

Esquemas de Alta Ordem para a Solução de escoamentos de Fluidos sem Dispersão Numérica

High Order Schemes for the Solution of Fluid Flows without Numerical Dispersion

Carlos Henrique Marchi

Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor - SINMEC
Depto. Eng. Mecânica/UFSC Caixa Postal 476, CEP 88040-900, Florianópolis, SC
E-mail: EMC1CHI@BRUFSC.BITNET

Abstract

This paper advances the new numerical scheme CEL which permits high order schemes to be used without the undesired numerical dispersion. Three new interpolation functions are proposed: CDS-L, QUICK-L and ADS. The performance of these functions are compared with available schemes in the literature, as the UDS, CDS, WUDS, FIC, QUICK and TVD. Diffusive/advective and advective/transient one-dimensional problems are solved. The best agreement with analytical and numerical solutions was obtained with the ADS, followed by the TVD, QUICK-L and CDS-L.

Keywords: Numerical Methods, Finite Volume, Numerical Diffusion, Numerical Dispersion, Numerical Schemes, Fluid Flows.

Resumo

São fornecidas explicações para as causas da difusão e dispersão numéricas. Introduz-se o procedimento CEL que permite resolver escoamentos de fluidos usando esquemas de alta ordem sem haver dispersão numérica. Três novas funções de interpolação são propostas: CDS-L, QUICK-L e ADS. O desempenho destas funções é comparado a alguns esquemas disponíveis na literatura: UDS, CDS, WUDS, FIC, QUICK e TVD. Problemas do tipo advectivo-difusivo e advectivo-transiente unidimensionais são resolvidos. O esquema ADS foi o que proporcionou a melhor concordância entre as soluções numéricas e exatas dos problemas resolvidos, seguido pelos esquemas TVD, QUICK-L e CDS-L.

Palavras-chave: Métodos Numéricos, Volumes Finitos, Difusão Numérica, Dispersão Numérica, Funções de Interpolação, Escoamentos de Fluidos.

Introdução

Motivação

No âmbito do Método dos Volumes Finitos (Roache, 1976; Patankar, 1980; Minkowicz et al., 1988), o tipo de função de interpolação que se adota pode ser considerado como uma das principais características de um modelo numérico, senão a principal, responsável pela qualidade da solução obtida. Entende-se por função de interpolação, ou esquema numérico, o meio utilizado para se expressar o valor da incógnita do problema, e de sua derivada normal, nas faces dos volumes de controle que são usados para discretizar o domínio de cálculo.

Outras características de um modelo numérico como o método de solução do sistema linear de equações, solução simultânea ou segregada, método de acoplamento pressão-velocidade, além da própria função de interpolação, influenciam a taxa de convergência do processo iterativo ou o custo computacional envolvido na solução de um problema. Estas características não afetam a solução em si. Em oposição, funções de interpolação diferentes fornecem resultados numéricos também diferentes. Outra questão importante refere-se à malha utilizada, se é ou não estruturada.

A motivação deste trabalho está associada ao desenvolvimento e aplicação de funções de interpolação que apresentem melhor desempenho do que aquelas habitualmente empregadas com o Método dos Volumes Finitos.

Difusão e Dispersão Numéricas

A definição do termo difusão numérica, também conhecido por viscosidade artificial, difusão falsa ou dissipação numérica, e a explicação de suas causas são assuntos ainda de muita controvérsia na literatura (Patankar, 1980; Silva, 1991; Roache, 1972; Sharif e Busnaina, 1993; Raithby, 1976a). Adotam-se no presente trabalho as definições dadas por Sharif e Busnaina (1993) para os termos difusão e dispersão numéricas. Por “difusão numérica” será entendido como qualquer efeito que tenda a suavizar ou amortecer gradientes ou descontinuidades presentes na solução exata de um problema (Fig. 1a). Os efeitos que resultam em oscilações na solução (Fig. 1b) serão denominados de “dispersão numérica”. Tanto a difusão numérica quanto a dispersão numérica são erros introduzidos na solução de um problema via função de interpolação.

Sabe-se que esquemas de primeira ordem como o UDS, Upstream Difference Scheme, (Courant et al., 1952; Patankar, 1980) não produzem dispersão numérica, no entanto, em geral, apresentam elevados níveis de difusão numérica. Já nos esquemas de segunda ou mais alta ordem, os níveis de difusão numérica são menores, às vezes muito menores. Entretanto, dependendo do escoamento em consideração, todos provocam o surgimento de oscilações que podem comprometer totalmente o significado físico da solução obtida. Exemplos de esquemas de alta ordem são: CDS (Central Difference Scheme) (Patankar, 1980), UDS de 2ª ordem (Price, 1966) e QUICK (Leonard, 1979). Normalmente, define-se a ordem de um esquema como a ordem do erro de truncamento da função de interpolação em relação à série de Taylor (Hirsch, 1991). Assim, como a função do esquema CDS é uma reta, o seu erro de truncamento será proporcional a Δx^2 e, portanto, o esquema CDS é considerado de 2ª ordem no espaço.

Com base em constatações práticas, pode-se dizer que se o tipo da função de interpolação for diferente do tipo da solução exata, a difusão numérica manifesta-se na solução numérica. O caso ideal ocorre quando o tipo da função de interpolação é idêntico àquele da solução exata e, assim, a solução numérica concordará perfeitamente com a solução exata do problema, como na Fig. 1a, já que a difusão numérica estará ausente. Por exemplo, considere-se um problema cuja solução exata seja dada por uma função senoidal. Se a solução numérica for obtida através de qualquer função de interpolação que não seja uma senoide, apresentará difusão numérica. Acrescente-se que a comparação entre o tipo da função de interpolação e o tipo da solução exata deve ser local. Isto é consequência do fato de que o tipo da solução exata pode variar ao longo do espaço.

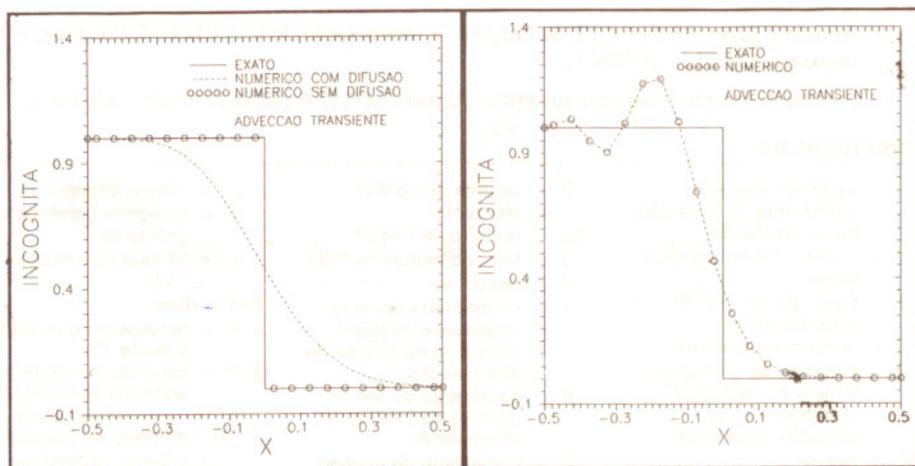


Fig. 1a Exemplo de difusão numérica; b Exemplo de dispersão numérica

De acordo com a definição dada ao termo difusão numérica e a explicação de sua causa, acima, deve-se notar que a difusão numérica não ocorre apenas em escoamentos multidimensionais, como geralmente pensa-se (Patankar, 1980; Patel et al., 1985; Niecele, 1985), também pode ocorrer em problemas unidimensionais, mesmo em regime permanente.

Tão importante quanto o tipo da função de interpolação é o sentido de propagação da informação, ou seja, se o esquema é à montante (UDS) ou à jusante (DDS, Downstream Difference Scheme), em relação ao sentido do escoamento, da interface do volume de controle em consideração. Esta afirmação pode ser melhor entendida através da Fig. 1a. A solução exata é de primeira ordem (considerando a definição da ordem dos esquemas numéricos) com uma descontinuidade em $x = 0$ no tempo t . A solução numérica, representada pela linha tracejada, foi obtida com uma função de interpolação de primeira ordem mas com avaliação à montante (UDS). Com isso, ocorreu difusão numérica. Já na obtenção da solução representada pelos círculos usou-se UDS antes da descontinuidade e DDS a partir daí, resultando na perfeita concordância da solução numérica com a exata.

A explicação sobre a causa da difusão numérica, dada acima, concorda bem com os ótimos resultados que vêm sendo obtidos com os esquemas do tipo TVD (Total Variation Diminishing) (Harten, 1983; Roe, 1985; Hirsch, 1990; Ortega et al., 1991). Estes esquemas têm a capacidade de variar ao longo do espaço tanto a sua ordem como o sentido de propagação da informação usada, assumindo comportamentos do tipo UDS, CDS ou DDS. Com isso diminui-se consideravelmente a difusão numérica.

Objetivos

Os esquemas geralmente empregados junto ao Método dos Volumes Finitos são o UDS, Exponencial (Spalding, 1972), WUDS (Raithby e Torrance, 1974) e Power-Law (Patankar, 1980). Tem-se observado (Smith e Hutton, 1982; Patel et al., 1985; Niecele, 1985) que estes esquemas introduzem muita difusão numérica nas soluções. Para contornar este problema, malhas bastante refinadas têm sido usadas, além de outros artifícios. Outro esquema, mas menos utilizado, é o QUICK. Embora apresente menos difusão numérica, não raro, a solução obtida contém oscilações (Chen e Falconer, 1992).

Em face ao exposto acima, os objetivos do presente trabalho são:

- 1) Introduzir um procedimento, denominado CEL (Coeficientes Explicitamente Limitados), que permite o emprego de esquemas de alta ordem sem, no entanto, a solução ser contaminada por dispersão numérica.
- 2) Aplicar o procedimento CEL às funções de interpolação do tipo CDS e QUICK gerando os esquemas CDS-L e QUICK-L.
- 3) Introduzir um novo esquema numérico chamado ADS (Adaptable Difference Scheme).

Nomenclatura

a = valor mínimo do coeficiente A para não haver oscilação	P = volume de controle elementar	ρ = massa específica
A = coeficiente do sistema linear	Pe = número de Peclet	ϕ = incógnita genérica do problema
B = termo independente do sistema linear	r = fator do esquema TVD	ψ = limitador do esquema TVD
C = número de Courant	t = tempo	Subscritos
E, W = volumes de controle a leste e a oeste de P	x = coordenada espacial	e, w = faces leste e oeste do volume P
L = comprimento do domínio de cálculo	α = coeficiente do termo advectivo da função de interpolação	E, W = volumes de controle a leste e a oeste de P
M = massa	β = coeficiente do termo difusivo da função de interpolação	o = contorno esquerdo do domínio de cálculo
M = fluxo de massa	Γ = coeficiente da difusão	P = volume de controle elementar
n = número de volumes de controle do domínio	Δt = intervalo de tempo	L = contorno direito do domínio de cálculo
	Δx = comprimento do volume de controle	

- 4) Comparar o desempenho dos esquemas propostos (CDS-L, QUICK-L e ADS) àqueles disponíveis na literatura: UDS, CDS, WUDS, QUICK, FIC e TVD.

Equação Governante

Visando atingir os objetivos propostos, a equação escolhida para efetuar a comparação entre os esquemas numéricos é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \phi) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (1)$$

onde ρ , u e Γ são constantes e representam a massa específica, a velocidade e o coeficiente de difusão; t e x são o tempo e a coordenada espacial; e ϕ é a incógnita do problema.

Embora a Eq. 1 seja linear e unidimensional, ela é suficiente para mostrar os efeitos indesejáveis da difusão e dispersão numéricas sobre a solução de um problema. Complexidades adicionais como multidimensionalidade, não-linearidades e equações acopladas só contribuiriam para dificultar a aplicação do procedimento CEL e a realização das comparações entre os esquemas.

Funções de Interpolação

Utilizando-se o Método dos Volumes Finitos (Roache, 1976; Patankar, 1980; Minkowicz et al., 1988), a Eq. 1 é integrada sobre o volume de controle elementar P, delimitado pelas faces oeste (w) e leste (e), Fig. 2, e ao longo do tempo obtendo-se

$$\frac{M}{\Delta t} (\phi_p - \phi_p^o) + \dot{M} (\phi_e - \phi_w) = \Gamma \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] \quad (2)$$

onde Δt representa o intervalo de tempo e

$$M = \rho \Delta x \quad (3)$$

$$\dot{M} = \rho u \quad (4)$$

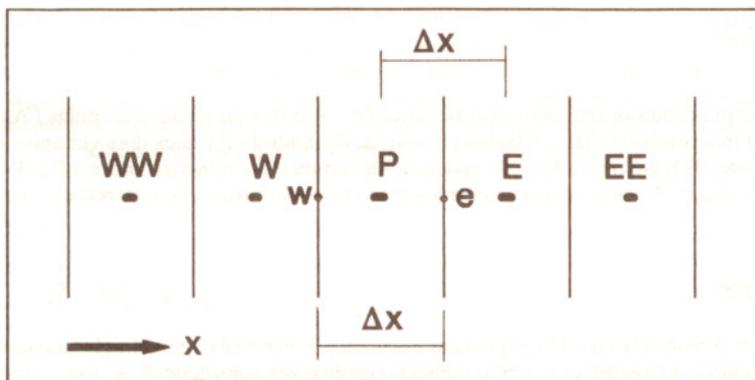


Fig. 2 Discretização do domínio de cálculo

Na integração da Eq. 1, considerou-se ρ , u e Γ constantes ao longo do tempo e do espaço. Assim, a massa do volume de controle (M) e o fluxo de massa (\dot{M}) através de suas faces são constantes em todo o domínio de cálculo. Todas as incógnitas ϕ e suas derivadas da Eq. 2 são avaliadas no nível de tempo $t + \Delta t$, exceto o termo ϕ_p^o que é considerado conhecido e avaliado no nível de tempo t . Portanto, uma formulação totalmente implícita está sendo empregada.

Os diversos tipos de função de interpolação surgem da forma escolhida para se expressar o valor da incógnita ϕ , e de sua derivada normal, nas faces dos volumes de controle. Generalizando, para a face leste pode-se escrever (Raithby e Torrance, 1974)

$$\phi_e = (1/2 + \alpha_e) \phi_p + (1/2 - \alpha_e) \phi_E \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e = \beta_e \frac{(\phi_E - \phi_p)}{\Delta x} \quad (6)$$

onde α e β dependem do tipo da função de interpolação. Substituindo-se as Eqs. 5 e 6, e suas análogas para a face oeste, na Eq. 2 obtém-se

$$A_p \phi_p = A_e \phi_E + A_w \phi_W + B_p \quad (7)$$

onde

$$A_e = -\dot{M} (1/2 - \alpha_e) + \beta_e \Gamma / \Delta x \quad (8)$$

$$A_w = \dot{M} (1/2 + \alpha_w) + \beta_w \Gamma / \Delta x \quad (9)$$

$$A_p = A_p^o + A_e + A_w \quad (10)$$

$$B_p = A_p^o \phi_p^o \quad (11)$$

$$A_p^o = M / \Delta t \quad (12)$$

A Eq. 7 representa um sistema linear de equações com três diagonais não-nulas (A_p , A_e , A_w) mais o termo independente (B_p), relaciona o volume de controle P a seus dois vizinhos: os volumes leste (E) e oeste (W), e é o resultado da aplicação de um método numérico sobre a Eq. 1 que modela um fenômeno físico. A seguir são apresentados cinco tipos de funções de interpolação disponíveis na literatura.

Esquema UDS

O esquema à montante ou UDS (Upstream Difference Scheme) é o mais simples e estável de todos. Foi desenvolvido por Courant et al. (1952). Para aplicá-lo basta considerar $\beta = 1$ e

$$\alpha = \begin{cases} 1/2 & \text{se } u \geq 0 \\ -1/2 & \text{se } u < 0 \end{cases} \quad (13)$$

Esquema CDS

Admitindo-se um perfil linear para ϕ entre os volumes P e E (Fig. 2) tem-se o esquema CDS (Central Difference Scheme). Neste esquema $\beta = 1$ e

$$\alpha = 0 \quad (14)$$

Esquema WUDS

O esquema WUDS (Upstream-Weighted Difference Scheme) foi proposto por Raithby e Torrance (1974) e resulta da solução exata de um problema advectivo-difusivo, unidimensional, em regime permanente e sem qualquer termo fonte, ou seja, a Eq. 1 sem o termo transiente. Esquemas semelhantes ao WUDS foram anteriormente propostos, como no trabalho de Allen e Southwell (1955) e no esquema exponencial de Spalding (1972) e, posteriormente, no esquema Power-Law de Patankar (1980). Os coeficientes α e β , para o esquema WUDS, são dados por (Raithby, 1976b)

$$\beta = \frac{(1 + 0.005Pe_{\Delta x}^2)}{(1 + 0.05Pe_{\Delta x}^2)} \quad (15)$$

$$\alpha = \frac{Pe_{\Delta x}^2}{(10 + 2Pe_{\Delta x}^2)} \quad (16)$$

onde $Pe_{\Delta x}$ é o número de Peclet de malha e é dado por

$$Pe_{\Delta x}^2 = \frac{\dot{M}\Delta x}{\Gamma} \quad (17)$$

As Eqs. 15 e 16 são aproximações das soluções exatas (exponenciais) que são muito custosas de se computar.

Esquema QUICK

A idéia básica que Leonard (1979) utilizou ao propor o esquema QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics) foi a de usar um polinômio quadrático para obter o valor de ϕ nas faces dos volumes de controle. Para isso, dois volumes à montante e um à jusante da face em consideração são empregados. Para a face oeste, por exemplo, se $u \geq 0$, os volumes WW, W e P (Fig. 2) são empregados. Neste trabalho, utiliza-se uma versão recente do esquema QUICK (Hayase et al., 1992) que, segundo seus autores, é mais estável, converge mais rapidamente e garante a obtenção de resultados fisicamente realísticos. Isto é conseguido somando-se ao esquema UDS uma correção ($\Delta\phi$). Assim, para a face oeste e $u \geq 0$, por exemplo, tem-se

$$\phi_w = \phi_W + \Delta\phi_w^* \quad (18)$$

$$\Delta\phi_w^* = (3\phi_p^* - 2\phi_W^* - \phi_{WW}^*)/8 \quad (19)$$

As incógnitas ϕ sem asterisco são tratadas implicitamente no sistema linear e aquelas com asterisco, explicitamente, como um termo fonte, sendo englobadas pelo termo B_p . As expressões resultantes para os coeficientes do sistema linear de equações são as mesmas das Eqs. 8 a 12, exceto o termo independente cuja expressão passa a ser (para $u \geq 0$)

$$B_p = A_p^o \phi_p^o + \dot{M} (5\phi_p^* - \phi_w^* - 3\phi_E^* - \phi_{ww}^*) / 8 \quad (20)$$

Os valores assumidos por α e β são os mesmos do esquema UDS. Deve-se notar que o termo B_p depende da própria solução do problema. Desta forma, o esquema QUICK necessita de um ciclo iterativo para atualizá-lo.

Esquema FIC

Será denominado de FIC (Função de Interpolação Completa) o esquema que usa a própria equação diferencial do problema, com todos os seus termos, para obter a função de interpolação. O esquema FIC pode ser considerado uma extensão dos esquemas usados nos trabalhos de Allen e Southwell (1955) e Spalding (1972). Foi inicialmente aplicado por Schneider (1986) e, recentemente, por Souza e Maliska (1990) e Souza (1992).

Seguindo o esquema FIC de Souza (1992), primeiramente a Eq. 1 é integrada sobre um volume de controle centrado no ponto "e" da Fig. 2, resultando em

$$\frac{M}{\Delta t} (\phi_e - \phi_e^o) + \dot{M} (\phi_E - \phi_P) = \frac{2\Gamma}{\Delta x} (\phi_E + \phi_P - 2\phi_e) \quad (21)$$

e isolando-se ϕ_e da Eq. (21) obtém-se

$$\phi_e = \phi_e^o + \left(\frac{2C}{Pe_{\Delta x}} - C \right) \phi_E + \left(\frac{2C}{Pe_{\Delta x}} + C \right) \phi_P \quad (22)$$

onde C é o número de Courant que é dado por

$$C = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \quad (23)$$

Substituindo-se a Eq. 22, e sua análoga para a face oeste, na Eq. 2 e considerando a Eq. 6 com $\beta = 1$ para as derivadas normais, chega-se às expressões para os coeficientes do esquema FIC e que são dadas por

$$A_e = \frac{\Gamma}{\Delta x} + \dot{M} \left(C - \frac{2C}{Pe_{\Delta x}} \right) \quad (24)$$

$$A_w = \frac{\Gamma}{\Delta x} + \dot{M} \left(C + \frac{2C}{Pe_{\Delta x}} \right) \quad (25)$$

$$B_p = A_p^o \phi_p^o + \dot{M} (\phi_w^o - \phi_e^o) \quad (26)$$

As expressões para A_p e A_p^o continuam sendo as mesmas dadas pelas Eqs. 10 e 12.

Refutação do Dogma dos Coeficientes Positivos

Existe uma corrente na área da Dinâmica dos Fluidos Computacional que estabeleceu a regra de que os coeficientes de um sistema linear de equações, como na forma apresentada pela Eq. 7, têm que ser positivos para não haver dispersão numérica (Roache, 1976; Patankar, 1980; Patel et al., 1985; Niecele, 1985; Hayase et al., 1992; Prakash, 1984; Schneider e Raw, 1986). Contudo, esta regra pode

ser considerada um dogma pois não existe prova da sua veracidade, exceto para problemas extremamente simples como aqueles governados pela Eq. 1 sem o termo transiente. Além disso, é sabido de experimentos numéricos realizados com a Eq. 1 que soluções sem dispersão numérica podem ser obtidas com valores negativos do coeficiente A_c .

Poucos são os trabalhos encontrados na literatura que buscam refutar o dogma dos coeficientes positivos, como pode ser visto em Thompson et al. (1985) e Hirsch (1990). Outro exemplo é o trabalho de Silva (1991) que, com base em experimentos numéricos para problemas tridimensionais axissimétricos com ondas de choque, obteve soluções sem dispersão numérica mesmo com coeficientes negativos.

A seguir introduz-se um procedimento, denominado CEL (Coeficientes Explicitamente Limitados), que permite resolver escoamentos de fluidos empregando esquemas de alta ordem sem haver dispersão numérica, mesmo que existam coeficientes negativos.

Procedimento CEL

Para um problema advectivo-difusivo em regime permanente, a Eq. 7 se reduz a

$$(A_c + A_w) \phi_P = A_c \phi_E + A_w \phi_W \quad (27)$$

Arbitrando-se $\phi_W = 5$, $\phi_E = 1$, e $A_W = 0,6$, pode-se verificar na Tabela 1 o resultado de ϕ_P , obtido da Eq. 27, para diferentes valores do coeficiente A_c . Quando A_c tende ao infinito, ϕ_P resulta igual a ϕ_E , o que corresponde a um esquema à jusante (DDS) e que é o oposto ao esquema UDS. Para $A_c = A_w$, o resultado de ϕ_P é a média aritmética entre ϕ_E e ϕ_W . Quando $A_c = 0$, $\phi_P = \phi_W$ que é o resultado do esquema UDS. Finalmente, com valores negativos de A_c , a dispersão numérica manifesta-se, isto é, ϕ_P resulta em valores que ficam fora do intervalo entre ϕ_E e ϕ_W . Invertendo-se os valores das incógnitas, ou seja, $\phi_W = 1$ e $\phi_E = 5$, verifica-se novamente que quando $A_c = 0$, $\phi_P = \phi_W$ e que para valores negativos de A_c ocorre dispersão numérica. Quaisquer que sejam os valores arbitrados para ϕ_E , ϕ_W e A_w (sempre > 0 para $u > 0$) os mesmos resultados qualitativos serão obtidos.

Considere-se agora a inclusão de um termo fonte na Eq. 27. Desta forma tem-se

$$(A_c + A_w) \phi_P = A_c \phi_E + A_w \phi_W + B_p \quad (28)$$

A Eq. 28 pode representar, por exemplo, a equação de conservação da quantidade de movimento linear em regime permanente. Neste caso, o termo fonte está relacionado ao gradiente de pressão. A Tabela 2 foi montada admitindo-se $\phi_W = 5$, $\phi_E = 1$, $A_w = 0,6$ e $B_p = -0,6$. Como se pode verificar nesta tabela, mesmo para valores negativos de A_c ($= -0,1$), obtém-se um resultado para ϕ_P ($= 4,60$) sem dispersão numérica, já que $\phi_W > \phi_P > \phi_E$. O valor mínimo de A_c para que não haja dispersão numérica é $-0,15$, correspondendo mais uma vez a $\phi_P = \phi_W$.

Tabela 1 Valores de ϕ_P obtidos com a Eq. 27

A_c	∞	10,0	0,6	0,1	0,0	-0,01
ϕ_P	1,00	1,23	3,00	4,40	5,00	5,07

Tabela 2 Valores de ϕ_P obtidos com a Eq. 28

A_c	∞	0,6	0,0	-0,1	-0,15	-0,16
ϕ_P	1,00	2,50	4,00	4,60	5,00	5,09

Comparando-se as Tabelas 1 e 2 pode-se concluir que o valor mínimo do coeficiente A_e para que não haja oscilação ocorre quando $\phi_P = \phi_W$. Considerando-se isto, deduz-se da Eq. 7 o valor mínimo do coeficiente leste, denotado por a_e , para evitar a dispersão numérica. A expressão obtida é

$$a_e = A_P^0 \frac{(\phi_W - \phi_P^0)}{(\phi_E - \phi_W)} \quad (29)$$

Ressalte-se que a expressão acima é válida para $u > 0$. Se $u < 0$, o coeficiente que possui um valor mínimo admissível para não haver dispersão numérica é o coeficiente oeste (A_W), e o coeficiente leste poderá assumir qualquer valor.

A causa da dispersão numérica pode ser interpretada da seguinte forma, considerando-se o caso da Eq. 27 e $u > 0$: o fluxo de ϕ que entra no volume de controle P pela face oeste é dado por $A_W \phi_W$. Se $A_e > 0$, existe um fluxo de ϕ que sai do volume P pela face leste e é igual a $A_e \phi_e$ e não há dispersão. Mas, quando $A_e < 0$ o fluxo de ϕ é reverso, isto é, há um fluxo de ϕ entrando no volume P através da face leste. Com isso, ocorre um acúmulo de ϕ no volume P e surge a dispersão numérica (overshoot). O contrário também pode ocorrer (undershoot) quando existem fluxos de ϕ saindo do volume P pelas faces oeste e leste. Como mostrado acima, existindo um termo fonte positivo ou mesmo negativo, como na Eq. 28, pode haver um fluxo reverso de ϕ na face leste até um determinado limite sem que ocorra dispersão.

Deve-se admitir que um problema advectivo-difusivo unidimensional, sem termo fonte, em regime permanente, e que não use o tempo como coordenada iterativa, é um caso muito simples. Só neste tipo de problema é que o termo A_P^0 é nulo pois $\Delta t \rightarrow \infty$ e, assim, a Eq. 29 fornece $a_e = 0$. Portanto, na grande maioria dos problemas da Dinâmica dos Fluidos, a regra que estabelece a necessidade de sempre se usar coeficientes positivos é incorreta. Como se pode verificar na Eq. 29, o valor mínimo e o sinal do coeficiente leste a_e , para que não haja dispersão numérica, dependem dos valores assumidos por ϕ_W , ϕ_E e ϕ_P^0 . Já que $A_P^0 > 0$, a_e tanto pode ser negativo quanto positivo.

Funções de Interpolação Limitadas

A seguir são introduzidos no presente trabalho duas novas funções de interpolação com base nos esquemas CDS e QUICK, anteriormente descritos, e que serão denominadas de CDS-L e QUICK-L. A letra "L" vem da palavra "limitado". O conceito de esquemas limitados foi introduzido por Van Leer (1973) e Boris e Book (1973) e está associado à eliminação da dispersão numérica em esquemas de alta ordem, como os esquemas CDS e UDS de 2ª ordem.

No desenvolvimento dos esquemas CDS-L e QUICK-L, a limitação será imposta sobre o valor que o coeficiente leste (A_e) poderá assumir. Se $A_e \geq a_e$, com a_e dado pela Eq. 29, a solução não apresentará dispersão numérica.

Esquema CDS-L

Igualando-se a Eq. 8 ao coeficiente a_e obtém-se o valor mínimo que α_e pode assumir, denotando-se por α_e^L , e cuja expressão é

$$\alpha_e^L = \frac{1}{2} + \frac{a_e}{M} - \frac{\beta_e^*}{Pe_{\Delta x}} \quad (30)$$

Assim como a Eq. 29 só é válida para $u > 0$, a Eq. 30 só tem sentido para $Pe_{\Delta x} > 0$. Uma expressão semelhante pode ser deduzida para α_w^L se $Pe_{\Delta x} < 0$. Substituindo-se as Eqs. 4, 12 e 29 em 30 obtém-se

$$\alpha_c^L = \frac{1}{2} + \frac{1}{C} \frac{(\phi_W - \phi_P^0)}{(\phi_E - \phi_W)} - \frac{\beta_c^*}{Pe_{\Delta x}} \quad (31)$$

Os valores assumidos pelos coeficientes β_c^* , β_c e α_c são

$$\beta_c^* = [2\text{MAX}(1; Pe_{\Delta x})]^{-1} \quad (32)$$

$$\beta_c = \text{MIN}(1; 4\beta_c^*) \quad (33)$$

$$\alpha_c = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha_c^L \leq 0 \\ \text{MIN}(0,5; \alpha_c^L) & \text{se } \alpha_c^L > 0 \end{cases} \quad (34)$$

onde $\text{MIN}(g;h)$ e $\text{MAX}(g;h)$ representam os valores mínimo e máximo entre g e h , respectivamente. O coeficiente α_c^L funciona como um limitador de α_c e tem a função de eliminar a dispersão numérica. No cálculo do coeficiente β_c , e por extensão β_e , incluiu-se o efeito do número de Peclet para haver coerência com a física do problema.

Em um método numérico conservativo, deve-se garantir que o fluxo da propriedade conservada que sai pela face leste do volume P (Fig. 2) seja igual ao que entra pela face oeste do volume E. Para isso, o valor do coeficiente α_w do volume E (α_w^E) tem que ser igual ao coeficiente α_e do volume P (α_e^P), ou seja

$$\alpha_w^E = \alpha_e^P \quad (35)$$

Da mesma forma deve-se proceder com os coeficientes β_e e β_w . Dois destaques devem ser feitos a respeito da Eq. 30. O primeiro refere-se a um problema advectivo-difusivo em regime permanente. Neste caso, como já foi explicado, $\alpha_c = 0$. Com este resultado e com as Eqs. 32, 33 e 34 verifica-se que para $Pe_{\Delta x} \leq 1$, $\alpha_c^L \leq 0$ e não ocorrerá dispersão numérica no esquema CDS ($\alpha_c = 0$). Com $Pe_{\Delta x} > 1$ tem-se $\alpha_c^L > 0$ e α_c tem que ser maior que zero para evitar oscilações. Deve-se lembrar que no esquema CDS para $Pe_{\Delta x} < 2$ não há oscilação. Isto não ocorre com o CDS-L porque o coeficiente β varia com $Pe_{\Delta x}$. Por exemplo, no caso do problema 1 que será apresentado mais adiante, $Pe_{\Delta x} = 2,4$, com isso $\alpha_c = \alpha_c^L = 0,41$ e $\beta_c = 0,83$. No caso limite, quando $Pe_{\Delta x} \rightarrow \infty$ resultará em $\alpha_c = \alpha_c^L \rightarrow 0,5$ e $\beta_c \rightarrow 0$.

O segundo destaque está relacionado a não-linearidade que o cálculo de α_c^L introduz na solução de um problema. Como se pode ver na Eq. 31, o coeficiente α_c^L depende da própria solução de ϕ e, portanto, é necessário um ciclo iterativo para atualizar os coeficientes dados pelas Eq. 8 a 10.

Esquema QUICK L

Considere-se a avaliação de ϕ na face leste do volume P (Fig. 2) através de um polinômio quadrático envolvendo os volumes W, P e E, como ocorre no esquema QUICK para $u > 0$. Assim, tem-se

$$\phi_c^* = \phi_P^* + \frac{1}{8} (3\phi_E^* - 2\phi_P^* - \phi_W^*) \quad (36)$$

onde o asterisco denota que os valores de ϕ^* são conhecidos de um nível iterativo anterior. Portanto, o cálculo de ϕ_e^* é explícito. Conhecidos os valores de ϕ_p^* , ϕ_e^* e ϕ_E^* pode-se isolar o coeficiente α_e da Eq. 5 e obter-se

$$\alpha_e^* = \frac{2(\phi_e^* - \phi_p^* - \phi_E^*)}{2(\phi_p^* - \phi_E^*)} \quad (37)$$

Finalmente, o valor do coeficiente α_e do esquema QUICK-L é dado por

$$\alpha_e = \text{MIN} [0,5; \text{MAX} (-0,5; \alpha_e^*; \alpha_e^L)] \quad (38)$$

onde α_e^L é obtido da Eq. 30 ou 31. É importante notar a generalidade das Eqs. 37 e 38. Diversos outros esquemas podem ser elaborados como o QUICK-L. A única diferença estará na expressão usada para se calcular o valor de ϕ_e^* . Tendo isto em mente, um novo esquema será apresentado mais adiante, sendo denominado ADS.

Da mesma forma como no esquema CDS-L, apenas o coeficiente α_e de cada volume de controle deve ser calculado. Os coeficientes α_w são obtidos da Eq. 35. As expressões para β_e^* e β_e são dadas pelas Eqs. 32 e 33.

Esquema TVD

Os esquemas do tipo TVD (Total Variation Diminishing) foram desenvolvidos com base em critérios que evitam o surgimento de oscilações na solução numérica de problemas unidimensionais. Um trabalho pioneiro destes esquemas é o de Harten (1983). Para equações unidimensionais há provas matemáticas de que os esquemas TVD não apresentam dispersão numérica, o que não ocorre para equações multidimensionais (Hirsch, 1990; Ortega et al., 1991).

Existem diversos limitadores do tipo TVD disponíveis na literatura, como pode ser visto no livro de Hirsch (1990). O esquema TVD escolhido para ser utilizado neste trabalho, devido ao seu ótimo desempenho, é denominado Superbee, foi proposto por Roe (1983) e é dado por

$$\psi_e = \text{MAX} [0; \text{MIN} (2r_e; 1); \text{MIN} (r_e; 2)] \quad (39)$$

onde

$$r_e = \frac{(\phi_p^* - \phi_w^*)}{(\phi_E^* - \phi_p^*)} \quad (40)$$

Uma relação entre ψ_e e α_e pode ser deduzida, obtendo-se

$$\alpha_e = \frac{1}{2} (1 - \psi_e) \quad (41)$$

Deve-se mencionar que as Eqs. 40 e 41 são válidas para $u > 0$ e que o fator r_e introduz uma não-linearidade no cálculo de ψ_e e, conseqüentemente, em α_e . Dependendo do valor de r_e , o parâmetro ψ_e varia entre zero e dois. Com isso, o coeficiente α_e assume valores entre -0,5 e 0,5. Portanto, o esquema Superbee apresenta um comportamento que vai do esquema UDS ($\alpha_e = 0,5$), passa pelo CDS ($\alpha_e = 0$) e pode chegar ao DDS ($\alpha_e = -0,5$). Quando necessários, os coeficientes β_e^* e β_e são calculados através das Eqs. 32 e 33.

Esquema ADS

Como já foi dito, as Eqs. 37 e 38 são gerais possibilitando a criação de diversos novos esquemas para se obter o valor de ϕ_c^* . Sendo assim, desenvolveu-se o esquema ADS com base em experimentos numéricos realizados que visavam verificar em que situações um esquema deveria apresentar um comportamento do tipo UDS, CDS ou DDS. O esquema ADS (Adaptable Difference Scheme) é introduzido neste trabalho, a seguir.

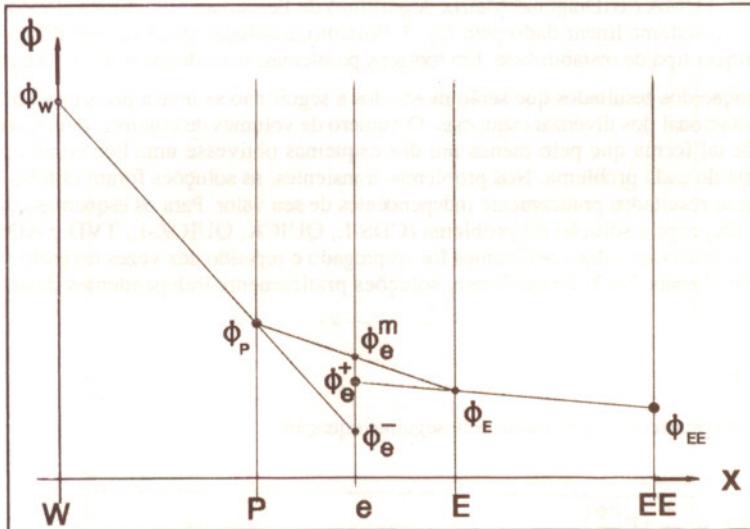


Fig. 3 Parâmetros usados no esquema ADS

Inicialmente devem ser calculados os parâmetros ϕ_e^- , ϕ_e^m e ϕ_e^+ , que estão representados na Fig. 3, através das seguintes expressões

$$\phi_e^- = \phi_P^* + \frac{1}{2}(\phi_P^* - \phi_W^*) \quad (42)$$

$$\phi_e^m = \frac{1}{2}(\phi_P^* + \phi_E^*) \quad (43)$$

$$\phi_e^+ = \phi_E^* - \frac{1}{2}(\phi_{EE}^* - \phi_E^*) \quad (44)$$

Como se pode notar, ϕ_e^- é obtido pela extrapolação linear de ϕ_W e ϕ_P sobre a face leste (e) do volume de controle P; ϕ_e^m é a média aritmética entre ϕ_P e ϕ_E ; e ϕ_e^+ resulta da extrapolação linear de ϕ_{EE} e ϕ_E sobre a face leste do volume P. O valor de ϕ_c^* é dado por

$$\phi_c^* = \text{MAX} \left[\text{MIN}(\phi_e^-, \phi_e^m); \text{MIN}(\phi_e^-, \phi_e^+); \text{MIN}(\phi_e^m, \phi_e^+) \right] \quad (45)$$

correspondendo ao valor intermediário entre ϕ_e^- , ϕ_e^m e ϕ_e^+ . No caso do exemplo mostrado na Fig. 3, $\phi_e^* = \phi_e^+$. Calculado ϕ_c^* , pode-se obter α_c^* através da Eq. 37 e, finalmente, o coeficiente α_c por meio da Eq. 38. Os coeficientes α_c^L , β_c^* e β_c são calculados através das Eqs. 30, 32 e 33. Ressalte-se que no

esquema ADS o parâmetro ϕ_c^* não depende do sentido do escoamento, ao contrário dos esquemas QUICK, QUICK-L e TVD. Além disso, ϕ_c^* não é calculado através de uma função previamente estabelecida. Ele depende do comportamento da própria incógnita do problema.

Avaliação das Funções de Interpolação

Neste item são apresentados os resultados de três problemas visando comparar o desempenho dos nove esquemas já descritos.

O método TDMA (TriDiagonal Matrix Algorithm) de Peaceman e Rachford (1955) foi utilizado para resolver o sistema linear dado pela Eq. 7. Portanto, a solução do sistema é direta e, com isso, evita-se qualquer tipo de instabilidade. Em todos os problemas, considerou-se $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$.

Na obtenção dos resultados que serão mostrados a seguir não se teve a preocupação de analisar o custo computacional dos diversos esquemas. O número de volumes de controle, denotado por "n", foi escolhido de tal forma que pelo menos um dos esquemas obtivesse uma boa concordância com a solução exata de cada problema. Nos problemas transientes, as soluções foram obtidas com Δt que proporcionasse resultados praticamente independentes de seu valor. Para os esquemas cujo parâmetro α depende da própria solução do problema (CDS-L, QUICK, QUICK-L, TVD e ADS), um ciclo iterativo para atualização dos coeficientes foi empregado e repetido dez vezes no problema 1 e cinco vezes nos problemas 2 e 3. Desta forma, soluções praticamente independentes deste ciclo foram obtidas.

Problema 1

O primeiro problema é governado pela seguinte equação

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u \phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (46)$$

com as condições de contorno dadas por $\phi_o = 0$ e $\phi_L = 1$ e $Pe = 12$, $\Gamma = 10^{-3} \text{ kg/(ms)}$, $n = 5$ volumes e $L = 1 \text{ m}$, onde Pe é o número de Peclet do problema e igual a $nPe_{\Delta x}$, e L é o comprimento do domínio de cálculo. Com os dados acima tem-se $Pe_{\Delta x} = 2,4$. Os resultados são mostrados na Fig. 4.

Como era de se esperar, o resultado obtido com o esquema WUDS coincide com a solução exata, e o CDS apresenta dispersão já que $Pe_{\Delta x} > 2$. Apesar do resultado obtido com o esquema QUICK não apresentar dispersão, a sua concordância com a solução exata não é boa; aumentando-se o $Pe_{\Delta x}$, a dispersão manifesta-se em seu resultado.

Os resultados obtidos com os esquemas TVD, ADS, CDS-L e QUICK-L foram bastante semelhantes e apresentam boa concordância com a solução exata, com um desempenho um pouco melhor do esquema TVD.

Surpreendentemente, a solução obtida com o esquema FIC foi a que apresentou mais difusão numérica, até mais do que o esquema UDS.

Problema 2

O segundo problema constitui-se na advecção-transiente de um pulso de onda senoidal e que é governado por

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \phi) = 0 \quad (47)$$

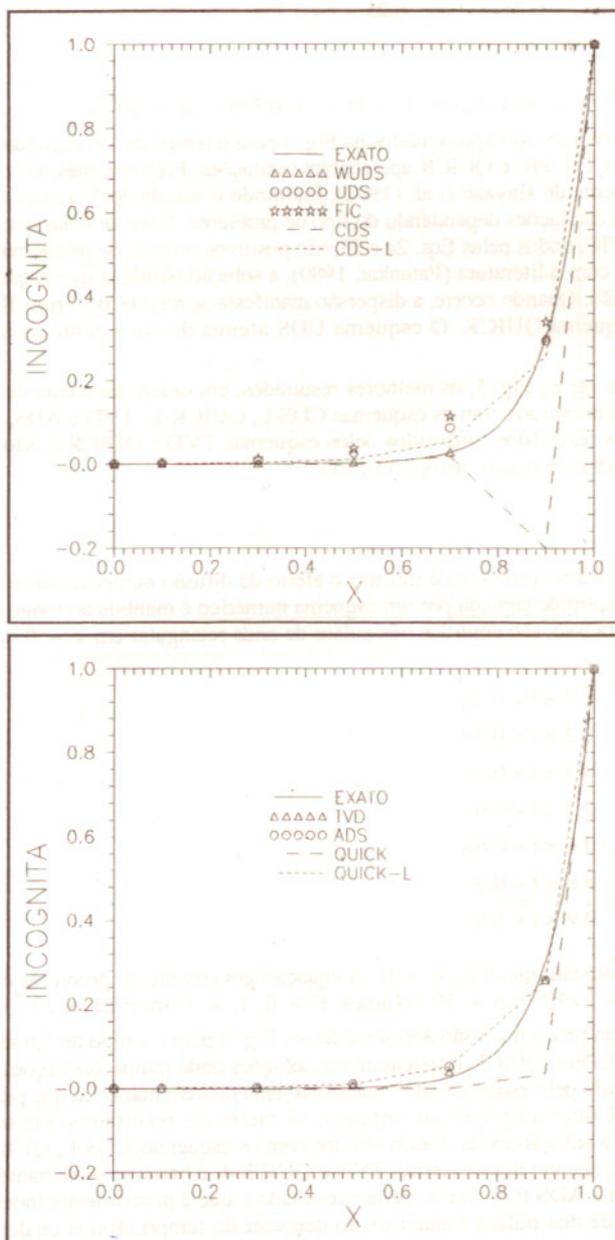


Fig. 4 Resultados do problema 1

A condição inicial é $\phi = 0$ e as condições de contorno são $\phi_L = 0$ e

$$\phi_0 = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t \leq 0.25s \\ \text{sen}[4\pi(t - 0.25)] & \text{se } 0.25 < t < 0.75s \\ 0 & \text{se } 0.75 \leq t \leq 1.0s \end{cases}$$

com $C = 2 \times 10^{-3}$, $n = 20$ volumes, $\Gamma = 0$, $L = 0,5$ m e $\Delta t = 10^{-4}$ s.

Os resultados obtidos são apresentados na Fig. 5 para o tempo de 1,0 segundo. As soluções obtidas com os esquemas CDS, FIC e QUICK apresentam oscilações. Portanto, mesmo com todas as restrições impostas ao esquema de Hayase et al. (1992), incluindo o uso de coeficientes positivos, o esquema QUICK apresenta oscilações dependendo do tipo de problema. Deve-se notar que os coeficientes A_e e A_w do esquema FIC, dados pelas Eqs. 24 e 25, são positivos no caso do problema 2 já que $Pe_{\Delta x} \rightarrow \infty$. Assim, de acordo com a literatura (Patankar, 1980), a solução obtida com o esquema FIC não poderia apresentar dispersão. Quando ocorre, a dispersão manifesta-se através do termo B_p (Eq. 26); o mesmo ocorre com o esquema QUICK. O esquema UDS atenua drasticamente os pontos de máximo e mínimo.

Como pode-se ver na Fig. 5, os melhores resultados, em ordem crescente de concordância com a solução exata, foram obtidos com os esquemas CDS-L, QUICK-L, TVD e ADS, com destaque para o esquema ADS. Os resultados fornecidos pelos esquemas TVD e QUICK-L são muito semelhantes, com um desempenho um pouco melhor do TVD.

Problema 3

O objetivo do último problema é mostrar o efeito da difusão numérica em problemas transientes, ou melhor, se a amplitude captada por um esquema numérico é mantida ao longo do tempo ou é ainda mais atenuada. Para isso, são emitidos três pulsos de onda retangular em $x = 0$ da seguinte forma

$$\phi_0 = \begin{cases} 0 & \text{se } 0,0 \leq t < 0,2s \\ 1 & \text{se } 0,2 \leq t < 0,3s \\ 0 & \text{se } 0,3 \leq t < 0,5s \\ 1 & \text{se } 0,5 \leq t < 0,6s \\ 0 & \text{se } 0,6 \leq t < 0,8s \\ 1 & \text{se } 0,8 \leq t < 0,9s \\ 0 & \text{se } 0,9 \leq t < 1,0s \end{cases}$$

com $\phi_L = 0$ e condição inicial de $\phi = 0$. A equação governante do problema é a Eq. 47. Os dados usados foram: $C = 5 \times 10^{-3}$, $n = 50$ volumes, $\Gamma = 0$, $L = 1,0$ m e $\Delta t = 10^{-4}$ s.

Os resultados do problema 3 são apresentados na Fig. 6 para o tempo de 1,0 segundo. Novamente, os esquemas FIC, CDS e QUICK implicaram em soluções onde muitas oscilações se fazem presentes. O resultado fornecido pelo esquema UDS apresenta tanta difusão numérica que praticamente eliminou dois dos pulsos. Como no problema anterior, os melhores resultados, em ordem crescente de concordância com a solução exata, foram obtidos com os esquemas CDS-L, QUICK-L, TVD e ADS. Novamente, o desempenho dos esquemas TVD e QUICK-L é bastante semelhante. Como se pode ver na Fig. 6, o esquema ADS forneceu o melhor resultado e que é praticamente independente do tempo, ou seja, a amplitude dos pulsos é mantida no decorrer do tempo. Todos os demais esquemas não conseguiram manter a amplitude dos pulsos. Note-se que apenas dois volumes de controle foram necessários para captar a amplitude de cada pulso com o esquema ADS.

É importante mencionar a existência de esquemas numéricos do tipo TVD que são capazes de captar descontinuidades em apenas 1 (um) volume de controle. No entanto, quando estes esquemas são aplicados em um problema como o número 2, a solução se parece mais com uma onda quadrada do que

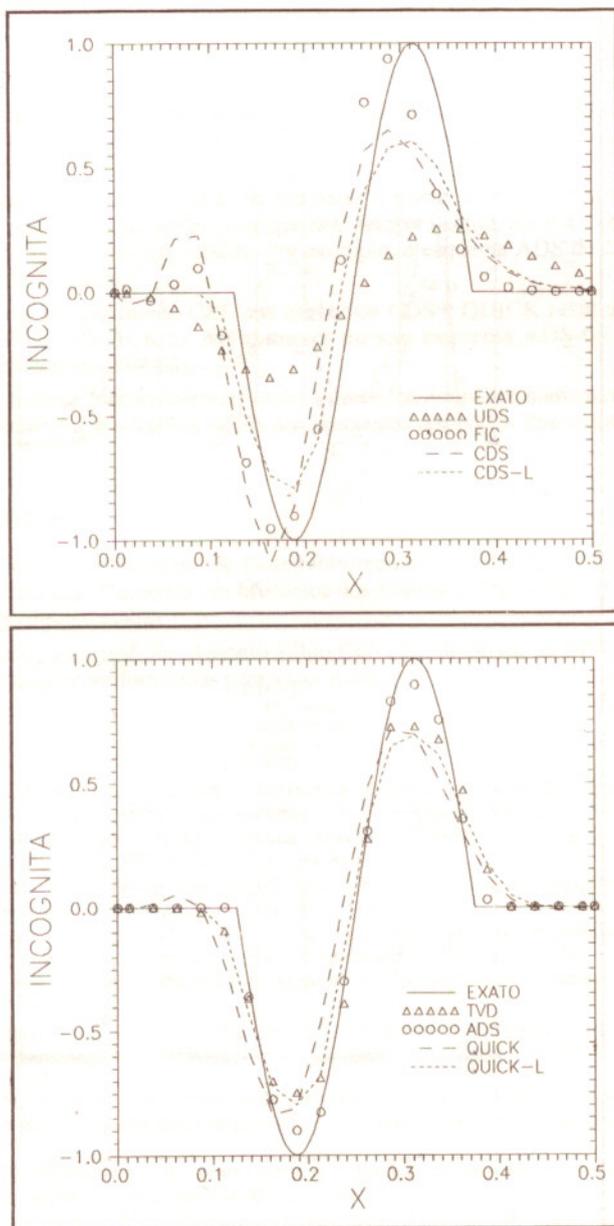


Fig. 5 Resultados do problema 2 para $t = 1s$

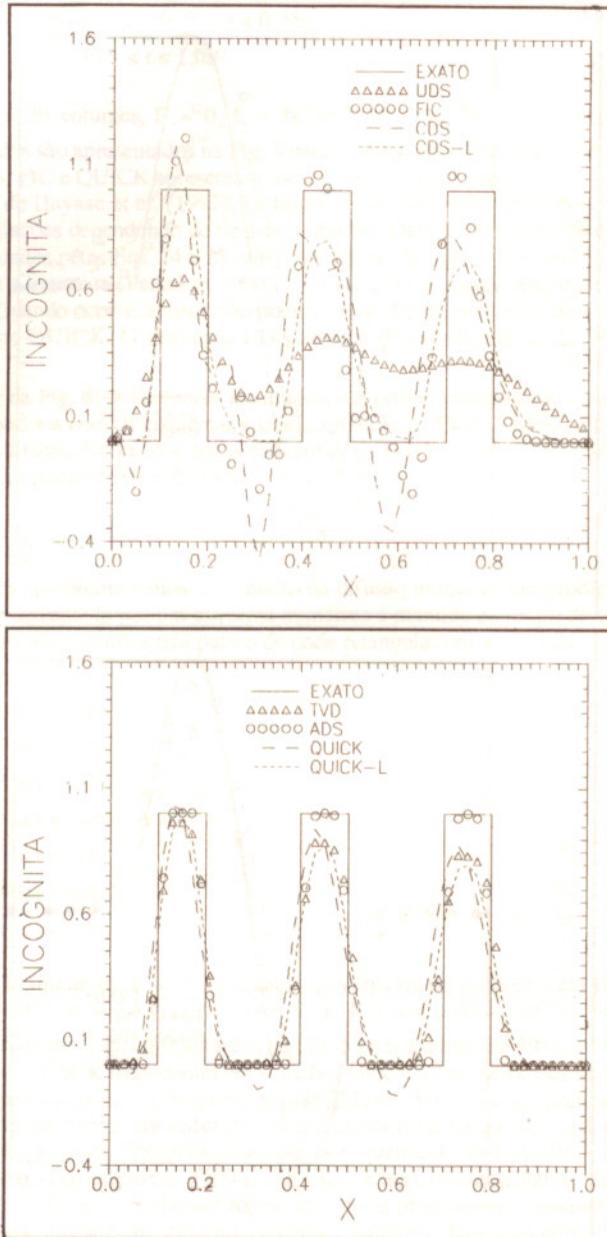


Fig. 6 Resultados do problema 3 para $t = 1s$

uma senóide (Hirsch, 1990). No caso de problemas puramente advectivos, o esquema WUDS resulta no UDS, ou seja, $\alpha_e = 10,5$. Devido a este motivo, os resultados do esquema WUDS foram omitidos das Figs. 5 e 6.

Conclusão

Foram explicadas as causas que provocam o surgimento de difusão e dispersão numéricas na solução de problemas de escoamentos de fluidos. Introduziu-se o procedimento CEL que permite usar esquemas de alta ordem sem com isso incorrer na manifestação de dispersão numérica nas soluções obtidas.

A regra de que todos os coeficientes de um sistema linear devem ser positivos para não haver dispersão numérica foi refutada. Verificou-se que nem sempre quanto maior é a ordem de um esquema melhor será a qualidade da solução obtida. Por exemplo, o esquema ADS de 2ª ordem suplantou o esquema QUICK de 3ª ordem.

Incorporou-se o procedimento CEL aos esquemas CDS e QUICK resultando nas funções de interpolação CDS-L e QUICK-L. Além desses dois, o esquema ADS foi proposto, também incorporando o procedimento CEL.

Entre os nove tipos de função de interpolação testados, os resultados numéricos que apresentaram a melhor concordância com as soluções exatas dos problemas resolvidos foram obtidos com o esquema ADS.

Agradecimentos

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e ao Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor (SINMEC) pelo financiamento deste trabalho.

Também agradeço ao prof. Dr. Antonio Fábio Carvalho da Silva, do SINMEC, pela leitura do manuscrito e pelas sugestões fornecidas para a sua melhoria.

Referências

- Allen, D. N. G. and Southwell, R. V., 1955, "Relaxation Methods Applied to Determine the Motion in Two Dimensions of Viscous Fluid Past a Fixed Cylinder", *Q. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 8, pp. 129-145.
- Boris, J. P. and Book, D. L., 1973, "Flux Corrected Transport: I. SHASTA, a Fluid Transport Algorithm That Works", *Journal Computational Physics*, Vol. 11, pp. 38-69.
- Chen, Y. and Falconer, R. A., 1992, "Advection-Diffusion Modelling Using the Modified Quick Scheme", *Int. Journal for Num. Methods in Fluids*, Vol. 15, pp. 1171-1196.
- Courant, R., Isaacson, E. and Rees, S. M., 1952, "On the Solution of Nonlinear Hyperbolic Differential Equations by Finite Differences", *Comm. Pure and Applied Mathematics*, Vol. 5, pp. 243-255.
- Harten, A., 1983, "High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws", *Journal Computational Physics*, Vol. 49, pp. 357-393.
- Hayase, T., Humphrey, J. A. C. and Greif, R., 1992, "A Consistently Formulated QUICK Scheme for Fast and Stable Convergence Using Finite-Volume Iterative Calculation Procedures", *Journal of Computational Physics*, Vol. 98, pp. 108-118.
- Hirsch, C., 1990, "Numerical Computation of Internal and External Flows", J. Wiley & Sons, Chichester, Vol. 2.
- Hirsch, C., 1991, "Numerical Computation of Internal and External Flows", 2 ed., J. Wiley & Sons, Chichester, Vol. 1.
- Leonard, B. P., 1979, "A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 19, pp. 59-98.
- Minkowicz, W. J., Sparrow, E. M., Schneider, G. E. and Pletcher, R. H., 1988, "Handbook of Numerical Heat Transfer", J. Wiley & Sons, New York.
- Nieckele, A. O., 1985, "Development and Evaluation of Numerical Schemes for the Solution of Convection-Diffusion Problems", Ph.D. Thesis, University of Minnesota.
- Ortega, M. A., Carvalho, M. A. M. and Azevedo, J. L. F., 1991, "Comparison of Some Numerical Schemes for the Computation of Inviscid Flows with Strong Discontinuities", *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, Vol. 13, pp. 309-336.

- Patankar, S. V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere, New York.
- Patel, M. K., Markatos, N. C. and Cross, M., 1985, "A Critical Evaluation of Seven Discretization Schemes for Convection-Diffusion Equations", *Int. Journal for Num. Methods in Fluids*, Vol. 5, pp. 225-244.
- Peaceman, D. W. and Rachford, H. H., 1955, "The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations", *SIAM Journal*, Vol. 3, pp. 28-41.
- Prakash, C., 1984, "Application of the Locally Analytic Differencing Scheme to Some Test Problems for the Convection-Diffusion Equation", *Num. Heat Transfer*, Vol. 7, pp. 165-182.
- Price et al., 1966, *J. Mathematics and Physics*, Vol. 45, pp. 301-311
- Raithby, G. D., 1976a, "A Critical Evaluation of Upstream Differencing Applied to Problems Involving Fluid Flow", *Computer Methods in Applied Mechanics and Eng.*, Vol. 9, pp. 75-103.
- Raithby, G. D., 1976b, "Prediction of Dispersion by Surface Discharge; Report to Canada Centre for Inland Waters", Burlington, Ontario.
- Raithby, G. D. and Torrance, K.E., 1974, "Upstream-Weighted Differencing Schemes and Their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow", *Comp. Fluids*, Vol. 2, pp. 191-206.
- Roache, P. J., 1972, "On Artificial Viscosity", *Journal of Computational Physics*, V.10, pp.169- 184.
- Roache, P. J., 1976, "Computational Fluid Dynamics", Hermosa, Albuquerque, New Mexico.
- Roe, P. L., 1985, "Some Contributions to the Modelling of Discontinuous Flows", *Proc. 1983 AMS-SIAM, Lectures in Applied Mathematics*, Vol. 22, pp. 163-193, Philadelphia.
- Schneider, G. E., 1986, "A Novel Co-located Finite Difference Procedure for the Numerical Computation of Fluid Flow", *Proc. AIAA 4th Joint Thermophysics and Heat Transfer Conference Boston, Massachusetts*.
- Schneider, G. E. and Raw, M. J., 1986, "A Skewed, Positive Influence Coefficient Upwinding Procedure for Control-Volume-Based Finite-Element Convection-Diffusion Computation", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 9, pp. 1-26.
- Silva, A. F. C., 1991, "Um Procedimento em Volumes Finitos para a Solução de Escoamentos de Qualquer Velocidade", *Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil*.
- Sharif, M. A. R. and Busnaina, A. A., 1993, "Evaluation and Comparison of Bounding Techniques for Convection-Diffusion Problems", *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 115, pp. 33-40.
- Smith, R. M. and Hutton, A. G., 1982, "The Numerical Treatment of Advection: a Performance Comparison of Current Methods", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 5, pp. 439-461.
- Souza, S. M. A. G. U., 1992, *Um Esquema Numérico Utilizando Variáveis Co-Localizadas com Função de Interpolação Completa para a Solução de Problemas de Escoamento de Fluidos*, *Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil*.
- Souza, S. M. A. G. U. and Maliska, C. R., 1990, "Arranjo de Variáveis Co-Localizadas no Método de Volumes Finitos", *Anais do XI Congresso Íbero Latino Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia*, pp. 177-191, Rio de Janeiro.
- Spalding, D. B., 1972, "A Novel Finite Difference Formulation for Differential Expressions Involving Both First and Second Derivatives", *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 4, pp. 551-559.
- Thompson, H. D., Webb, B. W. and Hoffman, J. D., 1985, "The Cell Reynolds Number Myth", *Int. Journal for Num. Methods in Fluids*, Vol. 5, pp. 305-310.
- Van Leer, B., 1973, "Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. I. The Quest Monotonicity", *Lecture Notes in Physics*, Vol. 18, pp. 163-168, Springer Verlag, Berlin.