

---

# ESTIMAÇÃO DO ERRO DE ARREDONDAMENTO EM PROBLEMAS TÉRMICOS 1D

Lucas Petzold Barbosa Lima  
Curso de Engenharia Mecânica  
Universidade Federal do Paraná  
Curitiba, Brasil  
lucaspetzold1903@gmail.com

Carlos Henrique Marchi  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Universidade Federal do Paraná  
Curitiba, Brasil  
chmcf@gmail.com

**Resumo**—Neste trabalho foi estudado o efeito do erro de arredondamento sobre dois problemas de dinâmica dos fluidos computacional, são eles: difusão de calor unidimensional permanente e advecção-difusão unidimensional permanente. O primeiro foi discretizado através do método das diferenças finitas e o segundo pelo método dos volumes finitos, ambos implementados em linguagem Fortran. Posteriormente foi analisado o desempenho de estimador já existente para esse tipo de erro, o qual leva em conta a ordem de grandeza do máximo valor de volumes de controles, e também novos estimadores foram propostos, de modo que se obtivesse o valor do erro mais próximo do real.

**Palavras-chave:** erro de arredondamento; erro numérico; equação de Poisson; equação de advecção-difusão.

## I. INTRODUÇÃO

Para a solução de problemas de engenharia podem ser empregados três métodos diferentes (Marchi, 2016): experimentais, analíticos e numéricos. Os métodos experimentais são afetados por erros experimentais, os quais consistem na diferença entre o valor real de uma variável com o valor obtido experimentalmente. Os métodos analíticos fazem uso de modelos matemáticos que representam o problema a ser solucionado. Porém, para a solução desse modelo matemático se fazem necessárias simplificações do modelo real, isso acaba ocasionando em erros de modelagem, ou seja, são mensurados através da diferença entre o valor real da variável de interesse e sua solução analítica exata.

Os métodos numéricos, assim como os analíticos, também fazem uso de modelos matemáticos, mas, às vezes, sem simplificações, isso permite a solução de problemas mais gerais. Entretanto, para a sua utilização se faz

necessário o uso de computadores. Soluções numéricas sofrem influência não somente de erros de modelagem, mas também de erros numéricos, os quais se dividem em erros de discretização ( $E_h$ ), iteração ( $E_i$ ), arredondamento ( $E_\pi$ ) e outros ( $E_o$ ). O erro numérico pode ser descrito de acordo com (1).

$$E_n = f(E_h, E_i, E_\pi, E_o). \quad (1)$$

Erros de discretização provêm de aproximações numéricas realizadas durante a discretização do domínio de cálculo.

Erros de iteração são fruto da utilização de métodos iterativos na solução de um modelo matemático, equações não lineares, utilização de métodos multigrid.

Outras fontes de erros podem ser causadas por erros de programação, uso incorreto do modelo numérico para a aproximação do modelo matemático, pelo uso incorreto do programa computacional e por qualquer outra fonte imprevisível.

Os erros de arredondamento ocorrem devido à representação finita dos números reais nos computadores. O valor desse tipo de erro pode ser calculado através da diferença entre o valor exato do número com o resultado aproximado obtido.

Nesse contexto, estudou-se o comportamento do erro de arredondamento em dois problemas: difusão de calor unidimensional permanente e advecção-difusão unidimensional permanente. Para esse estudo variou-se o *solver* (Tri-diagonal matrix algorithm, eliminação de Gauss e Gauss-Seidel), tamanho dos elementos de malha e precisão [simples (PS), dupla (PD) e quádrupla (PQ)].

Posteriormente buscou-se avaliar o desempenho de estimador já existente para a perda de precisão causada por esse tipo de erro e, principalmente, propor um novo estimador.

O primeiro problema estudado foi o de difusão de calor unidimensional permanente (2), no qual a temperatura (T) é função da coordenada espacial (x) e do termo fonte (S), o qual poderia valer 0 ou 1, pois o problema foi aplicado nas condições de contorno de Dirichlet. Pode ser solucionado analiticamente, por separação de variáveis, através de (2):

$$d^2T / dx^2 = S. \quad (2)$$

Para que fosse possível o cálculo do erro de arredondamento, o problema foi solucionado numericamente pelo método das diferenças finitas com os seguintes solvers: tri-diagonal matrix algorithm (TDMA), eliminação de Gauss (EG) e Gauss-Seidel (GS). O problema foi aplicado nas seguintes condições de contorno:  $x = 0$ ,  $T(0) = 0$  e para  $x = 1$ ,  $T(1) = 1$ . Sendo assim o erro de arredondamento pôde ser calculado de acordo com (3), sabendo que não há influência de erros de discretização, iteração e programação, já que o código já foi bem trabalhado e revisado.

$$E_\pi = T(\text{analítico}) - T(\text{numérico}). \quad (3)$$

O segundo problema estudado foi o de advecção-difusão unidimensional em regime permanente. Neste problema a temperatura depende do número de Peclet (Pe), o qual é definido pela razão entre a taxa de advecção e taxa de difusão de uma grandeza física, e da coordenada espacial, é descrito por (4). Assim como o problema de difusão de calor, foram aplicadas condições de contorno de Dirichlet, ou seja, para  $x = 0$ ,  $T(0) = 0$  e para  $x = 1$ ,  $T(1) = 1$ . Foi utilizado somente o solver tridiagonal matrix algorithm.

$$d^2T / dx^2 = Pe \, dT / dx. \quad (4)$$

As simulações foram feitas com aumento gradual do número de nós (N) da malha, até que o computador não possuísse mais memória para resolução do problema. O computador utilizado possui processador Intel Core i7 e memória RAM de 8 GB. Para confecção de gráficos foi utilizado os erros de arredondamento máximo de cada simulação numérica.

TABELA I: PARÂMETROS DAS SIMULAÇÕES REALIZADAS

Problema	Simulação	Solver	Precisão	Termo fonte	Maior N
Difusão de calor	1	TDMA	Dupla	Nulo	20971521
	2	EG	Dupla	Nulo	10241
	3	GS	Dupla	Nulo	5121
	4	TDMA	Simples	Nulo	41943041
	5	TDMA	Quádrupla	Nulo	10485761
	6	TDMA	Quádrupla	Não nulo	40961
	7	TDMA	Dupla	Não nulo	40961
Advecção difusão	8	TDMA	Dupla	---	10485760
	9	TDMA	Simples	---	20971520

A tabela I mostra os parâmetros utilizados em cada simulação realizada. As simulações foram sendo realizadas até que o computador não possuísse memória para resolução de malhas mais finas. A última coluna da tabela I mostra o maior número de volumes de controle utilizados para cada caso. Posteriormente, foram plotados gráficos de erro máximo de arredondamento versus número de nós foram confeccionados com ambos os eixos em escala logarítmica.

Depois de realizadas as simulações especificadas na tabela I foi analisado o desempenho de um estimador grosseiro (Marchi, 2016) da perda de precisão (p), ou seja, o número de algarismo afetados por erro de arredondamento. N é o número máximo de volumes de controle nas dimensões espaciais do problema e O(N) é a ordem de grandeza da variável entre parênteses.

$$p_{\text{máx}} = O(N) \text{ a } O(N^2). \quad (5)$$

A tabela 2 mostra os resultados obtidos nessa análise.

TABELA II: RESULTADOS DA ANÁLISE DO ESTIMADOR PARA PERDA DE PRECISÃO

Simulação	N	O(N)	O(N <sup>2</sup> )	Perda de dígitos estimada	Perda de dígitos real	Resultado dentro do esperado ?
1	2.10E+7	7	11	7 a 11	11	Sim
2	1.02E+4	4	8	4 a 8	4	Sim
3	5.12E+3	3	7	3 a 7	6	Sim
4	1.31E+6	6	12	6 a 12	7	Sim
5	1.05E+7	7	12	7 a 12	9	Sim
6 e 7	4.10E+4	4	9	4 a 9	5	Sim
8	5.24E+6	6	13	6 a 13	8	Sim
9	1.31E+6	6	12	6 a 12	7	Sim

Com os valores obtidos nas simulações foi proposto um novo estimador para  $E_\pi$  baseado no estimador de Richardson onde  $U = K_u N^{p_l}$ , N é o número de nós,  $p_l$  é a ordem assintótica (para erros de arredondamento utiliza-se  $p_l = 2$ ) e  $K_u$  é um coeficiente. Para cálculo de  $K_u$  foi necessária a resolução do seguinte sistema de equações:

$$E_{\pi i} - E_{\pi 1} = K_u N_1^{p_l}. \quad (6)$$

$$E_{\pi_i} - E_{\pi_2} = K_u N_2^{p1}. \quad (7)$$

Para resolver os sistemas foram escolhidos valores de  $N$  aleatórios e seus valores de erro de arredondamento respectivos.

A tabela III mostra as equações obtidas para estimação de  $E_{\pi}$  de cada caso. Para que fosse possível a representação da curva de estimação no gráfico di-log, os valores estimados foram colocados em módulo.

TABELA III: EQUAÇÕES DOS ESTIMADORES PROPOSTOS

Simulação	Estimador ( $U$ )
1	$-3.54E-19N^2$
2	$-1.41E-19N^2$
3	$-1.41E-19N^2$
4	$-5.65E-13N^2$
5	$-2.26E-39N^2$
6	$-1.63E-38N^2$
7	$-4.55E-20N^2$
8	$-1.66E-21N^2$
9	$-1.93E-12N^2$

As figs. de 1 a 9 mostram os gráficos de erro de arredondamento versus número de nós, bem como a curva de estimação do erro.

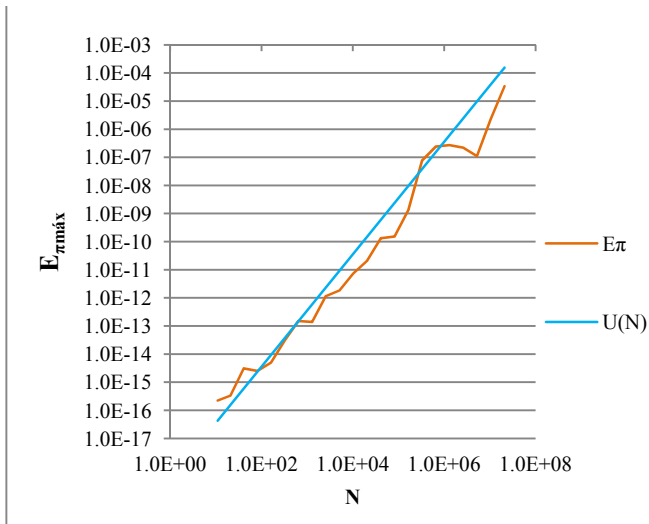


Figura 1. Gráficos da simulação 1.

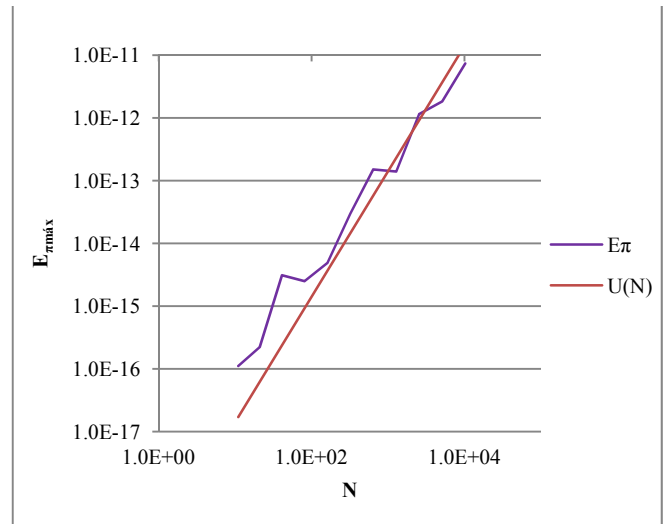


Figura 2. Gráficos da simulação 2.

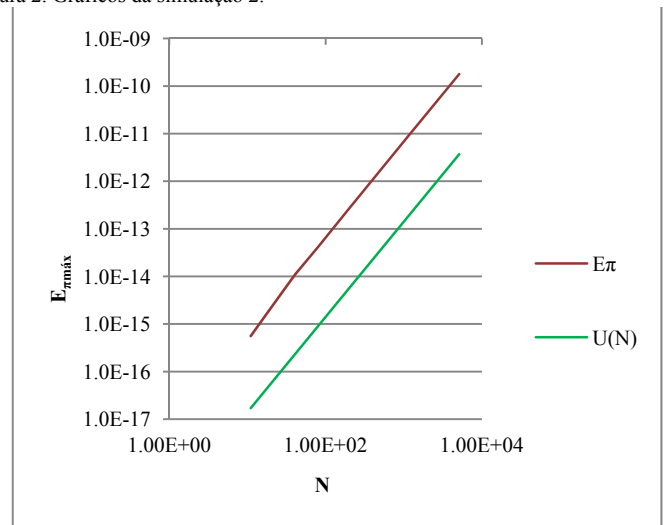


Figura 3. Gráficos da simulação 3.

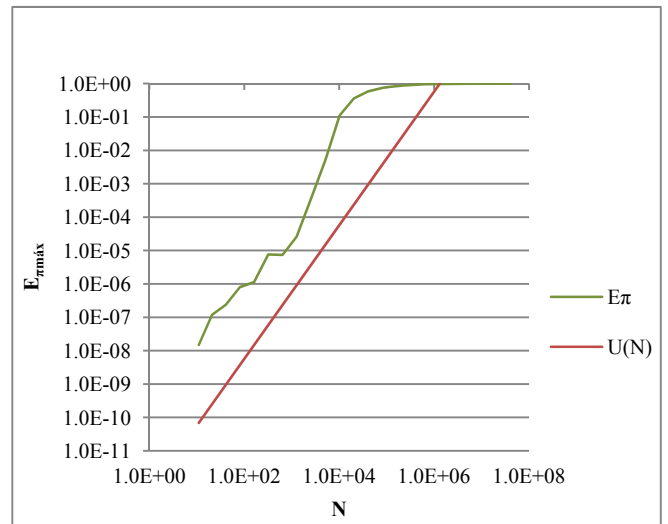


Figura 4. Gráficos da simulação 4.

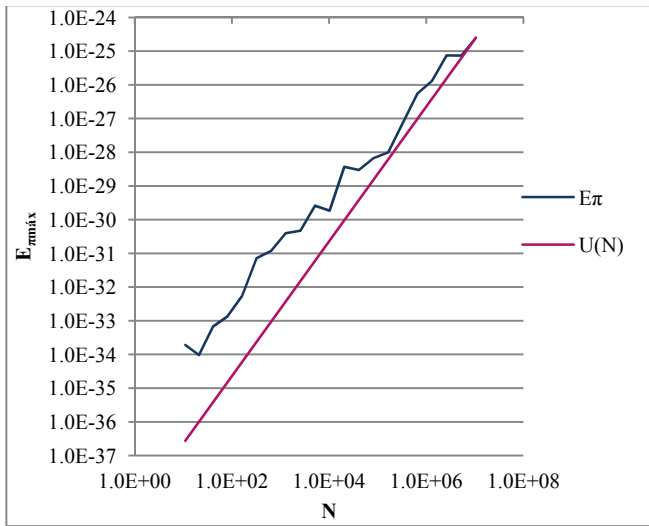


Figura 5. Gráficos da simulação 5.

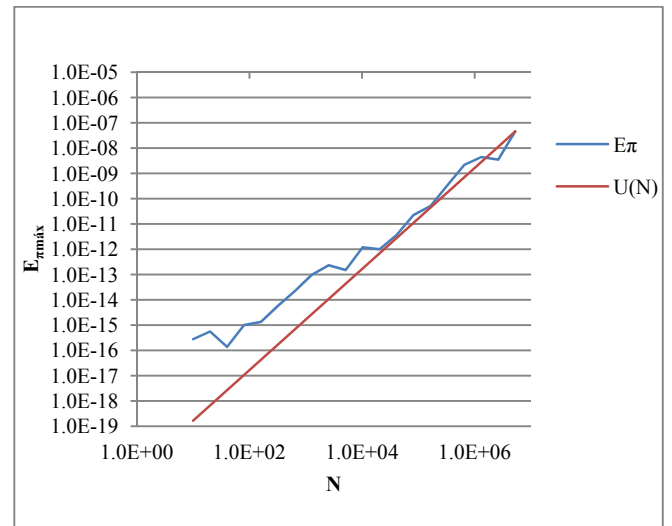


Figura 8. Gráficos da simulação 8.

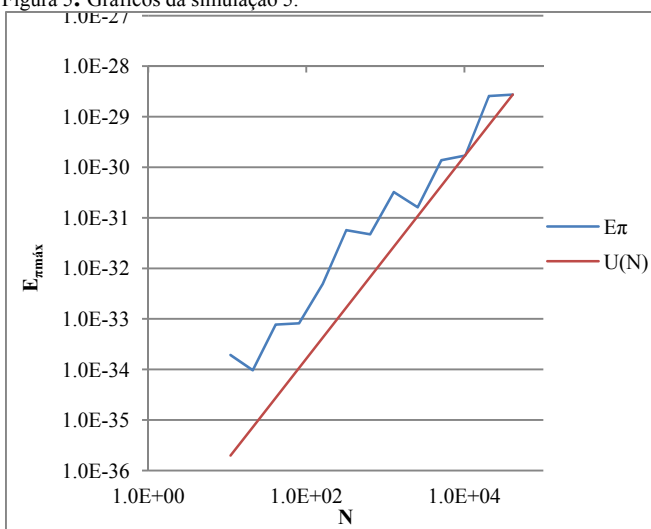


Figura 6. Gráficos da simulação 6.

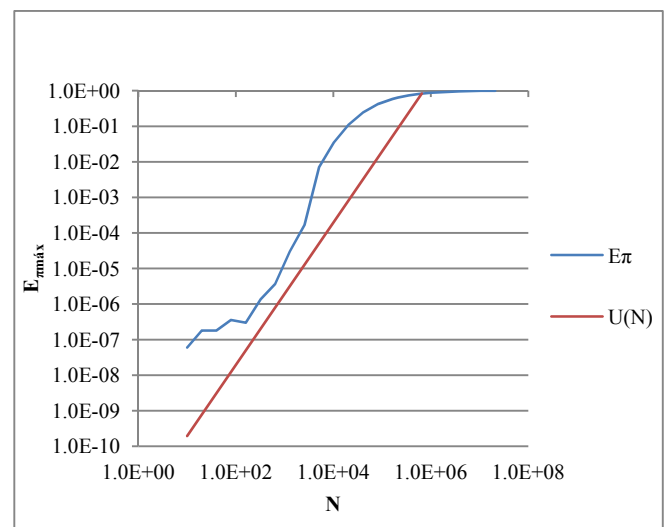


Figura 9. Gráficos da simulação 9.

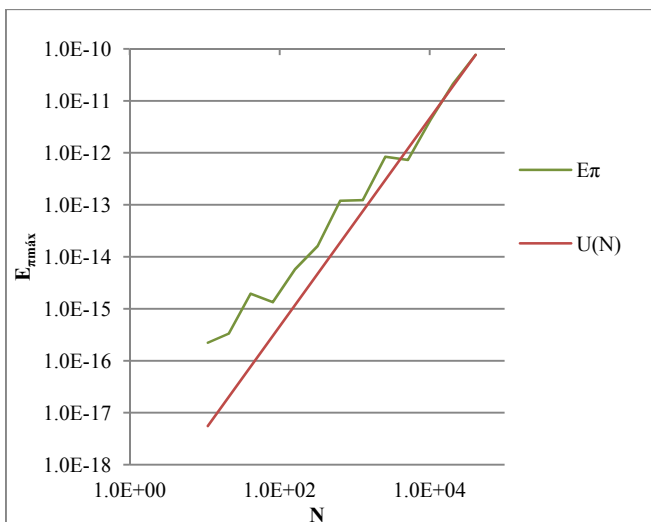


Figura 7. Gráficos da simulação 7.

Os resultados e as simulações sugerem que o erro de arredondamento possui um comportamento aleatório, mas que sempre aumenta com o aumento do número de nós já que é necessário um maior número de operações matemáticas para solução do problema.

Com relação ao desempenho do estimador grosseiro para perda de precisão baseado na ordem de grandeza de  $N$ , é possível notar que, apesar de os resultados estarem dentro do esperado em todos os casos, o estimador não é eficiente, pois ele superestima a perda de precisão, ou seja, ela é bem maior do que na realidade.

Os estimadores propostos nesse trabalho possuem bom desempenho para a estimação do erro de arredondamento. Ao analisar os gráficos, pode-se perceber que seu valor se aproxima cada vez mais do valor real à medida que a malha vai sendo refinada.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio financeiro do CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior). O segundo autor é bolsista do CNPq.

## REFERÊNCIAS

- [1] Ruggiero, M.A.G., Lopes, V.L.R., Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais. Editora Pearson., 1998.
- [2] Mou, Shan-Cong, et al. “An example for the effect of round-off errors on numerical heat transfer”. Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, vol. 72, no 1, julho de 2017, p. 21–32. Taylor and Francis+NEJM, doi:10.1080/10407790.2017.1338096.
- [3] C. H. Marchi, Introdução à dinâmica dos fluidos computacional. Curitiba: UFPR, 2016. Apostila disponível em <http://ftp.demec.ufpr.br/disciplinas/TM257>. Acesso em 27/07/2018.