aspecto

Tabela 4. Coeficiente de arrasto frontal estimado C_{Df} e sua estimativa de erro U para diversos Re , M e formas otimizadas teoricamente. Razão de aspecto $f = 2$

$M = 1,5$							
	Lei de potência		Newton		von Kármán		Kraiko <i>et al.</i>
Re	C_{Df}	U	C_{Df}	U	C_{Df}	U	C_{Df}
∞	0,1533	0,0004	0,164 85	0,000 02	0,1684	0,0006	0,144
10^7	0,1557	0,0004	0,1668	0,0002	0,1715	0,0006	
10^6	0,1611	0,0004	0,1713	0,0002	0,1784	0,0006	
10^5	0,1792	0,0004	0,186 59	0,000 08	0,2002	0,0006	
10^4	0,2397	0,0005	0,2412	0,0002	0,2708	0,0007	
10^3	0,4395	0,0006	0,4414	0,0004	0,510	0,001	
$M = 3$							
	Lei de potência		Newton		von Kármán		Kraiko <i>et al.</i>
Re	C_{Df}	U	C_{Df}	U	C_{Df}	U	C_{Df}
∞	0,1239	0,0003	0,1244	0,0004	0,1416	0,0006	0,121
10^7	0,1260	0,0004	0,1264	0,0004	0,1445	0,0006	
10^6	0,1310	0,0004	0,1311	0,0005	0,1508	0,0006	
10^5	0,1477	0,0004	0,1472	0,0005	0,1713	0,0007	
10^4	0,2038	0,0005	0,2018	0,0006	0,2381	0,0009	
10^3	0,3915	0,0005	0,398	0,001	0,466	0,001	
$M = 6$							
	Lei de potência		Newton		von Kármán		Kraiko <i>et al.</i>
Re	C_{Df}	U	C_{Df}	U	C_{Df}	U	C_{Df}
∞	0,1027	0,0002	0,1031	0,0003	0,1211	0,0004	0,101
10^7	0,1047	0,0002	0,1050	0,0004	0,1239	0,0004	
10^6	0,1096	0,0002	0,1097	0,0003	0,1301	0,0004	
10^5	0,1262	0,0003	0,1258	0,0004	0,150	0,001	
10^4	0,1827	0,0005	0,1807	0,0007	0,217	0,001	
10^3	0,3733	0,0005	0,3784	0,0009	0,445	0,001	

A diferença relativa do coeficiente de arrasto frontal C_{Df} das formas de von Kármán, Newton e Kraiko *et al.* comparadas às formas otimizadas tipo lei de potência é apresentada na Fig. (3). Como se pode observar, o desempenho da lei de potência é superior ao da forma de von Kármán para todos os valores de f , M e Re estudados. A diferença chega a 24%. Quando comparado à forma de Newton, o desempenho da forma tipo lei de potência é, em geral, superior ou semelhante. Dos 36 casos considerados, a lei de potência foi superior em 22, semelhante em 12 e pior em 2. Foram considerados semelhantes os casos em que o erro numérico estimado é

maior que a diferença relativa entre as soluções. As maiores diferenças foram 9%, a favor da lei de potência, e 1,1%, a favor da forma de Newton. O desempenho da lei de potência foi pior ou semelhante ao da forma de Kraiko *et al.* A maior diferença foi de 6% para $f = 2$ e $M = 1,5$, mas diminui com o aumento de f e M , chegando a ser da ordem 0,05% para $f = 4$ e $M = 6$. Estes resultados são surpreendentes, levando-se em consideração que apenas um coeficiente ajustável foi utilizado na otimização.

Tabela 5. Coeficiente de arrasto frontal estimado C_{Df} e sua estimativa de erro U para diversos Re , M e formas otimizadas teoricamente. Razão de aspecto $f = 4$

		$M = 1,5$						
		Lei de potência		Newton		von Kármán		Kraiko <i>et al.</i>
Re	C_{Df}	U	C_{Df}	U	C_{Df}	U	C_{Df}	
∞	0,0503	0,0002	0,053 93	0,000 01	0,0517	0,0001	0,0482	
10^7	0,0545	0,0002	0,057 76	0,000 02	0,0568	0,0001		
10^6	0,0640	0,0002	0,066 51	0,000 02	0,0680	0,0001		
10^5	0,0955	0,0001	0,096 19	0,000 03	0,1044	0,0002		
10^4	0,1990	0,0001	0,2009	0,0001	0,2275	0,0003		
10^3	0,5687	0,0002	0,6118	0,0004	0,6935	0,0005		
		$M = 3$						
		Lei de potência		Newton		von Kármán		Kraiko <i>et al.</i>
Re	C_{Df}	U	C_{Df}	U	C_{Df}	U	C_{Df}	
∞	0,0400	0,0001	0,0406	0,0001	0,0444	0,0002	0,0396	
10^7	0,0436	0,0001	0,044 18	0,000 09	0,0488	0,0002		
10^6	0,0519	0,0001	0,0522	0,0001	0,0586	0,0002		
10^5	0,0790	0,0001	0,0788	0,0001	0,0904	0,0002		
10^4	0,1683	0,0001	0,1733	0,0002	0,2005	0,0003		
10^3	0,5154	0,0002	0,5593	0,0003	0,6355	0,0005		
		$M = 6$						
		Lei de potência		Newton		von Kármán		Kraiko <i>et al.</i>
Re	C_{Df}	U	C_{Df}	U	C_{Df}	U	C_{Df}	
∞	0,032 18	0,000 08	0,0324	0,0001	0,0375	0,0002	0,0322	
10^7	0,0353	0,0001	0,0354	0,0001	0,0413	0,0002		
10^6	0,0423	0,0001	0,0423	0,0001	0,0497	0,0002		
10^5	0,0656	0,0001	0,0654	0,0002	0,0777	0,0003		
10^4	0,1450	0,0001	0,1511	0,0003	0,1783	0,0005		
10^3	0,4794	0,0002	0,5226	0,0007	0,5959	0,0008		

4 Conclusão

Verificou-se, para todos os valores de Mach e da razão de aspecto estudados, que as formas tipo lei de potência otimizadas tendem a se tornar mais pontiagudas à medida que os efeitos viscosos se tornam mais importantes. Embora este comportamento esteja qualitativamente de acordo com os resultados de Bryson Jr (Miele, 1965), é preciso que formas com mais coeficientes ajustáveis sejam consideradas na otimização antes que uma conclusão mais geral possa ser inferida.

Apesar da simplicidade das formas do tipo lei de potência, o seu desempenho se mostrou surpreendente quando comparado às formas de von Kármán e de Newton.

5 Agradecimentos

Os autores agradecem aos seguintes CENAPAD's, sem os quais esta pesquisa não seria realizada: (i) CENAPAD-UFC - Centro Nacional de Processamento de Alto Desempenho da Universidade Federal do Ceará, (ii) CESUP - Centro Nacional de Supercomputação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul e (iii) CENAPAD-SP - Centro Nacional de Processamento de Alto Desempenho da Universidade Estadual de Campinas. Os autores também agradecem à equipe da COGETI da UTFPR-FB, em especial ao Jhonnatan Semler e ao Marcelo Riedi, pelo suporte em TI.

Os autores agradecem o apoio financeiro do CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), AEB (Agência Espacial Brasileira) através do Programa Uniespaço, e CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior). O terceiro autor é bolsista do CNPq.

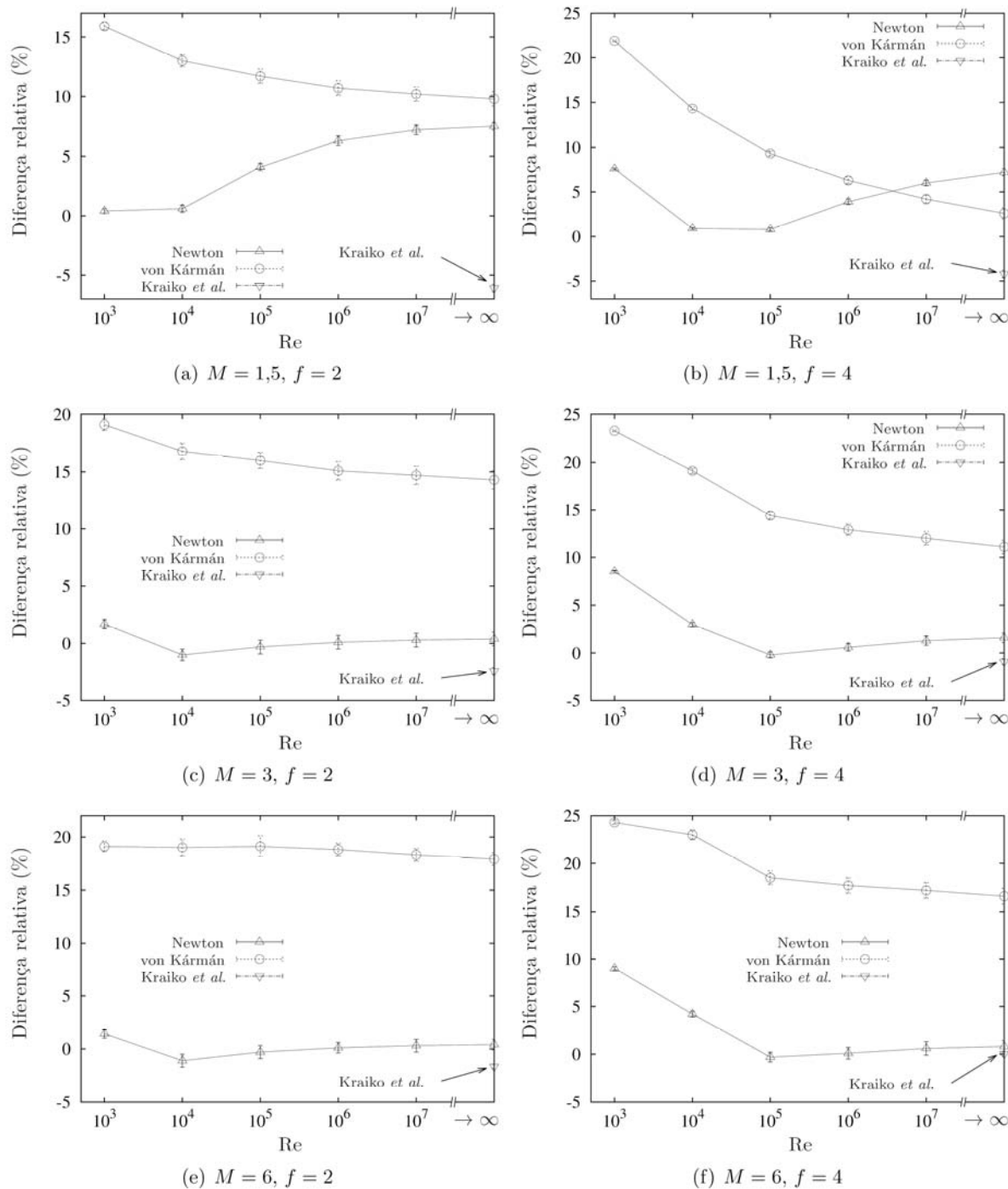


Figura 3. Diferença relativa entre o coeficiente de arrasto frontal C_{Df} das formas otimizadas de Newton *apud* (MIELE, 1965), von Kármán *apud* Miele (1965) e Kraiko *et al.* (2003) e o obtido neste trabalho

6 Referências

- Anderson Jr, J. D., Hypersonic and high temperature gas dynamics, McGraw-Hill, New York, 1989.
- Bird, R. B., Stewart, W. E., Lightfoot, E. N., Transport phenomena, 2. ed., John Wiley & Sons, 2002.
- Eggers JR., A. J., Resnikoff, M. M., Dennis, D. H., Bodies of revolution having minimum drag at hypersonic Airspeeds, 1956.
- Feoktistov, V., Differential evolution: in search of solutions, Springer, New York, 2006.
- Ferlauto, M., Marsilio, R., A viscous inverse method for aerodynamic design, Computers & Fluids, Vol. 35, No. 3, pp. 304–325, 2006.
- Hayes, W. D., Probstein, R. F., Hypersonic flow theory, Academic Press, New York, 1959.

- Horstmann, D., Kawohl, B., Villaggio, P., Newton's aerodynamic problem in the presence of friction, *NODEA-Nonlinear Differential Equations And Applications*, Vol. 9, No. 3, pp. 295–307, 2002.
- Khuri, A. I. (Ed.), *Response surface methodology and related topics*, World Scientific Publishing, Singapore, 2006.
- Kraiko, A. *et al.*, Axisymmetric nose shapes of specified aspect ratio, optimum or close to optimum with respect to wave drag, *PMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 67, No. 5, pp. 703–730, 2003.
- Lee, J. *et al.*, Design of space launch vehicle using numerical optimization and inverse method, *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 38, No. 2, pp. 212–218, 2001.
- Manson, W. H., Lee, J., Minimum-drag axisymmetric bodies in the supersonic/hypersonic flow regimes, *Journal of Spacecrafts and Rockets*, Vol. 31, No. 3, pp. 406–413, 1994.
- Marchi, C. H., Verificação de soluções numéricas unidimensionais em dinâmica dos fluidos, Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2001.
- Marchi, C. H., Araki, L. K., Relatório técnico do projeto CFD-10/UFPR: códigos Mach2D 6.1 e RHG2D 1.0, Curitiba, 2009.
- Mcbride, B. J., Gordon, S., Reno, M. A., Coefficients for calculating thermodynamic and transport properties of individual species, [S.l.], 1993.
- Miele, A. (Ed.), *Theory of optimum aerodynamic shapes*, Academic Press, New York, 1965.
- Myers, R. H., Montgomery, D. C., Anderson-Cook, C. M., *Response surface methodology: process and product optimization using designed experiments*, 3. ed., Wiley, Hoboken, N. J., 2009.
- Newton, I., *Principia - Mottes Translation Revised*, University of California Press, 1946, pp. 333, 657-661.
- Parker, H. M., Minimum-drag ducted and pointed bodies of revolution based on linearized supersonic theory, [S.l.], 1954.
- Perkins, E. W., Jorgensen, L. H., Sommer, S. C., Investigation of the drag of various axially symmetric nose shapes of fineness ratio 3 for Mach numbers from 1.24 to 7.4., [S.l.], 1952.
- Price, K. V., Storn, R. M., Lampinen, J. A., *Differential evolution: a practical approach to global optimization*, Springer, 2005.
- Sutton, G. P., Biblarz, O., *Rocket propulsion elements: an introduction to the engineering of rockets*, 7. ed., John Wiley & Sons, 2001.