

Determinação do fluxo de calor em motor-foguete utilizando método inverso

Izabel Cecilia Ferreira de Souza Vicentin
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Paraná
Curitiba, Brasil
izabeldesouza@gmail.com

Carlos Henrique Marchi
Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Paraná
Curitiba, Brasil
chmcf@gmail.com

Resumo—Este trabalho utiliza a técnica de problema inverso para a determinação do fluxo de calor em motores-foguete a propelente sólido. Nesse tipo de abordagem, medidas de temperatura na parede do lado externo são utilizadas para resolver um problema de condução de calor unidimensional em coordenadas cartesianas e regime transiente. O modelo matemático é resolvido numericamente através de volumes finitos, com formulação totalmente implícita para o tempo. Um procedimento iterativo para o caso não linear (no qual a condutividade varia com a temperatura) foi utilizado. Os resultados mostram que o método utilizado é eficiente quando o erro da medição de temperatura é pequeno.

Palavras-chave—Fluxo de calor; Transferência de calor por condução; Problema Inverso.

I. INTRODUÇÃO

Motores-foguete são propulsores constituídos de duas partes principais: câmara de combustão e tubeira, Fig. 1. A câmara de combustão é a parte do propulsor em que ocorre a queima do grão-propelente, transformando energia química em energia térmica. A tubeira é a parte do propulsor composta por uma região divergente e convergente, responsável em acelerar os gases da combustão, transformando energia térmica em energia cinética. Desta forma, tanto a câmara de combustão quanto a tubeira ficam expostas aos gases a altas temperaturas.

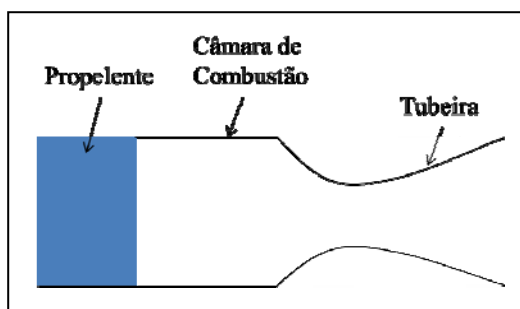


Fig. 1. Desenho esquemático de motor-foguete e suas partes principais

A determinação precisa do fluxo de calor transferido para a parede de motores-foguete é de extrema importância para o projeto de propulsores. A determinação do mesmo através de correlações empíricas ou até mesmo experimentalmente pode

gerar grandes incertezas nos resultados. Além disso, correlações empíricas geralmente requerem um conhecimento preciso de muitas variáveis, o que nem sempre é possível.

A maneira convencional de se resolver problemas em condução de calor é pela resolução da equação do modelo físico, geralmente equações diferenciais, em que se conhece de forma precisa as propriedades do material, as condições de contorno e condição inicial. Esse tipo de problema pode ser resolvido por métodos amplamente difundidos. À esta forma de resolução denomina-se problema direto (PD).

De outra forma, problema inverso de condução de calor (PI) é aquele em que se deseja uma das condições de contorno, condição inicial ou propriedades físicas. Algumas dificuldades na resolução de problemas inversos devem ser destacadas. PI's são matematicamente classificados como mal postos, diferentemente dos PD's, que são bem postos. O que torna PI mal posto é o fato de as soluções serem instáveis, como resultado de erros inerentes aos dados de medição utilizados na análise.

Soluções analíticas para PI's foram propostas na década de 60 por Langford [4] e Burgraff [9]. Atualmente muitos métodos para resolução de PI's são baseados em transformar problemas mal postos em bem postos pela utilização de parâmetro de regularização. Algumas das técnicas que utilizam parâmetro de regularização são: método dos mínimos quadrados, método de Levenberg-Marquardt e método do gradiente conjugado. Entre muitos cientistas desenvolvedores de tais métodos, pode-se citar os pioneiros Thikonov e Arsenin [2], Alifanov e Egorov [8] e Beck *et al.* [5].

Outros métodos, um pouco mais antigos, baseiam-se em se realizar inferências sobre o sistema ou sobre o PD. Entre diversos autores pode-se citar Williams e Curry [11], Mehta [10] e Kimura [1]. Este é o tipo de método adotado neste trabalho.

II. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Considere o domínio de cálculo mostrado na Fig.2 a seguir. O mesmo consiste em uma placa de espessura L , submetido a um fluxo de calor $q''(t)$ que varia no tempo. Esse fluxo de calor é aplicado em $x=0$. A placa em $x=L$ é modelada como adiabática. Nesta região, (em $x=L$), são realizadas as medições de temperatura, simbolizadas por $Y(t)$.

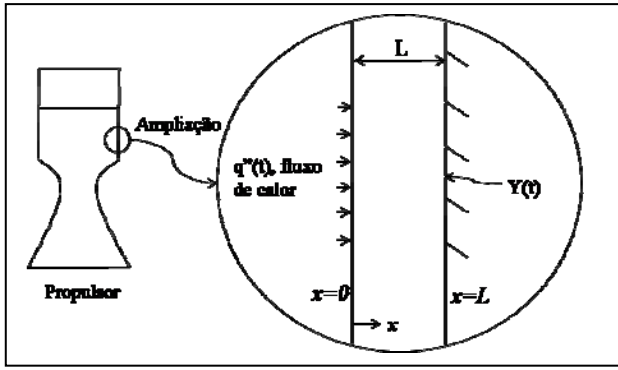


Fig. 2. Modelo do problema

Portanto as hipóteses adotadas são que: o calor se propaga de forma unidimensional, na direção radial; regime transiente; e condutividade dependente da temperatura.

A. Problema Direto

Aplicando as hipóteses simplificadoras anteriormente mencionadas, o modelo matemático, pode ser escrito como:

1) Modelo:

A distribuição de temperatura no interior do sólido, ou seja, $0 < x < L$, é dada em função do tempo e posição por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 < t < t_f, \quad (1)$$

onde $k(T)$ é a condutividade do material, dependente da temperatura, dada em W/(mK), ρ é a massa específica, dada em kg/m³, c_p é o calor específico dado em J/(KgK) e t_f é o instante final do domínio do tempo.

A condição de contorno em $x=0$ é:

$$-k(T) \frac{\partial T}{\partial x} = q''(t), \quad 0 < t < t_f. \quad (2)$$

Em $x=L$ a condição de contorno é a de parede adiabática, ou seja:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad 0 < t < t_f. \quad (3)$$

A condição inicial, ou seja a temperatura a que está o motor-foguete no instante inicial, em $t=0$ é dada por:

$$T = T_0, \quad t = 0 \quad (4)$$

onde T_0 é a temperatura no instante inicial, em todo domínio, ou seja, de $x=0$ a $x=L$.

O problema direto será resolvido com o Método dos Volume Finitos, MVF.

2) Discretização do domínio:

Utilizando uma malha unidimensional de nós centrados entre faces, o domínio pode ser representado conforme a Fig. 3 a seguir:

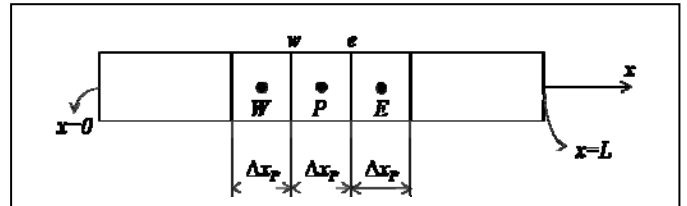


Fig. 3. Malha unidimensional de nós centrados entre faces

A Fig. 3 mostra a malha para todos os nós exceto nós dos contornos. Esses nós são denominados de nós internos. Nesta figura, o volume P possui o vizinho à esquerda, W e à direita, E. A malha considerada é uniforme, ou seja, Δx_p é o mesmo para todos os volumes.

Cada volume apresenta uma face à esquerda, w e à direita, e. Os volumes dos contornos, por sua vez, podem ser representados conforme as Fig.4 e Fig.5.

Para o contorno em $x=0$, a malha fica:

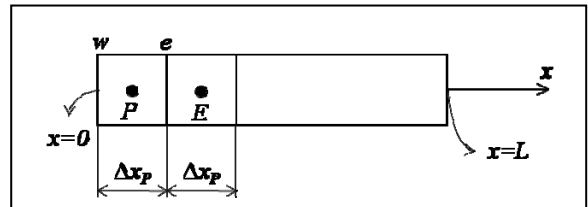


Fig. 4. Malha do contorno em $x=0$.

Para o contorno em $x=L$, a malha fica:

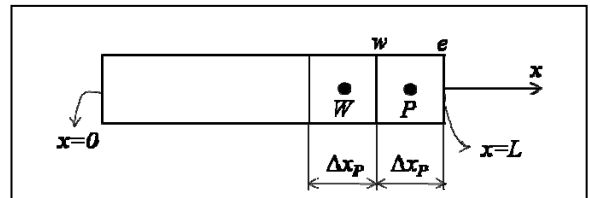


Fig. 5. Malha do contorno em $x=L$.

3) Discretização das equações

O modelo matemático do problema, mostrado em (1), foi resolvido aplicando-se o MVF. Utilizou-se a formulação totalmente implícita no tempo.

O tipo de aproximação empregada nas derivadas da temperatura com relação aos termos espaciais nos volumes internos foi CDS (*Central Differencing Scheme*), ou seja:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_e = \frac{T_E - T_P}{\Delta x} \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w = \frac{T_P - T_W}{\Delta x} \quad (6)$$

As aproximações em (5) e (6) são empregadas na face leste e oeste respectivamente. As aproximações das derivadas nos contornos esquerdo e direito foram simplificadas uma vez que utilizou-se condições de contorno de Neumann.

O sistema de equações resultante possui a seguinte forma geral:

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + b_P \quad (7)$$

Os nós internos, ou seja, todos exceto aqueles dos contornos, apresentam os seguintes coeficientes:

$$a_P = \rho c_p \frac{\Delta x^2}{\Delta t} + k_e + k_w \quad (8)$$

$$a_e = k_e \quad (9)$$

$$a_w = k_w \quad (10)$$

$$b_P = \rho c_p \frac{\Delta x^2}{\Delta t} T_P^0 \quad (11)$$

A aplicação das condições de contorno em $x=0$ e $x=L$ foram feitas por incorporação das mesmas nos volumes adjacentes ao contorno. Da aplicação da condição de contorno em $x=0$, os coeficientes resultantes são:

$$a_P = \rho c_p \frac{\Delta x^2}{\Delta t} + k_e \quad (12)$$

$$a_e = k_e \quad (13)$$

$$a_w = 0 \quad (14)$$

$$b_P = \rho c_p \frac{\Delta x^2}{\Delta t} T_P^0 + q''(t)\Delta x \quad (15)$$

Os coeficientes resultantes da aplicação da condição de contorno em $x=L$ são:

$$a_P = \rho c_p \frac{\Delta x^2}{\Delta t} + k_w \quad (16)$$

$$a_e = 0 \quad (17)$$

$$a_w = k_w \quad (18)$$

$$b_P = \rho c_p \frac{\Delta x^2}{\Delta t} T_P^0 \quad (19)$$

Resolvendo-se o sistema de equações dado pelos coeficientes e termos fontes de (8) a (19), é possível determinar o campo de temperaturas no sólido, uma vez que as condições de contorno e condição inicial são conhecidas.

Os valores de k_w e k_e foram determinadas conforme [12]:

$$k_w = \frac{2k_W k_P}{(k_W + k_P)} \quad (20)$$

$$k_e = \frac{2k_P k_E}{(k_P + k_E)} \quad (21)$$

Além do campo de temperatura, a temperatura no contorno em $x=L$ deverá ser calculada para que a solução do problema inverso seja possível, como será explicado detalhadamente a seguir. Essa temperatura calculada \hat{T} será comparada com a temperatura medida na mesma região ou contorno.

A temperatura calculada em $x=L$ é dada por:

$$\hat{T} = T_{P=N} \quad (22)$$

onde N é o último volume.

A temperatura em $x=0$ é dada por:

$$T_w = T_{P=1} + \frac{q''\Delta x}{2k_w} \quad (23)$$

onde T_w é a temperatura na parede do lado dos gases quentes, ou seja, no contorno em $x=0$.

B. Problema Inverso

1) *Procedimento Iterativo*: O PI aqui apresentado possui como única diferença, em relação ao PD, o fato de que a condição de contorno $q''(t)$ é desconhecida. Para resolver o PI, o PD será resolvido a partir de uma estimativa no fluxo de

calor e através da comparação entre a temperatura medida (Y) e calculada (\hat{T}), corrigir o fluxo de calor. A correção do fluxo de calor será feita por meio do método da bisseção.

O seguinte procedimento iterativo pode ser construído:

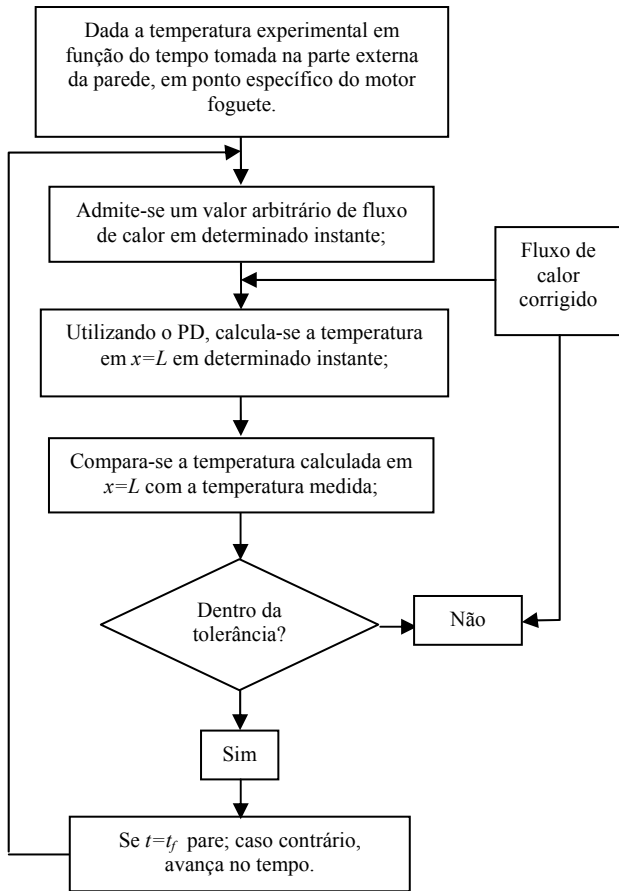


Fig. 6. Algoritmo para solução do PI.

2) Critério de parada

O critério de parada adotado para o processo iterativo foi:

$$|\hat{T} - Y| = \delta, \quad (24)$$

onde δ é a tolerância. Neste trabalho foi utilizado o valor igual a 1.10^{-15} .

C. Análise da estabilidade

Para validar e também analisar a estabilidade do programa computacional desenvolvido, considere um experimento hipotético, que simula o aquecimento de uma barra de alumínio de 10 mm do tipo ABNT 6061 em 2,0 segundos. As propriedades do material estão na Tabela 1. A massa específica e calor específico são dados retirados de [13]. A condutividade térmica foi aproximada conforme [3].

TABELA I. PROPRIEDADES FÍSICAS DO ALUMÍNIO 6061

Propriedade	Valor
Calor específico [J/(kgK)]	896,0
Massa específica [kg/m ³]	2700,0
Condutividade térmica [W/(mK)]	$k(T) = 136,0 \cdot \exp(1,6 \cdot 10^{-3} T)$

O fluxo de calor na barra em $x=0$ é conhecido e dado em MW/m^2 por:

$$q''(t) = \begin{cases} 5t & 0 \leq t \leq 1 \\ -5t + 10 & 1 < t \leq 2 \end{cases} \quad (25)$$

Esta função dá o perfil do fluxo mostrado a seguir na Fig. 7:

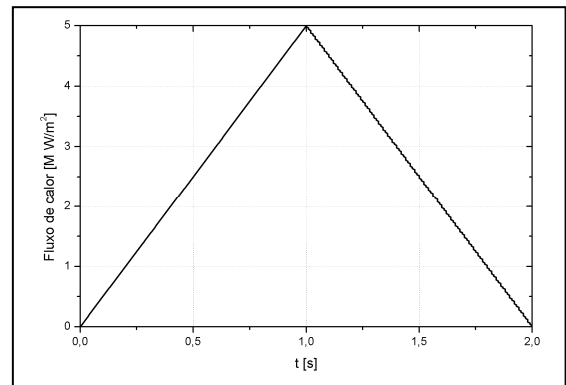


Fig. 7. Curva de fluxo utilizado no experimento hipotético

Considere também que para este experimento a temperatura inicial é 300 K. O número de volumes de controle utilizado foi 10 e o número de avanços no tempo foi 10.

Como a condição de contorno em $x=0$, ou seja, o fluxo de calor $q''(t)$ é conhecido, pode-se utilizar o PD para obter o perfil de temperatura na parte externa \hat{T} . Isso foi feito e os resultados podem ser vistos na Fig. 8, que mostra as temperaturas calculadas em $x=0$ e em $x=L$.

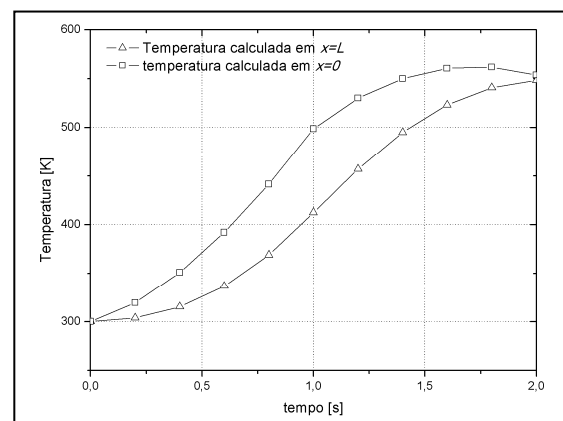


Fig. 8. Temperaturas nas paredes interna e externa obtidas pelo PD.

Para validar o programa computacional, suponha que o perfil da parede externa \hat{T} , calculado, seja o perfil de temperaturas medidas Y . Fazendo-se isso, pode-se utilizar a metodologia de PI para determinar o fluxo de calor. Portanto o objetivo é utilizar o perfil de temperatura "medido" na superfície externa, para obter o mesmo perfil de fluxo dado em (25). Os resultados obtidos podem ser vistos na Fig. 9:

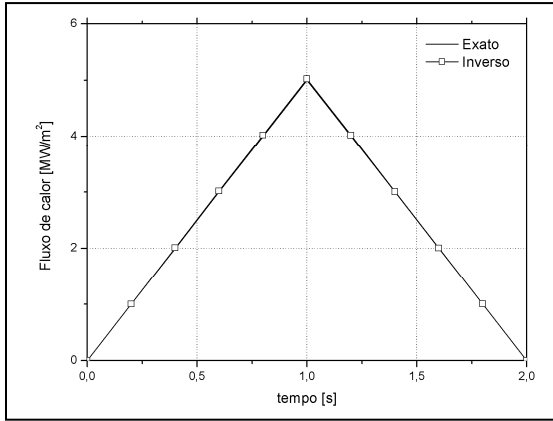


Fig. 9. Fluxo de calor exato e obtido por PI.

A análise da estabilidade da solução pode ser feita se considerarmos que o perfil de temperatura medido na parede externa ($x=L$) possui erros dados por:

$$Y = \hat{T} + \omega\sigma, \quad (26)$$

em que ω considera erros normalmente distribuídos, ou seja, existe 99% de probabilidade do valor ω se encontrar entre [7]:

$$-2,576 < \omega < 2,576 \quad (27)$$

O parâmetro σ constitui-se na variação causada pelos erros de medição. Para a metodologia utilizada, σ deve ser pequeno, ou seja, menor ou igual a 0,001.

D. Resultados

Os dados da Tabela II abaixo são temperaturas experimentais retiradas do trabalho de [1]. Neste trabalho a autora buscava determinar perfis de temperatura em tubeira de motor-foguete.

TABELA II. TEMPERATURAS EXPERIMENTAIS

Tempo [s]	Temperatura [K]
0	297,7
1	307,5
2	319,8
3	332,0
4	340,6
5	349,2
6	359,0
7	368,8
8	377,3
9	385,9
10	395,7

A autora em [1] utiliza um modelo em coordenadas cartesianas com condições de contorno idênticas às utilizadas no presente trabalho. A parede da tubeira do motor teste utilizado é constituído de aço 4340 e grafite HLM-85. A espessura da parede é de 3,25 mm. As demais propriedades físicas podem ser vistas na Tabela III, cujos dados também foram retirados de [1]:

TABELA III. PROPRIEDADES DO GRAFITE HLM-85

Propriedade	Valor
Calor específico [J/(kgK)]	45,6
Massa específica [kg/m3]	1256,0
Condutividade térmica [W/(mK)]	1830,0

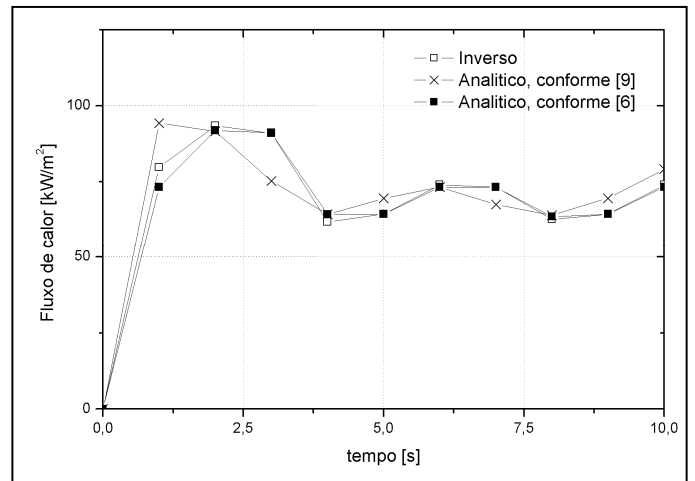


Fig. 10. Fluxo de calor exato e obtido por PI.

Os resultados podem ser vistos na Fig. 10. Esta figura mostra os valores encontrados para o fluxo de calor utilizando a metodologia do presente trabalho e a solução analítica dada por [6] e [9]. Em [9], a solução analítica é da seguinte forma:

$$q'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \frac{d^n Y}{dt^n}, \quad (28)$$

onde n é a ordem da derivada considerada.

A solução analítica foi aproximada utilizando cinco derivadas, como se segue:

$$\frac{dY}{dt} \approx \frac{Y_{j+1} - Y_{j-1}}{2\Delta t} \quad (29)$$

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} \approx \frac{Y_{j-1} - 2Y_j + Y_{j+1}}{\Delta t^2} \quad (30)$$

$$\frac{d^3 Y}{dt^3} \approx \frac{-Y_{j-2} + 2Y_{j-1} - 2Y_{j+1} + Y_{j+2}}{2\Delta t^3} \quad (31)$$

$$\frac{d^4 Y}{dt^4} \approx \frac{Y_{j-2} - 4Y_{j-1} + 6Y_j - 4Y_{j+1} + Y_{j+2}}{\Delta t^4} \quad (32)$$

$$\frac{d^5 Y}{dt^5} \approx \frac{-Y_{j-3} + 4Y_{j-2} - 5Y_{j-1} + 5Y_{j+1} - 4Y_{j+2} + Y_{j+3}}{2\Delta t^5} \quad (33)$$

Os autores em [6] utilizam uma solução analítica para a determinação do fluxo de calor simplificada pela hipótese de que a derivada da temperatura com o tempo é independente da espacial. A mesma é dada da seguinte forma:

$$q'' = \frac{kL}{\alpha} \frac{dY}{dt} \quad (34)$$

em que a derivada da temperatura em relação ao tempo foi calculada da seguinte forma:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{Y_j - Y_{j-1}}{\Delta t} \quad (35)$$

E. Conclusão:

Pode-se concluir que a metodologia apresentada é robusta, válida tanto para problemas lineares quanto não lineares. Uma vantagem do método é que não é necessário resolver todo o domínio do tempo quando se deseja determinar o fluxo de calor em determinado instante. Outro ponto que deve ser salientado é que a metodologia abordada é muito sensível a erros experimentais. Isso significa que apenas quando o sistema de medição possui erros da ordem de menos de um décimo de grau esta metodologia pode ser utilizada.

A principal vantagem do método é a simplicidade na programação do algoritmo, visto que uma vez programado o problema direto, basta usá-lo repetidas vezes. Outra vantagem é o tempo computacional baixo quando comparado com métodos mais elaborados nos quais matrizes (jacobiano) são utilizadas.

Agradecimentos

Agradecemos ao programa de pós-graduação em engenharia mecânica (PG-MEC) e ao apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Agradecemos ao engenheiro Msc. Diego F. Moro, que com sua experiência auxiliou na otimização do código computacional. O segundo autor é bolsista do CNPQ.

Referências

- [1] A. L. Kimura, "Transferência de calor em motor-foguete," Dissertação de mestrado, ITA, São José dos Campos, S.P., 1987
- [2] A. N. Tikhonov and Y. V. Arsenin, "Solutions of ill posed problems," Winston & Sons, Washington, DC, 1977.
- [3] C. Y. Ho, M. W. Ackerman, K. Y. Wu, S. G. Oh, and T. N. Havill, "Thermal Conductivity of Ten Selected Binary Alloy Systems," J. Phys. Chem., Vol. 7, No. 3, 1978, pp. 959-1177.
- [4] D. Langford, "New Analytic Solutions of the one-dimensional heat equation for temperature and heat flow rate both prescribed at the same fixed boundary (with applications to the phase change problem)," Quarterly of Applied Mathematics, 24, pp. 315-322, 1976.
- [5] J. V. Beck, J. C. Blackwell and C. R. St Clair, "Inverse heat conduction- Ill Posed Problems," Wiley, Interscience, Inc, New York, 1985.
- [6] J. K. Kacynski, A. Pavli, T. Smith, "Experimental Evaluation of Heat Transfer on a 1030:1 Area Ratio Rocket Nozzle, NASA, 1987.
- [7] M. N. Ozisik, "Heat Conduction," John Wiley & Sons, INC, 2° ed., North Carolina, Raleigh, 1993.
- [8] O. M. Alifanov, Y. V. Egorov, "Algorithms and results of solving the inverse heat conduction boundary problem in two dimensional formulation," Journal of Engineering Physics, vol. 48, n. 4, 1985.
- [9] O. R. Burggraf, "An exact solution of the inverse problem in heat conduction theory and applications," ASME J. heat Transfer, 86, 1964, pp 373-380.
- [10] R. C. Mehta, "Estimation of heat transfer coefficient in a rocket nozzle," AIAA Journal, 19, pp. 1085-1086, August, 1981.
- [11] S. D. Williams, D. M. Curry, "An Analytical and Experimental Study for Surface heat flux determination," J. Spacecraft, 14, pp. 632-637, october, 1977.
- [12] S.V. Patankar, "Numerical heat transfer and fluid flow," Hemisphere Publishing Corporation, Whashington D.C., 1980.
- [13] W. D. Callister, "Ciência e engenharia dos materiais: uma introdução," 5° edição, Rio de janeiro, LTC, 2000.