

Avaliação de Algumas Funções de Interpolação para escoamentos de Fluidos Usando Volumes Finitos

Evaluation of Some Interpolation Schemes for Fluid Flow Calculations Using Finite Volumes

Carlos Henrique Marchi

Universidade Federal do Paraná
Departamento de Engenharia Mecânica
81531-990 Curitiba, PR Brazil
marchi@cce.ufpr.br

Clovis Raimundo Maliska

Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Engenharia Mecânica
maliska@sinmec.ufsc.br

Selene Maria de Arruda Guelli Ulson de Souza

Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Engenharia Química
88040-902 Florianópolis, SC Brazil
enq3sel@enq.ufsc.br

Abstract

The evaluation of some interpolation schemes frequently used in the solution of convective-dominant flow is performed. The schemes are assessed solving 1D and 2D linear and non-linear problems in steady and transient states. The finite volumes method is employed and the FCT (Flux-Corrected Transport) strategy is used in conjunction with some higher order schemes aiming to avoid numerical oscillations. It is proposed a methodology for clearly comparing the performance of several interpolation schemes.

Keywords: Numerical Methods, Numerical Diffusion, Wiggles, Numerical Schemes.

Resumo

São resolvidos problemas uni e bidimensionais, lineares e não-lineares, de escoamentos de fluidos nos regimes permanente e transiente para avaliar o desempenho de diversas funções de interpolação disponíveis na literatura. O método dos volumes finitos é empregado para discretizar os modelos matemáticos e o procedimento FCT (Flux-Corrected Transport) é usado em alguns esquemas de alta ordem para evitar a ocorrência de oscilações numéricas nos resultados. É introduzido um procedimento para comparar objetivamente o desempenho das diversas funções de interpolação testadas.

Palavras-chave: Métodos Numéricos, Difusão Numérica, Oscilação Numérica, Funções de Interpolação.

Introdução

No processo de discretização de equações diferenciais que modelam escoamentos de fluidos, e que utilizam o método dos volumes finitos, surge a necessidade de se avaliar nas interfaces dos volumes de controle o valor da propriedade conservada e de sua derivada normal. Com este fim, são usadas as chamadas funções ou esquemas de interpolação.

Adotam-se no presente trabalho as definições dadas por Sharif e Busnaina (1993) para os termos difusão e oscilação numéricas, embora existam na literatura outras interpretações semelhantes ou não (Roache, 1972; Patankar, 1980; Silva, 1991; Maliska, 1995; Ferziger e Peric, 1996). Por "difusão numérica" será entendido qualquer efeito que tenda a suavizar ou amortecer gradientes ou descontinuidades presentes na solução exata de um problema (Fig. 1a). Os efeitos que resultam em oscilações na solução (Fig. 1b) serão denominados de "oscilação numérica". Tanto a difusão numérica quanto a oscilação numérica são erros introduzidos na solução de um problema via função de interpolação. Estes dois erros de truncamento estão associados à aplicação de uma função de interpolação inexata aos termos advectivos. Para um dado problema, a função de interpolação exata é a sua própria solução. Por exemplo, num problema de condução de calor unidimensional, em estado permanente, sem termos fontes e com condutividade térmica constante, a função de interpolação exata é

uma reta. Portanto, como em geral não se conhece a solução exata do problema, a função de interpolação empregada gera erros de difusão e/ou oscilação numéricas.

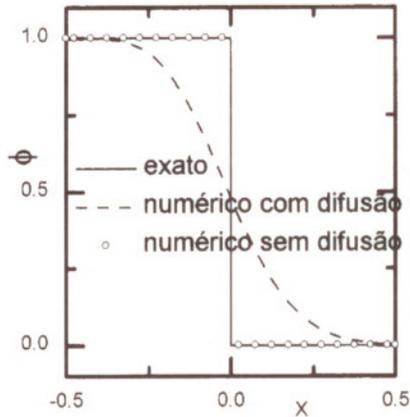


Fig. 1a Exemplo de difusão numérica

Como se sabe, esquemas de 2ª ordem como o CDS (Central Differencing Scheme) (Maliska, 1995) e de 3ª ordem como o QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics) (Leonard, 1979) apresentam menos difusão numérica que esquemas de 1ª ordem. No entanto, muitas vezes, as soluções obtidas com esquemas como o CDS e QUICK, em problemas que têm gradientes espaciais fortes, resultam em soluções com oscilações numéricas, Fig. 1b.

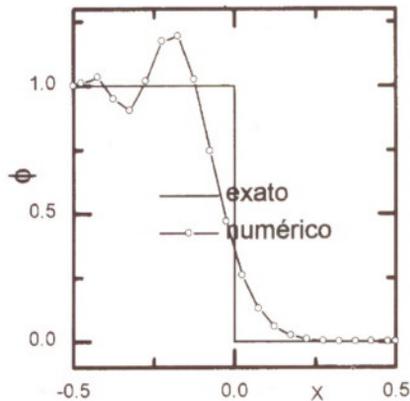


Fig. 1b Exemplo de oscilação numérica

Já esquemas de 1ª ordem como o UDS (Upstream Differencing Scheme) (Courant et al., 1952) são livres de oscilação numérica. O inconveniente nestes esquemas é a quantidade de difusão numérica presente nas soluções obtidas (Fig. 1a).

Tanto os esquemas de 1ª ordem quanto os de alta ordem possuem vantagens e desvantagens na solução de problemas. Portanto, o que se deve buscar é a união das vantagens dos esquemas de alta ordem (menos difusão numérica) com os de baixa ordem (sem oscilação numérica). Com este objetivo, o procedimento FCT (Flux-Corrected Transport) de Zalesak (1979) é empregado neste trabalho.

São resolvidos problemas uni e bidimensionais, lineares e não-lineares, nos regimes permanente e transiente para avaliar o desempenho de diversas funções de interpolação disponíveis na literatura: UDS, CDS, Skew Upstream Differencing Scheme (SUDS), Função de Interpolação Completa (FIC), Total Variation Diminishing (limitador TVD do tipo Superbee de Roe, 1983), QUICK e Adaptable

Difference Scheme (ADS). Auxiliar o analista numérico na escolha das funções de interpolação mais adequadas é também um objetivo deste trabalho.

Procedimento FCT

O procedimento FCT permite empregar esquemas de alta ordem na solução de escoamentos de fluidos sem que, no entanto, os resultados apresentem oscilação numérica. Foi inicialmente desenvolvido por Boris e Book (1973). Sua versão aprimorada (Zalesak, 1979) é empregada neste trabalho.

A seguir, descreve-se em linhas gerais o procedimento FCT para escoamentos unidimensionais. Maiores detalhes sobre a interpretação dos diversos parâmetros envolvidos bem como a expansão para problemas multidimensionais podem ser encontrados em Zalesak (1979).

Para cada iteração no processo de obtenção da solução de um problema, o procedimento FCT pode ser resumido a:

- 1 Obter a solução ϕ^l usando um esquema de baixa ordem que não apresente oscilação numérica; neste trabalho emprega-se o UDS com formulação totalmente implícita;
- 2 Calcular os fluxos antidifusivos;
- 3 Limitar os fluxos antidifusivos; e,
- 4 Corrigir a solução de baixa ordem ϕ^l com os fluxos antidifusivos limitados obtendo-se a solução de alta ordem ϕ^h ; neste trabalho, esta correção é feita explicitamente.

Cálculo do Fluxo Antidifusivo (A)

Segundo o esquema UDS, o fluxo da incógnita ϕ do problema na interface leste (e) do volume de controle elementar P, Fig. 2, para velocidade $u > 0$ é dado por

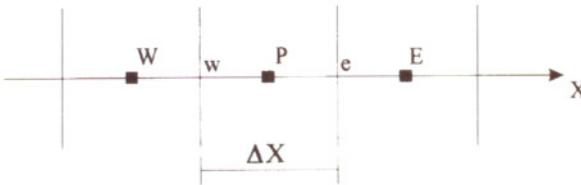


Fig. 2 Discretização do domínio de cálculo 1D

Nomenclatura

A	=	fluxo antidifusivo
C	=	coeficiente de limitação do fluxo antidifusivo
E	=	erro médio da solução numérica
E, W	=	volumes de controle a leste e a oeste de P
F	=	fluxo advectivo da incógnita
H	=	altura
L	=	comprimento do domínio de cálculo
M	=	massa
\dot{M}	=	fluxo de massa
n	=	número de volumes de controle do domínio
P, Q, R	=	parâmetros do método FCT
t	=	tempo

u, v	=	velocidades
x, y	=	coordenadas espaciais

Letras Gregas

α	=	coeficiente do termo advectivo da função de interpolação
Δt	=	intervalo de tempo
$\Delta x, \Delta y$	=	comprimento e altura do volume de controle
ρ	=	massa específica
ϕ	=	incógnita genérica do problema
η	=	rendimento

Subscritos

e, w	=	faces leste e oeste do volume P
------	---	---------------------------------

E, W	=	volumes de controle a leste e a oeste de P
G	=	global
L	=	contorno direito do domínio de cálculo
M	=	memória
o	=	contorno esquerdo do domínio de cálculo
P	=	volume de controle elementar
t	=	tempo

Superscritos

C	=	limitado
L	=	baixa ordem
H	=	alta ordem
max	=	máximo
min	=	mínimo

$$F_e^L = \overset{o}{M}_e \phi_P \quad (1)$$

e de acordo com o esquema CDS por

$$F_e^H = \overset{o}{M}_e \left(\frac{\phi_P + \phi_E}{2} \right) \quad (2)$$

onde F_e^L , F_e^H e $\overset{o}{M}_e$ são os fluxos dos esquemas de baixa e de alta ordens e o fluxo de massa na interface leste (e), respectivamente, e ϕ é a incógnita do problema.

O fluxo antidifusivo é a diferença entre os fluxos de alta e de baixa ordens, ou seja

$$A_e = F_e^H - F_e^L \quad (3)$$

No caso das Eqs. (1) e (2) obtém-se

$$A_e = \frac{\overset{o}{M}_e}{2} (\phi_E - \phi_P) \quad (4)$$

Da mesma forma, há um fluxo antidifusivo para a interface oeste (w). No caso de $u < 0$, tem-se para o esquema UDS

$$F_e^L = \overset{o}{M}_e \phi_E \quad (5)$$

Para $u < 0$, a Eq. (2) continua válida já que ϕ_e independe do sinal de u no esquema CDS. Assim, introduzindo as Eqs. (2) e (5) na Eq. (3), tem-se para $u < 0$

$$A_e = \frac{\overset{o}{M}_e}{2} (\phi_P - \phi_E) \quad (6)$$

Fluxo Antidifusivo Limitado (A_e^C)

O fluxo antidifusivo limitado A_e^C é obtido através de

$$A_e^C = C_e A_e \quad (7)$$

onde o valor de C varia entre 0 e 1, ou seja, a correção que será feita sobre a solução de baixa ordem resultará:

- Na própria solução de baixa ordem se $C_w = C_e = 0$;
- Na própria solução de alta ordem se $C_w = C_e = 1$; ou
- Em uma solução intermediária se C_w ou C_e forem diferentes de 0 e 1.

O valor do coeficiente C é obtido através do procedimento FCT de Zalesak (1979). Para um problema unidimensional são calculados inicialmente os parâmetros P_p^+ e P_p^- que representam a soma

soma de todos os fluxos antidifusivos entrando e saindo do volume de controle elementar (P), respectivamente, através de

$$P_P^+ = \max(0, A_w) - \min(0, A_e) \quad (8)$$

$$P_P^- = \max(0, A_e) - \min(0, A_w) \quad (9)$$

onde max e min representam os valores máximo e mínimo, respectivamente, dos parâmetros entre parênteses.

Em seguida, calculam-se os parâmetros Q_P^+ e Q_P^- que evitam ocorrer oscilação numérica com base na solução de baixa ordem ϕ_P^L e nos valores máximo e mínimo estimados para a incógnita (ϕ_P^{max} e ϕ_P^{min}), com as seguintes expressões:

$$Q_P^+ = (\phi_P^{max} - \phi_P^L) \frac{M_P}{\Delta t} \quad (10)$$

$$Q_P^- = (\phi_P^L - \phi_P^{min}) \frac{M_P}{\Delta t} \quad (11)$$

onde M_P e Δt são a massa do volume de controle ($M_P = \rho \cdot \Delta x$) e o intervalo de tempo.

A forma de se avaliar ϕ_P^{max} e ϕ_P^{min} é um ponto-chave no procedimento FCT. Se estes parâmetros forem inadequadamente estimados poderá haver oscilação numérica na solução. Zalesak (1979) recomenda

$$\phi_P^{max} = \max(\phi_W^L, \phi_W^o, \phi_P^L, \phi_P^o, \phi_E^L, \phi_E^o) \quad (12)$$

$$\phi_P^{min} = \min(\phi_W^L, \phi_W^o, \phi_P^L, \phi_P^o, \phi_E^L, \phi_E^o) \quad (13)$$

onde ϕ^o representa o valor da incógnita no instante de tempo t e ϕ^L o valor da incógnita no instante de tempo atual $t+\Delta t$.

Em seguida, calculam-se as variações máxima (R_P^+) e mínima (R_P^-) que podem ser admitidas sobre o volume P, da seguinte forma:

$$R_P^+ = \begin{cases} \min(1, Q_P^+ / P_P^+) & \text{se } P_P^+ > 0 \\ 0 & \text{se } P_P^+ = 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$R_P^- = \begin{cases} \min(1, Q_P^- / P_P^-) & \text{se } P_P^- > 0 \\ 0 & \text{se } P_P^- = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Finalmente, calculam-se os coeficientes C através de

$$C_e = \begin{cases} \min(R_E^+, R_P^-) \text{ se } A_e \geq 0 \\ \min(R_P^+, R_E^-) \text{ se } A_e < 0 \end{cases} \quad (16)$$

Solução de Alta Ordem (ϕ^H)

Calculados os coeficientes C para todas as faces dos volumes de controle, pode-se obter a solução de alta ordem, limitada, por

$$\phi_P^H = \phi_P^L - (A_e^C - A_w^C) \frac{\Delta t}{M_P} \quad (17)$$

O procedimento para problemas bidimensionais é dado no trabalho de Zalesak (1979).

Esquemas Testados

O procedimento FCT é usado nos seguintes esquemas neste trabalho:

- 1 CDS-Z = UDS com CDS;
- 2 QUICK-Z = UDS com QUICK (Leonard, 1979); e
- 3 ADS-Z = UDS com ADS (Marchi, 1993).

Estes três esquemas serão comparados aos esquemas UDS (Courant et al., 1952), CDS, Skew Upstream Differencing Scheme, SUDS (Raithby, 1976), Função de Interpolação Completa, FIC (Souza e Maliska, 1990), limitador TVD do tipo Superbee (Roe, 1983) e ALFA. O Superbee é um esquema de 2ª ordem autolimitado.

O valor da incógnita ϕ na interface leste (e) para alguns esquemas pode ser genericamente escrito como (Raithby e Torrance, 1974)

$$\phi_e = (1/2 + \alpha_e) \phi_P + (1/2 - \alpha_e) \phi_E \quad (18)$$

onde α é o coeficiente advectivo da função de interpolação. Para o esquema CDS, $\alpha = 0$. No esquema UDS, com $u > 0$, tem-se $\alpha = 1/2$. Já no esquema ALFA, simplesmente prescreve-se o valor de α .

Nos esquemas SUDS e FIC não se emprega neste trabalho o procedimento FCT devido aos mesmos já serem razoavelmente mais elaborados que os demais. As funções de interpolação do SUDS e FIC são bidimensionais em problemas bidimensionais, e não unidimensionais como nos outros esquemas já citados.

Na Tabela 1 é indicado o número de vetores (com dimensão igual ao número total de volumes da malha) necessário para resolver cada um dos três problemas abaixo e para cada um dos nove esquemas empregados neste trabalho. A memória computacional usada é diretamente proporcional ao número de vetores de cada esquema e ao tamanho da malha.

Tabela 1 Número de vetores com dimensão da malha.

Esquema	Problema 1	Problema 2	Problema 3
UDS	8	8	18
CDS	8	8	18
ALFA	8	8	18
SUDS	-	-	18
TVD	9	9	20
FIC	9	10	20
CDS-Z	11	11	22
QUICK-Z	11	11	22
ADS-Z	11	11	22

Resultados

Problema 1

A equação governante do primeiro problema é

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) = 0 \quad (19)$$

Este problema consiste na emissão de três pulsos de onda retangular em $x = 0$, ou seja, a condição de contorno é $\phi_0 = 0$ entre os tempos, dados em segundos, [0 e 0,2), [0,3 e 0,5), [0,6 e 0,8) e [0,9 e 1,0], e $\phi_0 = 1$ entre os tempos [0,2 e 0,3), [0,5 e 0,6) e [0,8 e 0,9). A condição inicial é $\phi = 0$ no domínio inteiro. Os demais dados são: $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$, $u = 1 \text{ m/s}$ e $L = 1 \text{ m}$. O comprimento dos volumes (Δx) é constante e dado por $\Delta x = L/n$, onde n é o número de volumes usado na discretização do domínio.

As soluções são obtidas para o tempo $t = 1 \text{ s}$, com $\Delta t = 10^{-4} \text{ s}$. O sistema linear oriundo da discretização da Eq. (19) é resolvido diretamente com o método TDMA (Thomas, 1949). Nos esquemas em que os coeficientes do sistema linear são dependentes da própria solução do problema, eles são calculados utilizando a solução do instante de tempo anterior. O processo de integração da Eq. (19) pode ser visto, por exemplo, em Marchi (1993) ou Maliska (1995). Basicamente, este processo consiste em efetuar a integração da Eq.(19) sobre o volume de controle elementar (P), da Fig. 2, usando uma formulação totalmente implícita (no tempo) e a função de interpolação desejada.

Visando comparar o desempenho dos diversos esquemas, calcula-se o erro médio (E) percentual de cada esquema através de

$$E = \frac{100}{n} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n |\phi_i^{num} - \phi_i^{ex}|}{\phi_{max}^{ex} - \phi_{min}^{ex}} \right\} \quad (20)$$

onde ϕ^{num} e ϕ^{ex} representam as soluções numérica e exata do problema, e ϕ_{max}^{ex} e ϕ_{min}^{ex} os valores máximo e mínimo, respectivamente, da solução exata.

Por tentativas, obteve-se o menor número de volumes (n) para cada esquema de tal forma que $E \leq 5\%$. Os resultados obtidos são mostrados na Tabela 2. Os parâmetros η_M , η_t e η_G representam os rendimentos de memória, de tempo de computação e global, definidos como

$$\eta_M = \frac{\text{memória mínima entre todos os esquemas}}{\text{memória do esquema em comparação}} \quad (21)$$

$$\eta_t = \frac{\text{tempo de CPU mínimo entre todos os esquemas}}{\text{tempo de CPU do esquema em comparação}} \quad (22)$$

$$\eta_G = \eta_M \eta_t \quad (23)$$

Verificou-se que o esquema que precisou da menor memória para resolver o problema foi o ADS-Z ($\eta_M = 1,0$), e o esquema que necessitou do menor tempo de computação foi o TVD ($\eta_t = 1,0$).

Globalmente, o melhor desempenho foi obtido pelo TVD, seguido pelo ADS-Z. Em um nível mais baixo de rendimento global encontram-se os esquemas FIC e QUICK-Z.

Dos esquemas mencionados na Tabela 2, apenas os esquemas FIC e CDS apresentaram oscilações nos resultados. Entre eles, apenas o FIC é um esquema previamente projetado para problemas 2D.

O esquema SUDS se reduz ao UDS para problemas unidimensionais. Devido a isto não são apresentados resultados daquele esquema para os problemas 1 e 2.

Os resultados obtidos com os esquemas que apresentaram o melhor (TVD, 118 volumes) e o pior (UDS, 6000 volumes) desempenho, bem como a solução exata, são mostrados na Fig. 3.

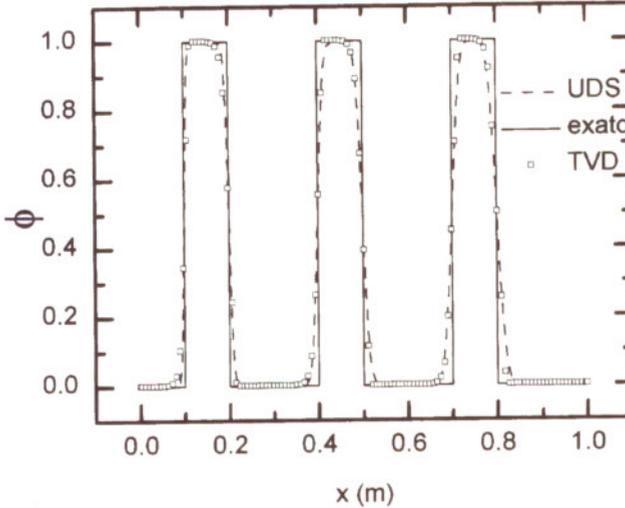


Fig. 3 Sloução do problema 1 para $t=1,0s$

Tabela 2 Resultados do problema 1.

Esquema	n	η_M	η_t	η_G
UDS	6000	0,020	0,035	0,00070
CDS	660	0,18	0,34	0,061
CDS-Z	380	0,23	0,17	0,039
FIC	346	0,31	0,53	0,16
QUICK-Z	236	0,37	0,27	0,10
TVD	118	0,91	1,0	0,91
ADS-Z	88	1,0	0,61	0,61

Problema 2

A equação governante do problema 2 também é a Eq. (19). Mas, agora, $\phi = u$. Portanto, o problema é não-linear. As condições iniciais são $u = 1$ para $0 < x \leq 0,5$ m e $u = -1$ para $-0,5 \leq x < 0$ m. A condição de contorno é $u = 0$ para $x = 0$. Quanto aos demais dados têm-se: $\rho = 1$ kg/m³, $L = 1$ m, Δx constante e $\Delta t = 10^{-4}$ s. As soluções serão apresentadas para o tempo $t = 0,3$ s. Os coeficientes do sistema de equações são calculados utilizando a solução do instante de tempo anterior.

Determinou-se o menor número de volumes de cada esquema para satisfazer a condição $E \leq 0,5\%$, onde E é dado pela Eq. (20). Os rendimentos de cada esquema podem ser vistos na Tabela 3. O esquema que necessitou da menor memória foi o QUICK-Z, e o menor tempo de computação, o CDS. Globalmente, o QUICK-Z foi o melhor esquema seguido pelo ADS-Z e CDS. As soluções obtidas com os esquemas QUICK-Z (31 volumes) e UDS (511 volumes) são mostradas na Fig. 4, assim como a solução exata.

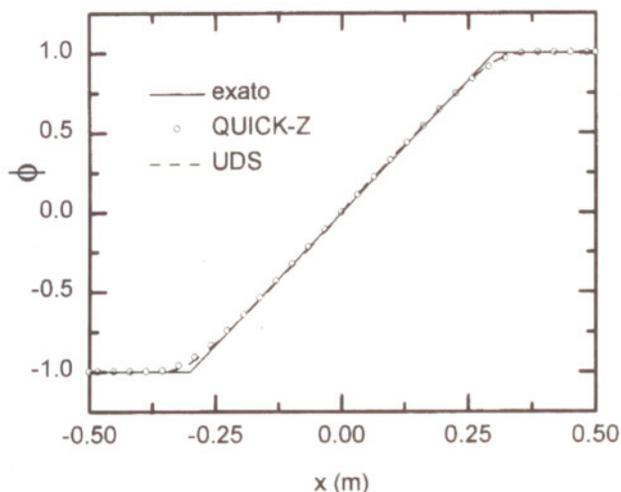


Fig. 4 Solução do problema 2 para $t=0,3s$

Tabela 3 Resultados do problema 2.

Esquema	n	η_M	η_I	η_G
UDS	511	0,083	0,097	0,0081
TVD	411	0,092	0,097	0,0089
CDS	89	0,48	1,0	0,48
CDS-Z	89	0,35	0,24	0,084
ADS-Z	33	0,94	0,56	0,53
QUICK-Z	31	1,0	0,72	0,72

Deve-se destacar que o esquema CDS não apresentou oscilações para qualquer tamanho de volume. E, o esquema CDS-Z reproduz o resultado do CDS em termos de número de volumes de controle, como mostrado na Tabela 3. Os rendimentos do esquema CDS-Z, frente ao CDS, são menores devido ao uso do procedimento FCT que exige mais memória computacional e tempo de computação para um mesmo número de volumes.

Não se conseguiu obter uma solução estável para o esquema FIC, nem determinar o motivo disso.

Surpreendentemente, o esquema TVD apresentou péssimos resultados. Só não foi pior que o esquema UDS. A diferença básica entre o problema atual e o anterior, onde o esquema TVD teve o melhor desempenho, é que agora os gradientes espaciais são mais suaves.

Embora novos testes, especialmente para problemas não-lineares, devam ser realizados para melhor compreender o desempenho do esquema TVD, uma possível explicação é a seguinte:

- 1 O esquema TVD é uma mistura dos esquemas UDS, CDS e DDS; em determinadas situações o esquema TVD resulta no esquema DDS; assim como o TVD, o ADS envolve os esquemas UDS, CDS e DDS; maiores detalhes podem ser vistos em Marchi (1993);
- 2 Com o esquema DDS (Marchi, 1993), que consiste em usar $\alpha = -0,5$, obtêm-se os mesmos resultados do esquema UDS e sem oscilações;
- 3 O esquema CDS ($\alpha = 0$) fornece resultados também sem oscilações para o problema 2, como já mencionado acima;
- 4 Sabidamente, o esquema CDS é melhor que o TVD, já que o CDS é de 2ª ordem e o TVD é um esquema cuja ordem varia entre 1ª e 2ª; a dificuldade é que, em geral, o esquema CDS produz resultados com oscilações; e,

- 5 portanto, para problemas em que o esquema CDS não produz oscilações (problema 2), seu desempenho será melhor que o TVD; e o esquema TVD terá desempenho intermediário entre os esquemas UDS e CDS, como constatado na Tabela 3.

Problema 3

O último problema (Fig.5) se traduz na advecção bidimensional em regime permanente de um perfil uniforme de ϕ , mas com uma descontinuidade (Raithby, 1976). A equação governante do problema é

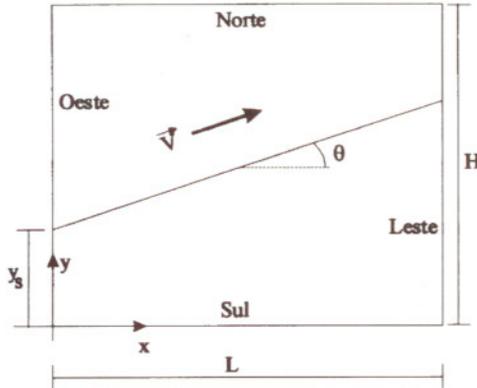


Fig. 5 Definição do problema 3

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\phi) = 0 \quad (24)$$

O tempo é usado apenas para controlar o processo iterativo do qual obtém-se a solução do problema. Somente a solução de regime permanente é obtida. O sistema linear originado da discretização da Eq. (24) é resolvido com o método *Modified Strongly Implicit*, MSI (Schneider e Zedan, 1981). O regime permanente é considerado atingido quando a variação máxima da solução ocorrida num volume de controle entre dois instantes de tempo consecutivos for inferior a 10^{-5} .

As condições de contorno na fronteira oeste são $\phi = 2$ para $y > y_s$ e $\phi = 1$ para $y < y_s$, onde y_s é função do ângulo θ do escoamento em relação ao eixo x . Já na fronteira sul tem-se $\phi = 1$. Admitiu-se $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$, $V = 1 \text{ m/s}$ e $L = H = 1 \text{ m}$. Além disso, usou-se $\Delta x = \Delta y$.

Inicialmente foram obtidos os erros médios das soluções dos diversos esquemas para a malha 11×11 volumes em função do ângulo θ . Estes resultados são apresentados nas Figs. 6a e 6b. Os erros são calculados com a Eq. (20) ao longo de y para $x = L/2$.

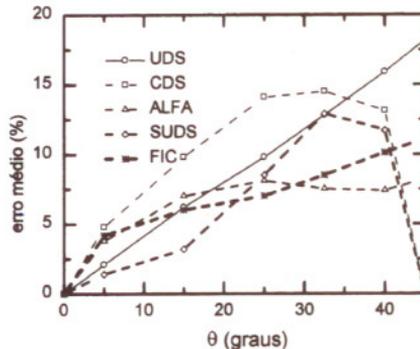


Fig. 6a Maiores erros médios do problema 3 para malha 11×11

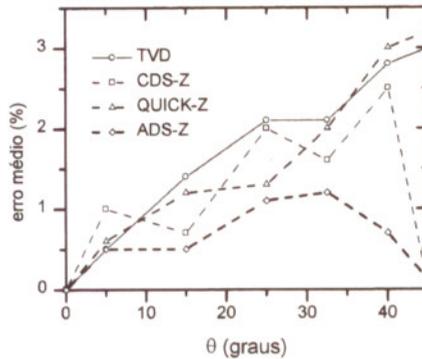


Fig 6b Menores erros médios do problema 3 para malha 11x11

Todos os esquemas resultaram na solução exata para $\theta = 0^\circ$. Os esquemas CDS, SUDS, CDS-Z e ADS-Z também reproduzem a solução exata para $\theta = 45^\circ$.

O erro médio máximo de cada esquema é: UDS = 18% para $\theta = 45^\circ$, CDS = 14% para $\theta = 32,5^\circ$, SUDS = 13% para $\theta = 32,5^\circ$, FIC = 11% para $\theta = 45^\circ$, ALFA = 8,2% para $\theta = 45^\circ$, QUICK-Z = 3,2% para $\theta = 45^\circ$, TVD = 3,0% para $\theta = 45^\circ$, CDS-Z = 2,5% para $\theta = 40^\circ$ e ADS-Z = 1,2% para $\theta = 32,5^\circ$.

Obteve-se para cada esquema uma solução em $x = L/2$ que satisfizesse a condição $E \leq 2\%$ para $\theta = 32,5^\circ$, onde E é dado pela Eq. (20). Os rendimentos de cada esquema são mostrados na Tabela 4. Para o esquema ALFA usou-se $\alpha = 0,1$. Não são apresentados dados dos esquemas CDS e SUDS na Tabela 4 devido às grandes oscilações que ocorrem em seus resultados. A título de comparação, para a malha 81×81 , os erros médios dos esquemas UDS, CDS, SUDS e ALFA foram 5,8%, 7,5%, 5,5% e 2,4%, respectivamente.

É importante mencionar que são obtidas soluções convergidas com o esquema CDS para qualquer ângulo θ , embora os resultados apresentem oscilações. Mas, conforme mencionado acima, a solução exata do problema é obtida para os ângulos θ de 0° e 45° sem qualquer oscilação ou difusão numéricas, o que já foi verificado também por Silva (1991). A solução do problema 3 empregando o esquema CDS só é possível porque o termo transiente é usado (Eq. 24).

O esquema que precisou da menor memória foi o TVD. A solução foi obtida com o menor tempo de computação pelo esquema QUICK-Z. Os outros métodos são todos consideravelmente mais lentos. Globalmente, o melhor esquema foi o TVD seguido pelo esquema QUICK-Z.

As soluções do problema 3, para $x = L/2$ e $\theta = 32,5^\circ$, dadas pelos esquemas ALFA (121×121), TVD (11×11) e UDS (801×801) e pela solução exata são apresentadas na Fig. 7. Todas estas soluções numéricas satisfazem o critério adotado neste problema, ou seja, o erro médio como definido pela Eq. (20) é $E \leq 2\%$, embora possa parecer visualmente que o esquema TVD apresente um erro muito maior do que os esquemas ALFA e UDS apresentem um erro muito menor.

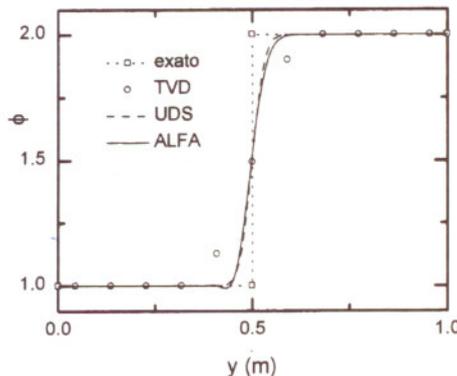


Fig. 7 Solução do problema 3

Verificou-se que as soluções de regime permanente obtidas com os esquemas que empregaram o procedimento FCT são dependentes do intervalo de tempo usado, como pode ser visto na Fig. 8 para a malha 11×11 e $\theta = 32,5^\circ$. Apesar disso, os erros médios ainda são muito menores que aquele do esquema UDS ($E = 12,8\%$). O resultado do esquema TVD é apresentado na Fig. 8 como referência. Apesar do erro do esquema TVD ser independente do intervalo de tempo, o valor máximo que se pode usar é $\Delta t = 4 \times 10^{-2}$ s enquanto que nos esquemas UDS, ADS-Z, QUICK-Z e CDS-Z é $\Delta t = 100$ s. É importante ressaltar que a dependência do intervalo de tempo deve-se ao uso do procedimento FCT. Sem empregá-lo, os esquemas não apresentam esta dependência do intervalo de tempo.

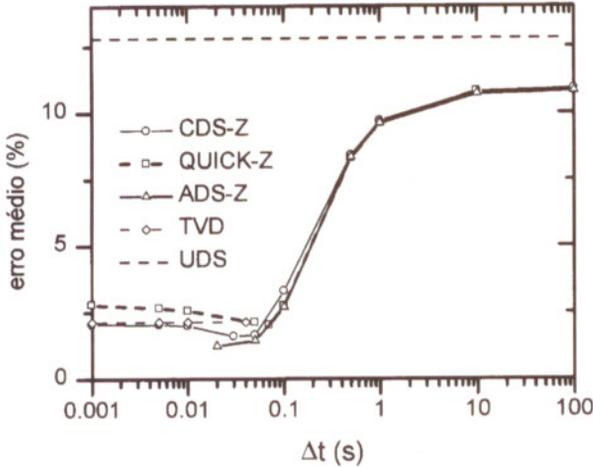


Fig. 8 Erros médios do problema 3 em função do Δt

Tabela 4 Resultados do problema 3

Esquema	n	η_M	η_I	η_G
UDS	801x801	0,00021	0,012	$2,5 \times 10^{-6}$
ALFA	121x121	0,0092	0,011	0,00010
FIC	81x81	0,018	0,87	0,016
CDS-Z	11x11	0,91	0,40	0,36
QUICK-Z	11x11	0,91	1,0	0,91
ADS-Z	11x11	0,91	0,38	0,35
TVD	11x11	1,0	0,94	0,94

Conclusões

Das comparações quantitativas verificou-se que o esquema UDS apresenta desempenho extremamente inferior aos esquemas de alta ordem, principalmente com relação à memória computacional.

O uso do procedimento FCT, na forma apresentada neste trabalho, conseguiu evitar a ocorrência de oscilações numéricas nos resultados obtidos com esquemas de alta ordem como o CDS, QUICK e ADS.

Para os três problemas testados e empregando apenas algumas das inúmeras funções de interpolação disponíveis na literatura, o melhor desempenho global foi obtido pelo esquema QUICK-Z seguido pelos esquemas TVD (limitador Superbee de Roe) e ADS-Z.

Aparentemente, uma recomendação importante parece ser o uso de funções de interpolação unidimensionais associadas a limitadores de fluxo. Isto pode ser visto pelos resultados do problema 3 com o FIC que, apesar de apresentar um tempo de computação pequeno, tem seu rendimento global diminuído pelo rendimento de memória.

Agradecimentos

O primeiro autor agradece ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e ao Laboratório de Simulação Numérica em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor (SINMEC) pelo financiamento deste trabalho, e ao ex-bolsista de iniciação científica, atualmente doutorando, Luciano Amaury dos Santos, pela colaboração prestada.

Os autores agradecem aos três revisores deste trabalho pelas valiosas contribuições prestadas.

Referências

- Boris, J.P. and Book, D.L., 1973, "Flux Corrected Transport: I. SHASTA, a Fluid Transport Algorithm That Works", *J. Computational Physics*, Vol. 11, pp. 38-69.
- Courant, R., Isaacson, E. and Rees, S.M., 1952, "On the Solution of Nonlinear Hyperbolic Differential Equations by Finite Differences", *Comm. Pure and Applied Mathematics*, Vol. 5, pp. 243-255.
- Ferziger, J.H. e Peric, M., 1996, "Computational Methods for Fluid Dynamics", Springer, Berlin.
- Leonard, B.P., 1979, "A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation", *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 19, pp. 59-98.
- Maliska, C.R., 1995, "Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional", LTC, Rio de Janeiro.
- Marchi, C.H., 1993, "Esquemas de Alta Ordem para a Solução de escoamentos de Fluidos sem Oscilação Numérica", *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, Vol. XV, n. 3, pp. 231-249.
- Patankar, S.V., 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere, New York.
- Raithby, G.D., 1976, "Skew Upstream Differencing Schemes for Problems Involving Fluid Flow", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 9, pp. 153-164.
- Raithby, G.D. e Torrance, K.E., 1974, "Upstream-Weighted Differencing Schemes and Their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow", *Comp. Fluids*, V. 2, pp. 191-206.
- Roache, P.J., 1972, "On Artificial Viscosity", *Journal of Computational Physics*, Vol. 10, pp. 169-184.
- Roe, P.L., 1983, "Some Contributions to the Modelling of Discontinuous Flows", *Proc. 1983 A MS-SIAM, Lectures in Applied Mathematics*, Vol. 22, pp. 163-193, Philadelphia.
- Silva, A.F.C., 1991, "Um Procedimento em Volumes Finitos para a Solução de escoamentos de Qualquer Velocidade", Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil.
- Schneider, G.E. and Zedan, M., 1981, "A Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 4, pp. 1-19.
- Sharif, M.A.R. and Busnaina, A.A., 1993, "Evaluation and Comparison of Bounding Techniques for Convection-Diffusion Problems", *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 115, pp. 33-40.
- Souza, S.M.A.G.U e Maliska, C.R., 1990, "Arranjo de Variáveis Co-Localizadas no Método de Volumes Finitos", *Anais do XI CILAMCE*, Rio de Janeiro, pp. 177-191.
- Thomas, L.H., 1949, "Elliptic Problems in Linear Difference Equation over a Network", *Watson Sci. Comput. Lab. Report*, Columbia University, New York.
- Zalesak, S.T., 1979, "Fully Multidimensional Flux-Corrected Transport Algorithms for Fluids", *J. Computational Physics*, Vol. 31, pp. 335-362.