

Tese apresentada à Divisão de Pós-Graduação do Instituto Tecnológico de Aeronáutica como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências no Curso de Pós-Graduação em Engenharia Aeronáutica e Mecânica na Área de Aerodinâmica, Propulsão e Energia.

Maximilian Serguei Mesquita

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS BIDIMENSIONAIS NÃO-ISOTÉRMICOS USANDO O MÉTODO MULTIGRID

Tese aprovada em sua versão última pelos abaixo assinados:

Prof. Dr. Marcelo José Santos de Lemos

Orientador

Prof. Dr. Paulo Afonso de O. Sovieiro

Chefe da Divisão de Pós-Graduação

Campo Montenegro

São José dos Campos, SP - Brasil

2000

SOLUÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS BIDIMENSIONAIS NÃO-ISOTÉRMICOS
USANDO O MÉTODO MULTIGRID

Maximilian Serguei Mesquita

Composição da Banca Examinadora:

| | |
|---|-----------------------|
| Prof. Dr. Nide Geraldo do Couto Ramos Fico Júnior | Presidente IEA - ITA |
| Prof. Dr. Marcelo José Santos de Lemos..... | Orientador IEME - ITA |
| Prof. Dr(a) Ângela Ourivio Nieckele..... | PUC-RJ |
| Prof. Dr Edson Luiz Zapparoli..... | IEME - ITA |
| Prof. Dr Sérgio Mourão Saboya..... | IEME - ITA |

ITA

Índice

| | |
|---|--------|
| Lista de Figuras e Tabelas | iii |
| Lista de Símbolos | vi |
| Sumário | viii |
| Abstract | ix |
| Capítulo I - Introdução | I-1 |
| I-1. Solução de problemas de interesse em engenharia | I-1 |
| I-2. Solução Numérica | I-2 |
| I-3. Convergência da solução numérica e método multigrid | I-3 |
| I-4. Objetivo E Organização Do Presente Trabalho | I-4 |
| I-5. Revisão da literatura | I-5 |
| Capítulo II - Modelo matemático | II-1 |
| II-1. Equações do escoamento laminar | II-1 |
| II-2. Equação Geral De Transporte | II-2 |
| II-3. Condições De Contorno | II-4 |
| II.3.1 Parede sólida | II-5 |
| II.3.2 Linha de simetria | II-5 |
| II.3.3 Perfil de entrada | II-5 |
| II.3.4 Perfil de saída | II-5 |
| Capítulo III - Modelo Numérico | III-1 |
| III-1. . FORMULAÇÃO EM VOLUMES FINITOS | III-1 |
| III-2. DISCRETIZAÇÃO DOS TERMOS DA EGT | III-3 |
| III.2.1 Discretização dos termos convectivos | III-3 |
| III.2.2 Discretização dos termos difusivos | III-6 |
| III.2.3 Discretização dos termos convectivos e difusivos—esquema WUDS | III-6 |
| III.2.4 Discretização do termo fonte | III-7 |
| III.2.5 Forma final da equação algébrica | III-8 |
| III-3. TRATAMENTO DOS TERMOS FONTES | III-9 |
| III.3.1 Termo fonte da EGT para a quantidade de movimento | III-9 |
| III.3.2 Termo fonte da EGT para a energia | III-10 |
| III-4. TRATAMENTO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO | III-11 |
| III.4.1. Superfície sólida | III-12 |
| III.4.2 Linha de simetria | III-12 |
| III.4.3. Perfil de entrada | III-13 |
| III.4.4. Perfil da saída | III-13 |
| III.4.5. Tratamento para o esquema WUDS | III-13 |
| III-5. ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE | III-14 |
| III.5.1 Equação de correção da pressão | III-16 |
| III.5.2 Condições de contorno para a equação da correção da pressão | III-18 |
| III.5.3 Atualização da pressão, das velocidades e dos fluxos mássicos | III-19 |
| III-6. PARÂMETROS DE SUB-RELAXAÇÃO | III-19 |
| Capítulo IV O MÉTODO MULTIGRID | IV-1 |

| | |
|---|-------|
| IV-1. A FILOSOFIA DO MÉTODO MULTIGRID | IV-1 |
| IV-2. CORRECTION STORAGE - CS | IV-3 |
| IV-3. FULL APROXIMATION STORAGE - FAS | IV-5 |
| IV-4. PROCEDIMENTOS DE MUDANÇA DE NÍVEL DE MALHA | IV-6 |
| IV-4.a. Transferência de valores | IV-6 |
| IV-4.b. Obtenção da matriz dos coeficientes | IV-11 |
| IV-4.c. Tratamento das coordenadas da malha computacional | IV-13 |
| IV-5. ESTRATÉGIA DE MUDANÇA DE NÍVEL DE MALHA | IV-16 |
| IV-6. FLUXOGRAMA DO ALGORITMO MULTIGRID CS | IV-17 |
| Capítulo V RESULTADOS E DISCUSSÃO | V-1 |
| V-1. Introdução | V-1 |
| V-2. Validação numérica | V-4 |
| V-2.a. Problema hidrodinâmico | V-4 |
| V-2.b. Problema térmico | V-10 |
| V-3. Escoamento com recirculação | V-15 |
| V-3.a. Escoamento com expansão abrupta | V-15 |
| V-3.b. Escoamento em tanque retangular | V-24 |
| V-3.c. Escoamento de jato confinado | V-30 |
| V-4. SOLUÇÃO DE PROBLEMAS TÉRMICOS | V-37 |
| V-4.a. Escoamento com expansão abrupta | V-37 |
| V-4.b. Escoamento em tanque retangular | V-44 |
| V-4.c. Escoamento de jato confinado | V-48 |
| V-5. OTIMIZAÇÃO DOS PARÂMETROS MULTIGRID | V-52 |
| V-5.a. Escoamento com expansão abrupta | V-52 |
| V-5.b. Escoamento em tanque retangular | V-63 |
| V-5.c. Escoamento de jato confinado | V-67 |
| Capítulo VI CONCLUSÃO E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS | VI-1 |
| Capítulo VII REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | VII-1 |

LISTA DE FIGURAS E TABELAS

| | |
|---|-------|
| Figura I-1 A idéia do método numérico | I-2 |
| Figura II-1 - Condições de contorno implementadas nos problemas de escoamento. | II-4 |
| Figura III-1 - Disposição dos volumes de controle no domínio de cálculo | III-1 |
| Figura III-2 - Esquema e nomenclatura de cada volume de controle | III-2 |
| Figura IV-1 - Comportamento da suavização do erro em métodos iterativos de suavização. | IV-2 |
| Figura IV-2 - Esquema dos procedimentos de restrição (a) e de prolongamento (b). | IV-8 |
| Figura IV-3 - Detalhes do procedimento de prolongamento | IV-9 |
| Figura IV-4 - Modo de armazenamento das grandezas pelos vários níveis de malha. | IV-10 |
| Figura IV-5 - Combinação dos fluxos mássicos nas interfaces | IV-12 |
| Figura IV-6 - Representação de uma malha não-uniforme | IV-14 |
| Figura IV-7 - Sequência de operações em iteração multigrid completa com 4 malhas | IV-16 |
| Figura IV-8 - Fluxograma do algoritmo multigrid na formulação CS | IV-19 |
| Figura V-1- -Escoamento entre placas planas e paralelas | V-4 |
| Figura V-2 - Escoamento entre placas: validação numérica da solução multigrid | V-6 |
| Figura V-3 - Escoamento entre placas : resíduo da velocidade U , $Re = 200$, ciclo V | V-7 |
| Figura V-4 - Escoamento entre placas : resíduo da velocidade V , $Re = 200$, ciclo V | V-8 |
| Figura V-5 - Escoamento entre placas : resíduo da pressão P , $Re = 200$, ciclo V | V-9 |
| Figura V-6 - Escoamento entre placas : Visualização do escoamento entre placas planas | V-10 |
| Figura V-7 - Escoamento entre Placas : Visualização do campo térmico para $Re = 200$ | V-11 |
| Figura V-8- -Escoamento entre Placas : validação numérica da solução térmica | V-12 |
| Figura V-9 - Escoamento entre Placas : resíduos da temperatura T , $Re = 200$ Ciclo V | V-13 |
| Figura V-10 - Escoamento entre placas : comparação entre a solução acoplada e a solução desacoplada | V-14 |
| Figura V-11 - Escoamento entre placas com expansão abrupta. | V-15 |
| Figura V-12 - Escoamento com expansão abrupta: resíduos da velocidade U , $Re= 100$ e 400 , Ciclo V | V-17 |
| Figura V-13 - Escoamento com expansão abrupta: resíduos da velocidade V , $Re= 100$ e 400 , Ciclo V . | V-18 |
| Figura V-14 - Escoamento com expansão abrupta: resíduos da pressão P , $Re= 100$ e 400 , ciclo V | V-19 |
| Figura V-15 - Escoamento com expansão abrupta: resíduos da velocidade U , $Re=100$ e 400 , Ciclo W | V-20 |
| Figura V-16 - Escoamento com expansão abrupta: resíduos da velocidade V , $Re= 100$ e 400 , Ciclo W | V-21 |
| Figura V-17 - Escoamento com expansão abrupta: resíduos da pressão P , $Re= 100$ e 400 , Ciclo W . | V-22 |
| Figura V-18 - Escoamento com expansão abrupta: visualização da região de entrada. | V-23 |
| Figura V-19 - Escoamento em tanque retangular. | V-24 |
| Figura V-20 - Escoamento em tanque retangular: visualização do escoamento $Re= 300$ | V-26 |
| Figura V-21 - Escoamento em tanque retangular: resíduo da velocidade U , $Re= 75, 150, 300$ Ciclo V . | V-27 |
| Figura V-22 - Escoamento em tanque retangular: resíduo da velocidade V , $Re = 75, 150, 300$ Ciclo V . | V-28 |
| Figura V-23 - Escoamento em tanque retangular: resíduo da pressão P , $Re= 75, 150, 300$ Ciclo V . | V-29 |

| | |
|---|------|
| Figura V-24 - escoamento de jato confinado: visualização da região próxima à entrada. | V-30 |
| Figura V-25 - escoamento de jato confinado: trecho da malha computacional não-uniforme. | V-31 |
| Figura V-26 - escoamento de jato confinado: resíduo da velocidade U , $Re=50$ e 300 Ciclo V | V-33 |
| Figura V-27-escoamento de Jato confinado: resíduo da velocidade V , $Re=50$ e 300 Ciclo V . | V-34 |
| Figura V-28-escoamento de jato confinado:resíduo da pressão P , $Re= 50$ e 300 Ciclo V . | V-35 |
| Figura V-29 - escoamento de jato confinado: visualização do escoamento em jato confinado. | V-36 |
| Figura V-30 - escoamento com expansão abrupta: visualização do campo térmico para $Re= 100$ e 400(de cima para baixo). | V-39 |
| Figura V-31 - escoamento com expansão abrupta: resíduos da temperatura T , $Re= 100$ e 400 Ciclo V . | V-40 |
| Figura V-32 - escoamento com expansão abrupta: resíduos da temperatura T , $Re= 100$ e 400 Ciclo W . | V-41 |
| Figura V-33 - escoamento com expansão abrupta: comparação entre a solução acoplada e a desacoplada. | V-42 |
| Figura V-34 - escoamento com expansão abrupta: comparação entre a solução em malha 144x48 e a solução em malha 218x74 para os resíduos da temperatura. | V-43 |
| Figura V-35 - escoamento em tanque retangular: visualização do campo térmico para $Re=75$, 150 e 300 (de cima para baixo) | V-45 |
| Figura V-36 - escoamento em tanque retangular: resíduos da temperatura T , $Re= 75$, 150 e 300. | V-46 |
| Figura V-37 - escoamento em tanque retangular: comparação entre a solução acoplada e a solução desacoplada. | V-47 |
| Figura V-38 - escoamento de jato confinado: visualização do campo térmico $Re= 50$, 300 (de cima para baixo). | V-49 |
| Figura V-39 - escoamento de jato confinado: resíduo da temperatura T , $Re= 50$ e 300 Ciclo V . | V-50 |
| Figura V-40 - escoamento de jato confinado: comparação entre a solução acoplada e a solução desacoplada. | V-51 |
| Figura V-41 - escoamento com expansão abrupta: esforço computacional para diferentes números de iterações de pré-/pós-suavizações, $\nu^{cg} = 3$. | V-54 |
| Figura V-42 - escoamento com expansão abrupta: esforço computacional para diferentes números de iterações de pré-/pós-suavizações $\nu^{cg} = 6$. | V-55 |
| Figura V-43 - escoamento com expansão abrupta: Esforço computacional para diferentes números de iterações de pré-/pós-suavizações $\nu^{cg} = 9$. | V-56 |
| Figura V-44 - escoamento com expansão abrupta: Esforço computacional para diferentes números de iterações de pré-/pós-suavizações $\nu^{cg} = 15$. | V-57 |
| Figura V-45 - escoamento com expansão abrupta: Influência do número de iteração na malha mais grossa ν^{cg} sobre o esforço computacional. | V-59 |
| Figura V-46 - escoamento com expansão abrupta: influência do refinamento da malha $\nu^{cg} = 1$ Ciclo V | V-61 |
| Figura V-47 - escoamento com expansão abrupta: influência do refinamento da malha $\nu^{pre} = \nu^{post}$ ciclo V . | V-62 |
| Figura V-48 - escoamento em tanque retangular: esforço computacional para diferentes números de iterações de pré-/pós-suavizações ($\nu^{pre} = \nu^{post}$). | V-65 |

| | |
|---|--------|
| Figura V-49 - escoamento em tanque retangular: Influência do número de iterações na malha mais grossa (ν^{cg}) sobre o esforço computacional. | V-66 |
| Figura V-50 - escoamento de jato confinado: esforço computacional para diferentes números de iterações de pré-/ pós-suavizações, $Re= 50$ e 100 . | V-68 |
| Figura V-51 - escoamento de jato confinado: influência do número de iterações na malha mais grossa (ν^{cg}) sobre o esforço computacional. | V-69 |
| | |
| Tabela II-1 - Coeficientes de difusão e termos fontes da EGT. | II-3 |
| Tabela III-1 - Resumo das condições de contorno implementadas. | III-11 |
| Tabela V-1 – S mario dos resultados | V-2 |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|----------|---|
| K | Condutividade térmica |
| c_p | Calor específico |
| L_y | Altura do domínio |
| L_x | Comprimento do domínio |
| M | Número máximo de malhas |
| P | Pressão estática |
| Pe | Número de Peclet |
| Pr | Número de Prandtl |
| R_{ij} | Resíduo da equação da continuidade |
| R_T | Resíduo da equação da energia |
| Re | Número de Reynolds |
| S_ϕ | Termo fonte para a variável ϕ , $\phi = U, V, T$ |
| T | Temperatura |
| U | Componente da velocidade na direção x |
| V | Componente da velocidade na direção y |
| x | Coordenada axial |
| y | Coordenada transversal |
| D_h | Diâmetro hidráulico |
| N_u | Número de Nusselt |
| CPU | Tempo de CPU (s) |
| RE | Razão de espaçamento |

Subscrito

| | |
|-------|--|
| i,j | índices nodal para variáveis centradas |
| in | valores de entrada |
| k | nível da malha |
| vz | vizinho |
| T | temperatura |

Letras gregas

| | |
|---------------|---|
| μ | Viscosidade dinâmica do fluido |
| ρ | Densidade do fluido |
| ϕ | Variável dependente genérica, $\phi = U, V, T$ |
| Γ_ϕ | Coeficiente de difusão para ϕ , $\phi = U, V, T$ |
| ν^{cg} | Número de varreduras no domínio na malha mais grossa |
| ν^{pre} | Número de varreduras no domínio antes da <i>restrição</i> |
| ν^{post} | Número de varreduras no domínio antes do <i>prolongamento</i> |
| μ | Viscosidade dinâmica |
| ρ | Densidade |
| ξ | Fator de relaxação |
| α | Coeficiente de interpolação |
| β | Coeficiente de interpolação |
| λ | Coeficiente de interpolação |

SUMÁRIO

É aplicada a técnica *multigrid* na implementação de um programa computacional visando a solução numérica de problemas bidimensionais em coordenadas cartesianas e em regime permanente de escoamentos laminares com geometrias simples e de problemas simples de transferência de calor. O programa emprega malhas computacionais estruturadas e ortogonais, estando generalizado ao uso de malhas não-uniformes. As equações algébricas são obtidas segundo uma formulação em volumes finitos, com as variáveis armazenadas no centro dos volumes elementares em um arranjo co-localizado. O sistema de equações resultantes é relaxado através dos algoritmos Gauss-Seidel e TDMA - *TriDiagonal Matrix Algorithm*. O acoplamento pressão-velocidade é feito segundo o método SIMPLE - *Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*. O algoritmo *multigrid* é implementado na formulação *correction storage*. A técnica é demonstrada para alguns problemas *bench-mark*, com os resultados apresentando uma aceleração significativa do processo de convergência da solução numérica *multigrid* (em relação às soluções em malha única), especialmente nas situações em que foram empregadas malhas bastante refinadas e foi exigida elevada precisão.

ABSTRACT

This work investigates the efficiency of the multigrid numerical method when used to solve two-dimensional laminar velocity and temperature fields inside a rectangular domain. Numerical analysis is based on the finite volume discretization scheme applied to structured orthogonal regular meshes. Performance of the correction storage (CS) multigrid algorithm is compared for different Reynolds number at inlet (Re_{in}) and distinct number of grids. Up to four grids were used for both V- and W-cycles. Simultaneous and uncoupled temperature-velocity solution schemes were investigated. Advantages in using more than one grid are discussed. For simultaneous solution, results further indicate an increase in the computational effort for higher inlet Reynolds number Re_{in} . Optimal number of intermediate relaxation sweeps for within both V- and W-cycles are discussed upon.

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

I-1. SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE INTERESSE EM ENGENHARIA

De um modo geral, para se resolver um determinado problema de interesse em engenharia pode-se recorrer a *métodos analíticos*, a *métodos numéricos* (experimentação numérica) ou à *experimentação em laboratório* (experimentação física).

A experimentação em laboratório tem a grande vantagem de tratar com a configuração real. No entanto, muitas vezes é de alto custo e não pode ser realizada ou por questões de segurança ou pela dificuldade de reprodução das condições reais.

Os problemas resolvidos por métodos analíticos na maioria das vezes possuem hipóteses simplificadoras que muito os afastam do fenômeno físico real ou possuem geometria e/ou condições de contorno simples. Ainda assim, as soluções analíticas são extremamente úteis para validar casos limites da experimentação numérica.

Por sua vez, os métodos numéricos não apresentam restrições quando o modelo numérico é aceitável, podendo resolver problemas com condições de contorno complicadas e geometrias arbitrárias, apresentando dados com boa rapidez. Entretanto, os dados obtidos devem ser confiáveis. A comparação dos resultados numéricos com resultados analíticos (se existirem) ou com outros resultados numéricos caracteriza a *validação numérica*, enquanto que a *validação física* é feita pela comparação com resultados experimentais.

I-2. SOLUÇÃO NUMÉRICA

A obtenção de uma solução numérica de qualquer problema físico requer inicialmente a adoção do modelo matemático correspondente, o qual via de regra é descrito por meio de equações diferenciais parciais (EDPs). Tal modelo deve ser passível de ser resolvido em tempos de computação não-proibitivos e os resultados obtidos devem bem representar o fenômeno físico em questão.

A idéia do método numérico é resolver as EDPs, substituindo as derivadas nelas existentes por expressões algébricas envolvendo a função incógnita. Ao contrário do método analítico que permite calcular os valores das variáveis dependentes em um número *infinito* de pontos, a aproximação numérica fornece a solução em um número *discreto* de pontos (ditos *pontos nodais*) definido pela chamada *malha computacional*, conforme ilustra a Figura I-1. Espera-se que quanto maior for o número de pontos nodais, mais próxima da solução exata esteja a solução numérica.

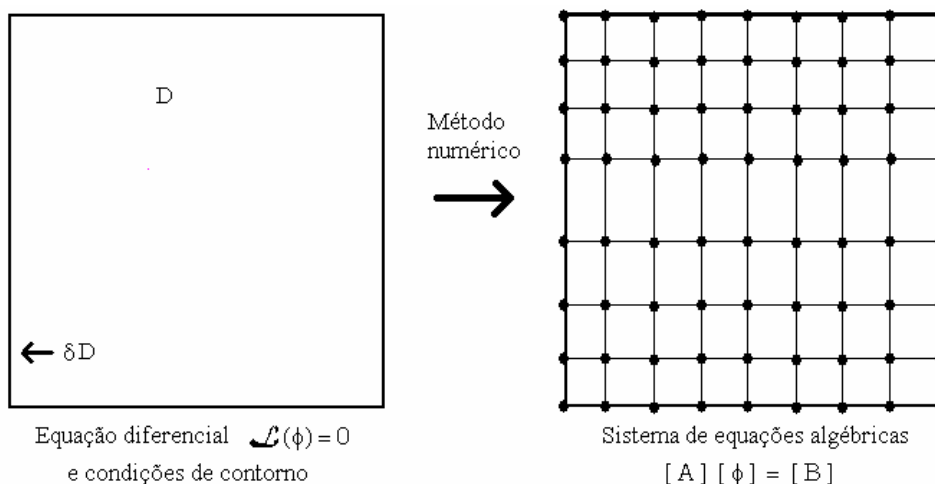


Figura I-1 A idéia do método numérico

O passo seguinte está relacionado com a maneira de se obter as equações algébricas, comumente denominado *discretização*. Três classes merecem destaque, a saber: discretização em *elementos finitos*, em *diferenças finitas* e em *volumes finitos*. No presente trabalho foi adotada esta última classe, a qual será assunto de capítulo posterior. Algumas considerações básicas acerca das outras duas classes podem ser encontradas em Maliska, 1985., Patankar, 1980.

Quando a EDP é linear, a discretização dá origem a um sistema linear de equações, cuja matriz de coeficientes permanece constante ao longo do processo iterativo. Em problemas como os de escoamento de fluidos, surgem não-linearidades que são transferidas para a matriz dos coeficientes, com vistas a manter linear o sistema de equações. Como consequência do ponto de vista de implementação, surge a necessidade da atualização desta matriz à medida que a solução numérica evolui, caracterizando assim um processo iterativo.

A etapa final do método numérico diz respeito à escolha do algoritmo para a solução do sistema de equações algébricas, com base nas características do próprio sistema. Os algoritmos de solução podem ser *diretos* (os quais necessitam da inversão da matriz dos coeficientes) ou *iterativos*. Como neste trabalho são abordados problemas não-lineares, foram adotados métodos iterativos de solução.

I-3. CONVERGÊNCIA DA SOLUÇÃO NUMÉRICA E MÉTODO MULTIGRID

Para um sistema de equações não-lineares não é possível fazer afirmações *a priori* acerca da convergência da solução numérica. Valores adequados de tamanho da malha, de intervalo de tempo (para problemas transientes) e de coeficientes de relaxação que garantam a estabilidade e convergência da solução numérica são muitas vezes encontrados de maneira empírica. Em todo caso, a observação de certas regras (ex: positividade dos coeficientes) ajuda na convergência da solução numérica Maliska, 1985, Patankar, 1980.

No início dos cálculos, a taxa de convergência é máxima, passando porém a decair sensivelmente à medida que o processo iterativo evolui. Tal efeito é tanto mais pronunciado quanto mais refinada for a malha computacional. Através de considerações da álgebra linear, Hackbusch, 1985, mostra que tal comportamento vem do fato do método iterativo ser eficiente na remoção somente daquelas componentes de Fourier do erro cujos comprimentos de onda são menores ou comparáveis com o espaçamento da malha. Após algumas iterações diz-se então que as componentes de baixo comprimento de onda já foram *suavizadas* e que o processo de convergência tornou-se lento em decorrência da má suavização das componentes de comprimento de onda elevado.

Com base nessa observação, a idéia do método *multigrid* (“malhas múltiplas”) é cobrir um espectro maior de comprimento de onda através da iteração não apenas em uma única malha, mas em uma seqüência de malhas cada vez mais grossas, isto é, de maior espaçamento. Deste modo, comprimentos de onda de componentes do erro que são grandes em malhas finas são transformados em comprimentos menores em malhas grossas, podendo então o erro ser ali melhor suavizado. Com isso acelera-se o processo de convergência, através da iteração em malhas de espaçamentos variados, nas quais as componentes do erro com comprimentos de onda correspondentes são eficientemente reduzidas.

I-4. OBJETIVO E ORGANIZAÇÃO DO PRESENTE TRABALHO

No presente trabalho aplicou-se a técnica multigrid na solução numérica de problemas bidimensionais (coordenadas cartesianas) de mecânica dos fluidos e transferência de calor. O programa baseou-se no trabalho desenvolvido por Rabi, 1998 que abordou o método multigrid na solução de escoamentos laminares, incompressíveis, em regime permanente e propriedades constantes. Para discretização em volumes finitos foram

empregadas malhas computacionais estruturadas e ortogonais e o sistema de equações algébricas resultante é resolvido por algoritmos iterativos.

A organização do texto é descrita a seguir. O Capítulo I procura situar o trabalho e faz uma breve introdução aos principais assuntos por ele envolvidos. No Capítulo II são apresentadas as equações governantes e as condições de contorno dos problemas estudados. O Capítulo III e o Capítulo IV dizem respeito à implementação da solução numérica, enquanto que o Capítulo V é reservado para a apresentação e discussão dos resultados. Neste capítulo são apresentados estudos comparativos da velocidade de convergência das diferentes soluções implementadas, assim como da qualidade das mesmas. Por fim, o Capítulo VI contém as principais conclusões obtidas e sugere alguns desenvolvimentos futuros. O Capítulo VII contém as referências bibliográficas.

I-5. REVISÃO DA LITERATURA

Segundo Brandt, 1977, as primeiras investigações acerca dos métodos *multigrid* foram feitos por Fedorenko em 1964 e por Bakhvalov em 1966, embora seus procedimentos básicos como a suavização de erro por relaxação e cálculo de correções em malhas grossas com aplicação recursiva já vinham sendo estudados por vários autores, conforme citam Stüben e Trottenberg, 1982. Contudo, a eficiência da técnica foi verificada por Brandt em 1972, quem mais tarde apresentou uma descrição precisa de seu algoritmo Brandt, 1977, incluindo a solução de problemas não-lineares, como é o caso dos problemas de mecânica de fluidos. Um histórico mais detalhado pode ser encontrado em Hackbusch, 1985, Brandt, 1977 e Stüben e Trottenberg, 1982, enquanto que um breve histórico dos desenvolvimentos posteriores e mais recentes pode ser encontrado em Thompson e Ferziger, 1989.

Embora tanto a filosofia geral do método *multigrid* como o seu algoritmo sejam de fácil compreensão, a aplicação da técnica não é trivial. Conforme comentário de Hackbusch, 1985,

“não há algoritmo *multigrid* operando como uma ‘caixa-preta’ para todos os problemas de valor de contorno.” Os seus diferentes componentes devem ser adaptados de acordo com a natureza do problema abordado. Assim, além dos cuidados necessários à toda implementação de uma solução numérica, cuidados especiais devem ser tomados quando da utilização de mais de um nível de malha computacional (ex: transferência de valores entre as malhas).

Seguindo esta linha de trabalho Rabi e de Lemos, 1998b, realizaram uma análise dos valores ótimos para os parâmetros ν^{pre} , ν^{post} e ν^{cg} . Em de Lemos e Mesquita, 1999a, foi apresentado um estudo investigando a eficiência do método multigrid em escoamentos em tanques e expansão abrupta, ambos laminares e não-isotérmicos, para soluções multigrid tanto em ciclo V como para o ciclo W . O trabalho Mesquita e de Lemos, 1999b, também considera o escoamento laminar não-isotérmico entre placas com expansão abrupta, porém neste caso é feita uma análise mais criteriosa dos parâmetros ótimos do ciclo multigrid. Mais adiante, de Lemos e Mesquita, 2000a, consideram os casos de escoamento em tanque retangular aquecido e escoamento com expansão abrupta. Neste trabalho considerou-se valores diferentes para Re e suas implicações nos padrões de resultados do ciclo multigrid, com solução acoplada e solução desacoplada entre temperatura e velocidade. Finalmente em Mesquita e de Lemos, 2000b, foi proposto o estudo de escoamentos turbulentos não-isotérmicos com recirculação usando o método multigrid.

CAPÍTULO II - MODELO MATEMÁTICO

II-1. EQUAÇÕES DO ESCOAMENTO LAMINAR

No presente trabalho são analisados apenas escoamentos laminares bidimensionais incompressíveis de fluidos em regime permanente. As equações que descrevem o movimento de um fluido e do transporte de energia através dele são as equações para a massa, para a quantidade de movimento e para a energia. Elas representam matematicamente o princípio da conservação destas grandezas e são abaixo apresentadas para um sistema de coordenadas cartesianas. Maiores detalhes sobre a obtenção destas equações são encontrados em Bird, Stewart e Lightfoot, 1960, Eskinazi, 1960.

A **equação da continuidade (massa)** para os escoamentos estudados neste trabalho é

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho U) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V) = 0 \quad (\text{II-1})$$

onde ρ é a densidade e U e V são as velocidades nas direções x e y , respectivamente.

A **equação da quantidade de movimento** ou **equação de Navier-Stokes** pode ser escrita para cada uma das direções coordenadas, sendo dadas por

$$\text{direção-}x: \frac{\partial}{\partial x}(\rho U^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho UV) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial U}{\partial y}\right) - \frac{\partial P}{\partial x} + S_U \quad (\text{II-2})$$

$$\text{direção-}y: \frac{\partial}{\partial x}(\rho UV) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V^2) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial V}{\partial y}\right) - \frac{\partial P}{\partial y} + S_V \quad (\text{II-3})$$

onde μ é a viscosidade molecular e P é a *pressão de movimento*, que representa a diferença entre a pressão estática e a pressão hidrostática. Os termos S_U e S_V guardam os chamados termos fontes viscosos e são dados por

$$s_U = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad \text{e} \quad s_V = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial V}{\partial y} \right) \quad (\text{II-4})$$

os quais se anulam pela equação da continuidade (II-1) para fluidos com ρ e μ constantes.

Por fim, a equação da energia aqui resolvida é escrita em termos da temperatura T e pode ser simplificada desprezando-se os trabalhos devido à pressão e às forças viscosas. Esta hipótese é válida para escoamentos a baixos números de Mach, a qual é consistente com a hipótese de densidade constante aqui assumida. A equação então assume a forma

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho U T) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho V T) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{K}{c_p} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S_T \quad (\text{II-5})$$

sendo S_T o termo fonte (geração interna de calor), K a condutividade térmica e c_p o calor específico a pressão constante.

II-2. EQUAÇÃO GERAL DE TRANSPORTE

As equações de transporte vistas no item anterior descrevem fenômenos físicos similares e, portanto, são compostas de termos semelhantes. Este fato sugere escrevê-la de uma maneira geral, cuja forma para problemas bidimensionais em coordenadas cartesianas e em regime permanente é

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho U \phi) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho V \phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S_\phi \quad (\text{II-6})$$

onde ϕ está relacionado a alguma propriedade do escoamento (densidade, componentes do vetor velocidade, temperatura), Γ_ϕ é o coeficiente de difusão da propriedade em questão e S_ϕ é o termo fonte. Este último é responsável por acomodar todos aqueles termos que não se

encaixam na forma apresentada pela Eq. (II-6) conhecida na literatura como equação geral de transporte (EGT). A tabela a seguir contém os valores assumidos por ϕ , Γ_ϕ e S_ϕ para as grandezas resolvidas no presente trabalho.

Tabela II-1 - Coeficientes de difusão e termos fontes da EGT.

| ϕ | Γ_ϕ | S_ϕ |
|--------|-----------------|--|
| U | μ | $-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial V}{\partial x} \right)$ |
| V | μ | $-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial V}{\partial y} \right)$ |
| T | $\frac{K}{C_p}$ | S_T |

Os termos do lado esquerdo da Eq. (II-6) representam o balanço convectivo da variável ϕ e são os termos mais delicados para o tratamento numérico, devido às não-linearidades. Os dois primeiros termos do lado direito representam o balanço dos fluxos difusivos. O termo fonte é o responsável por acomodar todos aqueles termos que não se encaixam na forma apresentada pela Eq. (II-6) possibilitando estabelecer normais gerais para que sua solução possa ser estabelecida. Vale lembrar que para o caso de escoamentos com μ e ρ constantes os termos fontes viscosos são nulos ($S_U = S_V = 0$), de modo que os termos fontes para as velocidades simplificam-se em

$$S_U = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad , \quad S_V = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{(II-7)}$$

Por último e apenas como um adendo, vale citar que na Tabela II-1 não foram apresentados os termos referentes à densidade ($\phi = \rho$, $\Gamma_\phi = 0$, $S_\phi = 0$) por esta não ser uma grandeza resolvida uma vez que os escoamentos analisados são incompressíveis.

II-3. CONDIÇÕES DE CONTORNO

A solução da EGT para as grandezas do escoamento só é possível mediante a especificação das condições de contorno do problema em questão. Quatro diferentes tipos de condições de contorno foram implementadas no programa que resolve escoamentos de fluidos: **(1) parede sólida**, **(2) linha de simetria**, **(3) perfil de entrada** ou **(4) perfil de saída**. A seleção e aplicação de um determinado tipo se faz conforme à geometria / física do problema de interesse investigado, como ilustra a Figura (II-1). O subscrito n refere-se à direção normal à fronteira e t refere-se à direção tangencial.

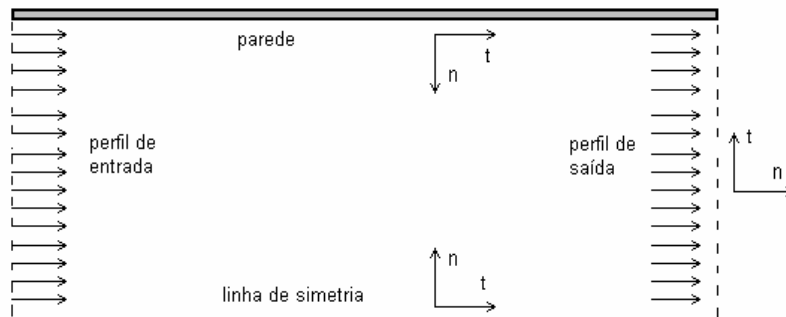


Figura II-1 - Condições de contorno implementadas nos problemas de escoamento.

Cada tipo de condição de contorno para as componentes da velocidade é sucintamente analisado a seguir. A discussão sobre a implementação numérica de cada um é deixada para capítulo posterior. No programa que resolve problemas térmicos somente a condição de valor prescrito (condição de contorno de Dirichlet) foi implementada.

II.3.1 Parede sólida

Em escoamentos laminares, a condição de aderência é aplicada sobre paredes. Para superfícies impermeáveis, é atribuído o valor zero para ambas as componentes da velocidade.

II.3.2 Linha de simetria

Ao longo de uma linha de simetria são atribuídos valores nulos para o gradiente normal da velocidade tangencial a ela e para a componente da velocidade normal à linha.

II.3.3 Perfil de entrada

Os perfis de entrada a serem prescritos podem ser extraídos de dados experimentais ou de outra forma de informação empírica. Por um outro lado, podem ser simplesmente arbitrados conforme o interesse ou a conveniência em relação ao problema analisado.

II.3.4 Perfil de saída

Quando o perfil de saída está suficientemente distante de regiões com recirculação, assume-se estar o escoamento totalmente desenvolvido. Deste modo, são desprezados os gradientes das velocidades na direção principal do escoamento.

CAPÍTULO III - MODELO NUMÉRICO

III-1.. FORMULAÇÃO EM VOLUMES FINITOS

Na formulação em volumes finitos o domínio de cálculo é dividido em volumes finitos (VC) não-superpostos, de modo que cada um envolva um único ponto nodal da malha computacional. Quando cada VC possui o mesmo número de Vcs vizinhos, a malha é dita estruturada e se todos têm formato retangular, ela é classificada como ortogonal. Em uma malha regular ou uniforme todos os VCs possuem as mesmas dimensões.

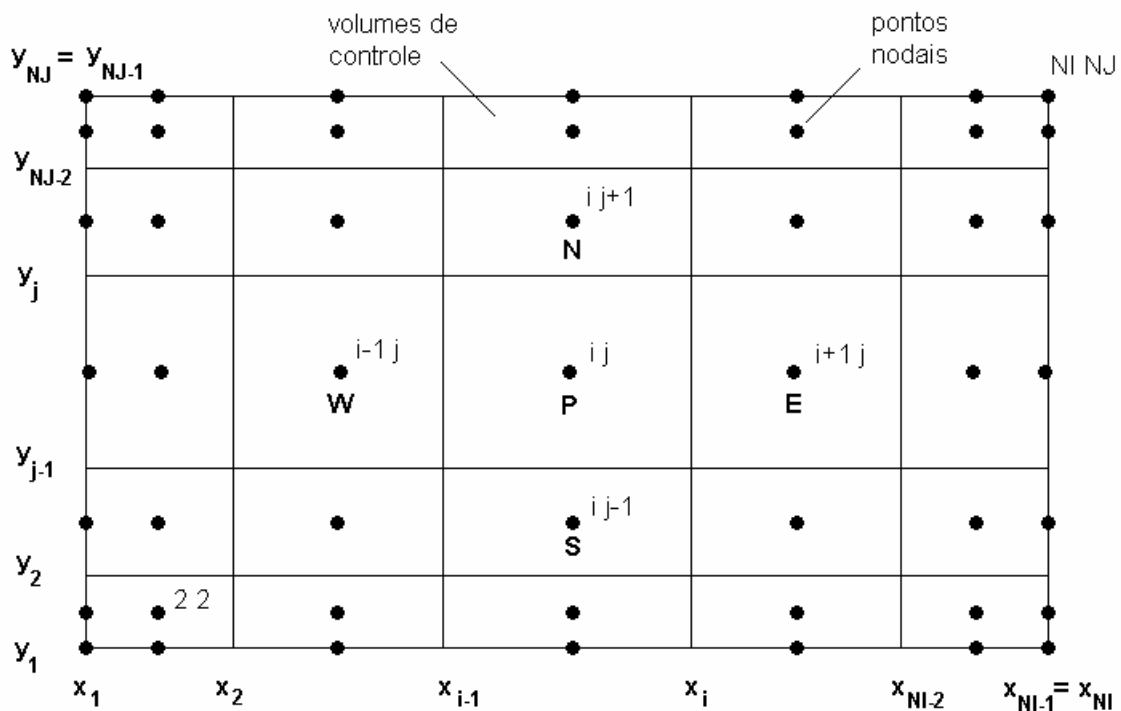


Figura III-1 - Disposição dos volumes de controle no domínio de cálculo

A Figura III-1 mostra como foi feita divisão do domínio de cálculo nos casos estudados, onde os VCs foram definidos pela interseção de linhas de coordenadas x e y constantes. As malhas resultantes são estruturadas e ortogonais, podendo ser ou não uniformes. Os pontos nodais localizam-se no centro do volume de controle (esquema cell-centered) e são numeradas a partir do canto inferior esquerdo. A existência de pontos nodais sobre as fronteiras do domínio (VC de dimensão nula) relaciona-se com a aplicação das condições de contorno.

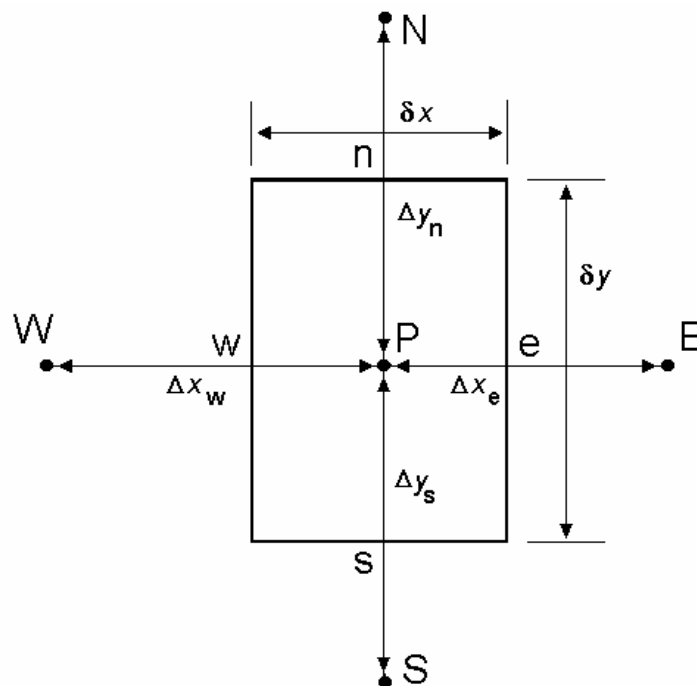


Figura III-2 - Esquema e nomenclatura de cada volume de controle

A Figura III-2 mostra o esquema de um VC típico e apresenta em detalhes a nomenclatura de suas principais dimensões. Há duas maneiras Maliska, 1985 de se obter as equações algébricas no método de volumes finitos. Em uma delas, as equações são obtidas através de balanços de conservação da grandeza no VC. Tal tarefa consiste basicamente em se escrever as taxas macroscópicas de acumulação, de transporte, de produção e de dissipação da propriedade no interior e nas faces do volume de controle.

Contudo, a forma mais recomendada é a partir da EGT na forma conservativa e integrá-la sobre o volume de controle. Isto vem do fato de nem todos os balanços serem fáceis de se deduzir. Esta forma foi adotada no presente trabalho e suas linhas gerais são descritas no próximo item.

Por fim, vale mencionar que as variáveis dependentes foram armazenadas segundo um arranjo co-localizado, o mesmo VC sendo usado para realizar a integração da EGT para todas as variáveis. De acordo com Patankar, 1980, no uso deste arranjo podem surgir problemas relacionados ao acoplamento pressão-velocidade e à detecção de campos oscilatórios. Um modo de evitá-los é pelo uso do arranjo desencontrado (Maliska, 1985 e Patankar, 1980). O outro é realizar um esquema de interpolação para se obter os valores das velocidades nas faces do VC. Este último procedimento foi aqui adotado e será descrito em item posterior.

III-2. DISCRETIZAÇÃO DOS TERMOS DA EGT

A integração da EGT, sobre um VC como o da Figura III-2 faz-se segundo

$$\int_{\delta v} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho U \phi) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho V \phi) \right] dv = \int_{\delta v} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] dv + \int_{\delta v} S_{\phi} dv \quad (\text{III-1})$$

onde $\delta v = \delta x \delta y$ define a extensão do VC bidimensional. O próximo passo é a discretização da Eq.(III-1) que será apresentada separadamente para os seguintes termos:

- termos convectivos (integral do lado esquerdo);
- termos difusivos (primeira integral do lado direito) e
- termo fonte (última integral do lado direito).

III.2.1 Discretização dos termos convectivos

A integração dos termos convectivos sobre o VC pode ser expressa na forma

$$\int_s^e \int_w^n \frac{\partial}{\partial x} (\rho U \phi) dx dy + \int_w^n \int_s^e \frac{\partial}{\partial y} (\rho V \phi) dy dx \quad (\text{III-2})$$

que após uma primeira integração fica

$$\int_s^n [(\rho U \phi)_e - (\rho U \phi)_w] dy + \int_w^n [(\rho V \phi)_n - (\rho V \phi)_s] dx \quad (\text{III-3})$$

onde os subscritos e , w , n , s representam as faces do VC sobre as quais as grandezas devem ser calculadas.

Aqui é feita então a hipótese de que a grandeza avaliada no meio da face do VC seja constante ao longo da mesma. Nestas condições, a integração resulta em

$$C_e \phi_e - C_w \phi_w + C_n \phi_n - C_s \phi_s \quad (\text{III-4})$$

onde

$$C_e = (\rho U)_e \delta y, \quad C_w = (\rho U)_w \delta y, \quad C_n = (\rho V)_n \delta x, \quad C_s = (\rho V)_s \delta x \quad (\text{III-5})$$

são os fluxos mássicos através das faces do VC.

Neste ponto torna-se necessário introduzir um *esquema de interpolação* que forneça uma relação matemática que permita o cálculo das grandezas e de suas derivadas nas interfaces do VC em função dos valores das mesmas em pontos nodais vizinhos. Em Maliska, 1985 e Patankar, 1980 são encontrados e discutidos exemplos de diversos esquemas de interpolação: CDS - *central differencing scheme*, UDS - *upwind differencing scheme*, esquema exponencial, esquema híbrido e WUDS - *weighted upstream differencing scheme*, apenas para citar alguns. Para problemas hidrodinâmicos, preservou-se o esquema originalmente adotado em Rabi, 1998 conhecido como *flux blended deferred correction* Khosla e Rubin, 1974, o qual faz uma combinação linear dos esquemas CDS e UDS, apresentado a seguir.

Tomando a face e como exemplo, os valores sobre a mesma são calculados segundo

$$\phi_e = \lambda \phi_e^{\text{CDS}} + (1 - \lambda) \phi_e^{\text{UDS}} = \phi_e^{\text{UDS}} + \lambda (\phi_e^{\text{CDS}} - \phi_e^{\text{UDS}}) \quad (\text{III-6})$$

onde o fator de combinação λ varia entre 0 (UDS puro) e 1 (CDS puro). No procedimento numérico, o termo entre parênteses é calculado com valores oriundos do nível iterativo anterior (denotados com asterisco), fornecendo

$$\phi_e = \phi_e^{\text{UDS}} + \lambda (\phi_e^{\text{CDS}} - \phi_e^{\text{UDS}})^* \quad (\text{III-7})$$

Este procedimento torna a matriz dos coeficientes estritamente positiva e com predominância diagonal, o que é interessante do ponto de vista numérico (Maliska, 1985 e Patankar, 1980).

No esquema UDS, o valor da função na interface é igual ao valor da função no ponto nodal do VC à montante do escoamento. Este esquema é, portanto, fisicamente consistente para problemas convectivos, ou seja, de caráter parabólico. Matematicamente tem-se

$$\begin{aligned} C_e^* \phi_e &= \max[C_e^*, 0] \phi_P - \max[-C_e^*, 0] \phi_E \\ C_w^* \phi_w &= \max[C_w^*, 0] \phi_W - \max[-C_w^*, 0] \phi_P \\ C_n^* \phi_n &= \max[C_n^*, 0] \phi_P - \max[-C_n^*, 0] \phi_N \\ C_s^* \phi_s &= \max[C_s^*, 0] \phi_S - \max[-C_s^*, 0] \phi_P \end{aligned} \quad (\text{III-8})$$

O operador $\max[a, b]$ fornece o maior entre a e b .

Por outro lado, o esquema CDS é consistente para problemas puramente difusivos, ou seja, de caráter elíptico. Um perfil linear por partes é utilizado para relacionar os pontos nodais vizinhos, matematicamente expresso por

$$\begin{aligned} \phi_e &= (1 - f_{x,P}) \phi_P + f_{x,P} \phi_E & \phi_w &= (1 - f_{x,W}) \phi_W + f_{x,W} \phi_P \\ \phi_n &= (1 - f_{y,P}) \phi_P + f_{y,P} \phi_N & \phi_s &= (1 - f_{y,S}) \phi_S + f_{y,S} \phi_P \end{aligned} \quad (\text{III-9})$$

onde os fatores de interpolação linear $f_{x,P}, f_{x,W}, f_{y,P}, f_{y,S}$ são calculados segundo

$$f_{x,P} = \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P}, \quad f_{x,W} = \frac{x_w - x_W}{x_P - x_W}, \quad f_{y,P} = \frac{y_n - y_P}{y_N - y_P}, \quad f_{y,S} = \frac{y_s - y_S}{y_P - y_S} \quad (\text{III-10})$$

III.2.2 Discretização dos termos difusivos

A integração dos termos difusivos sobre o VC é expressa por

$$\int_s^e \int_w^n \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy + \int_w^n \int_s^e \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dy dx \quad (\text{III-11})$$

Após uma primeira integração e pela hipótese de derivada constante ao longo da face, tem-se

$$\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \delta y - \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \delta y + \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n \delta x - \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \delta x \quad (\text{III-12})$$

Por fim, o esquema CDS é novamente utilizado para discretizar os gradientes nas faces do VC

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e &= \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_e} & \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w &= \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_w} \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n &= \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta y_n} & \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s &= \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta y_s} \end{aligned} \quad (\text{III-13})$$

III.2.3 Discretização dos termos convectivos e difusivos—esquema WUDS

O esquema WUDS proposto por Raithby e Torrance, 1974 usa dois coeficientes α e β que servem como pesos entre os processos de convecção e condução. Conforme mencionado, ele foi empregado no programa que resolve problemas térmicos. Tomando a face leste como exemplo, o valor da temperatura e de sua derivada na interface são aproximados por

$$T_e = \left(\frac{1}{2} + \alpha_e \right) T_P + \left(\frac{1}{2} - \alpha_e \right) T_E \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_e = \beta_e \left(\frac{T_E - T_P}{\Delta x_e} \right) \quad (\text{III-14})$$

com os coeficientes sendo expressos por

$$\alpha_e = \frac{1}{2} - \frac{\exp(\text{Pe}_e/2) - 1}{\exp(\text{Pe}_e) - 1} \quad \text{e} \quad \beta_e = \text{Pe}_e \frac{\exp(\text{Pe}_e/2)}{\exp(\text{Pe}_e) - 1} \quad (\text{III-15})$$

O parâmetro Pe_e é o *número de Péclet* da célula baseado na distância internodal Δx_e . Ele é avaliado com os valores do nível iterativo anterior segundo

$$\text{Pe}_e = \left. \frac{\rho U \Delta x}{K/C_p} \right|_e^* \quad (\text{III-16})$$

Para as demais faces são propostas expressões análogas às anteriores (Maliska, 1985) com Pe sendo calculado com os valores das grandezas na interface e com a respectiva distância internodal.

Contudo, as expressões para α e β dadas pelas Eqs. (III-15) acarretam dificuldades relacionadas com o tempo de computação para avaliar as exponenciais. Para contorná-las, Raithby e Torrance, 1974, propõe as seguintes aproximações, aqui também adotadas,

$$\alpha_e = \frac{\text{Pe}_e^2}{10 + 2 \text{Pe}_e^2} \quad \text{e} \quad \beta_e = \frac{1 + 0.005 \text{Pe}_e^2}{1 + 0.05 \text{Pe}_e^2} \quad (\text{III-17})$$

III.2.4 Discretização do termo fonte

Com base no teorema do valor médio, a integral do termo fonte é expressa como o produto de um valor médio, o qual está associado ao ponto nodal central, pelo volume do VC

$$\int_{\delta V} S_\phi \, dv = \bar{S}_\phi \delta V \approx S_{\phi,p} \delta V \quad (\text{III-18})$$

Em casos onde, por exemplo, o termo fonte S_ϕ depende (linearmente ou não) da própria grandeza ϕ , recomenda-se (Maliska, 1985 e Patankar, 1980) proceder uma linearização da forma

$$S_{\phi,P} = S_c + S_P \phi_P \quad (\text{III-19})$$

Por último, para obter soluções fisicamente realistas e por questões de estabilidade e convergência, é desejável manter o coeficiente S_P negativo. Contribuições positivas ao termo fonte devem ser incorporadas a S_c , conforme é discutido em (Maliska, 1985 e Patankar, 1980).

III.2.5 Forma final da equação algébrica

Para obter a equação algébrica final para o ponto nodal P são introduzidas na EGT integrada sobre o VC, Eq. (III-1), todas as discretizações apresentadas nos itens III.2.1-III.2.4. Após algumas manipulações algébricas, chega-se a

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + b \quad (\text{III-20})$$

Para a discretização com base no esquema *flux blended*, os coeficientes são dados por

$$\begin{aligned} a_E &= \max[-C_e^*, 0] + \frac{\mu_e^* \delta y}{\Delta x_e} & a_W &= \max[C_w^*, 0] + \frac{\mu_w^* \delta y}{\Delta x_w} \\ a_N &= \max[-C_n^*, 0] + \frac{\mu_n^* \delta x}{\Delta y_n} & a_S &= \max[C_s^*, 0] + \frac{\mu_s^* \delta x}{\Delta y_s} \\ a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S - S_P \delta v \end{aligned} \quad (\text{III-21})$$

O termo b contém contribuições do termo fonte e do termo referente à *deferred correction*

$$b = S_c \delta v + \gamma (a_W^{\text{DC}} \phi_W^* + a_E^{\text{DC}} \phi_E^* + a_S^{\text{DC}} \phi_S^* + a_N^{\text{DC}} \phi_N^* - a_P^{\text{DC}} \phi_P^*) \quad (\text{III-22})$$

onde os coeficientes desta última contribuição são dados por

$$\begin{aligned} a_E^{\text{DC}} &= -\max[-C_e^*, 0] - C_e^* f_{x,P} & a_W^{\text{DC}} &= -\max[C_w^*, 0] + C_w^* (1 - f_{x,W}) \\ a_N^{\text{DC}} &= -\max[-C_n^*, 0] - C_n^* f_{y,P} & a_S^{\text{DC}} &= -\max[C_s^*, 0] + C_s^* (1 - f_{y,S}) \\ a_P^{\text{DC}} &= a_E^{\text{DC}} + a_W^{\text{DC}} + a_N^{\text{DC}} + a_S^{\text{DC}} \end{aligned} \quad (\text{III-23})$$

Por outro lado, para a discretização com base no esquema WUDS, os coeficientes são

$$\begin{aligned}
a_E &= -\left(\frac{1}{2} - \alpha_e\right) C_e^* + \frac{\beta_e (K/C_p)_e^* \delta y}{\Delta x_e} & a_w &= \left(\frac{1}{2} + \alpha_w\right) C_w^* + \frac{\beta_w (K/C_p)_w^* \delta y}{\Delta x_w} \\
a_N &= -\left(\frac{1}{2} - \alpha_n\right) C_n^* + \frac{\beta_n (K/C_p)_n^* \delta x}{\Delta y_n} & a_s &= \left(\frac{1}{2} - \alpha_s\right) C_s^* + \frac{\beta_s (K/C_p)_s^* \delta x}{\Delta y_s} \\
a_p &= a_E + a_w + a_N + a_s - S_p \delta v & b &= S_c \delta v
\end{aligned} \tag{III-24}$$

III-3. TRATAMENTO DOS TERMOS FONTES

A Tabela II-1 apresenta os termos fontes na EGT para cada grandeza resolvida pelo programa.

O tratamento dado a cada um destes termos é discutido a seguir.

III.3.1 Termo fonte da EGT para a quantidade de movimento

Os termos fontes nas equações discretizadas para a quantidade de movimento recebem contribuições do gradiente de pressão e dos termos viscosos. Estes últimos, contudo, não serão considerados pois se anulam para escoamentos com ρ e μ constantes, nos quais enquadram-se os escoamentos estudados no presente trabalho.

Na direção- x , a integração do gradiente de pressão sobre o VC da Figura III-2 leva à

$$-\int_{\delta v} \frac{\partial P}{\partial x} dv = -\int_n^e \int_w^e \frac{\partial P}{\partial x} dx dy = -(P_e - P_w) \delta y \tag{III-25}$$

onde P_e e P_w são os valores da pressão nas faces e e w , respectivamente, e são relacionados com os valores armazenados nos pontos nodais segundo uma interpolação linear

$$P_e = (1 - f_{x,p}) P_p + f_{x,p} P_E \quad , \quad P_w = (1 - f_{x,w}) P_w + f_{x,w} P_p \tag{III-26}$$

Nas faces coincidentes com as fronteiras do domínio, os valores da pressão são obtidos por extrapolação linear dos valores em pontos nodais vizinhos anteriores

$$P_e = P_p + (P_p - P_w)(1 - f_{x,w}) \quad , \quad P_w = P_p - (P_E - P_p) f_{x,p} \tag{III-27}$$

Analogamente, para a equação da quantidade de movimento na direção- y tem-se

$$-\int \frac{\partial P}{\partial y} dv = -(P_n - P_s)\delta x \quad (\text{III-28})$$

com

$$\text{pontos internos: } P_n = (1 - f_{y,p}) P_p + f_{y,p} P_N, \quad P_s = (1 - f_{y,s}) P_s + f_{x,s} P_p \quad (\text{III-29})$$

$$\text{pontos de fronteira: } P_n = P_p + (P_p - P_s)(1 - f_{y,s}), \quad P_s = P_p - (P_N - P_p)f_{y,p} \quad (\text{III-30})$$

Com relação à Eq. (III-19), $S_c \delta v$ guarda as contribuições ao termo fonte e faz-se $S_p = 0$.

III.3.2 Termo fonte da EGT para a energia

Não são consideradas fontes internas de calor, ou seja, $S_T = 0$.

III-4. TRATAMENTO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

Com base no que foi discutido no capítulo anterior, a Tabela III-1 resume a forma como as condições de contorno são aplicadas. Para as componentes da velocidade, o subscrito n refere-se à direção normal à fronteira e t refere-se à direção tangencial.

Tabela III-1 - Resumo das condições de contorno implementadas.

| Tipo de fronteira | condição de contorno |
|---------------------------|---|
| superfície sólida | $U_t = U_n = 0$ |
| plano / linha de simetria | $\frac{\partial U_t}{\partial n} = U_n = 0$ |
| perfil de entrada | perfis fornecidos: U_t, U_n, T |
| perfil de saída | $\frac{\partial U_t}{\partial n} = \frac{\partial U_n}{\partial n} = 0$ |

Nos itens seguintes é apresentada a implementação destas condições de contorno para a fronteira sul (subscrito s), primeiramente para o esquema *flux-blended* (para U e V) e em seguida para o esquema WUDS (para T). A implementação para as demais faces pode ser inferida por analogia.

Vale mencionar que no problema térmico estudado somente foi empregada a condição de valor prescrito na fronteira. Na Tabela III-1 ela consta como condição de contorno de perfil de entrada.

III.4.1. Superfície sólida

Pela condição de aderência e impermeabilidade, ambas as componentes da velocidade e o fluxo mássico normal são nulos ao longo da parede, $U_s = V_s = C_s^* = 0$. Assim, também é nula a contribuição ao termo convectivo na equação para ambas as velocidades, Eq. (III-8). Para a velocidade tangencial, a contribuição ao termo difusivo, Eq. (III-12), é aproximada por

$$\mu_s \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_s \delta x \approx \mu_s \frac{U_p - U_s}{\delta y / 2} \delta x = \frac{\mu_s \delta x}{\delta y / 2} U_p \quad (\text{III-31})$$

enquanto que para a velocidade normal tal contribuição se anula pelo fato de $(\partial V / \partial y)_s = 0$ pela equação da continuidade. Por estas considerações, na Eq.(III-20) para a velocidade tangencial são introduzidas as modificações

$$U_s = U_s = 0 \quad a_s = \frac{\mu_s \delta x}{\delta y / 2} \quad (\text{III-32})$$

enquanto que para a velocidade normal as modificações são

$$V_s = V_s = 0 \quad a_s = 0 \quad (\text{III-33})$$

III.4.2 Linha de simetria

Como a velocidade normal V_s à linha de simetria é nula, o fluxo convectivo se anula para todas as grandezas do escoamento. Embora V_s seja nula, seu gradiente normal não precisa necessariamente ser nulo também e pode ser aproximado de maneira análoga à Eq.(III-31), levando às seguintes modificações

$$V_s = V_s = 0 \quad a_s = \frac{\mu_s \delta x}{\delta y / 2} \quad (\text{III-34})$$

Como o gradiente normal de U é nulo, as modificações necessárias são

$$U_S = U_P \quad a_S = 0 \quad (\text{III-35})$$

III.4.3. Perfil de entrada

Os valores prescritos às variáveis no perfil de entrada são atribuídos aos pontos nodais, enquanto que os fluxos difusivos são aproximados segundo a Eq. (III-31). Assim,

$$U_S = U_{\text{entrada}} \quad V_S = V_{\text{entrada}} \quad a_S = \frac{\mu_s^* \delta x}{\delta y / 2} \quad (\text{III-36})$$

III.4.4. Perfil da saída

Do ponto de vista computacional, a implementação das condições de contorno de saída é idêntica àquela utilizada para a condição de simetria, com exceção à componente normal da velocidade, cujo gradiente passa agora a ser nulo também. Assim, para todas as variáveis,

$$U_S = U_P \quad a_S = 0 \quad (\text{III-37})$$

Além disso os fluxos mássicos de saída são corrigidos com relação aos fluxos de entrada de modo a preservar a conservação de massa no interior do domínio

$$C_{\text{saída}} = cf \cdot C_{\text{saída}}^* \quad , \quad cf = \frac{\dot{m}_{\text{entrada}}}{\dot{m}_{\text{saída}}} \quad (\text{III-38})$$

onde \dot{m}_{entrada} , $\dot{m}_{\text{saída}}$ correspondem ao somatório de todos os fluxos mássicos de entrada / saída pelas fronteiras do domínio.

III.4.5. Tratamento para o esquema WUDS

Em resumo, as condições de contorno para as equações obtidas por meio do esquema WUDS são implementadas observando-se o tipo de condição matemática exigida. Será tomada novamente como exemplo a fronteira sul, podendo as demais serem inferidas por analogia.

A condição de contorno implementada é a de Dirichlet (valor prescrito, mesmo que nulo). Assim, na Eq. (III-20) escrita para a temperatura, deve-se ter $T_s = T_s$, o que é obtido impondo-se $\alpha_s = 1/2$ na expressão para T_s

$$T_s = \left(\frac{1}{2} + \alpha_s\right)T_s + \left(\frac{1}{2} - \alpha_s\right)T_p \quad (\text{III-39})$$

Por sua vez, β_s é avaliado com Pe_s sendo calculado com $\Delta y_s = \delta y / 2$. Os novos valores destes dois parâmetros são então levados às Eq.(III-24)

III-5. ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE

Segundo Patankar, 1980, a real dificuldade no cálculo do campo de velocidade está relacionada ao campo de pressão desconhecido, pois não há uma equação direta que permita a sua obtenção. No entanto, ele pode ser especificado indiretamente através da equação da continuidade. Quando o campo correto de pressão é substituído nas equações da quantidade de movimento, o campo de velocidade daí resultante satisfaz a continuidade.

O acoplamento pressão-velocidade aqui adotado é baseado no algoritmo SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*) desenvolvido por Patankar e Spalding, 1972.

O algoritmo é composto dos seguintes etapas:

- a) Valores iniciais das grandezas são estimados a fim de avaliar os coeficientes (fluxos convectivos e difusivos) das EGTs na forma discretizada e as diferenças de pressão.
- b) As equações da quantidade de movimento são montadas e relaxadas, resultando nos campos U^* e V^* . Como a aproximação inicial do campo de pressão P^* é provavelmente incorreta, estas velocidades não satisfazem a continuidade.
- c) A partir da equação da continuidade e das equações da quantidade de movimento, é derivada uma equação que forneça um campo de pressão corrigido P , cuja obtenção resulta em correções às velocidades, de modo a satisfazer a continuidade.

- d) Caso estejam sendo resolvidas, as demais grandezas do escoamento são agora tratadas.
- e) O novo valor P é tratado como uma nova aproximação P^* e o algoritmo é retomado a partir do passo (b), até atingir a convergência.

III.5.1 Equação de correção da pressão

A equação da continuidade discretizada pode ser colocada na forma

$$\rho_e U_e \delta y - \rho_w U_w \delta y + \rho_n V_n \delta x - \rho_s V_s \delta x = 0 \quad (\text{III-40})$$

A introdução das velocidades U^* e V^* , conforme o passo (b), faz com que a continuidade não seja mais satisfeita, produzindo uma fonte de massa S_m

$$\rho_e U_e^* \delta y - \rho_w U_w^* \delta y + \rho_n V_n^* \delta x - \rho_s V_s^* \delta x = S_m \quad (\text{III-41})$$

Neste ponto é importante discutir o esquema de interpolação empregado na determinação das velocidades nas faces U_e^* , U_w^* , V_n^* e V_s^* . A razão é que para um arranjo co-localizado de variáveis (que é o caso), a aplicação direta da interpolação linear leva ao desacoplamento entre a velocidade e a pressão e a possíveis soluções oscilatórias Patankar, 1980. A seguir é apresentada a determinação de U_e^* , sendo análogas as expressões para as demais faces.

As equações das quantidades de movimento para os pontos nodais P e E com base na Eq.(III-20) escritas com os termos fontes b^P e b^E expandidos ficam na forma

$$\begin{aligned} a_P^P U_P^* &= \sum_{vz} a_{vz}^P U_{vz}^* + s_U^P - \delta y (P_e^* - P_w^*) \\ a_P^E U_E^* &= \sum_{vz} a_{vz}^E U_{vz}^* + s_U^E - \delta y (P_{ee}^* - P_e^*) \end{aligned} \quad (\text{III-42})$$

O índice do somatório vz cobre os pontos nodais vizinhos a oeste, leste, sul e norte e os termos s_U^P e s_U^E correspondem aos termos fontes viscosos já discretizados. (Vale lembrar que os mesmos se anulam para os casos considerados; este fato porém não prejudica as manipulações algébricas apresentadas a seguir, o que as torna gerais.)

A velocidade U_e^* é obtida interpolando-se linearmente todos os termos nas Eqs.(III-42), exceto a diferença de pressão que é avaliada segundo uma malha desencontrada, donde

$$U_e^* = \frac{\sum_{vz} a_{vz} U_{vz}^* + s_U}{a_p} \Big|_e - \frac{\delta y}{(a_p)_e} (P_E^* - P_P^*) \quad (\text{III-43})$$

A interpolação do primeiro termo do lado direito da equação acima pode ser feita com o auxílio das Eqs. (III-42), de modo que a expressão final para U_e^* fica

$$U_e^* = (1 - f_{x,p}) \left[U_P^* + \frac{\delta y}{a_p} (P_e^* - P_w^*) \right] + f_{x,p} \left[U_E^* + \frac{\delta y}{a_p^E} (P_{ee}^* - P_e^*) \right] - \frac{\delta y (P_E^* - P_P^*)}{(1 - f_{x,p}) a_p^P + f_{x,p} a_p^E} \quad (\text{III-44})$$

A inserção das velocidades interpoladas para as faces na Eq. (III-41) permite o cálculo da fonte de massa S_m . Assim, correções para a velocidade e para a pressão devem ser obtidas com vistas a satisfazer a continuidade. As correções para a velocidade são da forma

$$\rho_e (U_e^* + U_e') \delta y - \rho_w (U_w^* + U_w') \delta y + \rho_n (V_n^* + V_n') \delta x - \rho_s (V_s^* + V_s') \delta x = 0 \quad (\text{III-45})$$

que, com o auxílio da própria Eq.(III-41), pode ser rescrita na forma

$$\rho_e U_e' \delta y - \rho_w U_w' \delta y + \rho_n V_n' \delta x - \rho_s V_s' \delta x = -S_m \quad (\text{III-46})$$

No passo seguinte, as correções para a velocidade são relacionadas com as correções para a pressão. Para tanto, são utilizadas as equações da quantidade de movimento na forma discretizada, resultando em uma expressão semelhante à Eq.(III-43), a saber

$$U_e' = \frac{\sum_{vz} a_{vz} U_{vz}' + s_U'}{a_p} \Big|_e - \frac{\delta y}{(a_p)_e} (P_E' - P_P') \quad (\text{III-47})$$

No algoritmo SIMPLE, são desprezados os efeitos (implícitos) das correções para a velocidade nos pontos vizinhos, simplificando a expressão acima para

$$\begin{aligned}
U'_e &= -\frac{\delta y}{(a_p)_e} (P'_E - P'_P) & U'_w &= -\frac{\delta y}{(a_p)_w} (P'_P - P'_W) \\
V'_n &= -\frac{\delta x}{(a_p)_n} (P'_N - P'_P) & V'_s &= -\frac{\delta x}{(a_p)_s} (P'_P - P'_S)
\end{aligned}
\tag{III-48}$$

onde também foram apresentadas as expressões para as demais correções. Inserindo as Eqs. (III-48) na Eq. (III-46) resulta na equação da correção para a pressão

$$a_p P'_P = a_w P'_W + a_e P'_E + a_s P'_S + a_n P'_N - S_m \tag{III-49}$$

com

$$\begin{aligned}
a_w &= \frac{\rho_w \delta y^2}{(a_p)_w} & a_e &= \frac{\rho_e \delta y^2}{(a_p)_e} & a_s &= \frac{\rho_s \delta x^2}{(a_p)_s} & a_n &= \frac{\rho_n \delta x^2}{(a_p)_n} \\
a_p &= a_w + a_e + a_s + a_n
\end{aligned}
\tag{III-50}$$

III.5.2 Condições de contorno para a equação da correção da pressão

As condições de contorno aplicadas dizem respeito a valores conhecidos para as velocidades normais nas fronteiras. Tal é o caso dos tipos de fronteira implementados: paredes sólidas, linhas de simetria e perfis de entrada / saída. Nestas circunstâncias, a velocidade normal não precisa ser corrigida.

Considerando por exemplo a fronteira sul, deve-se impor $V'_s = 0$, de modo que a Equação (III-46) fica na forma

$$\rho_e U'_e \delta y - \rho_w U'_w \delta y + \rho_n V'_n \delta x = -S_m \tag{III-51}$$

Introduzindo na relação acima as expressões para as correções para a velocidade, Eq. (III-48), chega-se à equação da correção para a pressão, desta vez porém com $a_s = 0$. Do ponto de vista de implementação numérica, tal situação corresponde a uma condição de contorno de von

Neumann de gradiente nulo. Expressões análogas podem ser obtidas para as demais fronteiras.

III.5.3 Atualização da pressão, das velocidades e dos fluxos mássicos

Após relaxada a equação da correção para a pressão, a pressão em si, as componentes da velocidade e os fluxos mássicos são corrigidos segundo

$$\begin{aligned}
 P_p &= P_p^* + P'_p \\
 U_p &= U_p^* - \frac{\delta y}{a_p} (P'_e - P'_w) & V_p &= V_p^* - \frac{\delta x}{a_p} (P'_n - P'_s) \\
 C_e &= C_e^* - \frac{\rho_e \delta y^2}{(a_p)_e} (P'_E - P'_p) & C_n &= C_n^* - \frac{\rho_n \delta x^2}{(a_p)_n} (P'_N - P'_p)
 \end{aligned} \tag{III-52}$$

Estes novos valores satisfazem a conservação de massa mas não mais satisfazem as equações da quantidade de movimento e servem como aproximação inicial do próximo passo iterativo.

III-6. PARÂMETROS DE SUB-RELAXAÇÃO

Em virtude da não-linearidade das equações para a quantidade de movimento, do acoplamento pressão-velocidade e do fato de alguns termos serem desconsiderados na dedução da equação para a pressão, o algoritmo SIMPLE pode divergir caso não seja empregada alguma forma de sub-relaxação. A prática adotada no presente trabalho segue aquela existente no programa computacional original Rabi, 1998, sendo abaixo descrita.

Ao invés da Eq.(III-52), a pressão é corrigida segundo

$$P_p = P_p^* + \xi_p P'_p \tag{III-53}$$

onde ξ_p é o fator de sub-relaxação para a pressão.

Para as componentes da velocidade, a Eq. (III-20) é rescrita adicionando-se e subtraindo-se em seu lado direito o valor ϕ_p^* oriundo da iteração anterior

$$\phi_p = \phi_p^* + \left(\frac{\sum_{vz} a_{vz} \phi_{vz} + b_p}{a_p} - \phi_p^* \right) \quad (\text{III-54})$$

Ao termo entre parênteses que representa a variação de ϕ_p por iteração é então aplicado um fator de sub-relaxação ξ_ϕ (ou seja, ξ_U e ξ_V) de modo a ter

$$\phi_p = \phi_p^* + \xi_p \left(\frac{\sum_{vz} a_{vz} \phi_{vz} + b_p}{a_p} - \phi_p^* \right) \quad (\text{III-55})$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{a_p}{\xi_p} \phi_p = \sum_{vz} a_{vz} \phi_{vz} + b_p + (1 - \xi_p) \frac{a_p}{\xi_p} \phi_p^* \quad (\text{III-56})$$

Este mesmo tipo de sub-relaxação é também sugerida em Patankar, 1980.

CAPÍTULO IV O MÉTODO MULTIGRID

IV-1. A FILOSOFIA DO MÉTODO MULTIGRID

No capítulo anterior foi apresentado o procedimento de discretização da EGT aplicada a cada grandeza do escoamento com vistas a obter as equações algébricas a serem resolvidas computacionalmente pela aplicação de métodos numéricos. A equação algébrica resultante para um dado ponto nodal (no centro do respectivo VC) pode ser colocada de um modo geral na forma sugerida pela Eq.(III-20), mas aqui ela é rescrita na forma

$$a_P \phi^{ij} - a_W \phi^{i-1j} - a_E \phi^{i+1j} - a_S \phi^{ij-1} - a_N \phi^{ij+1} = b^{ij} \quad (\text{IV-1})$$

onde os superscritos i, j localizam na malha o ponto nodal nas direções x, y respectivamente.

Promovendo a varredura de todos os índices i, j , as Eqs. (IV-1) resultantes formam um sistema de equações algébricas expresso na forma matricial por

$$\mathbf{A}_k \Phi_k = \mathbf{b}_k \quad (\text{IV-2})$$

onde \mathbf{A}_k é a chamada *matriz dos coeficientes*, Φ_k é a *matriz das incógnitas* e \mathbf{b}_k é a matriz que acomoda os termos fontes. O subscrito k refere-se à malha computacional em questão.

Quando o sistema é resolvido em apenas uma malha, este subscrito torna-se desnecessário.

Quando \mathbf{A}_k tem estrutura tridiagonal, o sistema (IV-2) pode ser resolvido diretamente através de algum algoritmo apropriado. No entanto, problemas bidimensionais resultam em \mathbf{A}_k pentadiagonal, requerendo a aplicação métodos iterativos.

Em métodos iterativos clássicos como o de Jacobi, o de Gauss-Seidel ou o TDMA - *TriDiagonal Matrix Algorithm* (Maliska, 1985 e Patankar, 1980), a taxa de convergência da solução numérica é elevada no início dos cálculos, decaindo sensivelmente à medida que o

processo iterativo evolui. Através de uma análise espectral (ou seja, no espaço de fase), mostra-se (Hackbusch, 1985, Brandt, 1977, Stüben e Trottenberg, 1982)que isto se deve ao fato de o método iterativo ser capaz de *suavizar*, isto é, remover de modo eficiente apenas aquelas componentes de Fourier do erro de altas frequências, o mesmo não ocorrendo para as de baixas frequências. A Figura IV-1(Stüben e Trottenberg, 1982) procura ilustrar este comportamento

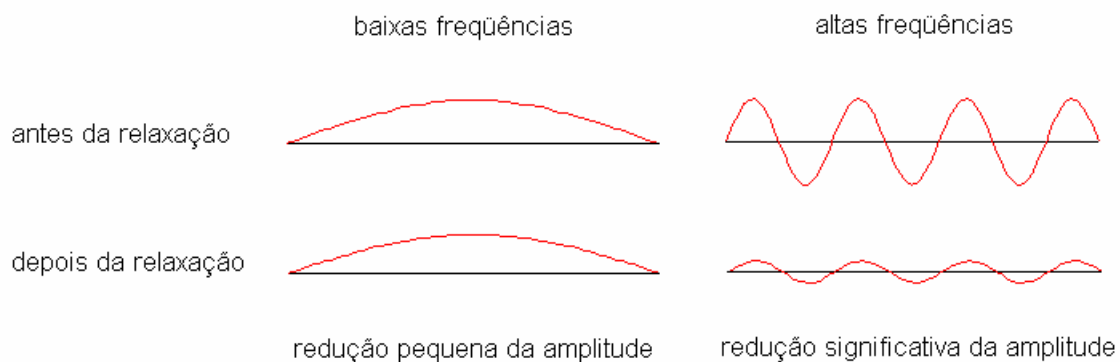


Figura IV-1 - Comportamento da suavização do erro em métodos iterativos de suavização.

Conclui-se, pois, que as componentes do erro de baixas frequências são as responsáveis pela lenta convergência eventualmente atingida pelos processos iterativos em malhas simples. Como as componentes de altas frequências são aquelas cujos comprimentos de onda são menores ou comparáveis com o espaçamento da malha computacional, vem daí o fato deste efeito ser tanto mais pronunciado quanto mais refinada for a malha.

A filosofia do método *multigrid* é baseada na premissa de que cada faixa de frequência do erro deve ser suavizada na malha mais adequada para se fazê-la. Para que componentes do erro de elevados comprimentos de onda (baixas frequências) possam ser melhor suavizadas, o método *multigrid* procura pois trabalhar não com uma única malha mas com uma seqüência

de malhas de refinamento decrescente. Deste modo, comprimentos de onda que são grandes em malhas finas são transformados em comprimentos de onda menores em malhas grossas, onde então são melhor suavizados. Assim, em cada nível de malha visitado, as componentes do erro correspondentes são eficientemente reduzidas, acelerando o processo de convergência. Há dois modos como o sistema de equações algébricas pode ser operado nas malhas mais grossas: são os chamados *correction storage* (CS) e *full approximation storage* (FAS). Ambos são descritos e discutidos a seguir. Em Brandt, 1982 é mostrado as operações necessárias para se migrar do CS ao FAS. Para problemas lineares, recomenda-se a utilização do CS, enquanto que o FAS é mais adequado para situações não lineares (Brandt, 1977, Brandt, 1982 e Vanka, 1986). Ainda assim, Jiang, *et al*, 1991 relatou ter obtido bons resultados na solução de alguns problemas bidimensionais de mecânica dos fluidos usando o método *multigrid* na concepção CS.

Conforme poderá ser verificado logo adiante, a maior vantagem do CS frente ao FAS é que este tipo de algoritmo *multigrid* quando da passagem de uma malha fina para uma mais grossa (operação de *restrição*), requer apenas a manipulação dos resíduos das equações na malha fina, mas não requer a manipulação das grandezas resolvidas. Além disso, do ponto de vista de implementação numérica, a restrição dos resíduos é bem mais simples do que a restrição das grandezas.

IV-2. CORRECTION STORAGE - CS

Neste esquema, procura-se obter nas malhas grossas (isto é, em todas as malhas exceto a mais fina) aproximações da *correção* para a grandeza do escoamento, sendo esta última resolvida unicamente na malha mais fina. Em outras palavras, Φ_k na malha mais fina guarda aproximações da própria grandeza enquanto que em malhas grossas guarda aproximações da sua correção (donde o nome *correction storage*).

Após um certo número de iterações aplicadas ao sistema(IV-2), obtém-se uma aproximação $\bar{\Phi}_k$, acompanhada da respectiva correção ϕ_k

$$\phi_k = \Phi_k - \bar{\Phi}_k \Leftrightarrow \Phi_k = \bar{\Phi}_k + \phi_k \quad (\text{IV-3})$$

Define-se o *resíduo* \mathbf{r}_k como sendo

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{b}_k - \mathbf{A}_k \bar{\Phi}_k \quad (\text{IV-4})$$

Inserindo a Eq. (IV-3) na Eq.(IV-2), levando em conta a definição ((IV-4) e considerando a matriz \mathbf{A}_k linear (daí sua melhor aplicabilidade em problemas lineares), mostra-se que a correção ϕ_k é a solução de

$$\mathbf{A}_k \phi_k = \mathbf{r}_k \quad (\text{IV-5})$$

a qual tem a mesma forma que a Eq. (IV-2). A solução exata da Eq. (IV-5)) é tão difícil quanto a da Eq. (IV-2). Contudo, ϕ_k pode ser melhor aproximada que Φ_k (Hackbusch, 1985). Tal aproximação é realizada nas malhas mais grossas

$$\mathbf{A}_{k-1} \phi_{k-1} = \mathbf{r}_{k-1} \quad (\text{IV-6})$$

onde \mathbf{r}_{k-1} é obtido segundo

$$\mathbf{r}_{k-1} = I_k^{k-1} \mathbf{r}_k \quad (\text{IV-7})$$

O operador I_k^{k-1} , denominado *restrição*, leva valores da malha k para a malha $k-1$ e será discutido em item posterior.

Em situações ideais, recomenda-se (Hackbusch, 1985) que a Eq. (IV-6)) na malha mais grossa seja resolvida exatamente, o que nem sempre é possível. Todavia, por envolver um número expressivamente menor de VCs, pode-se pelo menos realizar um número bem maior de iterações nesta malha sem comprometer muito o esforço computacional.

Após obtida, a aproximação da correção $\bar{\phi}_{m-1}$ em malha grossa é levada de volta para malhas mais finas através do operador *prolongamento* I_{k-1}^k (também discutido adiante)

$$\bar{\phi}_k = I_{k-1}^k \bar{\phi}_{k-1} \quad (\text{IV-8})$$

de forma a refinar a aproximação $\bar{\Phi}_k$ segundo

$$\Phi_k^{\text{new}} = \bar{\Phi}_k + \bar{\phi}_k \quad (\text{IV-9})$$

De um modo global, todo o procedimento pode ser resumido na expressão

$$\Phi_k^{\text{new}} = \bar{\Phi}_k + I_{k-1}^k \mathbf{A}_{k-1}^{-1} I_k^{k-1} (\mathbf{b}_k - \mathbf{A}_k \bar{\Phi}_k) \quad (\text{IV-10})$$

IV-3. FULL APROXIMATION STORAGE - FAS

Neste esquema, ao invés de se guardar nas malhas grossas correções para a grandeza do escoamento, a idéia é guardar em Φ_{k-1} a aproximação da própria grandeza.

Novamente parte-se da equação para a correção, Eq.(IV-5), porém escrita na forma

$$\mathbf{A}_k \Phi_k - \mathbf{A}_k \bar{\Phi}_k = \mathbf{r}_k \quad (\text{IV-11})$$

cuja aproximação em malha grossa é da forma

$$\mathbf{A}_{k-1} \Phi_{k-1} - \mathbf{A}_{k-1} \bar{\Phi}_{k-1} = \mathbf{r}_{k-1} \quad (\text{IV-12})$$

sendo este o sistema a ser resolvido na malha grossa. A exemplo de \mathbf{r}_{k-1} , Eq.(IV-7), a aproximação na malha grossa é dada por

$$\bar{\Phi}_{k-1} = I_k^{k-1} \bar{\Phi}_k \quad (\text{IV-13})$$

Vê-se assim que, em contraste ao CS, não apenas o resíduo como também a aproximação são restringidos. Contudo, os operadores de restrição aplicados a cada um necessariamente não

são os mesmos Stüben e Trottenberg, 1982 e Bai e Mitra, 1994. Por outro lado, como nenhuma restrição foi feita à matriz \mathbf{A}_k , este tipo de esquema é o mais adequado para problema não-lineares, conforme já citado.

No procedimento de prolongamento deve-se lembrar que em última instância é a correção que está sendo suavizada. Assim, após obtido um novo valor para $\bar{\Phi}_{k-1}^{\text{new}}$, a correção a ser prolongada é

$$\bar{\phi}_{k-1} = \bar{\Phi}_{k-1}^{\text{new}} - \bar{\Phi}_{k-1} \quad (\text{IV-14})$$

de modo que na malha fina a atualização da aproximação é feita segundo

$$\bar{\Phi}_k^{\text{new}} = \bar{\Phi}_k + \bar{\phi}_k = \bar{\Phi}_k + I_{k-1}^k \bar{\phi}_{k-1} \quad (\text{IV-15})$$

Com o auxílio das Eqs. (IV-13) e (IV-14), a equação acima é rescrita na forma comumente encontrada na literatura (Brandt, 1977, Thompson e Ferziger, 1989, Vanka, 1986 e Bai e Mitra, 1994)

$$\bar{\Phi}_k^{\text{new}} = \bar{\Phi}_k + I_{k-1}^k \left(\bar{\Phi}_{k-1}^{\text{new}} - I_k^{k-1} \bar{\Phi}_k \right) \quad (\text{IV-16})$$

IV-4. PROCEDIMENTOS DE MUDANÇA DE NÍVEL DE MALHA

Conforme discutido nos itens anteriores, no algoritmo *multigrid* é necessário realizar a transferência de valores entre os diferentes níveis de malha como também ter disponível a matriz dos coeficientes \mathbf{A}_k e as coordenadas x e y da malha em todos estes níveis k . Os procedimentos envolvidos em cada uma destas operações são apresentados a seguir.

IV-4.a. Transferência de valores

A transferência de valores entre as malhas se dá mediante o uso de operadores de interpolação. Quanto a transferência é no sentido “fina-para-grossa” (k para $k-1$), utiliza-se o

operador de *restrição* (I_k^{k-1}); quando a transferência se dá no sentido oposto ($k-1$ para k), o operador empregado é o de *prolongamento* (I_{k-1}^k).

Em Hackbusch, 1985 são apresentadas diferentes definições de operadores de interpolação. Uma forma de interpolação comumente empregada na literatura Thompson e Ferziger, 1989, Vanka, 1986, Jiang, *et al*, 1991, Bai e Mitra, 1994, Peric, *et al*, 1989, Hortmann *et al*, 1990, Joshi e Vanka, 1991, Bonhaus, 1993, é a *interpolação bilinear* (ou operador Lagrangeano de 4 pontos). Em algumas das referências acima citadas, este operador está definido para uma malha uniforme (espaçamento igual entre os pontos nodais), o que lhe confere uma forma invariante. No presente trabalho porém, com vistas à possibilidade de utilização de malhas não-uniformes, optou-se pela utilização deste operador em uma situação genérica, descrita a seguir.

Do ponto de vista de implementação, a idéia é construir uma malha intermediária entre as malhas fina e grossa. Esta malha auxiliar define um novo conjunto de pontos nodais, onde são armazenados temporariamente os valores Φ_{aux} resultantes da aplicação do operador I sobre Φ segundo uma *única* direção coordenada (por exemplo y , que corresponde aos índices j). Em seguida, o operador é aplicado sobre Φ_{aux} segundo a direção coordenada remanescente (x , índices i) de modo a obter Φ na nova malha interpolada. A Figura IV-2 procura demonstrar esta seqüência de operações para a restrição e para o prolongamento.

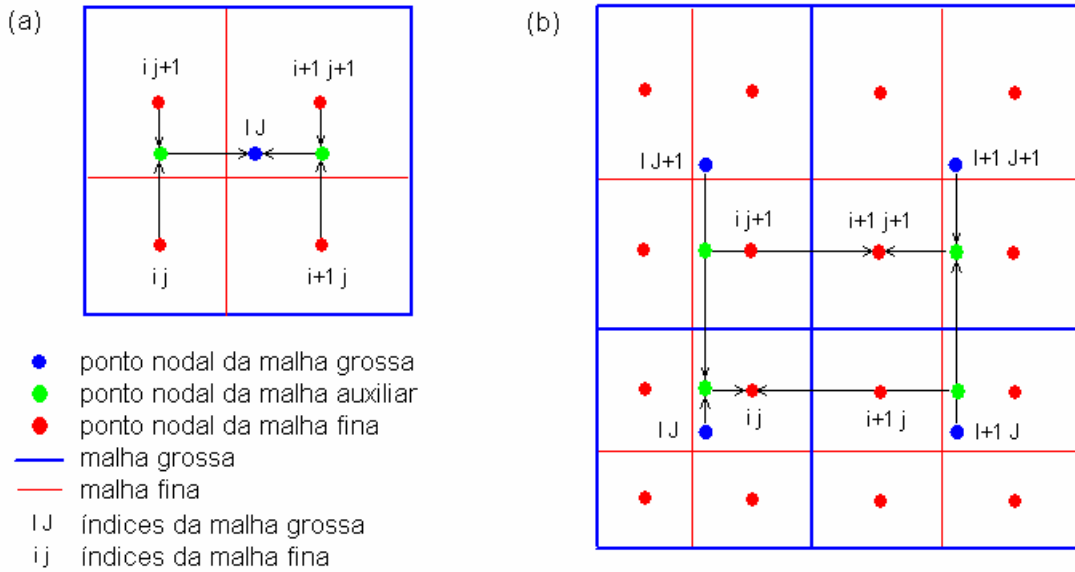


Figura IV-2 - Esquema dos procedimentos de restrição (a) e de prolongamento (b).

Vale ressaltar que a operação acima esquematizada não é aplicada para realizar a restrição do resíduo, Eq.(IV-7), mas apenas das aproximações para as grandezas, Eq.(IV-13). Conseqüentemente, ela se torna desnecessária para o algoritmo *multigrid* na formulação CS. Considerando a malha auxiliar já construída, a operação de prolongamento para se obter os valores na malha fina é realizada através da expressão

$$\phi_k^{ij} = (1 - f) \phi_{k-1}^{Ij} + f \phi_{k-1}^{I+1j} \quad (\text{IV-17})$$

onde o fator de interpolação linear f com base no esquema exibido na Figura (cuja simbologia e nomenclatura seguem as da Figura IV-3) é dado por

$$f = \frac{\Delta x}{\Delta X} = \frac{x_{i-1} - x_{i-2}}{x_{i+2} - x_{i-2}} \quad (\text{IV-18})$$

A segunda igualdade pode ser obtida após algumas manipulações algébricas. As coordenadas x na Figura IV-3 e na Eq. (IV-18) são referentes à malha fina.

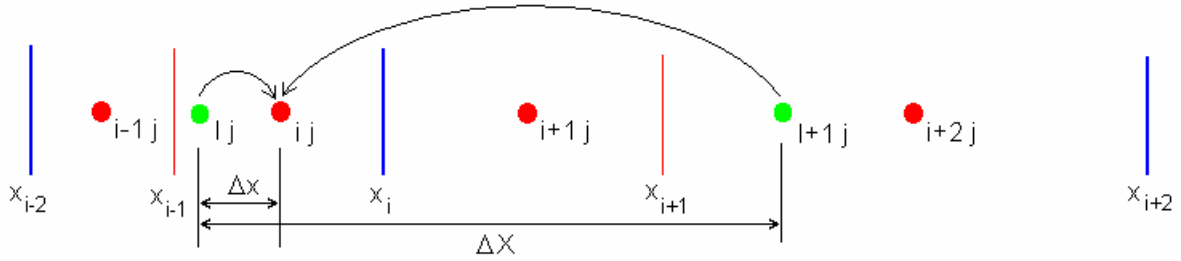


Figura IV-3 - Detalhes do procedimento de prolongamento

O cálculo de f de acordo com o exemplo acima é um caso particular, onde o índice i é um número ímpar devido à existência de VCs de dimensões nulas (ver Figura III-1). A generalização pode ser feita segundo

$$f = \frac{x_{i-1+ii} - x_{i-2-ii}}{x_{i+2-ii} - x_{i-2-ii}} \quad (\text{IV-19})$$

onde o índice ii acrescentado é definido por

$$ii = \text{mod}(i-1, 2) \quad (\text{IV-20})$$

O operador $\text{mod}(a, b)$ devolve o resto da divisão de a por b , ambos sendo números inteiros.

Além disso, o índice I na Eq. (IV-17) referente à malha grossa é calculado segundo

$$I = \frac{i+1}{2} \quad (\text{IV-21})$$

sendo esta operação realizada em aritmética de números inteiros.

A malha auxiliar é obtida a partir da malha grossa de modo análogo, aplicado porém na direção- y . A vantagem deste procedimento é que ele pode ser facilmente estendido para uma situação tridimensional, uma vez que cada direção é tratada separadamente.

A prática utilizada Jiang, *et al*, 1991, Bai e Mitra, 1994, Peric, *et al*, 1989, Peric, R ger e Scheurer, 1989, Joshi e Vanka, 1991, Sathyamurthy e Patankar, 1994 na restri o do resíduo   simplesmente compor o resíduo do VC da malha grossa somando-se os resíduos dos 4 VCs da malha fina que formam-no, segundo um esquema semelhante ao da Figura IV-2 (a) (mas sem a necessidade de construir uma malha auxiliar). Matematicamente esta opera o   expressa por

$$r_{k-1}^{IJ} = r_k^{ij} + r_k^{i,j+1} + r_k^{i+1,j} + r_k^{i+1,j+1} \quad (IV-22)$$

A razão disso   que as equa es algébricas obtidas através da formula o em volumes finitos representam o balanço dos fluxos através das faces do VC e das fontes integradas no seu interior. Deste modo, a equa o de balanço na malha grossa   equivalente   soma das quatro equa es de balanço dos VCs de malha fina correspondentes. Vê-se assim que a restri o do resíduo   bem mais simples e direta que a restri o das grandezas, sendo esta a principal vantagem da formula o CS frente   formula o FAS.

Neste ponto vale citar o modo como as grandezas Φ_k são armazenadas para todos os níveis k . Primeiramente os índices i e j são condensados em um único  ndice ij segundo um procedimento idêntico ao que   adotado em Rabi, 1998, permitindo o armazenamento em um vetor unidimensional. Em seguida, cada um dos vetores referentes aos vários níveis de malha são guardados seqüencialmente a partir de $k = 1$ até $k = M =$ número de malhas.

A Figura IV-4 procura ilustrar a forma do vetor unidimensional resultante deste modo de armazenamento.



Figura IV-4 - Modo de armazenamento das grandezas pelos vários níveis de malha.

Desconsiderando os VCs de fronteira, as dimensões das malhas computacionais caem segundo uma PG de razão $q = 1/4$ à medida que k vai de M até 1. Assim, sendo d_M a dimensão da malha mais fina, o tamanho (superestimado) do vetor unidimensional resultante Figura(IV-4) pode ser determinado *a priori* lembrando que a soma dos termos de uma PG infinita é dada por $S_\infty = d_M / (1 - q)$, donde $S_\infty = (0.75)^{-1} d_M \cong 1.333 d_M$. No caso, todavia, é adotado $S_\infty = 2 d_M$ de modo a acomodar os VCs da fronteira (com folgas).

Do ponto de vista da manipulação dos valores Φ_k , são definidas matrizes de trabalho $\phi(i, j)$ (com os índices desacoplados) dimensionadas de acordo com o tamanho da malha mais fina. Estas matrizes devolvem para e recebem do vetor unidimensional os valores Φ_k do nível de malha em questão, sendo implementadas para tal tarefa uma rotina de importação (do vetor para a matriz-trabalho) e outra de exportação (da matriz-trabalho para o vetor).

IV-4.b. Obtenção da matriz dos coeficientes

Considerando as Eqs. (III-21) e (III-24), observa-se que os coeficientes que compõem a matriz \mathbf{A}_k contem uma contribuição convectiva e outra difusiva, condizente com a física envolvida na EGT, Eq. (II-6) ponto de partida na obtenção destes coeficientes. Conforme será visto adiante, o algoritmo *multigrid* implementado tem início na malha mais fina, onde então estas contribuições são calculadas e os coeficientes, montados.

À medida que vão se procedendo as restrições, torna-se necessário obter a matriz \mathbf{A}_k em níveis mais grossos ($k < M$). Um procedimento comumente adotado na literatura Jiang, *et al*, 1991, Peric, Rüger e Scheurer, 1989 e Hortmann, Peric e Scheurer, 1990 consiste em tratar separadamente as contribuições convectivas e difusivas. Estas últimas, por depender da geometria da malha computacional, são recalculadas a cada mudança de nível de malha (independentemente do sentido da mudança). Por sua vez, os fluxos mássicos nas interfaces

(contribuições convectivas) são combinados, isto é, somados de modo a compor os respectivos fluxos na malha grossa. A Figura IV-5 procura ilustrar este procedimento, onde os fluxos referentes às faces w e s foram omitidos por simplicidade.

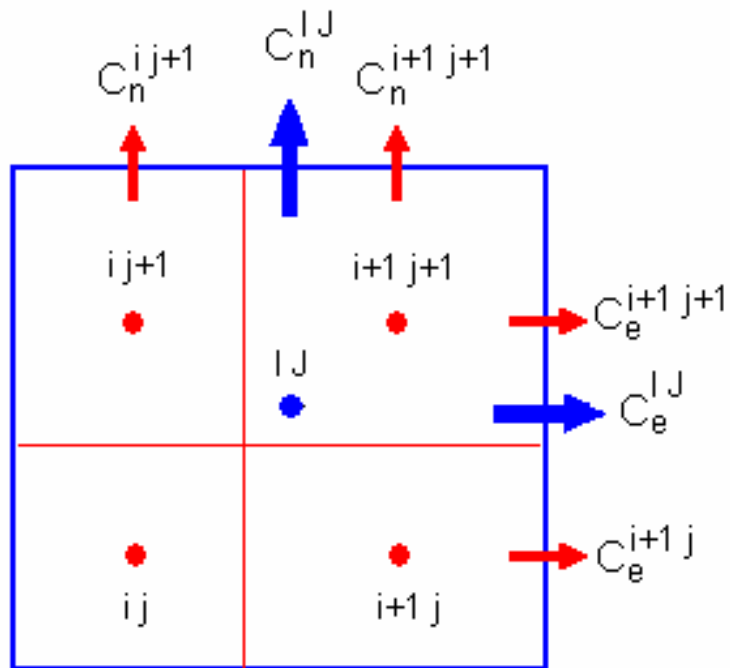


Figura IV-5 - Combinação dos fluxos mássicos nas interfaces

Recentemente, Sathyamurthy e Patankar, 1994 reportaram a implementação de um algoritmo *multigrid* no qual os coeficientes na malha grossa são obtidos a partir de combinações apropriadas dos coeficientes da malha fina. No entanto, nenhuma informação é fornecida acerca do modo de como se operar tal combinação apropriada.

IV-4.c. Tratamento das coordenadas da malha computacional

As malhas consideradas no presente trabalho são estruturadas e ortogonais, podendo ou não ser uniformes (regulares). Sendo assim, o procedimento adotado visa tratar a situação mais genérica que corresponde às malhas não-uniformes, consistindo a situação de malha uniforme em um caso particular.

As malhas não-regulares são extremamente úteis para se promover um refinamento maior em regiões do domínio de cálculo onde há gradientes elevados, de modo a aumentar a concentração de pontos nodais nestas regiões. Em são apresentados exemplos de funções (*stretching functions*) capazes de realizar tais refinamentos da malha.

Contudo, no presente trabalho foi elaborado um algoritmo de construção de malha que calcula as coordenadas das faces dos VCs de modo que as dimensões dos mesmos formem uma progressão geométrica (PG) crescente ou decrescente. A razão de tal adoção será explicitada mais adiante. A malha que de fato é construída é a malha mais fina ($k = M$), sendo as demais obtidas recursivamente a partir desta.

Um parâmetro importante é a razão de espectro RE definida como a razão entre as dimensões na direção coordenada em questão do primeiro e do último VC de dimensões não-nulas da malha. Com o auxílio da Figura, tem-se portanto para a direção x como exemplo

$$RE_x = \frac{\delta x_2}{\delta x_{NI-1}} \quad (IV-23)$$

onde NI é o número total de pontos nodais na direção x (incluindo os da fronteira). Para valores crescentes de i , a PG é decrescente se $RE_x > 1$ ou crescente se $RE_x < 1$.

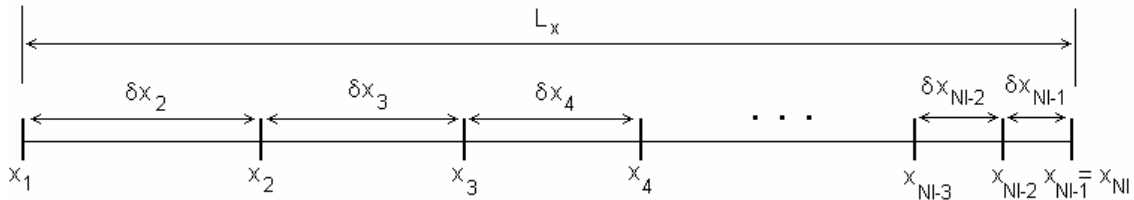


Figura IV-6 - Representação de uma malha não-uniforme

Sendo $N = NI-2$ o número de VCs de dimensões não-nulas e o comprimento L_x definido como mostra a Figura IV-6, mostra-se que a razão da PG q_x e a dimensão inicial δx_2 são dados respectivamente por

$$q_x = \left(\frac{1}{RE_x} \right)^{\frac{1}{N-1}} \quad \text{e} \quad \delta x_2 = L_x \frac{1 - q_x}{1 - q_x^N} \quad \text{(IV-24)}$$

As demais dimensões são obtidas recursivamente segundo

$$\delta x_i = q_x \delta x_{i-1} \quad , \quad i = 3, NI-1 \quad \text{(IV-25)}$$

A malha uniforme corresponde ao caso $RE_x = q_x = 1$ e $\delta x_2 = \dots = \delta x_i = \dots = \delta x_{NI-1} = L_x / N$. Para a direção y , aplica-se um procedimento semelhante.

Em casos em que é desejável promover um refinamento nas proximidades de ambas as fronteiras do domínio a partir da linha média (ou em casos onde ocorra o contrário, isto é, refinamento próximo à linha média a partir das fronteiras), deve-se primeiramente dividir o domínio ao meio e construir uma malha não-uniforme para cada metade segundo o procedimento anteriormente descrito. Em uma das metades a razão da PG é q_x , enquanto que

na outra é q_x^{-1} , além de haver a necessidade de existir no domínio como um todo um número par de VCs (para permitir a divisão ao meio).

As coordenadas na malha grossa X_I são obtidas promovendo-se as igualdades $X_I = x_i$, onde os índices da malha fina i variam de 1 até $NI-1$, percorridos de 2 em 2 ($i = 1, 3, 5, \dots, NI-1$), ao passo que os da malha grossa são contados de 1 em 1 a partir de 1 enquanto durar a varredura dos índices i . Ao término desta, é feita a igualdade entre as coordenadas coincidentes $X_{NI} = X_{NI-1}$ (ver Figura III-1).

A vantagem da adoção da malha não-uniforme em PG surge quando se opera o prolongamento. As coordenadas coincidentes podem ser recuperadas em um procedimento similar àquele descrito no parágrafo anterior, enquanto que as coordenadas intermediárias são recuperadas através da expressão

$$x_i = \frac{q_x x_{i-1} + x_{i+1}}{1 + q_x} \quad \text{(IV-26)}$$

Inserindo $q_x = 1$ na expressão acima, observa-se que o caso uniforme (divisão ao meio) é satisfeito, podendo a mesma ser usada em qualquer situação. A vantagem consiste no fato de que nem sempre é fácil obter as funções inversas (se existirem) para outras funções de refinamento, que seriam necessárias para a recuperação das coordenadas intermediárias.

As coordenadas x_i e y_j são armazenadas em um único vetor, uma vez que podem ser rescritas a cada mudança de malha. Este tipo de tratamento tem, pois, a vantagem de se economizar memória que pode ser significativa em problemas que exijam vários VCs e/ou níveis de malha. Tem, porém, a desvantagem de acarretar em um esforço computacional extra a cada mudança de malha que pode prejudicar a performance do algoritmo.

Um procedimento alternativo seria calcular no início do algoritmo não apenas as coordenadas da malha fina como também as coordenadas em todos os níveis de malha. Com isso, evitar-se-ia a necessidade de a cada mudança de nível recalcularem-se as coordenadas da

Duas estratégias distintas podem ser adotadas para se determinar o momento de se mudar de malha. Uma delas consiste em monitorar a taxa de convergência da solução numérica, a qual pode ser determinada pela razão das normas dos resíduos de duas iterações sucessivas. Quando o problema envolve a solução de uma única grandeza do escoamento, a aplicação deste tipo de estratégia não traz dificuldades pois há apenas uma única taxa de convergência a ser monitorada.

Contudo, para um sistema de equações acopladas torna-se necessária a definição de um critério de convergência que leve em conta a taxa de convergência das várias equações. Na literatura podem ser encontradas diferentes definições deste critério Thompson e Ferziger, 1989, Vanka, 1986, Peric, *et al*, 1989, Sathyamurthy e Patankar, 1994, Hutchinson *et al* 1988. A desvantagem desta estratégia é que as taxas podem diferir de equação para equação e não ser necessariamente sempre monotônicas Hortmann, Peric e Scheurer, 1990.

Um procedimento alternativo adotado Jiang, *et al*, 1991, Bai e Mitra, 1994, Peric, *et al*, 1989, Joshi e Vanka, 1991 é especificar o número de pré- e pós-suavizações (suavizações antes da restrição e após o prolongamento, respectivamente). Hortmann *et al*, 1990 cita que esta prática em certos casos é mais eficiente que o critério dinâmico, sendo aqui também adotado.

IV-6. FLUXOGRAMA DO ALGORITMO MULTIGRID CS

Pelo fato de problemas térmicos serem lineares, foi utilizado com sucesso o algoritmo *multigrid* na formulação CS. Dada a sua maior simplicidade de implementação, seu emprego foi estendido para o tratamento de problemas de mecânica dos fluidos. Embora nestes casos o uso da formulação FAS seja o mais adequado, na literatura há precedentes da utilização do algoritmo *multigrid* CS na solução desta classe de problemas não-lineares Jiang, *et al*, 1991, conforme citado no início deste capítulo.

O fluxograma do algoritmo *multigrid* CS [3] é mostrado na Figura **IV-8** O parâmetro γ é o que determina o tipo de ciclo *multigrid*. As escolhas $\gamma = 1$ e $\gamma = 2$ levam aos ciclos-V e -W, respectivamente. Em malhas grossas (isto é, exceto na mais fina), vê-se que antes de se proceder a pré-suavização, as correções são inicialmente zeradas.

No teste de parada / convergência é verificado se o resíduo na malha mais fina r_M está abaixo de uma certa precisão (convergência) ou acima de um dado limite (divergência), se o tempo de computação e se o número de iterações excederam seus limites respectivos. A veracidade de apenas um destes testes é suficiente para provocar o término da execução.

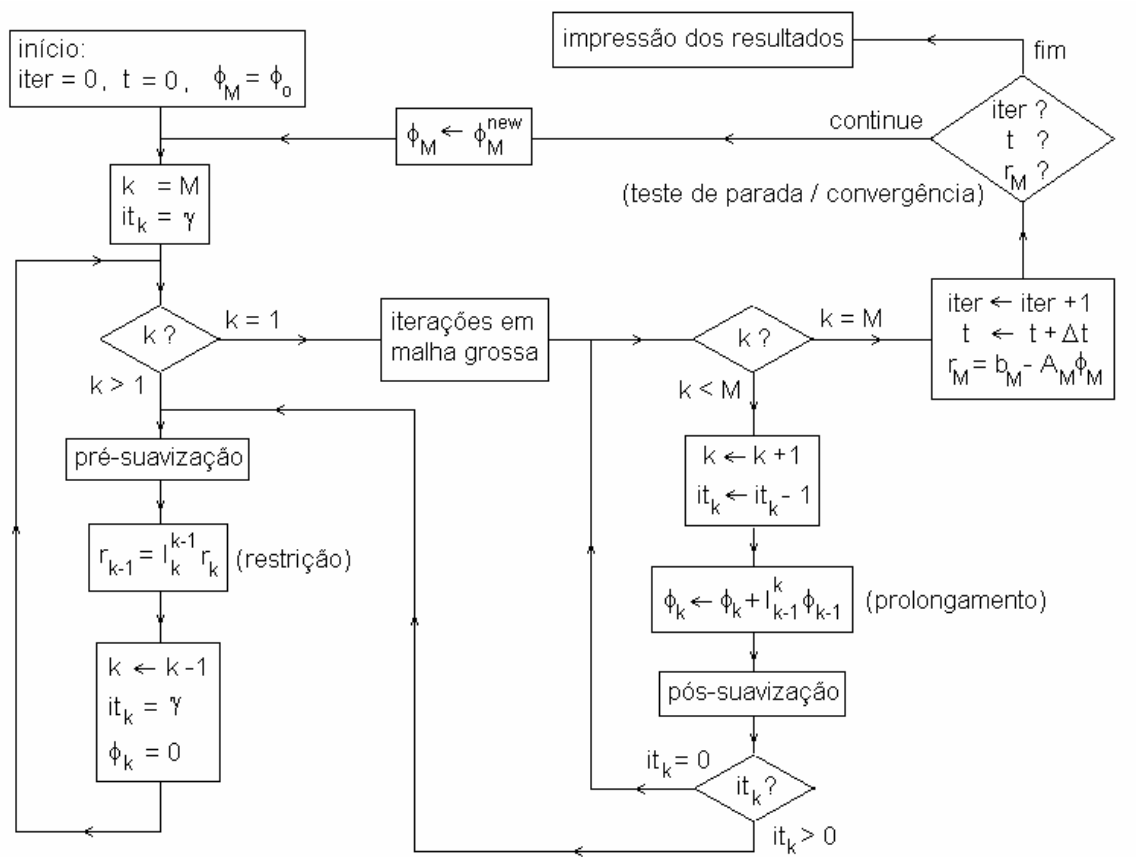


Figura IV-8 - Fluxograma do algoritmo multigrid na formulação CS

CAPÍTULO V RESULTADOS E DISCUSSÃO

V-1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos a partir dos ensaios realizados no programa desenvolvido. Para alguns casos apresentados, os ensaios foram realizados em um computador IBM-PC com Intel Pentium de 166 MHZ e demais resultados foram obtidos em um processador Intel Pentium III de 500 MHZ. O programa foi escrito em linguagem FORTRAN 90, através do Microsoft Fortran Power Station do ambiente Microsoft Developer Studio for Windows.

A partir da solução de problemas hidrodinâmicos abordados na tese de Rabi, 1998, foi feito o estudo de problemas térmicos bidimensionais simples em regime permanente, com o campo de velocidades tido conhecido (solução desacoplada) ou desconhecido (solução acoplada).

Na solução desacoplada trata-se a solução de um problema linear, envolvendo apenas a equação da energia dado o campo de velocidades. Na solução acoplada os campos térmico e hidrodinâmico são resolvidos simultaneamente portanto, envolve as equações de Navier-Stokes e da energia.

Finalmente, para todos os casos considerados foi feito um estudo com o objetivo de se determinar os parâmetros ótimos do ciclo multigrid. A Tabela V-1 apresenta o sumário dos resultados obtidos.

Tabela V-1 – Sumário dos resultados

| Seção | Sub-seção | Página | Descrição | Figura | Variáveis |
|---------------------------------|---|-------------------------------|---|--------|--|
| Escoamento com recirculação | Escoamento com expansão abrupta | V-15 | - Escoamento entre placas com expansão abrupta | V-11 | |
| | | V-17 | - Escoamento com expansão abrupta: resíduos da velocidade U , $Re= 100$ e 400 , Ciclo V | V-12 | $R_U \times CPU$ |
| | | V-18 | - Escoamento com expansão abrupta: resíduos da velocidade V , $Re= 100$ e 400 , Ciclo V | V-13 | $R_V \times CPU$ |
| | | V-19 | - Escoamento com expansão abrupta: resíduos da pressão P , $Re= 100$ e 400 , ciclo V | V-14 | $R_P \times CPU$ |
| | | V-20 | - Escoamento com expansão abrupta: resíduos da velocidade U , $Re=100$ e 400 , Ciclo W | V-15 | $R_U \times CPU$ |
| | | V-21 | - Escoamento com expansão abrupta: resíduos da velocidade V , $Re= 100$ e 400 , Ciclo W | V-16 | $R_V \times CPU$ |
| | | V-22 | - Escoamento com expansão abrupta: resíduos da pressão P , $Re= 100$ e 400 , Ciclo W | V-17 | $R_P \times CPU$ |
| | | V-23 | - Escoamento com expansão abrupta: visualização da região de entrada | V-18 | |
| | Escoamento em tanque retangular | V-24 | - Escoamento em tanque retangular | V-19 | |
| | | V-26 | - Escoamento em tanque retangular: visualização do escoamento $Re= 300$ | V-20 | |
| | | V-27 | - Escoamento em tanque retangular: resíduo da velocidade U , $Re= 75, 150, 300$ Ciclo V | V-21 | $R_U \times CPU$ |
| | | V-28 | - Escoamento em tanque retangular: resíduo da velocidade V , $Re = 75, 150, 300$ Ciclo V | V-22 | $R_V \times CPU$ |
| | | V-29 | - Escoamento em tanque retangular: resíduo da pressão P , $Re= 75, 150, 300$ Ciclo V | V-23 | $R_P \times CPU$ |
| | Escoamento de jato confinado | V-30 | - Escoamento de jato confinado: visualização da região próxima à entrada. | V-24 | |
| | | V-31 | - Escoamento de jato confinado: trecho da malha computacional não-uniforme | V-25 | |
| | | V-33 | - Escoamento de jato confinado: resíduo da velocidade U , $Re=50$ e 300 Ciclo V | V-26 | $R_U \times CPU$ |
| | | V-34 | -Escoamento de Jato confinado: resíduo da velocidade V , $Re=50$ e 300 Ciclo V | V-27 | $R_V \times CPU$ |
| | | V-35 | -Escoamento de jato confinado:resíduo da pressão P , $Re= 50$ e 300 Ciclo V | V-28 | $R_P \times CPU$ |
| | | V-36 | - Escoamento de jato confinado: visualização do escoamento em jato confinado. | V-29 | |
| | | SOLUÇÃO DE PROBLEMAS TÉRMICOS | Escoamento com expansão abrupta | V-39 | - Escoamento com expansão abrupta: visualização do campo térmico para $Re= 100$ e 400 (de cima para baixo) |
| V-40 | - Escoamento com expansão abrupta: resíduos da temperatura T , $Re= 100$ e 400 Ciclo V | | | V-31 | $R_T \times CPU$ |
| V-41 | - Escoamento com expansão abrupta: resíduos da temperatura T , $Re= 100$ e 400 Ciclo W | | | V-32 | $R_T \times CPU$ |
| V-42 | - Escoamento com expansão abrupta: comparação entre a solução acoplada e a desacoplada | | | V-33 | $R_T \times CPU$ |
| V-43 | - Escoamento com expansão abrupta: comparação entre a solução em malha 144×48 e a solução em malha 218×74 para os resíduos da temperatura | | | V-34 | $R_T \times CPU$ |
| Escoamento em tanque retangular | V-45 | | - Escoamento em tanque retangular: visualização do campo térmico para $Re=75, 150$ e 300 (de cima para baixo) | V-35 | |
| | V-46 | | - Escoamento em tanque retangular: resíduos da temperatura T , $Re= 75, 150$ e 300 . | V-36 | $R_T \times CPU$ |
| | V-47 | | - Escoamento em tanque retangular: comparação entre a solução acoplada e a solução desacoplada. | V-37 | $R_T \times CPU$ |
| Escoamento de jato confinado | V-49 | | - Escoamento de jato confinado: visualização do campo térmico $Re= 50, 300$ (de cima para baixo) | V-38 | |
| | V-50 | | - Escoamento de jato confinado: resíduo da temperatura T , $Re= 50$ e 300 Ciclo V | V-39 | $R_T \times CPU$ |

| | | | | | |
|-------------------------------------|---------------------------------|------|---|------|---------------------------------|
| | | V-51 | - escoamento de jato confinado: comparação entre a solução acoplada e a solução desacoplada | V-40 | $R_T \times CPU$ |
| OTIMIZAÇÃO DOS PARÂMETROS MULTIGRID | Escoamento com expansão abrupta | V-54 | - escoamento com expansão abrupta: esforço computacional para diferentes números de iterações de pré-/pós-suavizações, $V^{cg} = 3$. | V-41 | $CPU \times V^{pre} = V^{post}$ |
| | | V-55 | - escoamento com expansão abrupta: esforço computacional para diferentes números de iterações de pré-/pós-suavizações $V^{cg} = 6$ | V-42 | $CPU \times V^{pre} = V^{post}$ |
| | | V-56 | - escoamento com expansão abrupta: Esforço computacional para diferentes números de iterações de pré-/pós-suavizações $V^{cg} = 9$. | V-43 | $CPU \times V^{pre} = V^{post}$ |
| | | V-57 | - escoamento com expansão abrupta: Esforço computacional para diferentes números de iterações de pré-/pós-suavizações $V^{cg} = 15$. | V-44 | $CPU \times V^{pre} = V^{post}$ |
| | | V-59 | - escoamento com expansão abrupta: Influência do número de iteração na malha mais grossa V^{cg} sobre o esforço computacional. | V-45 | $CPU \times V^{cg}$ |
| | | V-61 | - escoamento com expansão abrupta: influência do refinamento da malha $V^{cg} = 1$ Ciclo V | V-46 | $CPU \times V^{pre} = V^{post}$ |
| | | V-62 | - escoamento com expansão abrupta: influência do refinamento da malha $V^{pre} = V^{post}$ ciclo V | V-47 | $CPU \times V^{cg}$ |
| | Escoamento em tanque retangular | V-65 | - escoamento em tanque retangular: esforço computacional para diferentes números de iterações de pré-/pós-suavizações ($V^{pre} = V^{post}$). | V-48 | $CPU \times V^{pre} = V^{post}$ |
| | | V-66 | - escoamento em tanque retangular: Influência do número de iterações na malha mais grossa (V^{cg}) sobre o esforço computacional. | V-49 | $CPU \times V^{cg}$ |
| | Escoamento de jato confinado | V-68 | - escoamento de jato confinado: esforço computacional para diferentes números de iterações de pré-/ pós-suavizações, $Re = 50$ e 100 | V-50 | $CPU \times V^{pre} = V^{post}$ |
| | | V-69 | - escoamento de jato confinado: influência do número de iterações na malha mais grossa (V^{cg}) sobre o esforço computacional. | V-51 | $CPU \times V^{cg}$ |

V-2.VALIDAÇÃO NUMÉRICA

V-2.a.Problema hidrodinâmico

Com a finalidade de se verificar a validação numérica das soluções multigrid, foi considerado o problema do escoamento entre placas planas e paralelas, uma vez que o perfil desenvolvido da velocidade é um resultado bastante conhecido. As dimensões do domínio de cálculo e as condições de contorno empregadas são esquematizadas na Figura V-1 .

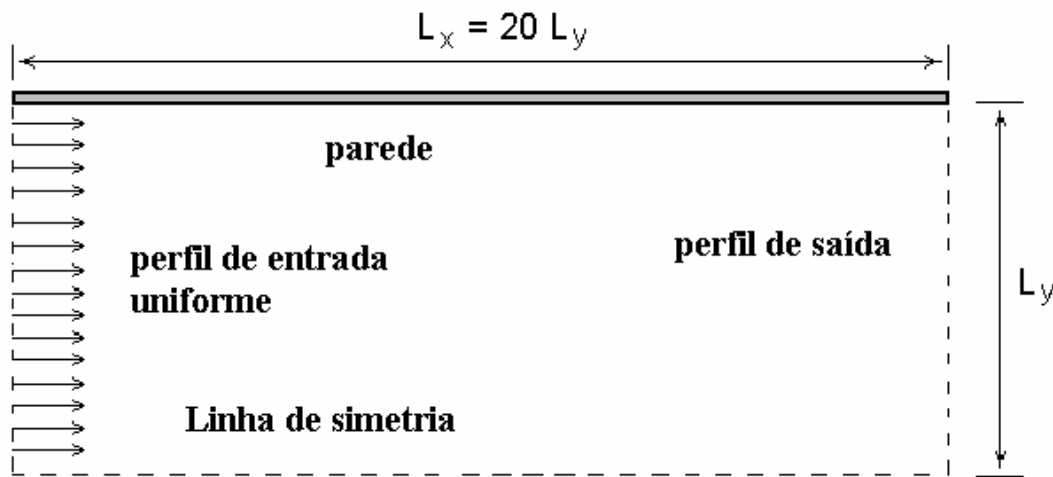


Figura V-1- -Escoamento entre placas planas e paralelas

Os valores adotados foram $L_y = 0.05$ m, $L_x = 1.0$ m e $U_0 = 0.1$ m/s. Quanto às propriedades, foram considerados $\rho = 1.0$ Kg/m³ e $\mu = 10^{-4}$ Kg/m.s .

Definindo o número de Reynolds Re com base no diâmetro hidráulico $D_h = 4 L_y$, tem-se

$$Re = \frac{\rho U_0 D_h}{\mu} \quad (V-1)$$

Os valores considerados levam a $Re = 200$, condizente com a hipótese de escoamento laminar.

Neste problema os maiores gradientes encontram-se próximos à região de entrada e à parede. Foi então usada uma malha não-uniforme com 160 x 32 VCs, estando os mesmos mais concentrados nestas regiões. As razões de espaçamento usadas foram $RE_x = 0.5$ e $RE_y = 2$. Quando o escoamento encontra-se totalmente desenvolvido, tem-se $V=0$ e o perfil da componente U da velocidade ao longo da seção transversal é dada por Shah e London, 1978 :

$$U(y) = \frac{3}{2} U_0 \left[1 - \left(\frac{y}{L_y} \right)^2 \right] \quad (V-2)$$

com y medido a partir da linha de simetria. A Figura V-2 compara o resultado obtido com o uso de 1 e 4 malhas computacionais com o perfil dado pela equação (V-2). Vê-se que a solução multigrid possui boa concordância com a solução analítica.

As Figuras V-3, V-4 e V-5 mostram o comportamento dos resíduos de U , V e P na obtenção desta solução multigrid (4M) e em malha única (1M). Foram adotados $\xi_U = 0.8$, $\xi_V = 0.6$, $\xi_P = 0.01$ para os fatores de sub-relaxação e para a solução multigrid foi empregado o ciclo V com $\nu^{pre} = \nu^{post} = \nu^{cg} = 1$. Na Figura V-6 é checado de maneira qualitativa o padrão dos resultados obtidos pela solução multigrid na região de entrada. O desenvolvimento da camada limite próxima à parede pode ser claramente observado.

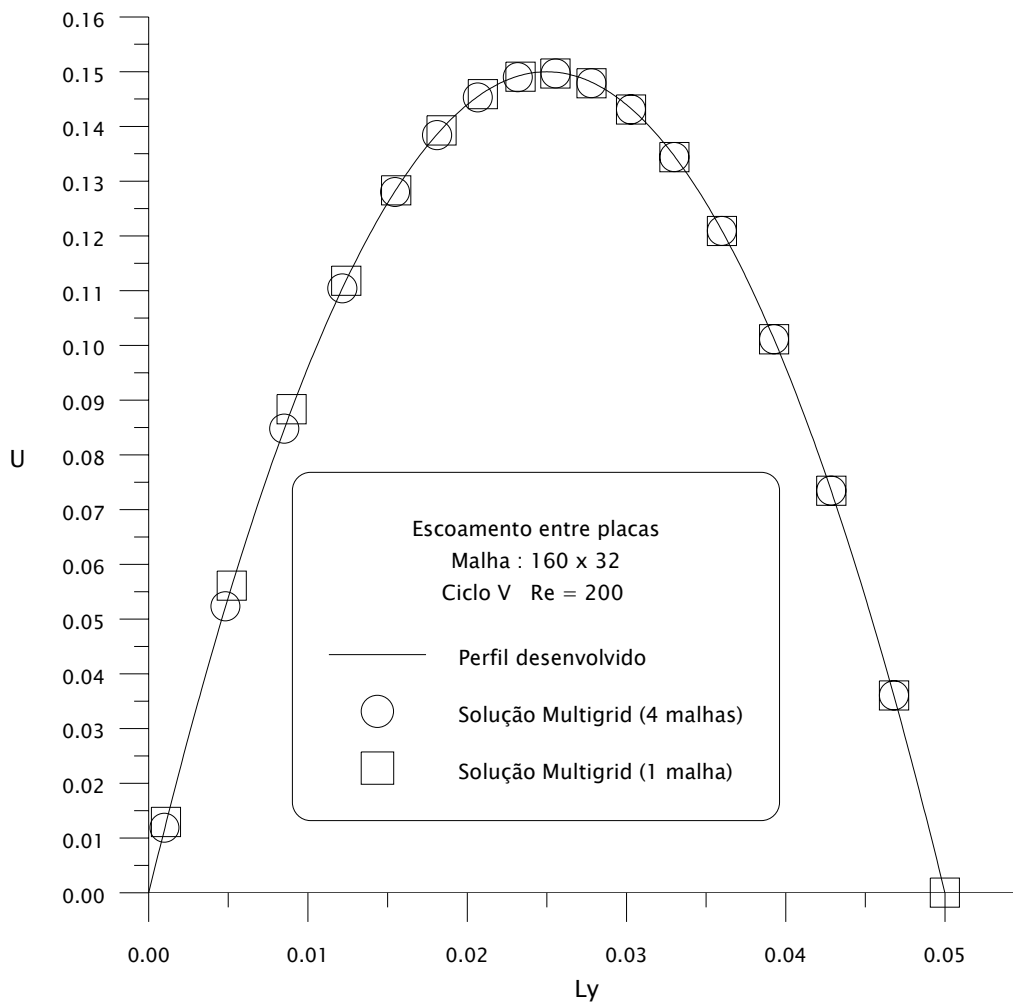


Figura V-2 - Escoamento entre placas: validação numérica da solução multigrid

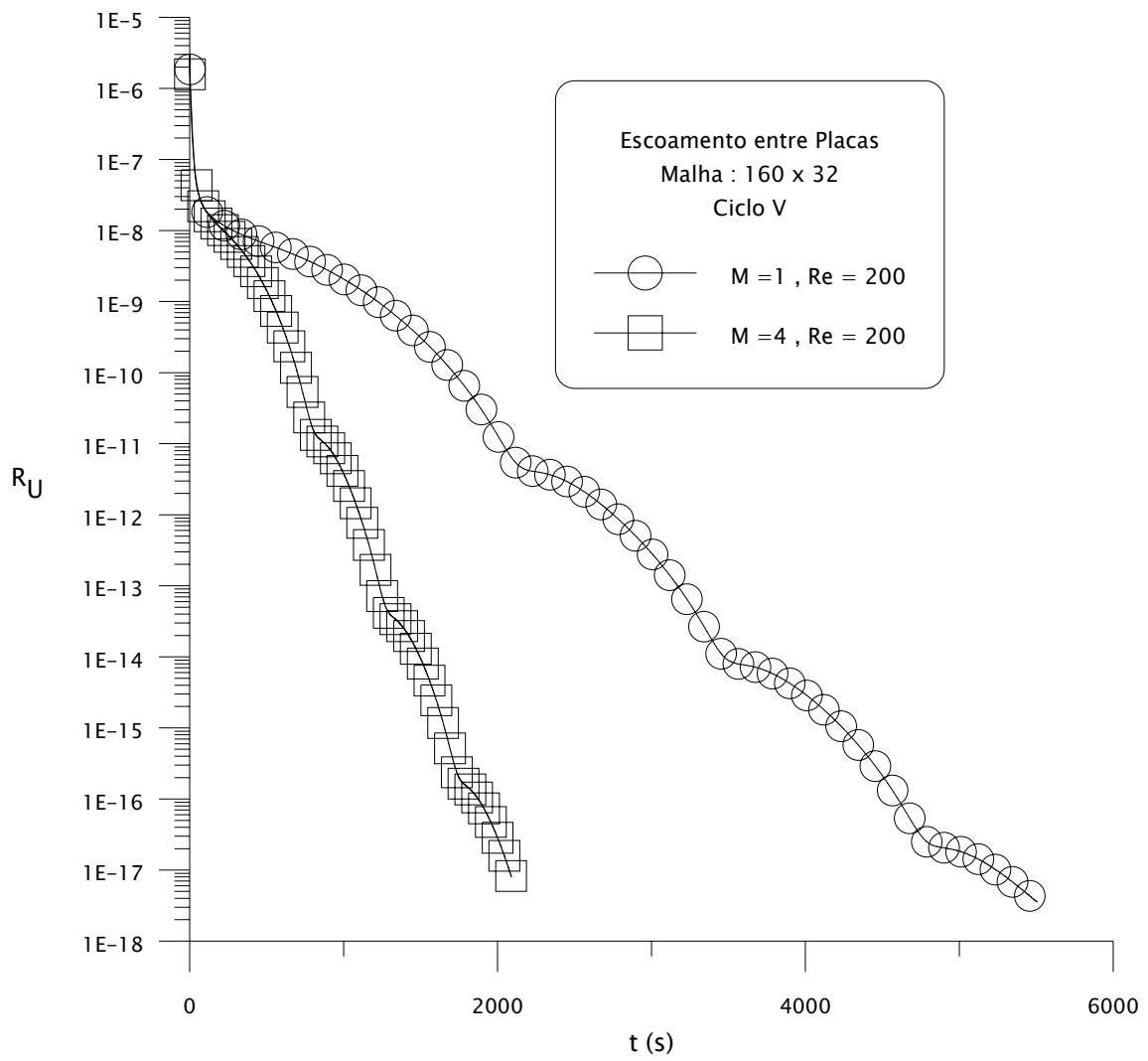


Figura V-3 - Escoamento entre placas : resíduo da velocidade U, $Re = 200$, ciclo V

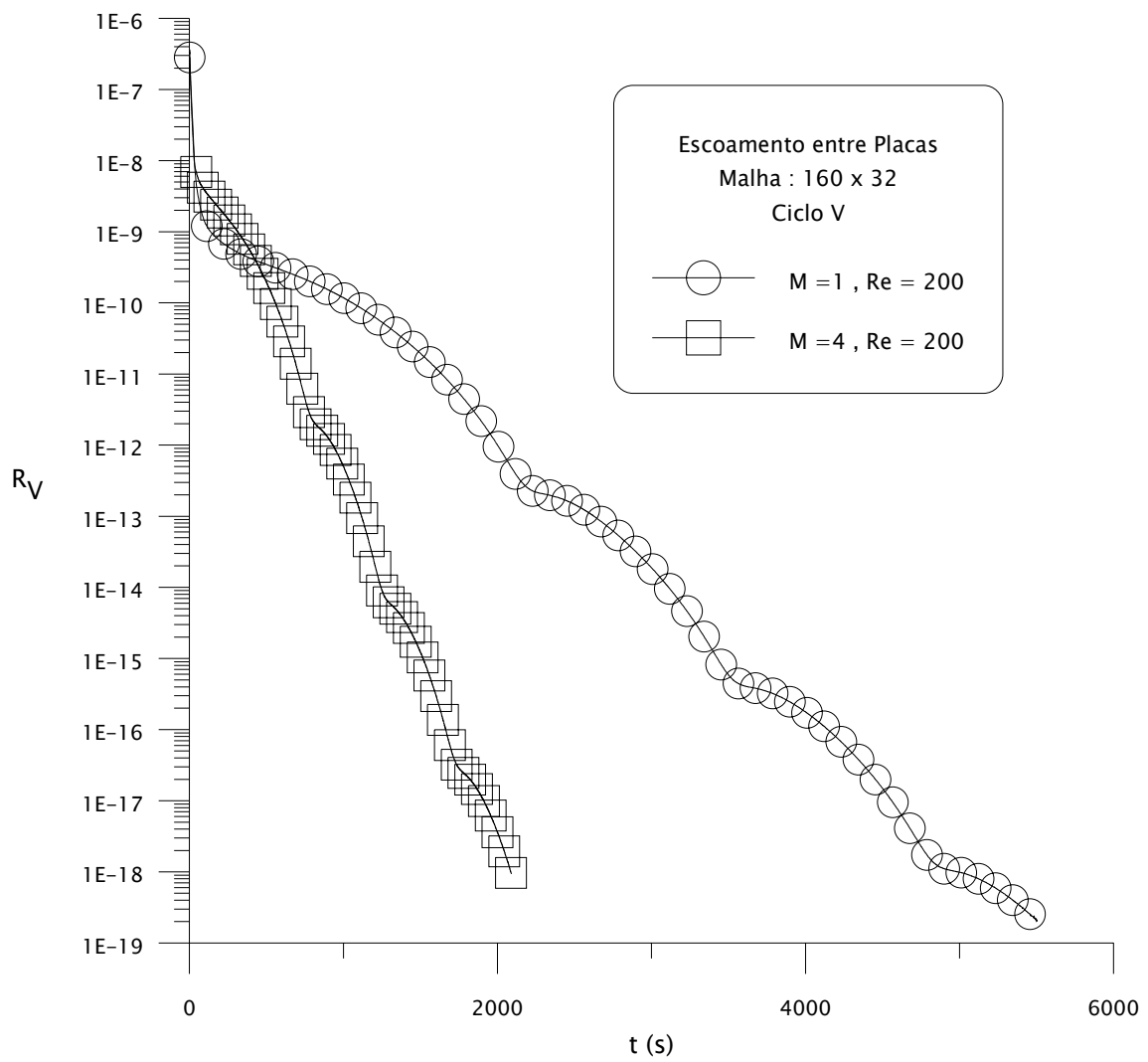


Figura V-4 - Escoamento entre placas : resíduo da velocidade V, $Re = 200$, ciclo V

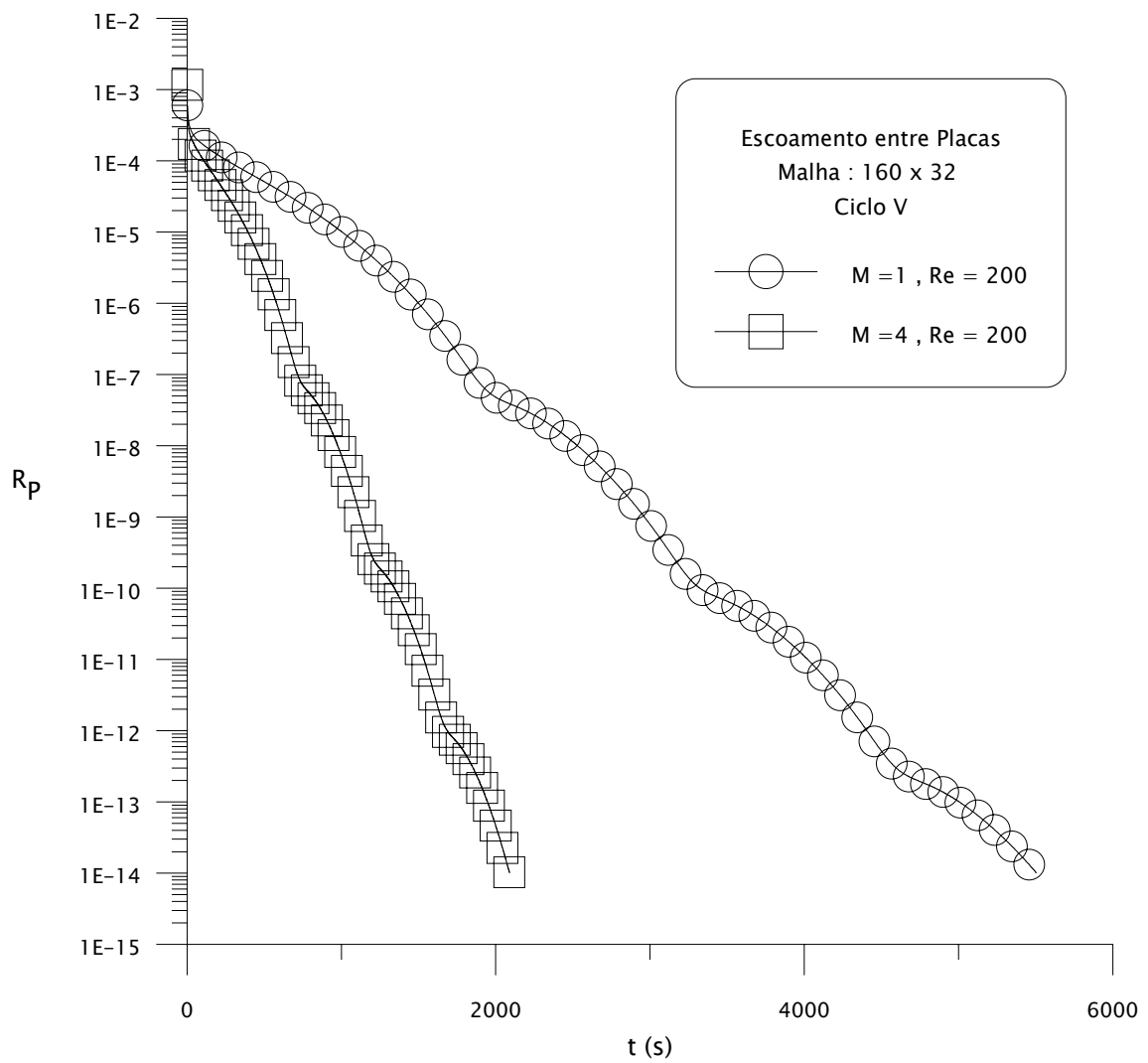


Figura V-5 - Escoamento entre placas : resíduo da pressão P, $Re = 200$, ciclo V

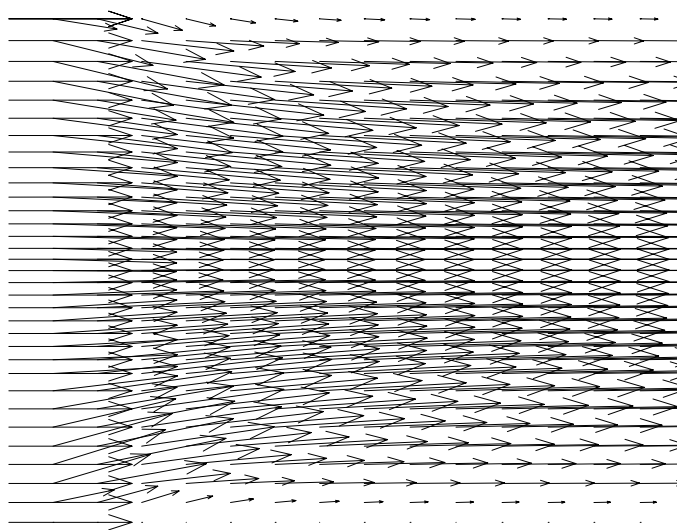


Figura V-6 - Escoamento entre placas : Visualização do escoamento entre placas planas

V-2.b.Problema térmico

Com o objetivo de se validar a solução da equação da energia, foi considerado também o problema de escoamento entre placas planas, com a geometria de acordo com a Figura V-1. Para este caso, da mesma forma que o problema hidrodinâmico, foram considerados os seguintes valores $L_y = 0.05$ m, $L_x = 1.0$ m, $U_0 = 0.1$ m/s, $\rho = 1.0$ Kg/m³ e $\mu = 10^{-4}$ Kg/m.s de modo a ter $Re = 200$, lembrando que Re é calculado de acordo com a equação (V-1). Foram adotados $\xi_U = 0.8$, $\xi_V = 0.6$, $\xi_P = 0.01$, $\xi_T = 0.30$ para os fatores de sub-relaxação e para a solução multigrid foi empregado o ciclo V com $\nu^{pre} = \nu^{post} = \nu^{cg} = 1$.

A Figura V-7 procura mostra a visualização da distribuição adimensional da temperatura para o escoamento entre placas planas da Figura V-1.

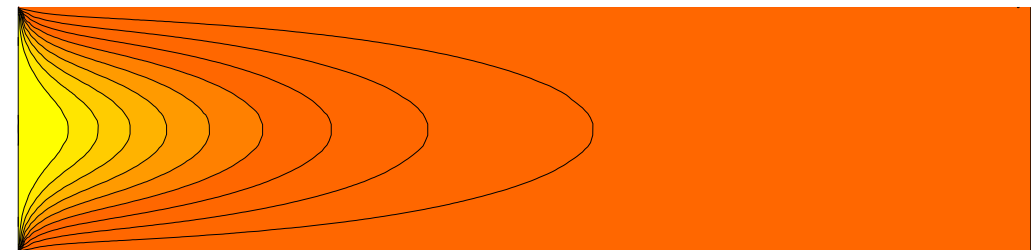


Figura V-7 - Escoamento entre Placas : Visualização do campo térmico para $Re = 200$

A Figura V-8 compara o comportamento do número de Nusselt, calculado a partir dos dados do programa, com o valor teórico. Para a geometria considerada e no caso de escoamento laminar e desenvolvido, com temperatura constante nas superfícies, o valor de Nusselt (Ozisik, 1985) é $N_u = 7.541$. Este resultado demonstra a boa concordância entre a solução analítica e a solução numérica.

A Figura V-9 compara o comportamento dos resíduos da temperatura T para as soluções multigrid em malha única (1M) e 4 malhas (4M). As vantagens do método são claramente observadas na figura. As diferenças encontradas quando se utiliza a solução acoplada e a solução desacoplada, são apresentadas na Figura V-10. Por se tratar de um problema fisicamente desacoplado, a solução numérica desacoplada é possível, acarretando em uma substancial economia no esforço computacional exigido.

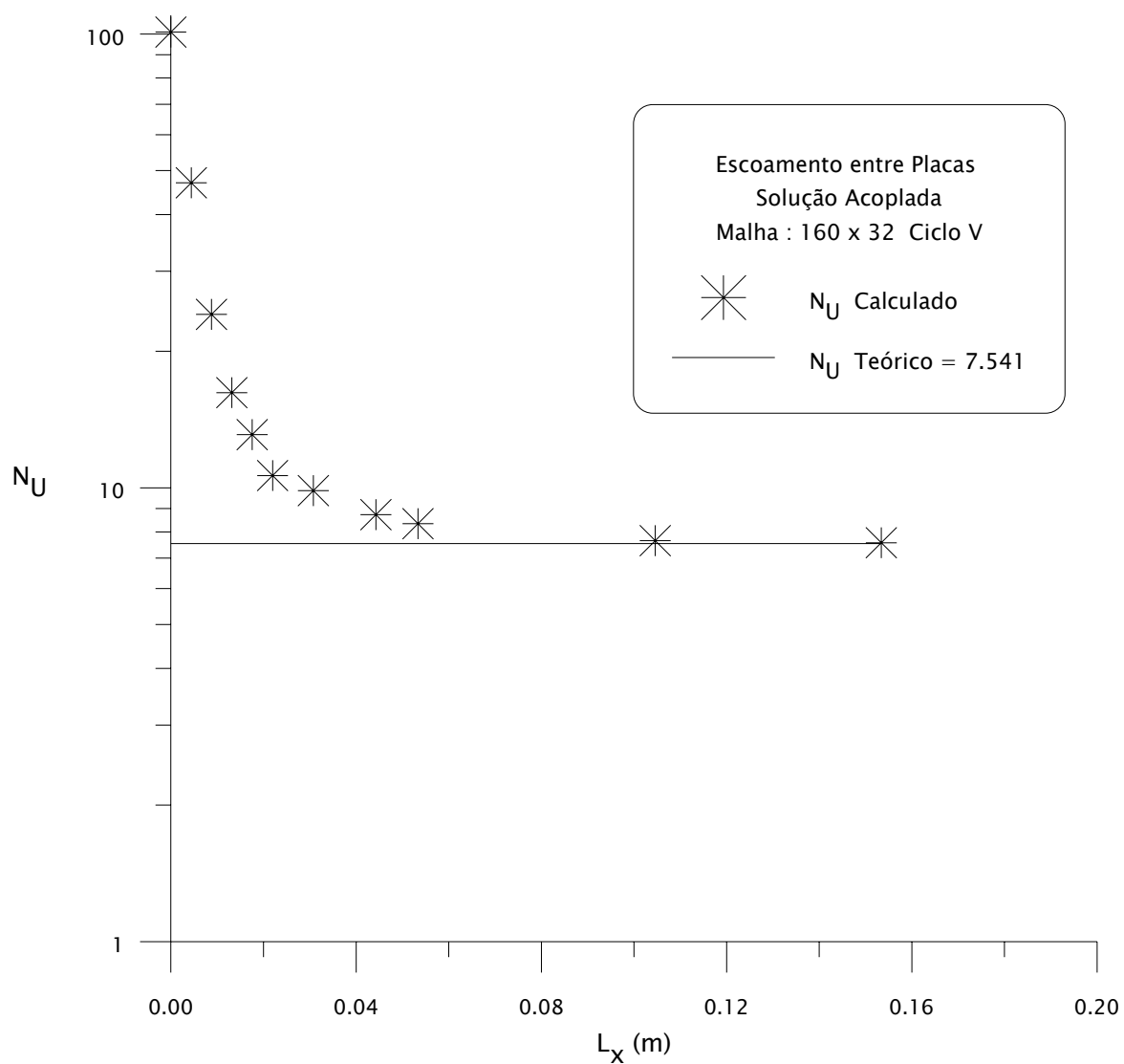


Figura V-8- -Escoamento entre Placas : validação numérica da solução térmica

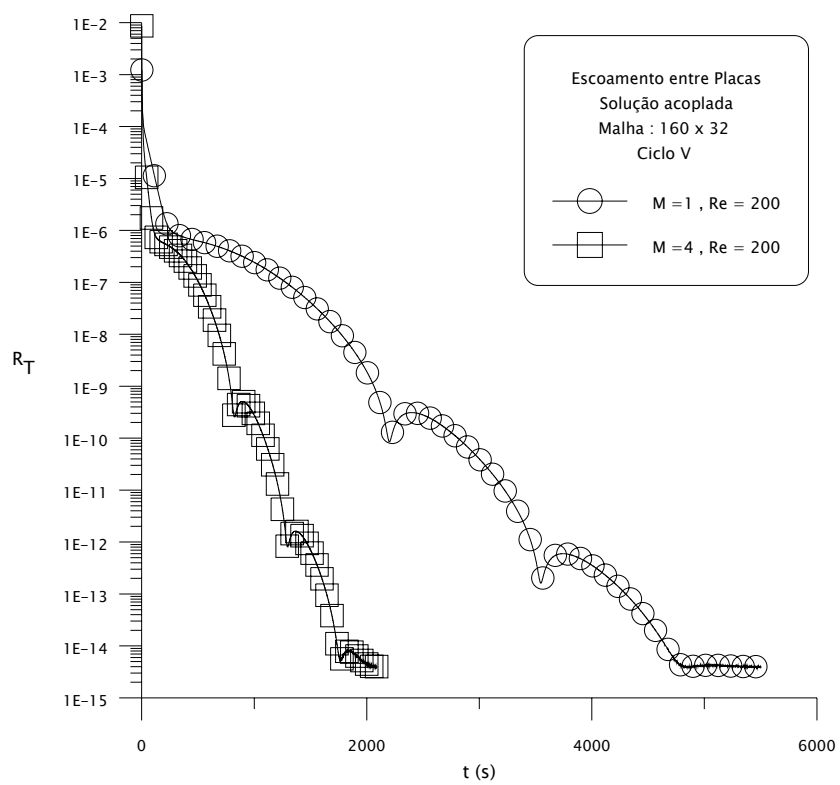


Figura V-9 - Escoamento entre Placas : resíduos da temperatura T , $Re = 200$ Ciclo V

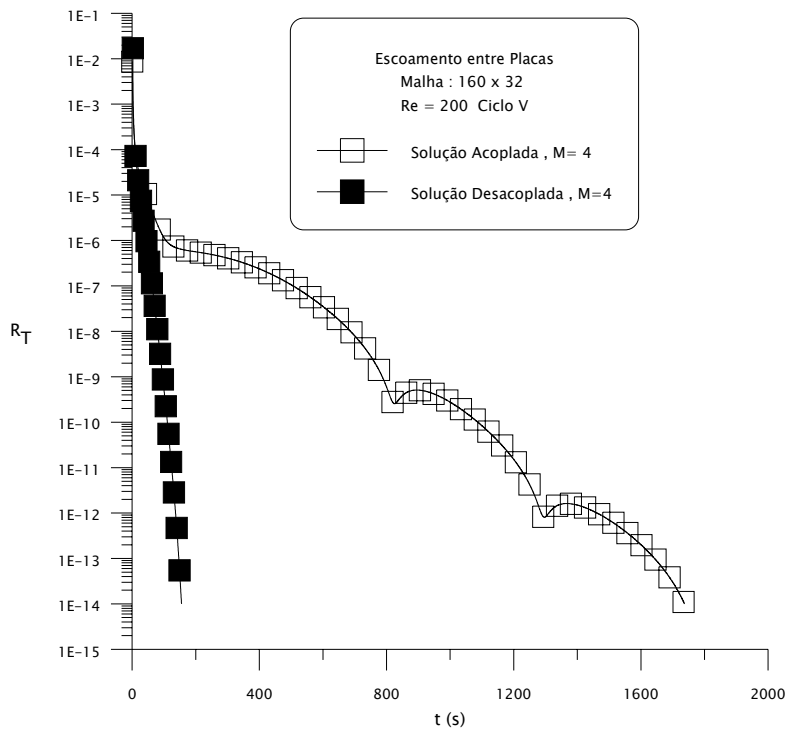


Figura V-10 - Escoamento entre placas :comparação entre a solução acoplada e a solução desacoplada

V-3.ESCOAMENTO COM RECIRCULAÇÃO

Nesta seção será apresentado o estudo de três casos básicos de escoamento com recirculação, todos com geometrias distintas, a saber :

- Escoamento com expansão abrupta
- Escoamento em tanque retangular
- Escoamento de jato confinado

V-3.a.Escoamento com expansão abrupta

O primeiro problema hidrodinâmico laminar considerado foi o de escoamento com expansão abrupta entre placas de expansão abrupta (backward facing step flow), cujo o esquema é mostrado na Figura V-11.

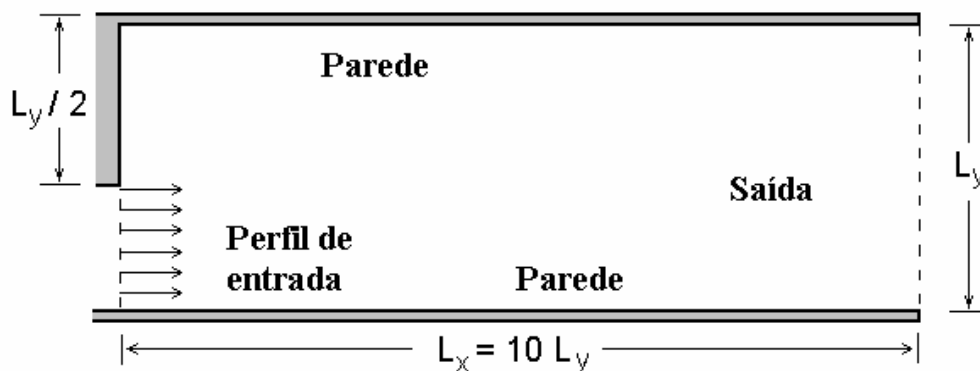


Figura V-11 - Escoamento entre placas com expansão abrupta.

Para este problema foram adotados $L_y = 0.05$ m, $L_x = 0.5$ m, $U_0 = 0.2$ m/s, $\rho = 1.0$ Kg/m³ e $\mu = 10^{-4}$ kg/m.s, de modo a ter $Re = 100$ e 400 , com o número de Reynolds calculado segundo:

$$Re = \frac{\rho U_0 L_y}{\mu} \quad (V-3)$$

Foi usada uma malha não-uniforme com 144 x 48 VCs e $RE_x = RE_y = 0.333$, com RE_y calculada com base no VC próximo à parede e o VC junto da linha média (há maior concentração junto às paredes e menor junto à linha média). Os coeficientes de sub-relaxação adotados foram $\xi_U = 0.8$, $\xi_V = 0.6$, $\xi_P = 0.3$ e a estratégia para as soluções multigrid em ciclo -V e para Ciclo-W foram $\nu^{pre} = \nu^{post} = 1$ e $\nu^{cg} = 2$.

Nas Figura V-12 a Figura V-17 são mostrados o comportamento dos resíduos das velocidades U e V , da pressão P em malha única (1M) e em 4 malhas tanto em ciclo V e Ciclo W , para $Re = 100$ e $Re = 400$.

A solução do problema térmico-hidrodinâmico é acoplada, ou seja, o campo térmico e o campo hidrodinâmico são solucionados simultaneamente, de modo que a temperatura é sempre relaxada após o campo do escoamento, de acordo com o ciclo multigrid. Para baixos valores de Re obtém-se soluções mais rápidas. Neste caso, os termos difusivos são de maior importância relativa e, assim, contribuem com peso maior à estabilidade numérica do sistema de equações. Com o aumento valor de Re , de 100 para 400, verifica-se maior gasto de tempo de CPU. Sendo, porém, a vantagem da solução multigrid mais pronunciada, tanto para o ciclo V quanto para o ciclo W.

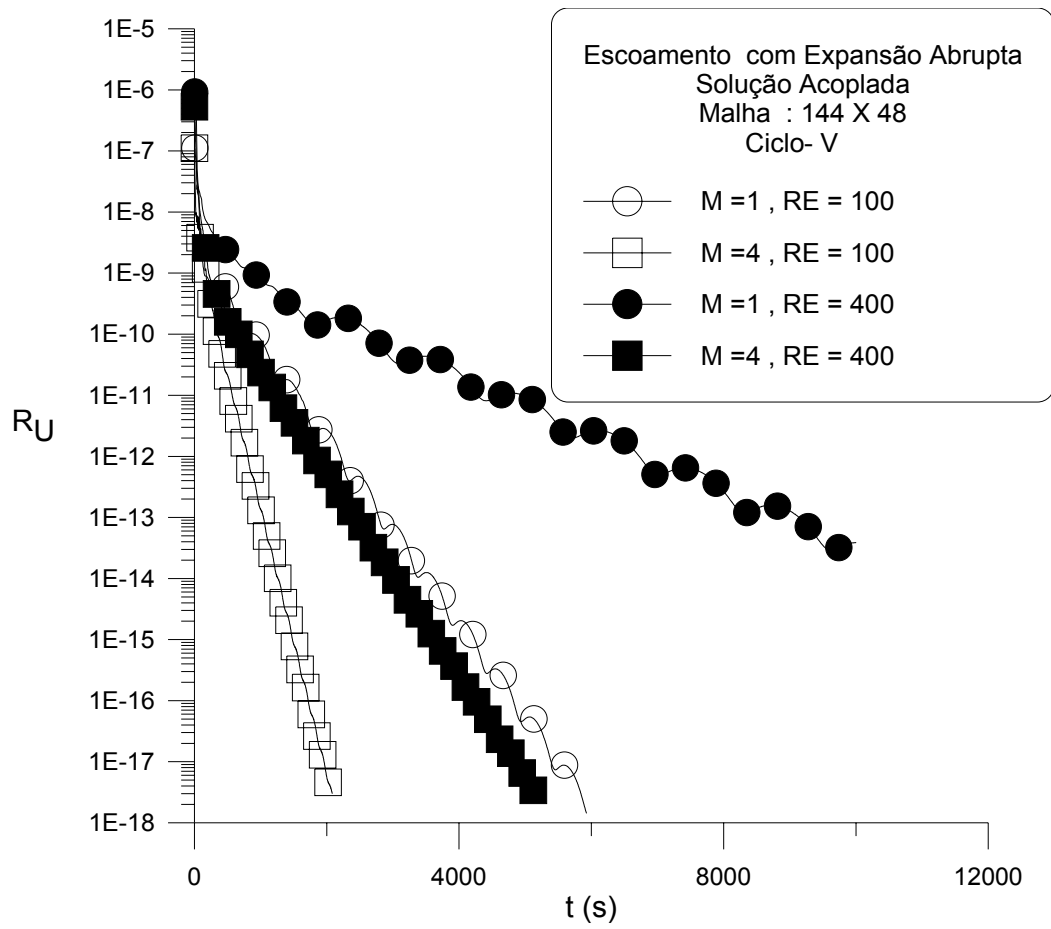


Figura V-12 - Escoamento com expansão abrupta: resíduos da velocidade U , $Re= 100$ e 400 , Ciclo V

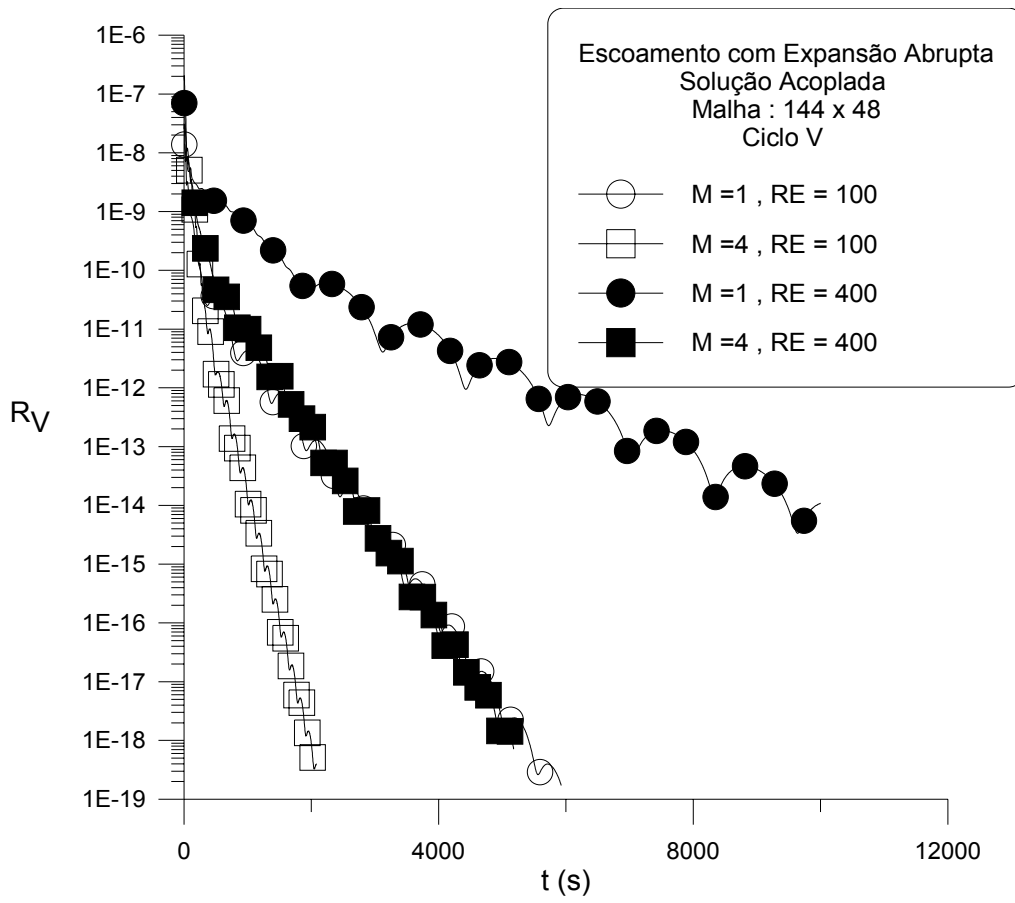


Figura V-13 - Escoamento com expansão abrupta: resíduos da velocidade V , $Re=100$ e 400 , Ciclo V .

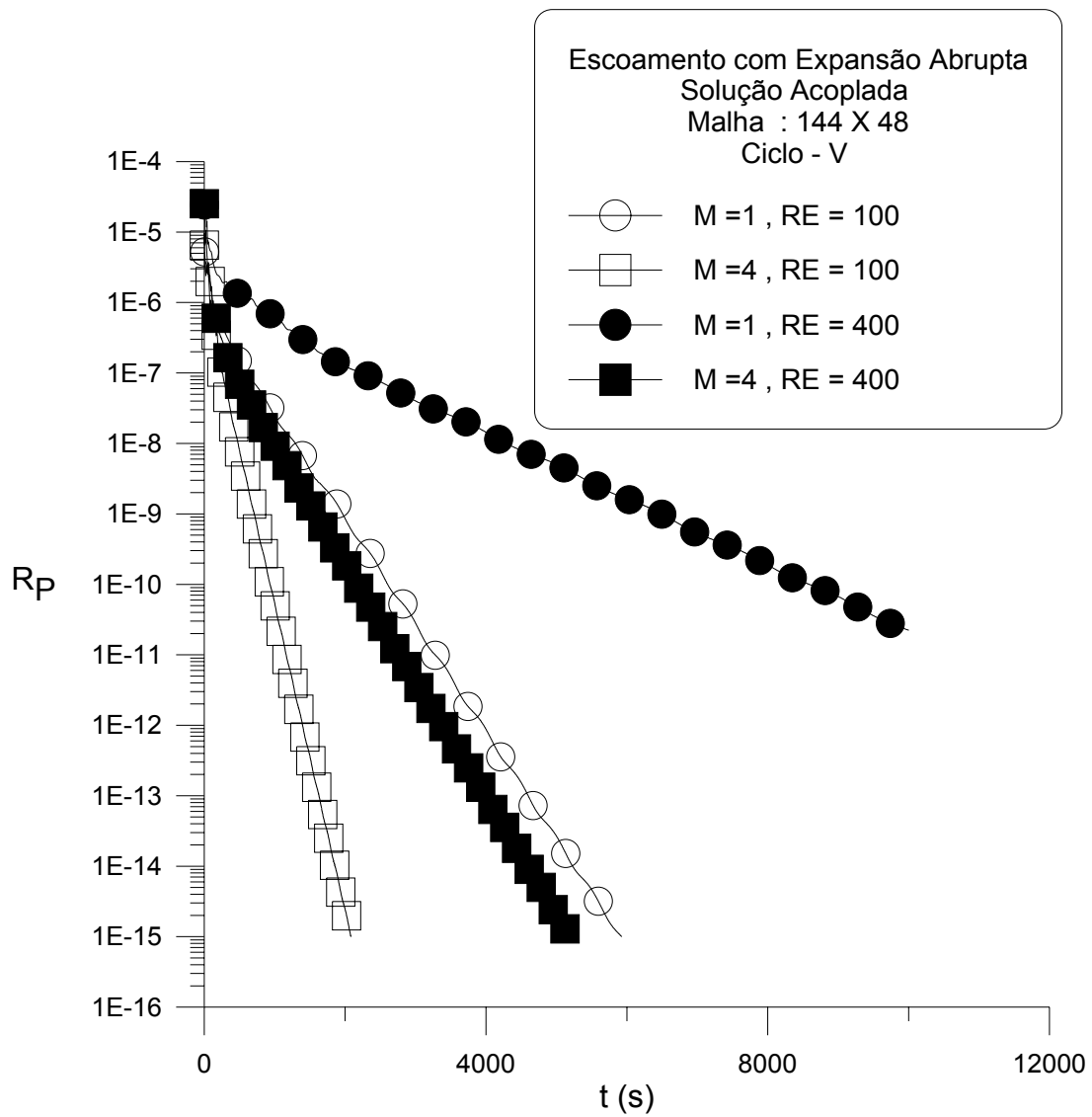


Figura V-14 - Escoamento com expansão abrupta: resíduos da pressão P , $Re= 100$ e

400, ciclo V

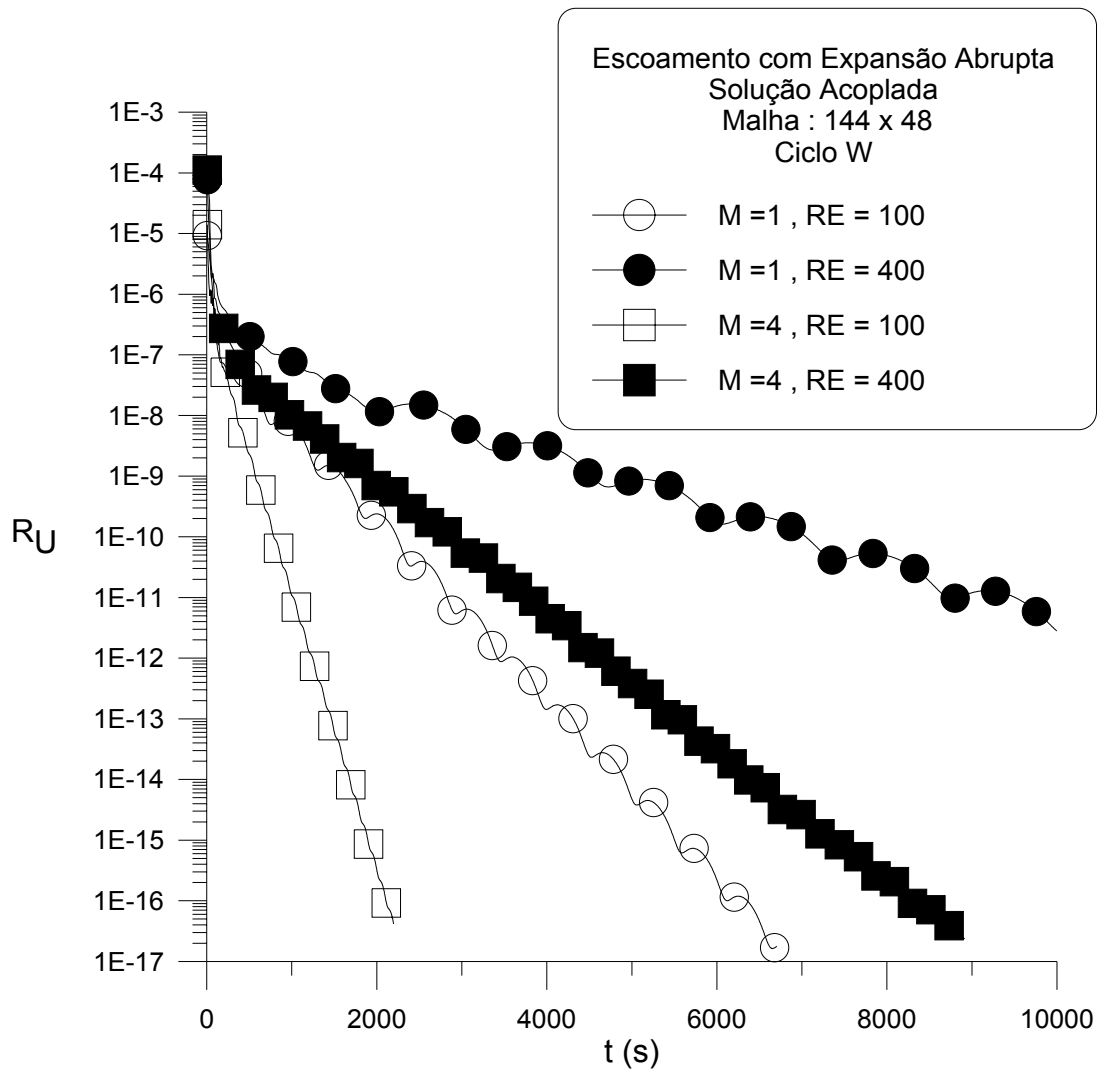


Figura V-15 - Escoamento com expansão abrupta: resíduos da velocidade U , $Re=100$ e 400 , Ciclo W

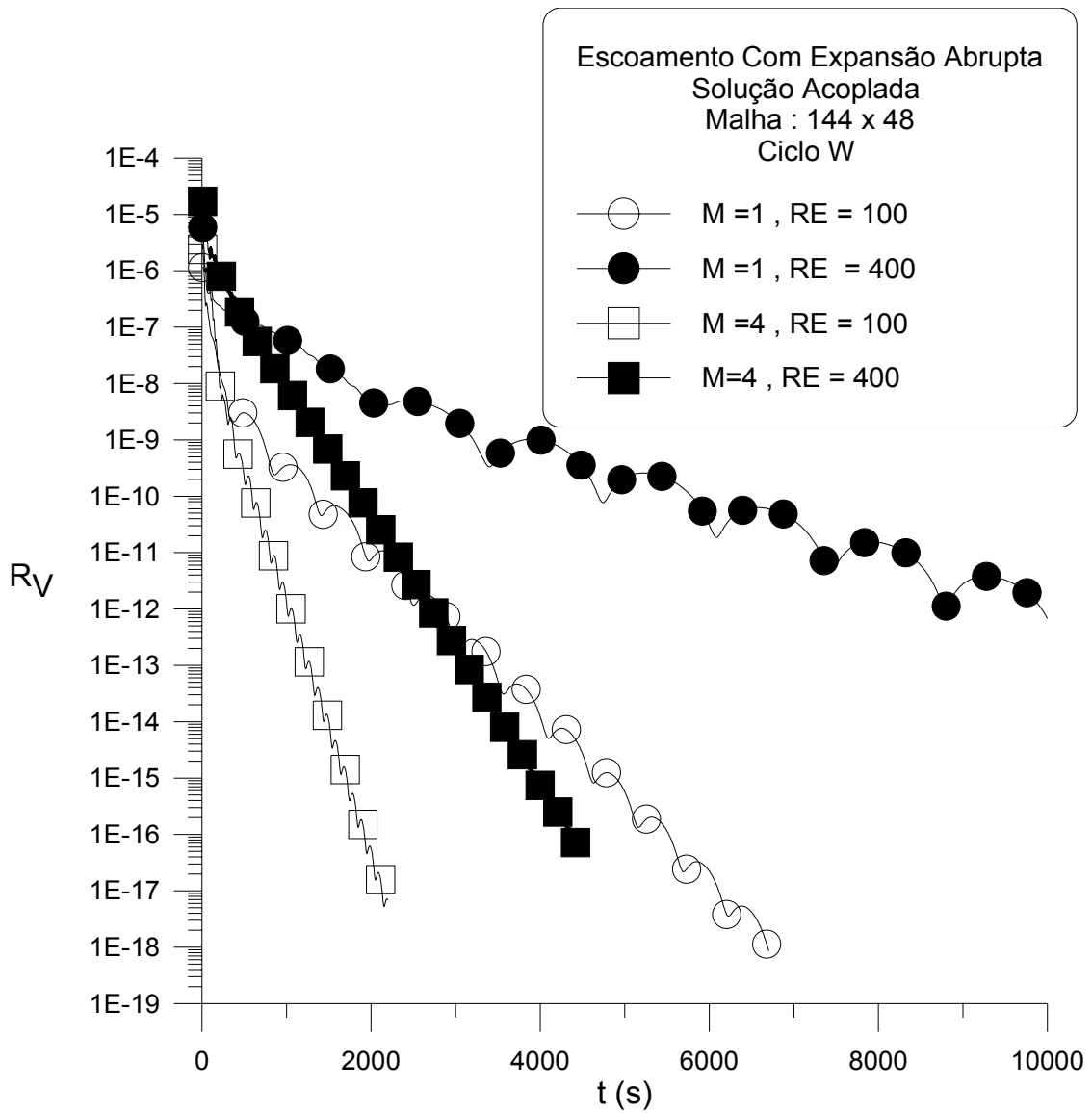


Figura V-16 - Escoamento com expansão abrupta: resíduos da velocidade V , $Re=100$ e 400 , Ciclo W

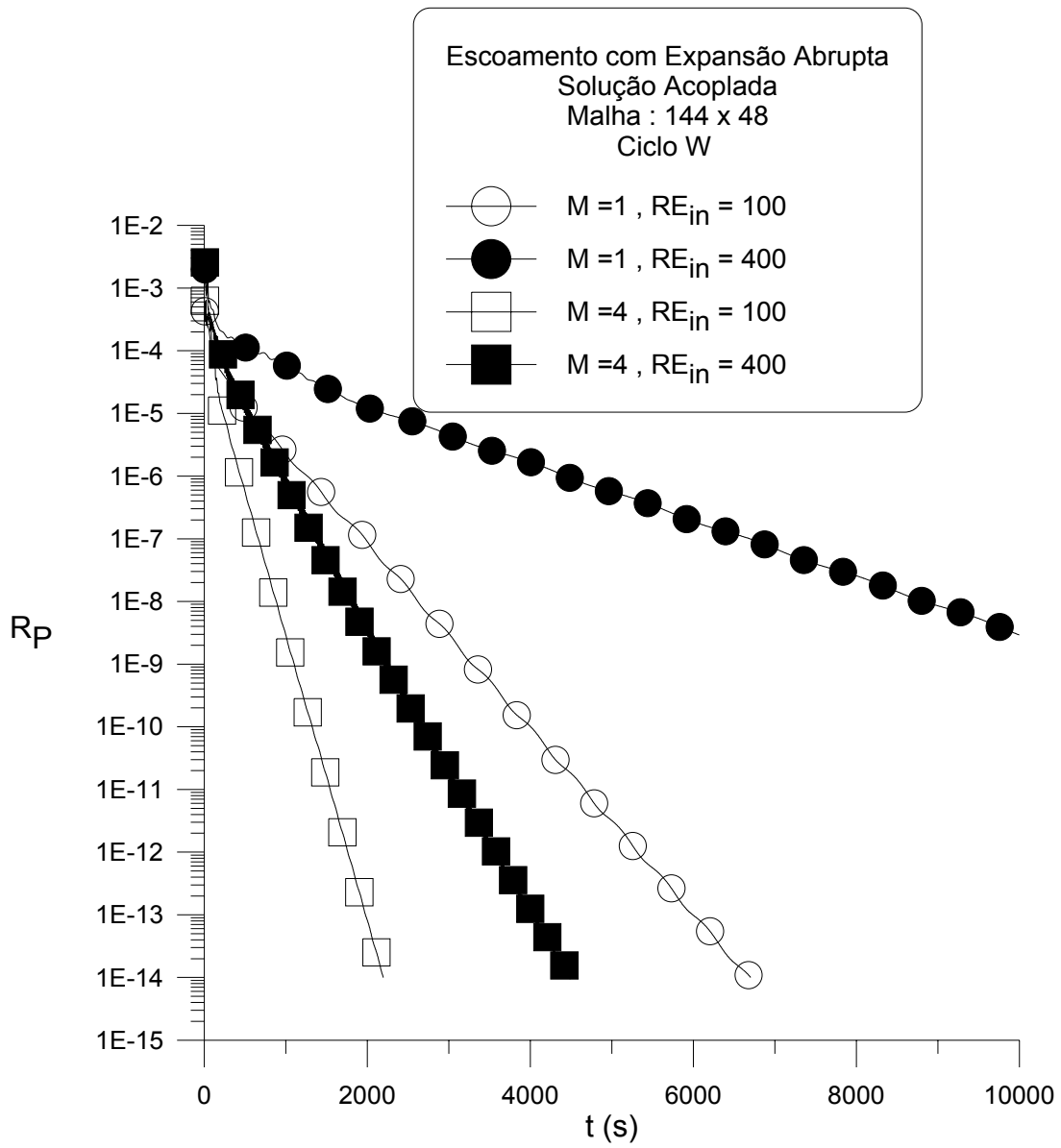


Figura V-17 - Escoamento com expansão abrupta: resíduos da pressão P , $Re = 100$ e 400 , Ciclo W .

A Figura V-18 contém a visualização dos vetores velocidade na região próxima à entrada, obtidos a partir da solução 4M. A Figura mostra a bolha de recirculação obtida e indica que reproduz o padrão esperado dos resultados.

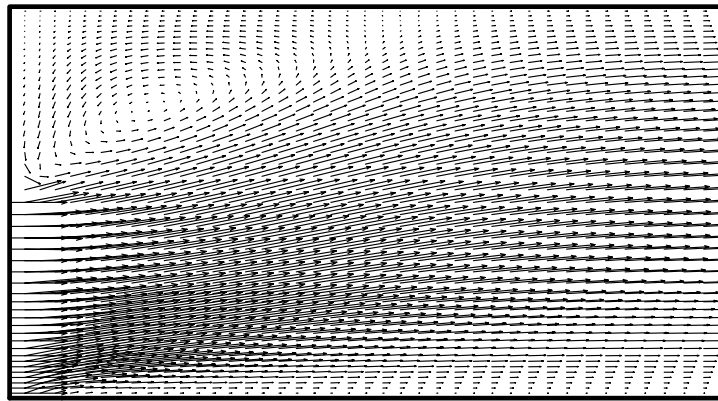


Figura V-18 - Escoamento com expansão abrupta: visualização da região de entrada.

V-3.b. Escoamento em tanque retangular

O segundo caso analisado foi o escoamento em um tanque retangular conforme o esquema da Figura V-19, onde $L_y = 0.6$ m, $L_x = 0.6$ m, $U_0 = 0.01$ m/s, $\rho = 1.0$ Kg/m³ e $\mu = 10^{-4}$ kg/m.s.

Foi empregadas uma malha não- uniforme com 66 x 66 VCs e as razões de espaçamento usadas foram $RE_x = RE_y = 1.0$. Os fatores de sub-relaxação empregados foram $\xi_U = 0.6$, $\xi_V = 0.6$, $\xi_P = 0.1$. Para as soluções multigrid em ciclo- V e ciclo- W assumiu-se $\nu^{pre} = \nu^{post} = \nu^{cg} = 1$.

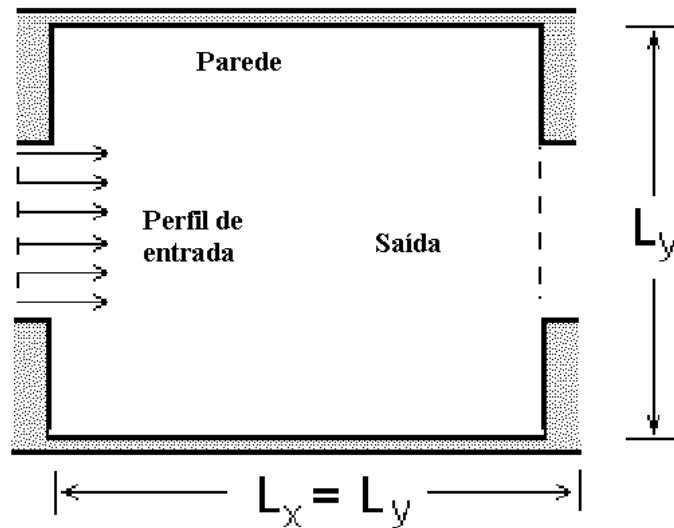


Figura V-19 - Escoamento em tanque retangular.

Como já foi mencionado, no caso do tanque retangular foi utilizada uma malha 66x66 assim como três valores diferentes de número de Reynolds, a saber $Re = 75, 150, 300$. Vale lembrar que Re é calculado de acordo com a equação (V-3).

Na Figura V-20 o padrão dos resultados obtidos pela solução multigrid 4M é verificado de maneira qualitativa, demonstrando mais uma vez que a solução multigrid reproduz o padrão dos resultados obtidos com uma malha única.

As Figuras V-21 a V-23 visualizam os resíduos das velocidades U e V e da pressão P , com $Re = 75, 150, 300$ com a solução em malha única (1M) e 4 malhas (4M) para o ciclo V. A solução do problema térmico-hidrodinâmico é acoplada, ou seja o campo térmico e o campo hidrodinâmico são solucionados simultaneamente, de modo que a temperatura é sempre relaxada após o campo do escoamento, de acordo com o ciclo multigrid, que para o presente caso adotou-se somente o ciclo V. Nota-se que baixos valores de Re obtêm-se soluções mais rápidas. Para os valores de $Re = 75, 150$ e 300 , verifica-se também maior gasto de tempo de CPU quanto maior o valor de Re . Porém, a vantagem da solução multigrid 4M, torna-se evidente mais uma vez.

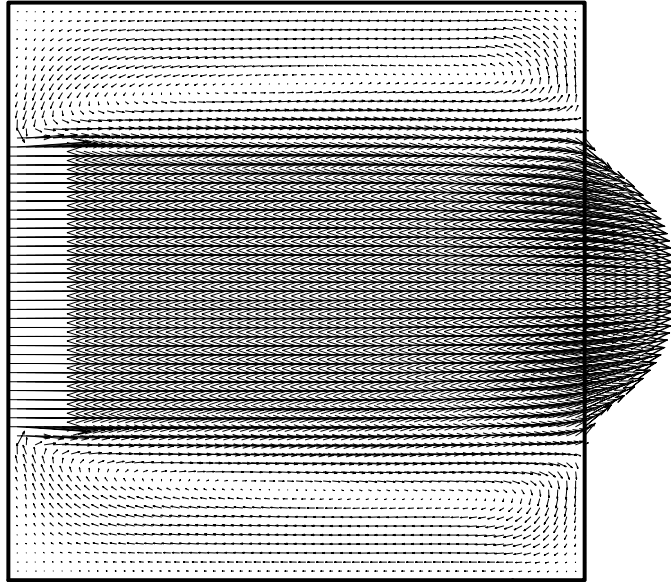


Figura V-20 - Escoamento em tanque retangular: visualização do escoamento $Re= 300$

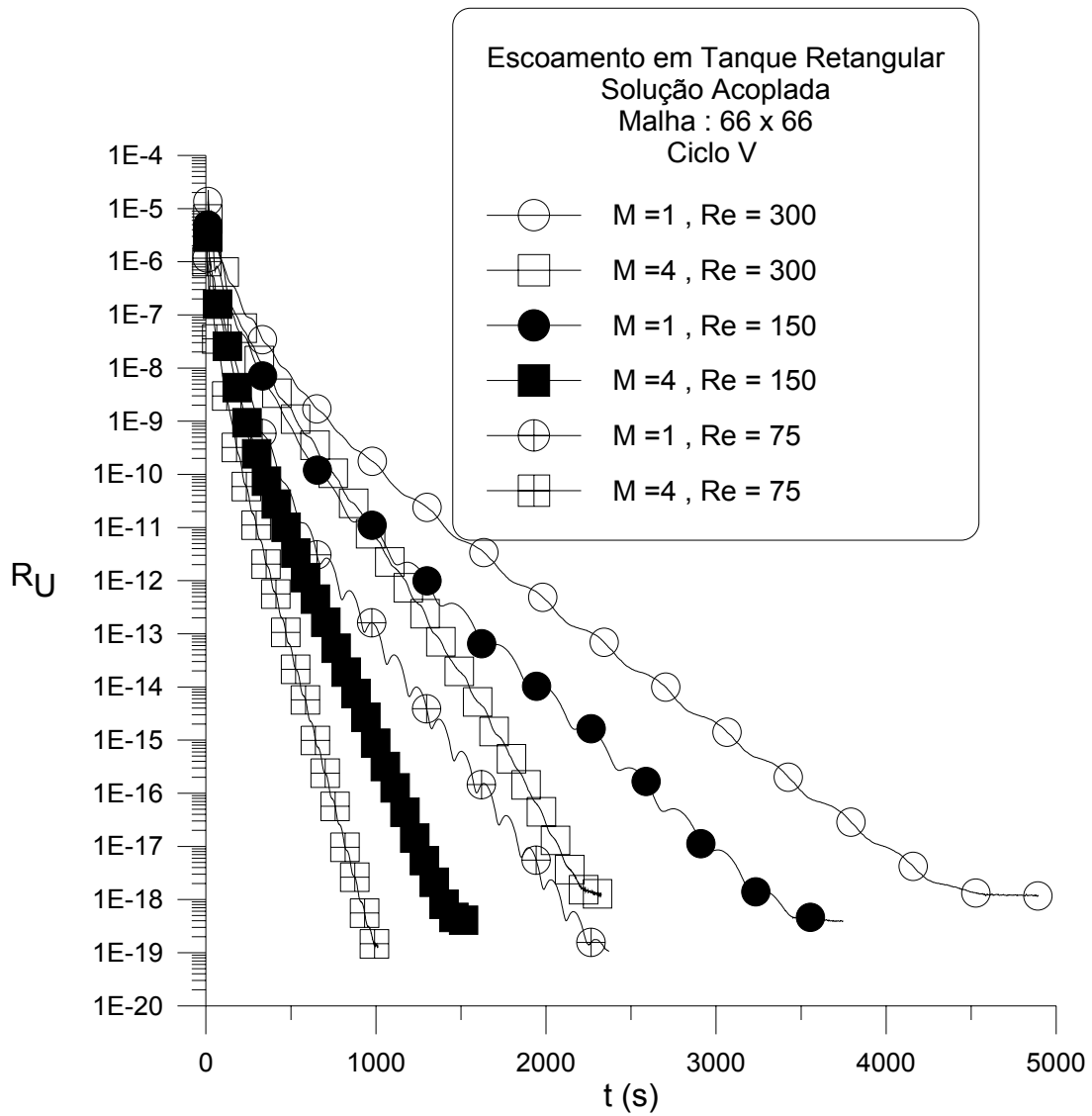


Figura V-21 - Escoamento em tanque retangular: resíduo da velocidade U , $Re=75, 150, 300$ Ciclo V .

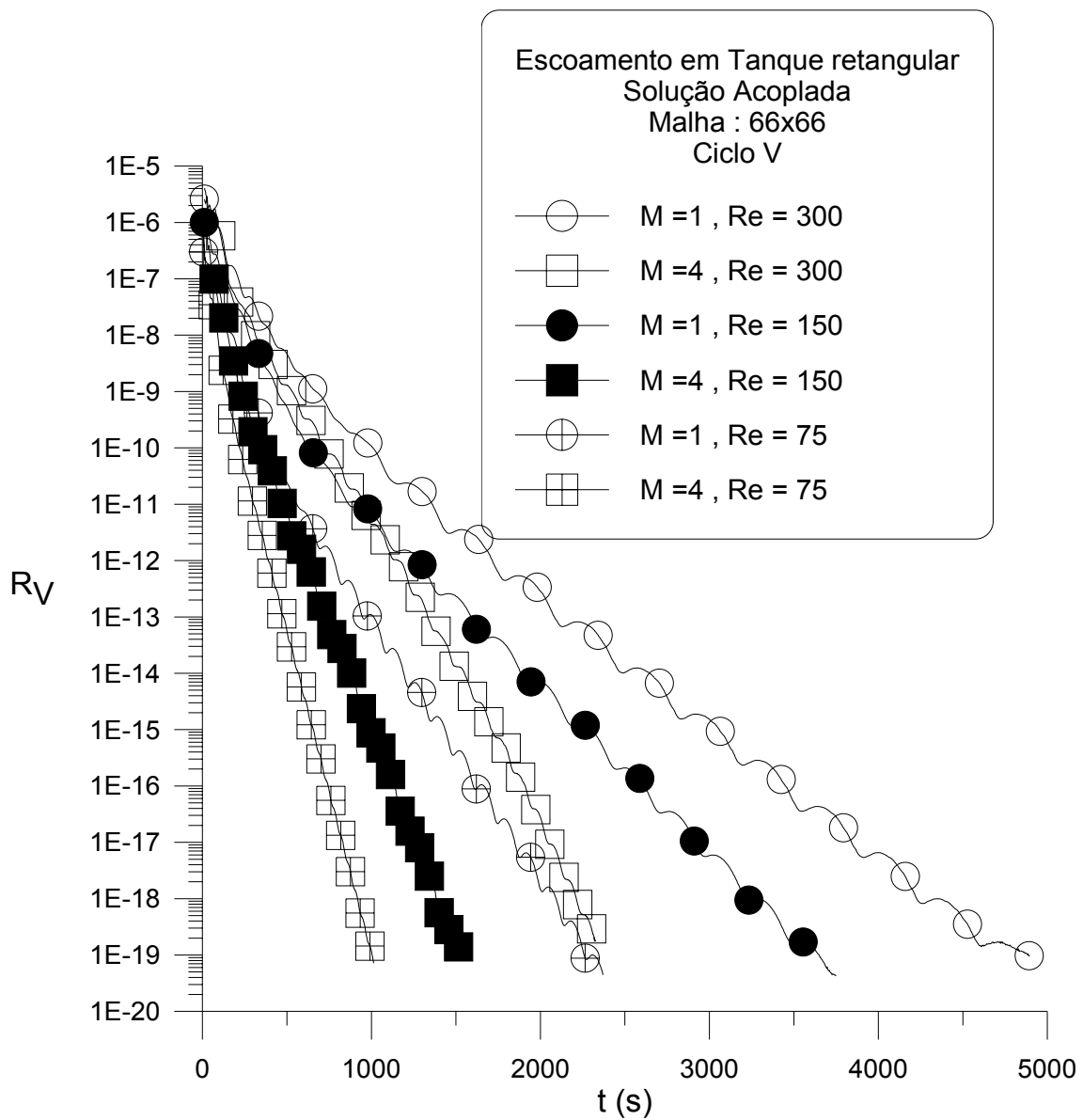


Figura V-22 - Escoamento em tanque retangular: resíduo da velocidade V , $Re = 75, 150, 300$ Ciclo V.

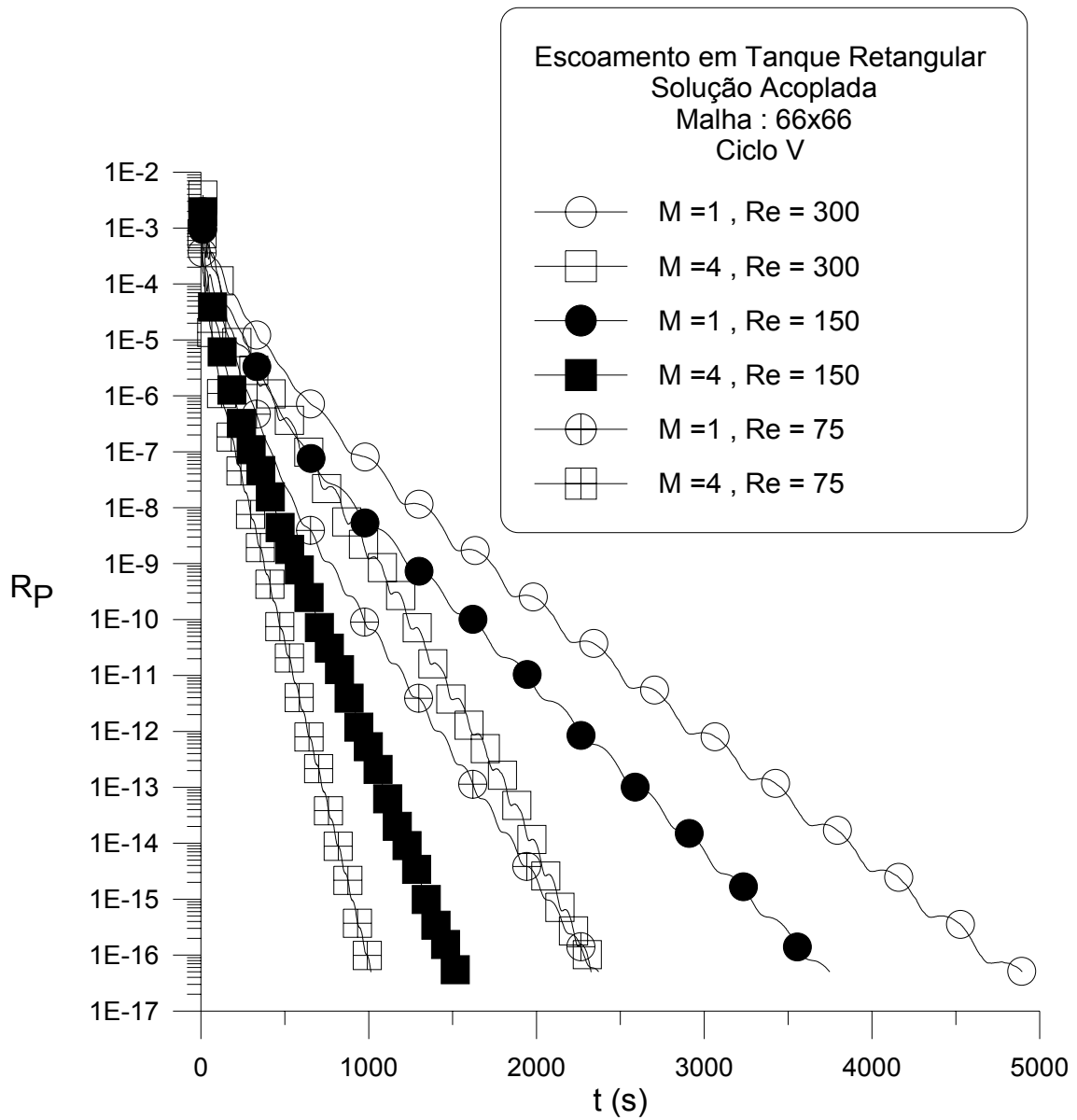


Figura V-23 - Escoamento em tanque retangular: resíduo da pressão P , $Re= 75, 150,$
300 Ciclo V.

V-3.c. escoamento de jato confinado

Por fim, foi considerado o escoamento de um jato confinado, cujo esquema é mostrado na Figura V-24. Os valores adotados foram $L_y = 0.5\text{m}$, $L_x = 2.0\text{m}$, $U_0 = 0.01\text{m/s}$, $\rho = 1.0\text{ Kg/m}^3$ e $\mu = 10^{-4}\text{ Kg/m.s}$.

Foi empregada uma malha não-uniforme contendo 160×64 VCs e as razões de espaçamento usadas foram $RE_x = 0.25$ e $RE_y = 0.4$, esta última com base no VC próximo ao canto superior esquerdo. A Figura V-25 ilustra o trecho da malha próximo da região de entrada do jato.

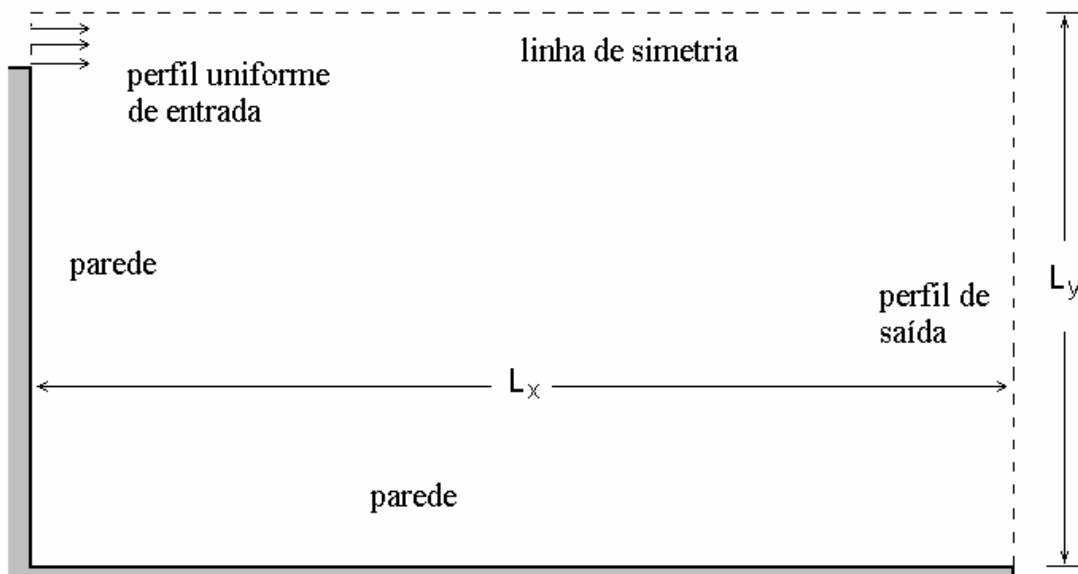


Figura V-24 - escoamento de jato confinado: visualização da região próxima à entrada.

Nesta geometria as soluções multigrid empregam no máximo 3 níveis de malha. Não foi usado um quarto nível porque neste caso, na malha mais grossa o VC do canto superior esquerdo (entrada do jato) seria solicitado à oeste por duas condições de contorno diferentes (entrada e parede).

Os fatores de sub-relaxação empregados foram $\xi_U = 0.6$, $\xi_V = 0.6$, $\xi_p = 0.1$ e a estratégia para as soluções multigrid em ciclo V fez uso de $\nu^{pre} = \nu^{post} = \nu^{cg} = 1$.

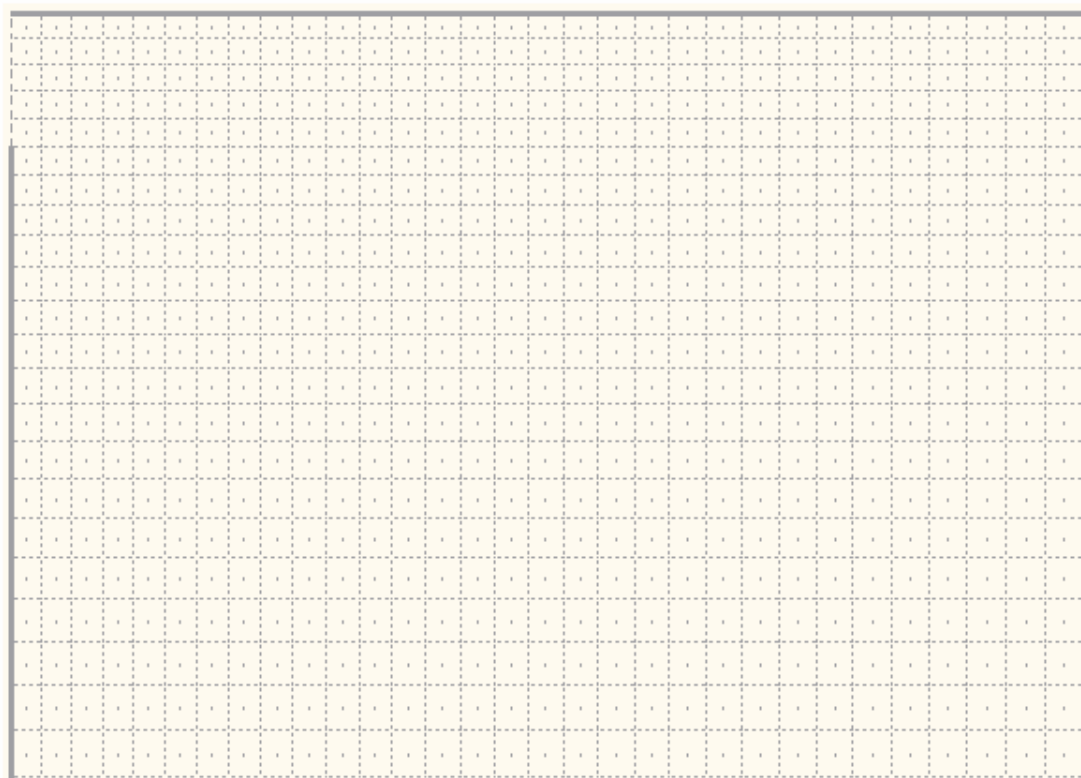


Figura V-25 - Escoamento de jato confinado: trecho da malha computacional não-uniforme.

Nas Figuras V-26 a V-28 são exibidos os comportamentos dos resíduos na solução em malha única (1M) e em 3 malhas (3M) para o ciclo V com $Re=50$ e 300. A solução do problema térmico-hidrodinâmico é acoplada, ou seja o campo térmico e o campo hidrodinâmico são solucionados simultaneamente. Aqui também com baixos valores de Re obtém-se soluções mais rápidas. Para os valores de Re , 50 e 300, verifica-se maior gasto de tempo de CPU. Para $Re =300$, confirmando o padrão dos resultados até aqui apresentados, a vantagem da solução multigrid, torna-se evidente mais uma vez.

A Figura V-29 checa de maneira qualitativa o padrão dos resultados obtidos pela solução multigrid 3M.

Vale destacar, que, para as três geometrias estudadas, o uso de número de malhas maior que quatro, não significa necessariamente maior ganho, pois a partir deste valor o tempo gasto nas operações de transferência entre malhas, pode acarretar num maior tempo de CPU, comprometendo, desta forma a eficiência global do ciclo multigrid.

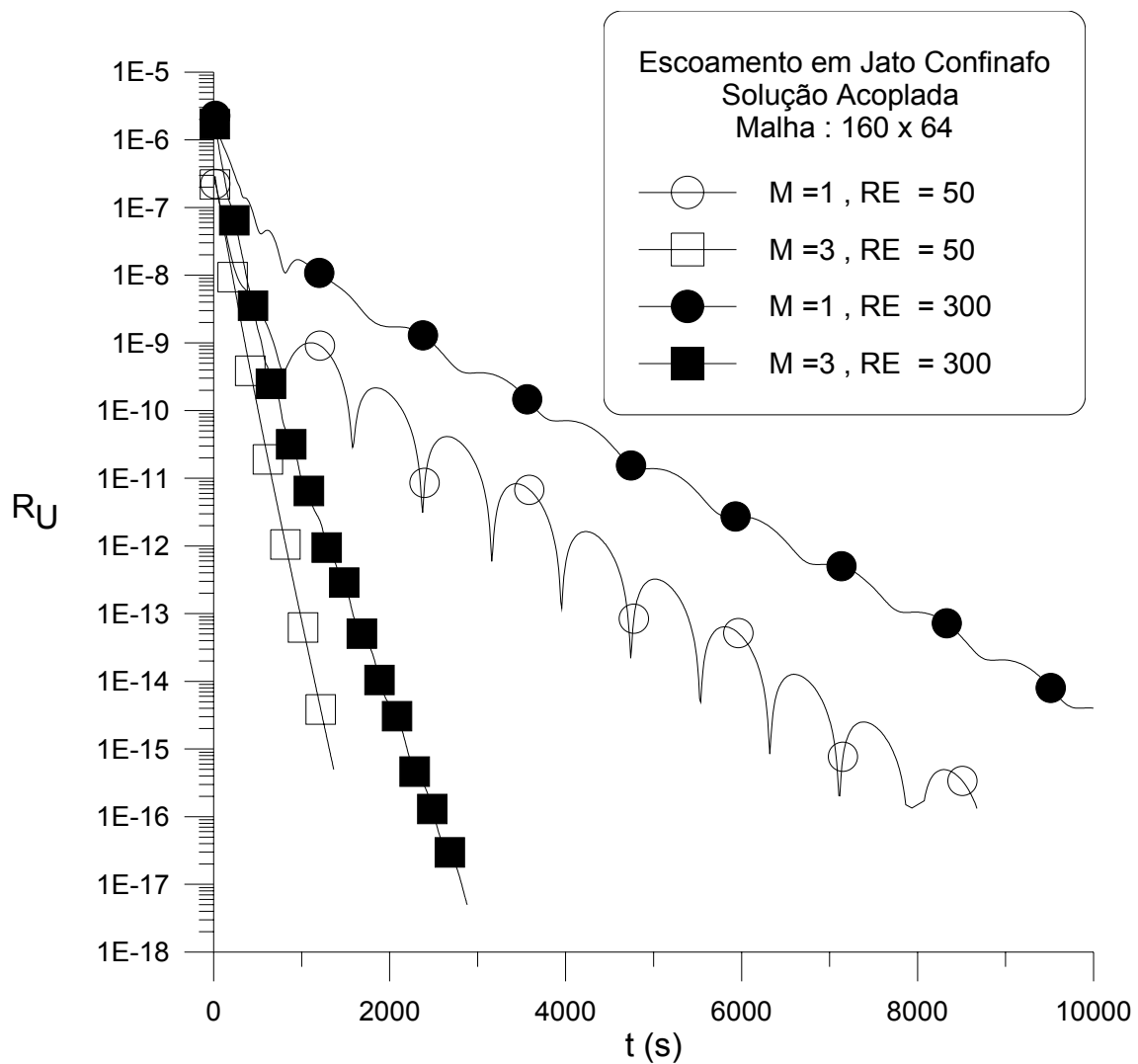


Figura V-26 - Escoamento de jato confinado: resíduo da velocidade U , $Re=50$ e 300

Ciclo V

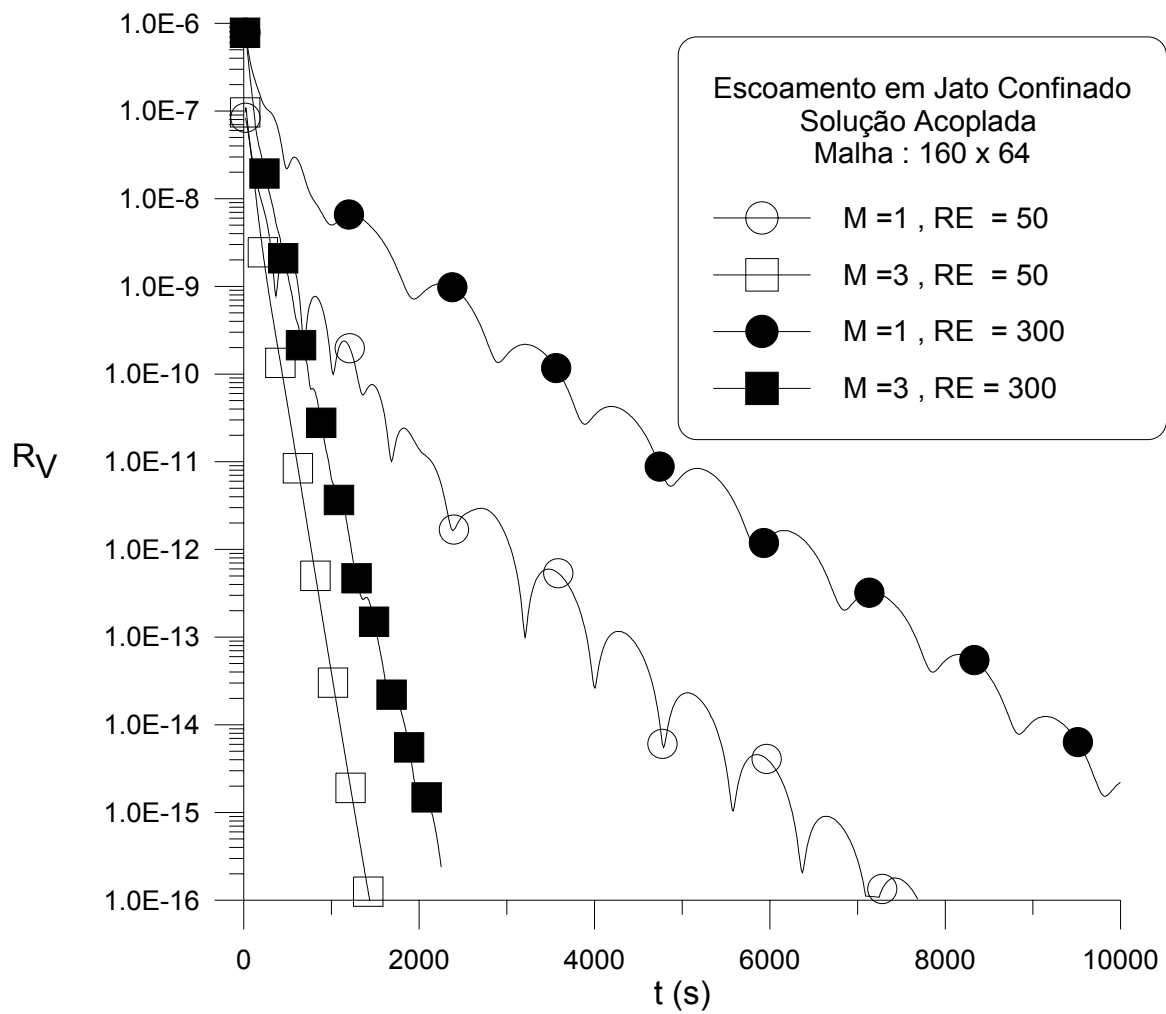


Figura V-27-Escoamento de Jato confinado: resíduo da velocidade V , $Re=50$ e 300

Ciclo V .

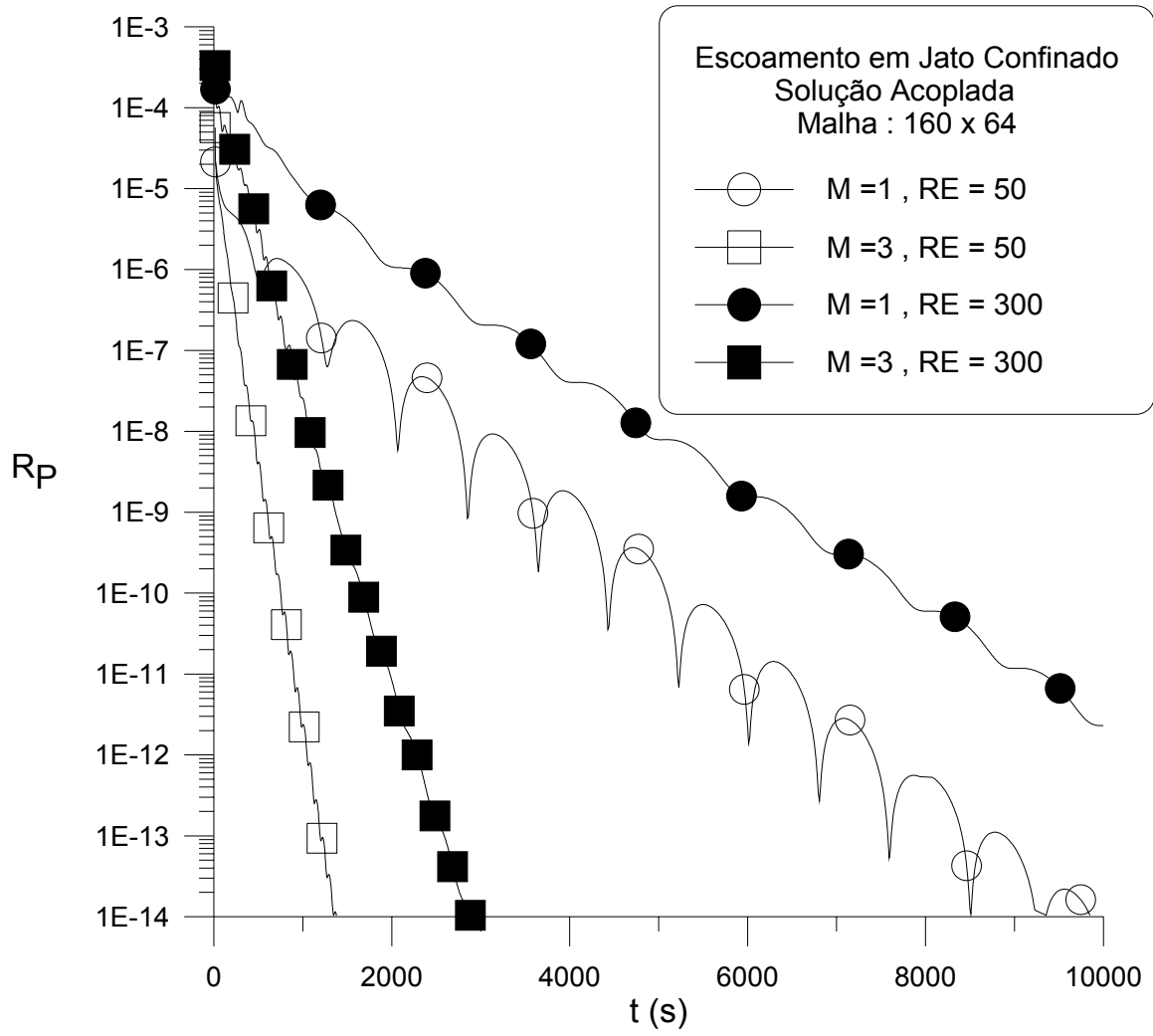


Figura V-28-Escoamento de jato confinado:resíduo da pressão P , $Re= 50$ e 300 Ciclo V .

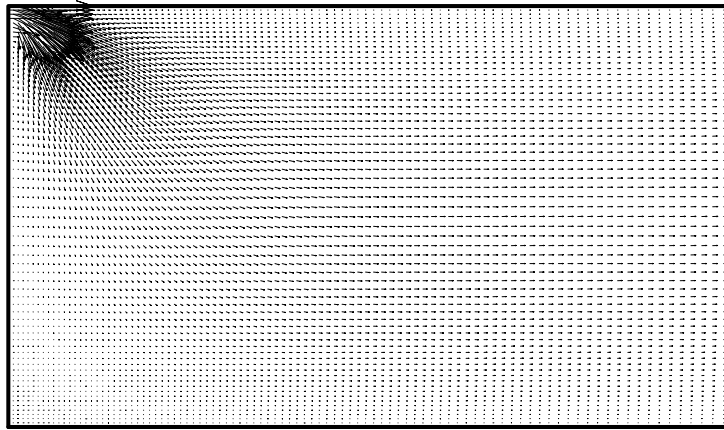


Figura V-29 - Escoamento de jato confinado: visualização do escoamento em jato confinado.

V-4.SOLUÇÃO DE PROBLEMAS TÉRMICOS

V-4.a. Escoamento com expansão abrupta

O primeiro caso térmico analisado foi o escoamento entre placas com expansão abrupta, conforme a Figura V-11. Para este problema, também foram adotados $L_y = 0.05\text{m}$, $L_x = 0.5\text{m}$, $U_0 = 0.2\text{ m/s}$ e 0.8m/s , $\rho = 1.0\text{ Kg/m}^3$ e $\mu = 10^{-4}\text{ Kg/m.s}$ de modo a ter $Re = 100$ e 400 .

Foi usada uma malha não-uniforme com 144×48 VCs e $RE_x = RE_y = 0.333$, com RE_y calculado com base no VC próximo à parede e o VC junto da linha média (há maior concentração junto às paredes e menor junto a linha média). Os coeficientes de sub-relaxação adotados foram $\xi_U = 0.8$, $\xi_V = 0.6$, $\xi_P = 0.03$, $\xi_T = 0.30$. A estratégia para as soluções multigrid para ciclo V e o ciclo W adotou $\nu^{pre} = \nu^{post} = 1$ e $\nu^{post} = 2$. Com a finalidade de verificar o efeito do número Re , a Figura V-30 mostra a distribuição adimensional da temperatura para o escoamento com expansão abrupta da Figura V-11.

Todas as paredes são conservadas na mesma temperatura, sendo esta mais alta que a temperatura de entrada do fluido. No caso simulado as paredes são mantidas a 100°C e a temperatura de entrada do fluido é 50°C . O efeito do incremento de Reynolds pode ser facilmente visualizado na Figura, através do aumento da penetração do fluido mais frio.

As Figuras V-31 e V-32 mostram os resíduos da temperatura para a solução multigrid em ciclo V e W respectivamente. Mais uma vez fica evidenciado que o aumento de Re requer maior tempo de CPU e a solução multigrid apresenta melhor resultado.

A Figura V-33 apresenta os resíduos da equação da energia para duas situações distintas, uma é a solução simultânea da velocidade e da temperatura (chamada aqui de solução acoplada) e

a outra e a solução desacoplada que consiste da resolução da equação da energia isoladamente a partir do campo hidrodinâmico dado. Como já era esperado, o número de iterações da solução desacoplada é bem menor que o da solução acoplada. Conseqüentemente o uso de malhas múltiplas é mais vantajoso quando se utiliza a solução acoplada pois, nestes casos os tempos de computação são maiores.

Com a finalidade de se verificar também a influência do número de malhas no esforço computacional, foi simulado para a mesma geometria da Figura V-11, onde $L_y = 0.05\text{m}$, $L_x = 0.5\text{m}$ e com $U_0 = 0.2\text{ m/s}$ e 0.8m/s , $\rho = 1.0\text{ Kg/m}^3$ e $\mu = 10^{-4}\text{ Kg/m.s}$ de modo a ter $Re = 100$ e 400 . Utilizou-se uma malha não-uniforme mais refinada com 218×74 VCs e $RE_x = RE_y = 0.333$. Este estudo foi feito em um computador IBM-PC com processador Intel Pentium III de 500 MHz .

A Figura V-34 indica que para valores menores de Re , não importando a malha utilizada, soluções mais rápidas são obtidas. O uso de um menor número de malhas com o mesmo número de Reynolds é vantajoso. Estas características fazem o método multigrid uma técnica atrativa, justificando o seu crescente uso. Por outro lado, o aumento do número de VCs da malha mais fina desacelera a convergência como já esperado, independente do Re utilizado.

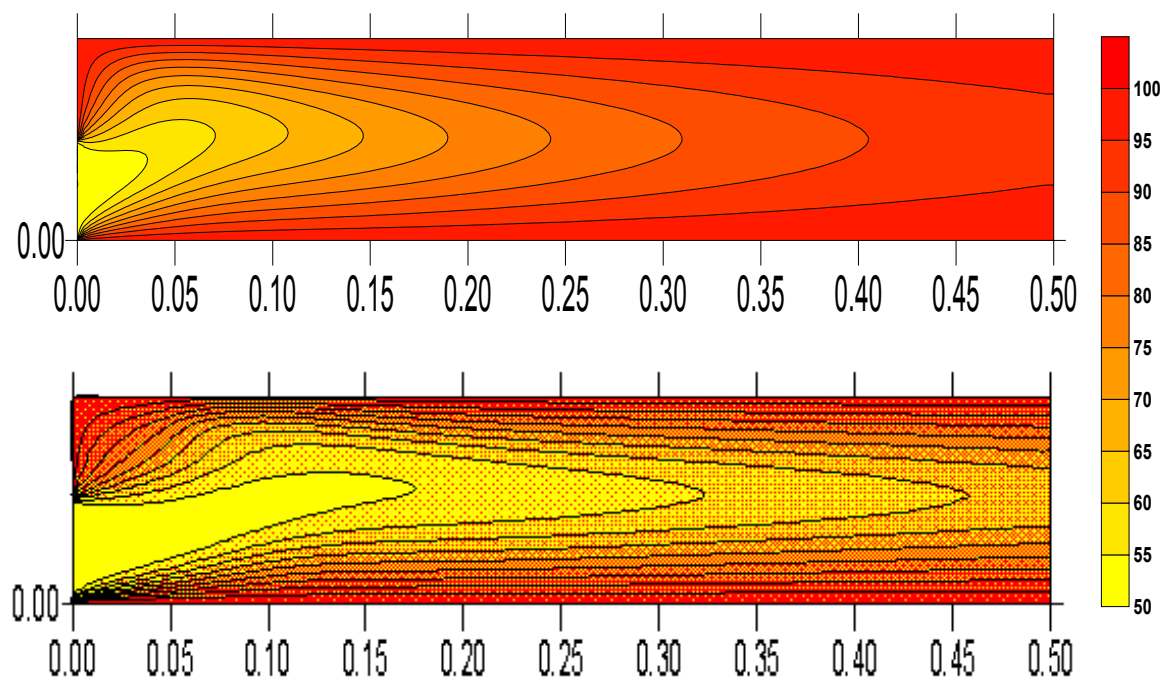


Figura V-30 - Escoamento com expansão abrupta: visualização do campo térmico para $Re= 100$ e 400 (de cima para baixo).

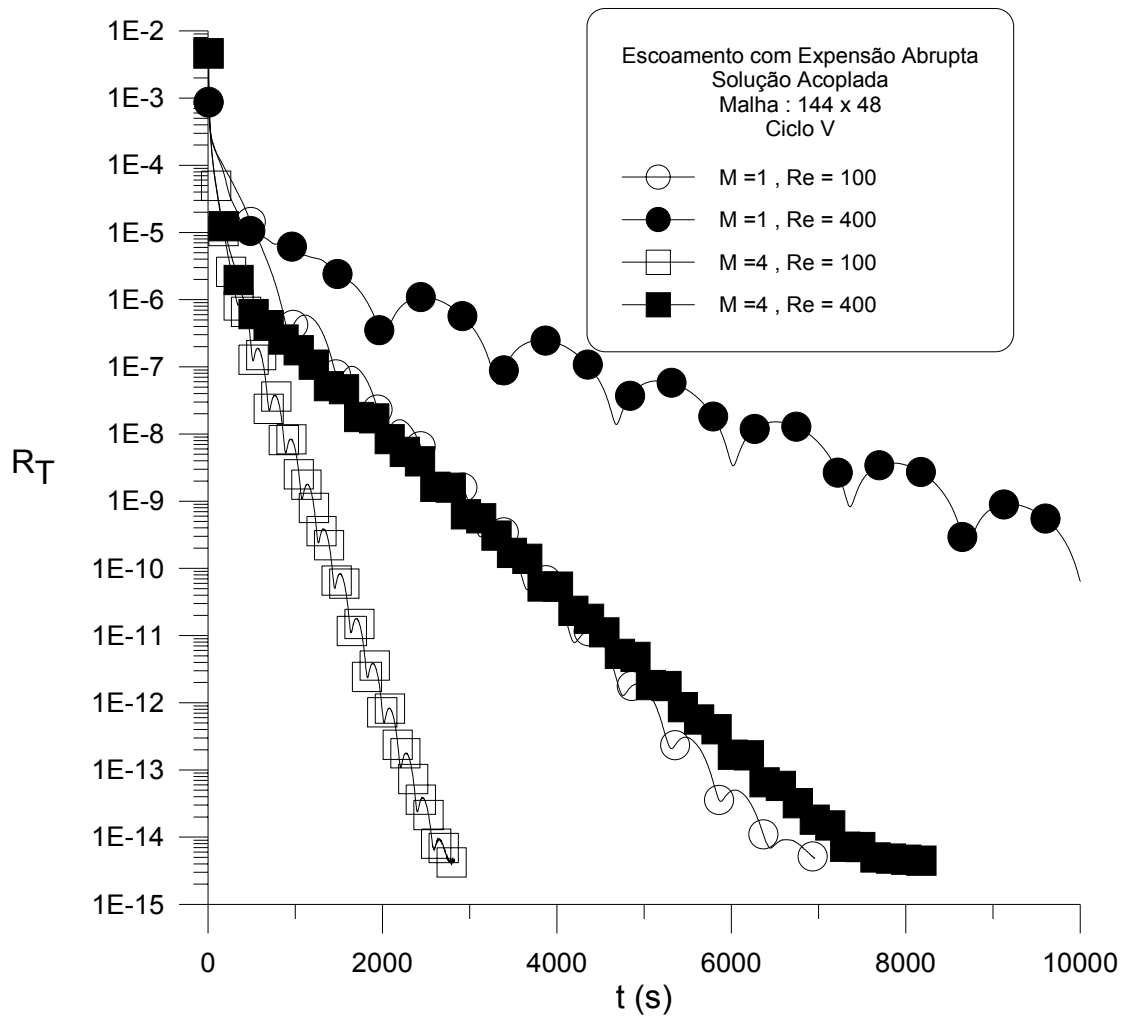


Figura V-31 - Escoamento com expansão abrupta: resíduos da temperatura T , $Re= 100$ e 400 Ciclo V .

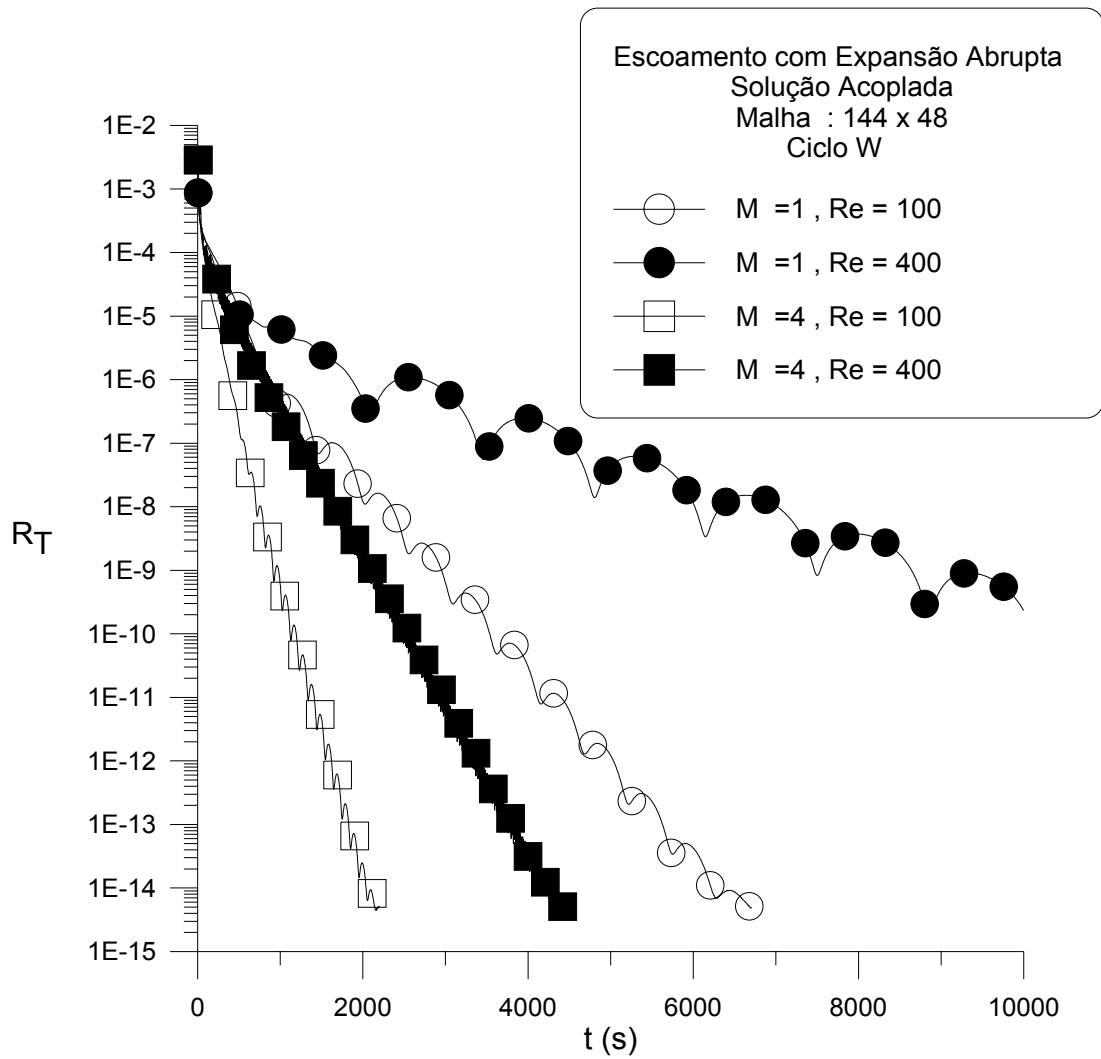


Figura V-32 - Escoamento com expansão abrupta: resíduos da temperatura T , $Re= 100$ e

400 Ciclo W .

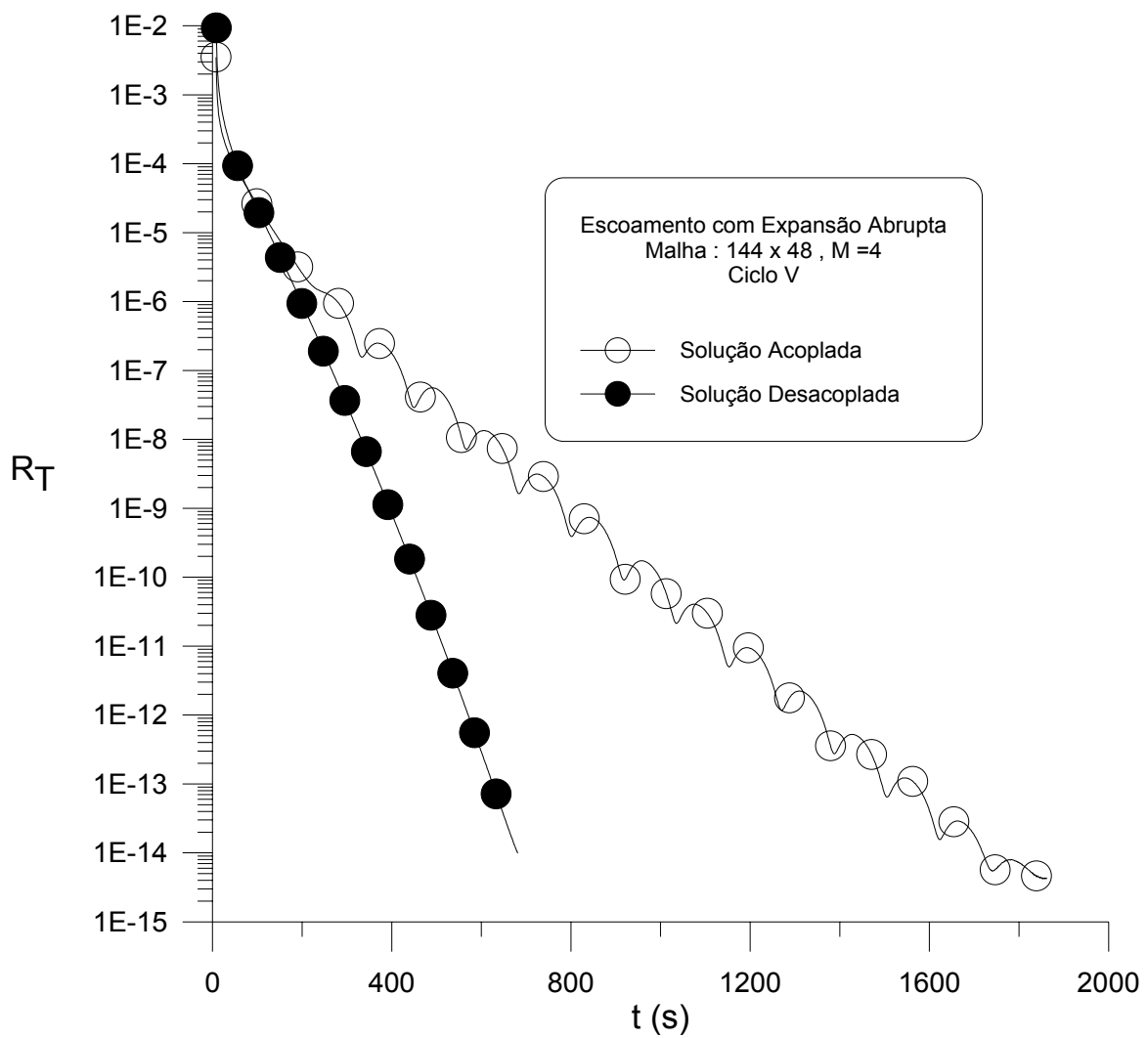


Figura V-33 - Escoamento com expansão abrupta: comparação entre a solução acoplada e a desacoplada.

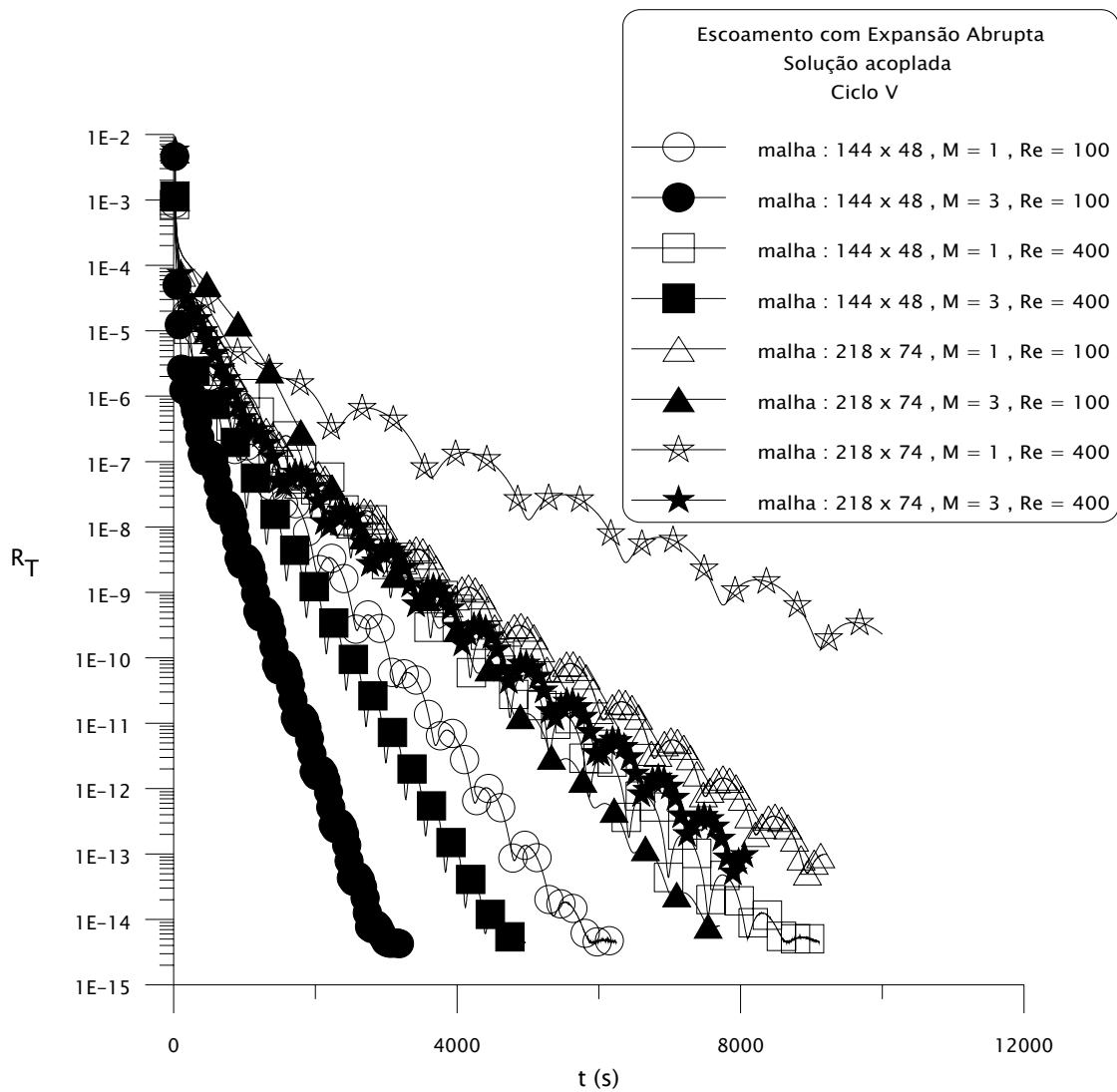


Figura V-34 - Escoamento com expansão abrupta: comparação entre a solução em malha 144x48 e a solução em malha 218x74 para os resíduos da temperatura.

V-4.b. Escoamento em tanque retangular

É agora apresentado o escoamento em um tanque retangular, conforme a Figura V-19, onde $L_y = 0.6\text{m}$, $L_x = 0.6\text{m}$, $U_0 = 0.1, 0.05, 0.02 \text{ m/s}$, $\rho = 1.0 \text{ Kg/m}^3$ e $\mu = 10^{-4} \text{ Kg/m.s}$. estes parâmetros acarretam em $Re = 300, 150$ e 75 .

Neste caso é empregada uma malha não-uniforme com 66x66 VCs e as razões de espaçamento utilizadas foram $RE_x = RE_y = 1.0$. Os fatores de sub-relaxação empregados foram $\xi_U = 0.6$, $\xi_V = 0.6$, $\xi_P = 0.01$, $\xi_T = 0.30$. Na estratégia para as soluções multigrid em ciclo V foi adotadas o valor $\nu^{pre} = \nu^{post} = \nu^{cg} = 1$.

A Figura V-35 mostra a distribuição adimensional da temperatura para o tanque da Figura V-19, onde todas as paredes são mantidas a 100°C e a temperatura de entrada do fluido é de 50°C . O efeito do incremento de Reynolds pode ser facilmente visualizado na Figura, através do aumento da penetração do fluido mais frio. É interessante notar que os maiores gradientes da temperatura estão na parede do lado direito, indicando elevação local troca de calor com material sólido.

A Figura V-36 ilustra os resíduos da temperatura para a solução multigrid em 1M e 4M, ambas utilizando o esquema de ciclo V. A Figura comprova uma vez mais que, baixos valores de Re aumentam a taxa de convergência. Nota-se também que, a solução multigrid 4M apresenta os melhores resultados quando comparados às soluções com malha única.

Finalmente, a Figura V-37 faz a comparação entre a solução acoplada e a solução desacoplada e, como esperado, a segunda metodologia necessita de um menor número de iterações. Conseqüentemente, o uso do método multigrid torna-se mais vantajoso quanto se usa a solução acoplada devido ao maior tempo computacional necessário.

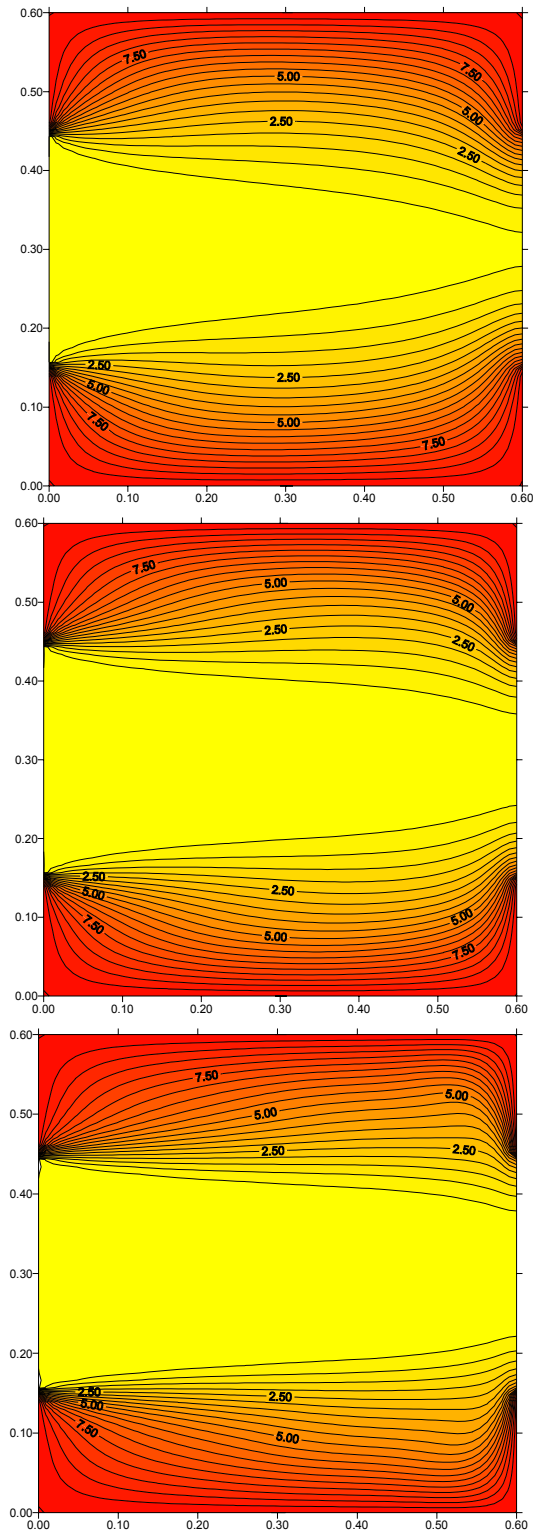


Figura V-35 - Escoamento em tanque retangular: visualização do campo térmico para $Re=75, 150$ e 300 (de cima para baixo)

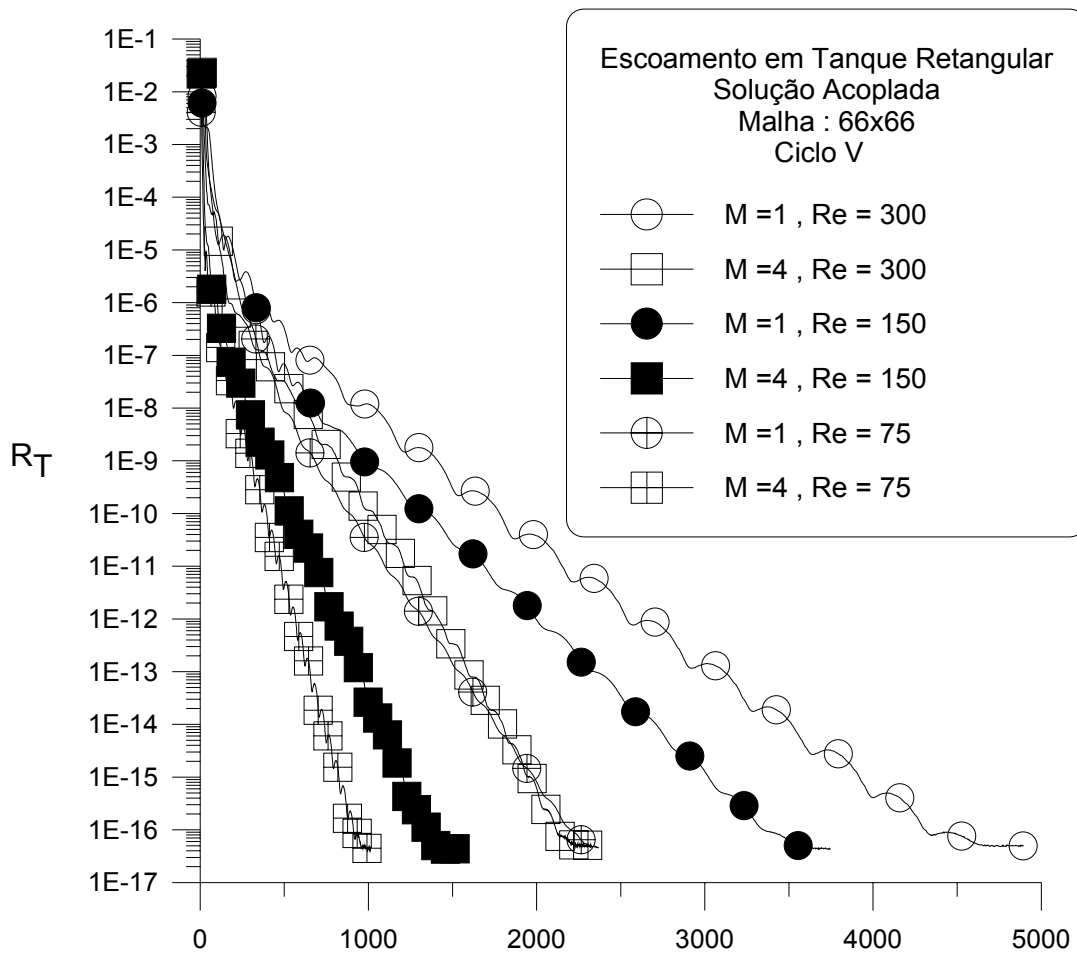


Figura V-36 - Escoamento em tanque retangular: resíduos da temperatura T , $Re= 75$,
150 e 300.

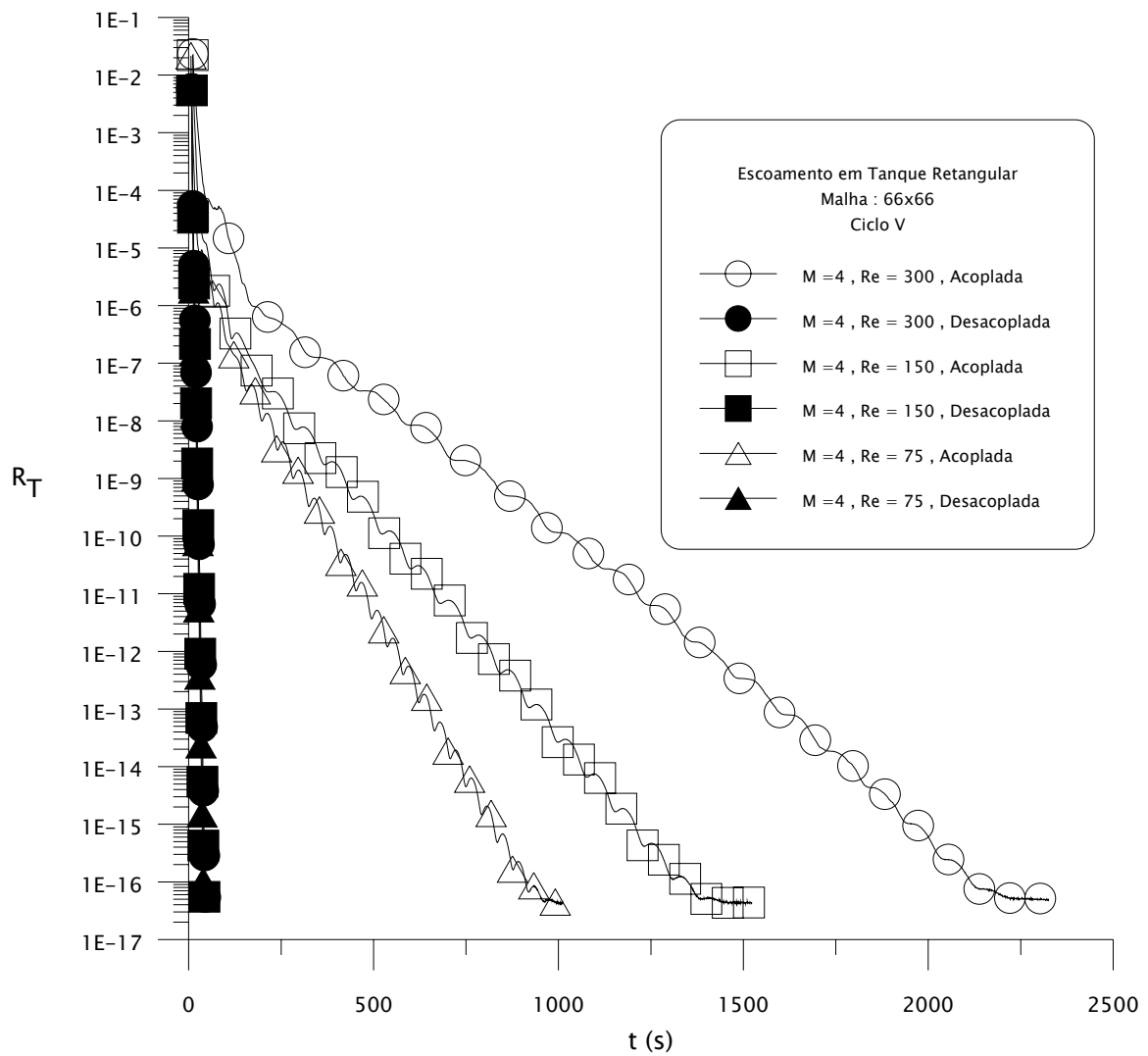


Figura V-37 - Escoamento em tanque retangular: comparação entre a solução acoplada e a solução desacoplada.

V-4.c. Escoamento de jato confinado

Neste item é apresentado um estudo sobre o escoamento de jato confinado, cujo esquema foi mostrado na Figura V-24. Para esta geometria adotou-se $L_y = 0.5\text{m}$, $L_x = 2.0\text{m}$, $U_0 = 0.01\text{ m/s}$ e 0.06m/s , $\rho = 1.0\text{ Kg/m}^3$ e $\mu = 10^{-4}\text{ Kg/m.s}$, de modo a se ter $Re = 50$ e 300 respectivamente.

Os fatores de sub-relaxação empregados foram $\nu^{pre} = \nu^{post} = \nu^{cg} = 1$.

A Figura V-38 mostra a distribuição adimensional da temperatura para o escoamento de jato confinado, todas as paredes são mantidas a 100°C e a temperatura de entrada do fluido é 50°C . O efeito do incremento de Reynolds pode ser facilmente visualizado na Figura V-38, através do aumento da penetração do fluido mais frio.

Na Figura V-39 são mostrados os resíduos da equação da energia para a solução multigrid em ciclo V. A Figura mostra que com incremento de Re , independente do número de malhas, é necessário um maior tempo computacional. Nota-se, entretanto que esta diferença não é tão marcante quanto nos outros casos analisados.

A Figura V-40 faz a comparação entre a solução acoplada e a solução desacoplada, ambos os casos em relação ao resíduo da temperatura. Como esperado, a segunda solução apresenta menor número de iterações para um mesmo resíduo mínimo. Conseqüentemente, o uso do método multigrid torna-se mais vantajoso quanto se usa a solução acoplada devido ao maior tempo computacional requerido na solução simultânea. Confrontando aos resultados da Figura V-40 com os resultados obtidos nas Figuras V-33 e V-37, mais uma vez fica evidenciado a influência da geometria nos resultados apresentados.

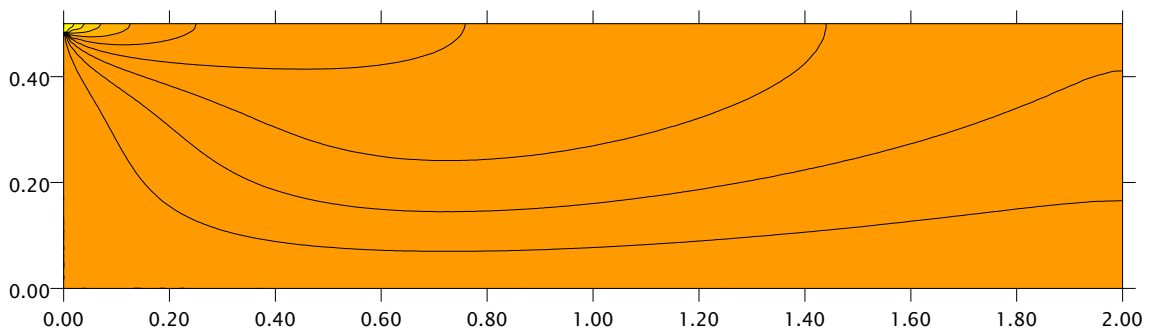
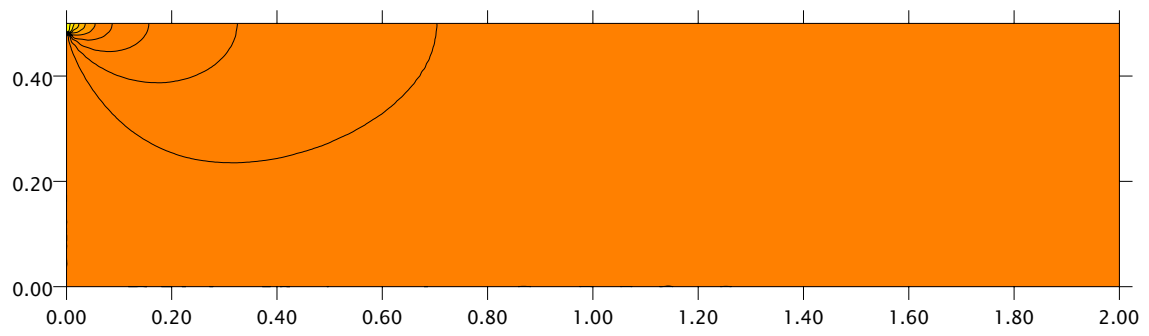


Figura V-38 - Escoamento de jato confinado: visualização do campo térmico $Re=50$,
300 (de cima para baixo).

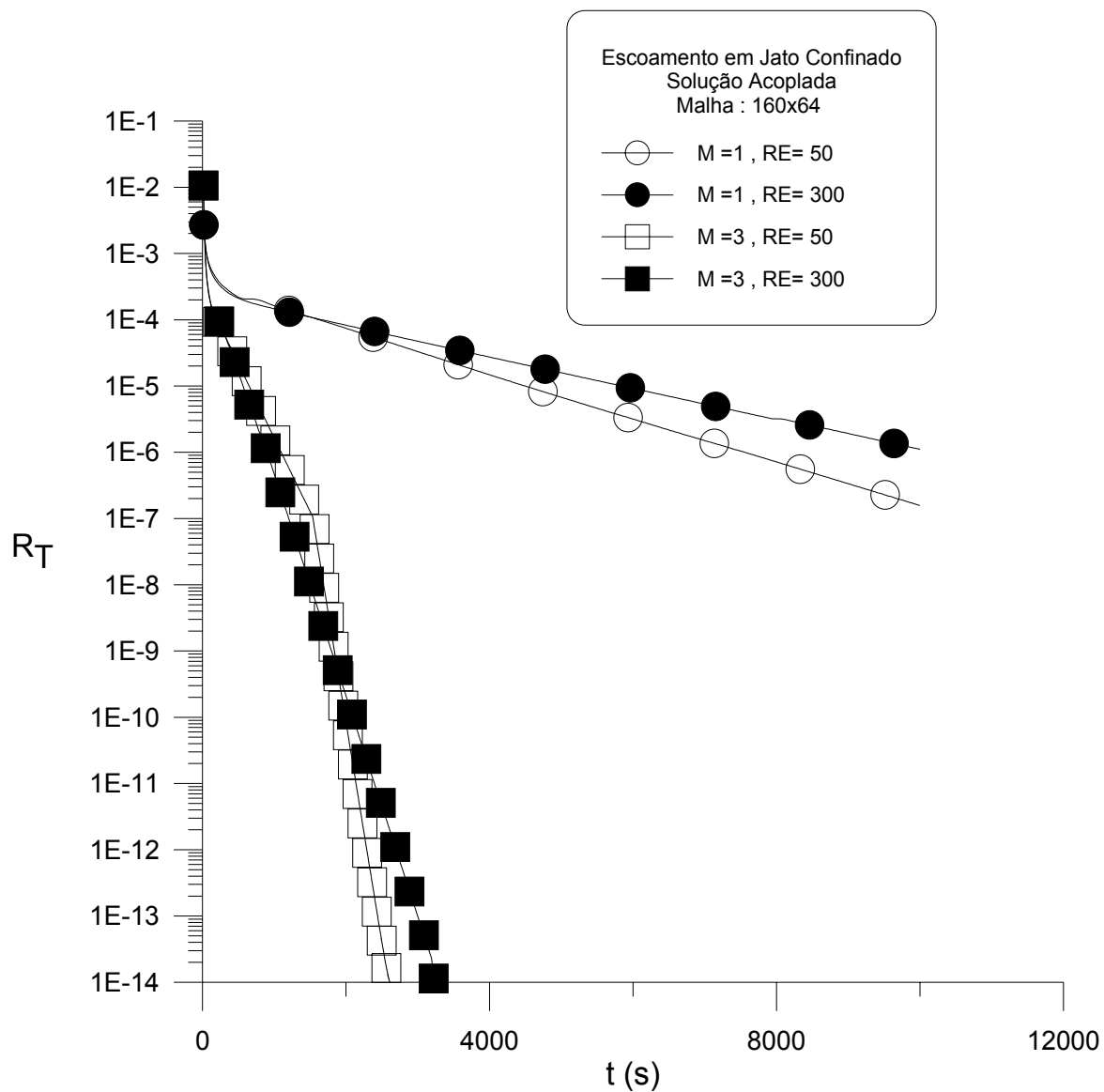


Figura V-39 - Escoamento de jato confinado: resíduo da temperatura T , $Re= 50$ e 300

Ciclo V .

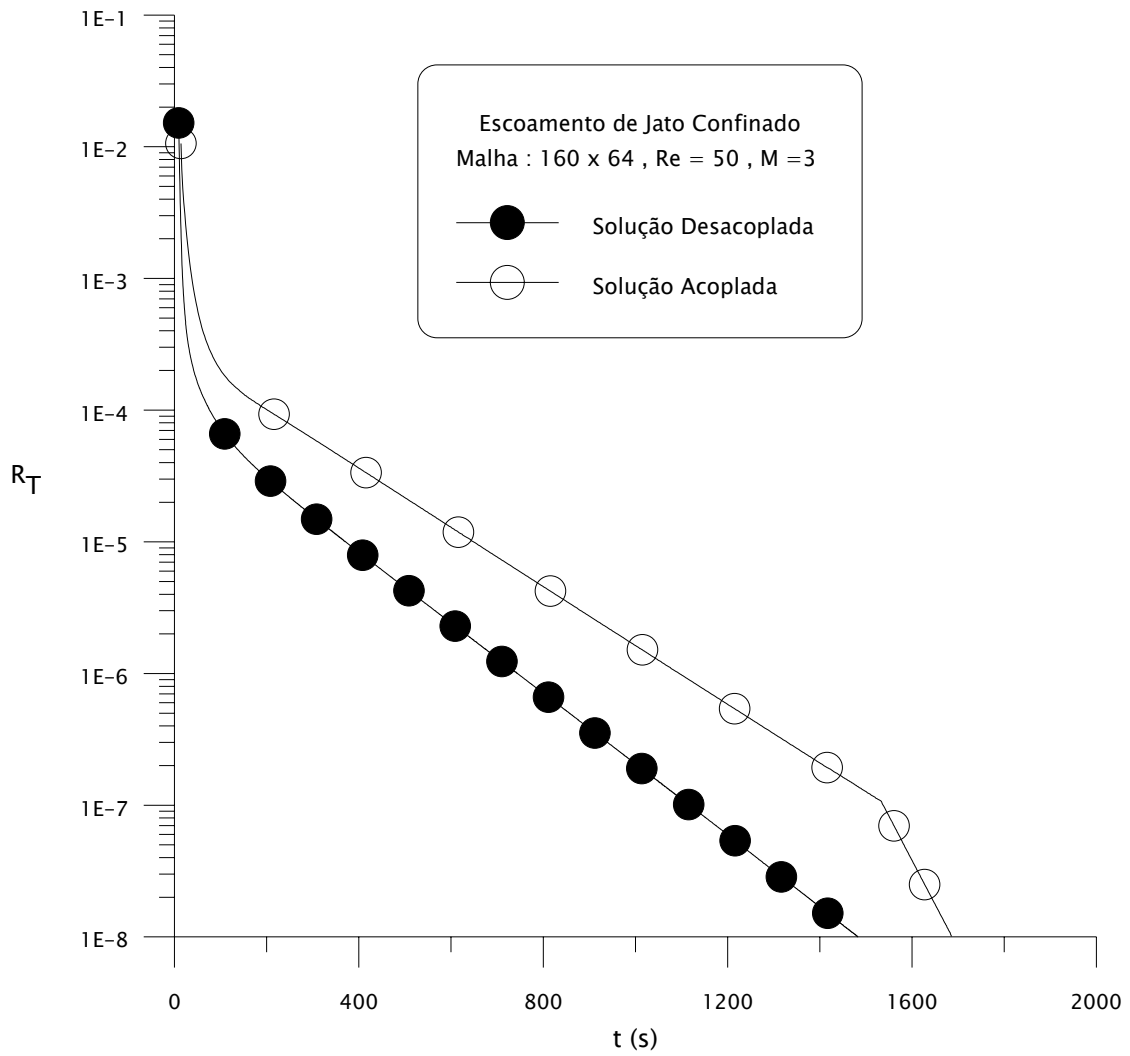


Figura V-40 - Escoamento de jato confinado: comparação entre a solução acoplada e a solução desacoplada.

V-5. OTIMIZAÇÃO DOS PARÂMETROS MULTIGRID

V-5.a. Escoamento com expansão abrupta

No trabalho de Rabi e de Lemos, 1998b, foi feito um estudo com a finalidade de se investigar valores ótimos para os parâmetros ν^{pre} , ν^{post} e ν^{cg} . Uma vez que as soluções intermediárias antes e depois da mudança de malha, não são resolvidas inteiramente, mas sim relaxadas ν^{pre} e ν^{post} vezes, surge a questão a respeito do valor ótimo, para estes parâmetros. As operações de prolongamento e restrição introduzem imprecisões aos valores transferidos. Então, a solução numérica intermediária deve ser relaxada um certo número de vezes, não só para remover as imprecisões introduzidas nas operações de transferência mas, também para reduzir o resíduo a cada iteração. Alguns destes testes foram divulgados por de Lemos e Mesquita, 1999 e são aqui também apresentados

Foi considerado novamente a geometria da Figura V-11 com as mesmas dimensões apresentadas nos estudos anteriores, ou seja $L_y = 0.05\text{m}$, $L_x = 0.5\text{m}$ e com $U_0 = 0.2\text{ m/s}$ e 0.8m/s , $\rho = 1.0\text{ Kg/m}^3$ e $\mu = 10^{-4}\text{ Kg/m.s}$, de modo a se ter $Re = 100$ e 400 .

Para um número fixo de iterações na malha mais grossa, (ν^{cg}), a saber 3, 6, 9 e 15 as Figuras V-41, V-42, V-43 e V-44 reproduzem o tempo necessário para convergência quando o número de pré-/pós-suavizações variam livremente, mantendo-se sempre $\nu^{pre} = \nu^{post}$.

Pode-se claramente detectar um valor ótimo para os parâmetros de relaxação em cada caso apresentado. Um número adicional de iterações, além dos valores ótimos determinados pode significar consumo extra do esforço computacional. Por outro lado, menores valores de ν^{pre} ou ν^{post} demandarão maiores esforços computacionais. É interessante salientar a vantagem em se usar o ciclo V na solução desacoplada. Estes resultados são condizentes com as

conclusões de Rabi e de Lemos, 1998b. Neste trabalho foi observada uma redução no esforço computacional para os casos de velocidade conhecida e uso do ciclo V .

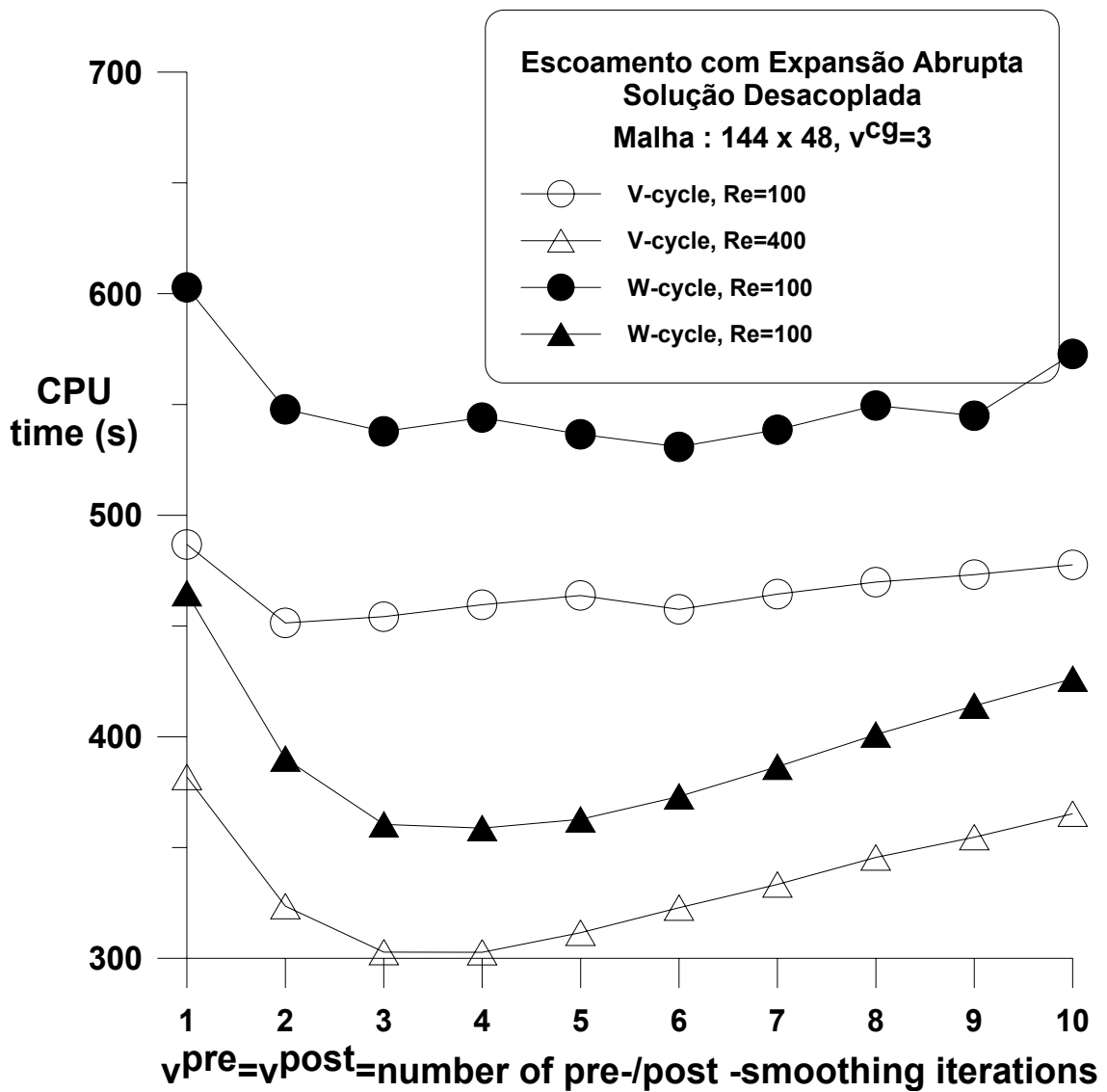


Figura V-41 - Escoamento com expansão abrupta: esforço computacional para diferentes números de iterações de pré-/pós-suavizações, $\nu^{cg} = 3$.

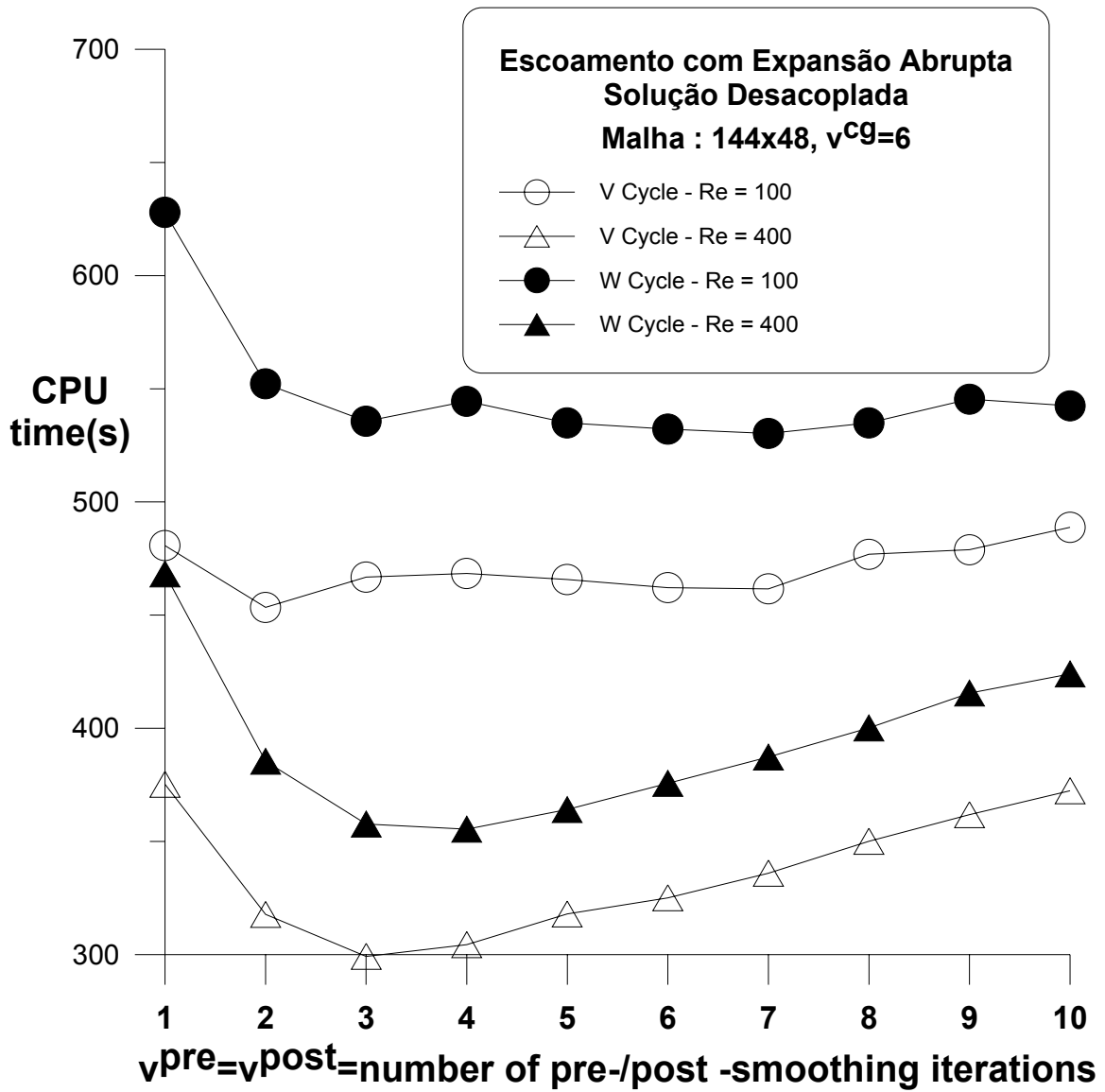


Figura V-42 - Escoamento com expansão abrupta: esforço computacional para diferentes números de iterações de pré-/pós-suavizações $\nu^{cg} = 6$.

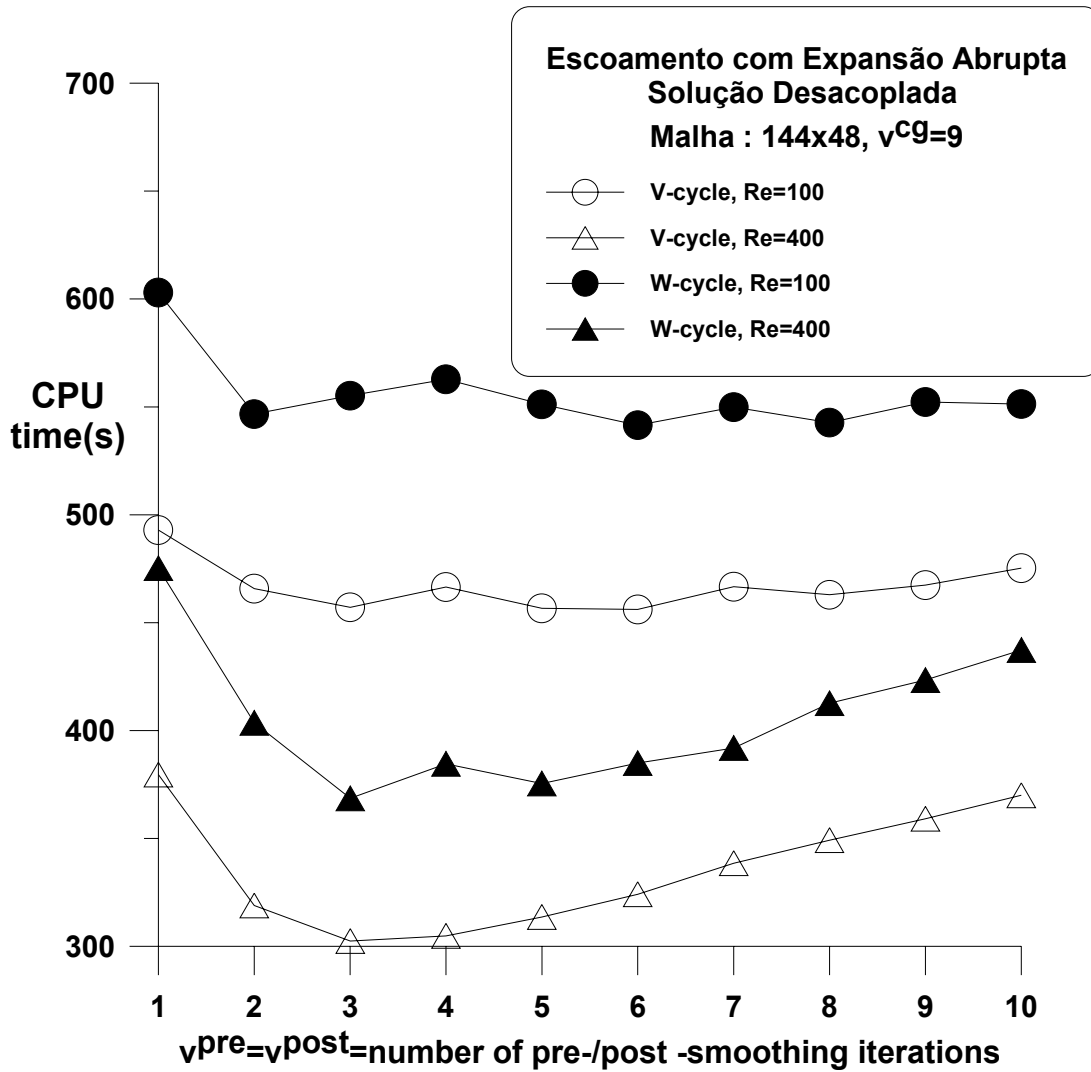


Figura V-43 - Escoamento com expansão abrupta: Esforço computacional para diferentes números de iterações de pré-/pós-suavizações $\nu^{cg} = 9$.

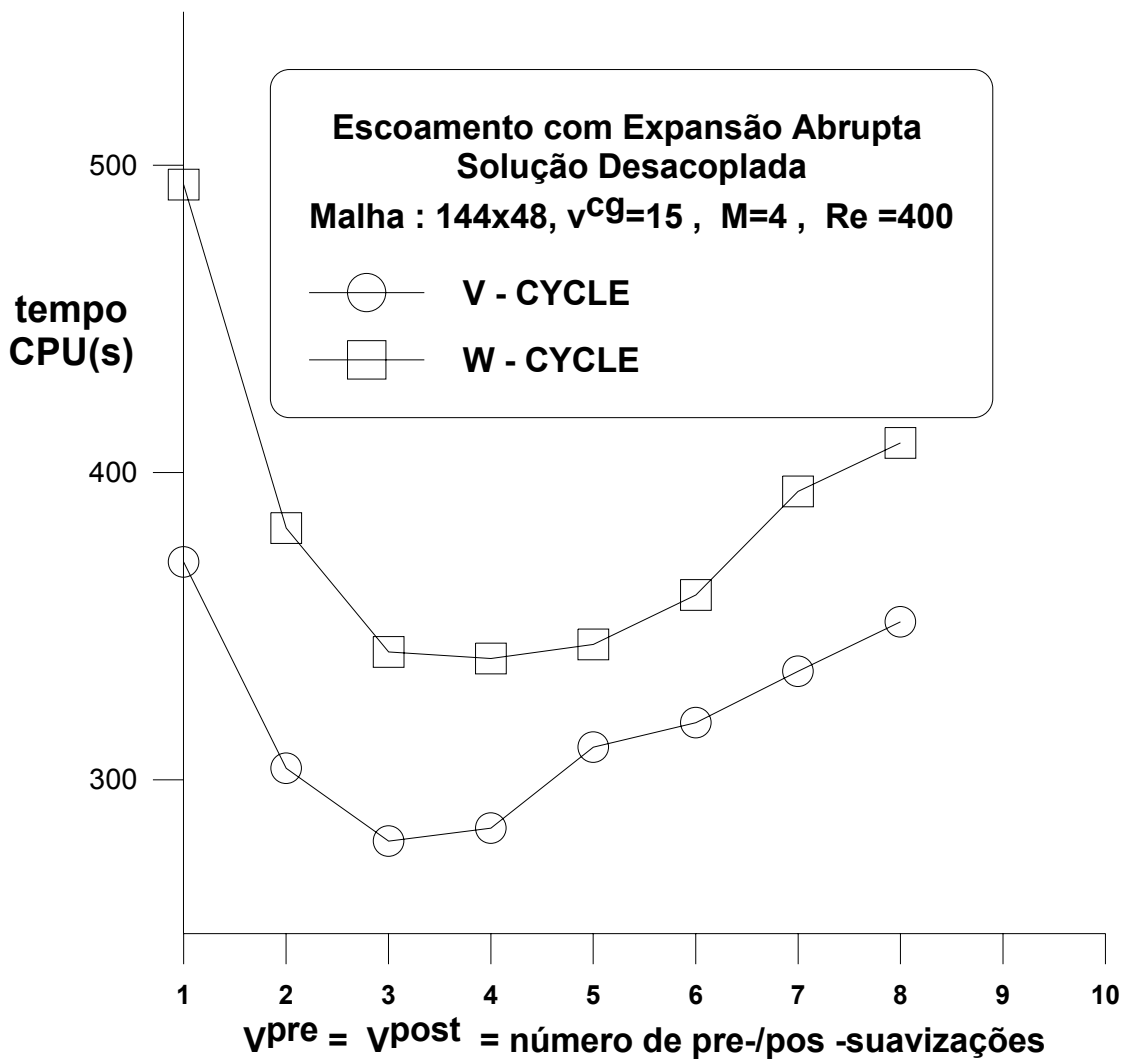


Figura V-44 - Escoamento com expansão abrupta: Esforço computacional para diferentes números de iterações de pré-/pós-suavizações $\nu^{cg} = 15$.

Na Figura V-45 o número de pré-/pós-suavizações foi fixado em $\nu^{pre} = \nu^{post} = 2$, enquanto que o número de iterações na malha mais grossa ν^{cg} varia livremente. Os resultados apresentam certo espalhamento e portanto nenhum valor ótimo pode ser observado.

As Figuras V-41 a V-45 sugerem um balanço delicado entre todos os parâmetros envolvidos com a finalidade de se obter um tempo mínimo de CPU. Um conjunto ótimo de parâmetros não pode ser facilmente determinado a priori e por isto, estratégias adaptativas foram propostas na literatura. Em certos algoritmos, a média dos resíduos após duas varreduras sucessivas é monitorada e usada como critério para mudança de malha.

No trabalho de Hortmann *et al*, 1990, é ressaltado que esta prática é preferida para sistemas de equações simples, mas para o caso de equações completas, como aqui apresentado, esta prática torna-se de difícil implementação. Sendo assim, muitos trabalhos na literatura especificam um número fixo de varreduras, como mostrado por Hutchinson *et al* 1988, Sathyamurthy e Patankar, 1994.

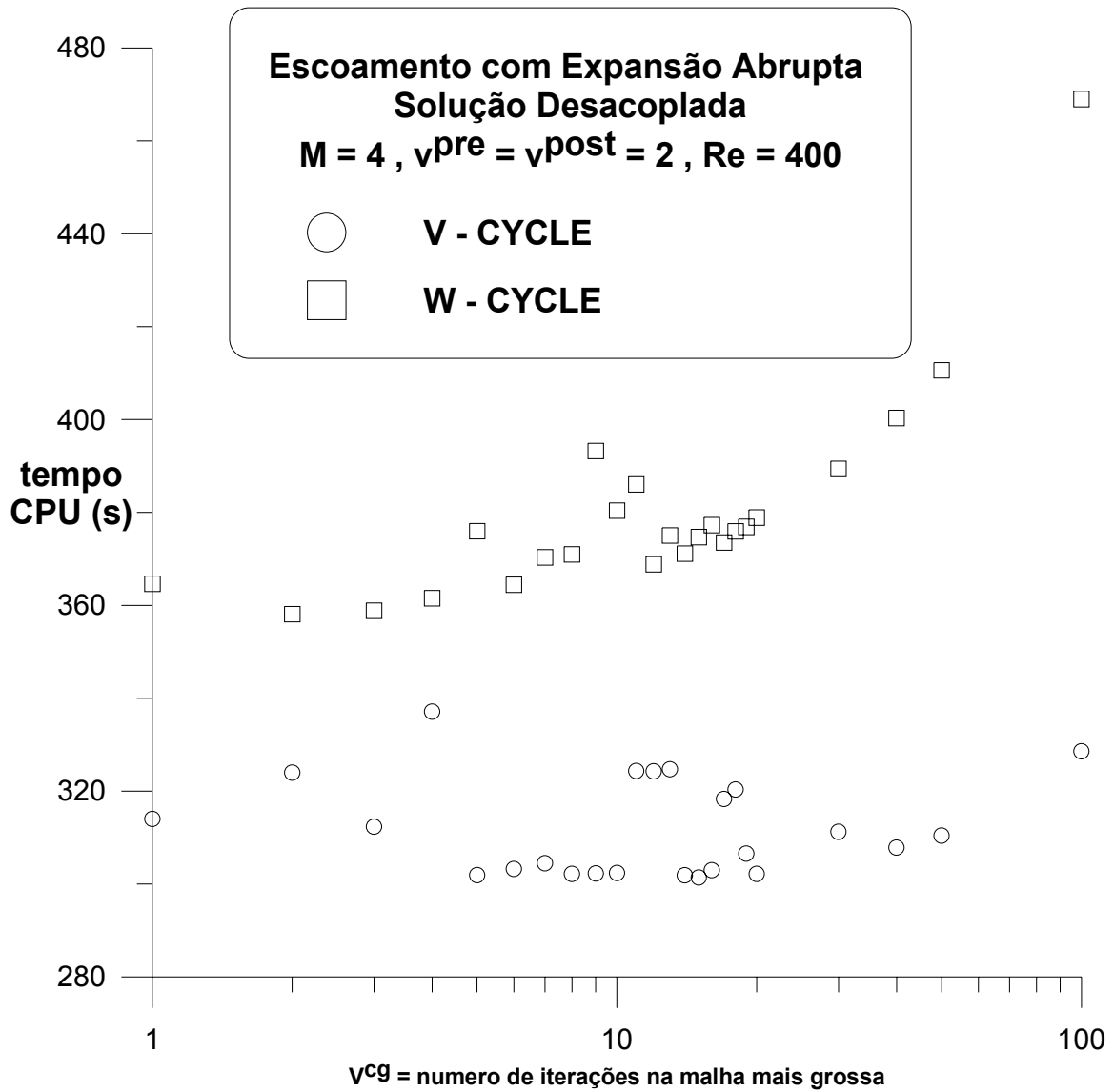


Figura V-45 - Escoamento com expansão abrupta: Influência do número de iteração na malha mais grossa ν^{cg} sobre o esforço computacional.

Com a finalidade de se verificar também o refinamento da malha no esforço computacional e conseqüentemente nos parâmetros do ciclo multigrid (ν^{pre} , ν^{post} e ν^{cg}), foi também empregada uma malha não-uniforme com 218 x 74 VCs. Este estudo foi feito em um computador IBM-PC com processador Intel Pentium III de 500 MHz. As Figuras V-46 e V-47 ilustram os resultados obtidos.

A Figura V-46 reproduz o tempo necessário para convergência quando o número de pré-/pós-suavizações varia livremente, mantendo-se o mesmo valor para $\nu^{cg}=1$. Embora nos resultados apresentados pela Figura V-46, a identificação de um ponto ótimo não seja clara nas Figuras V-41 a V-44, ainda é possível identificar um valor ótimo para os parâmetros de relaxação. É interessante ressaltar que para a mesma geometria, o uso de malhas distintas causa variação no padrão dos resultados e conclusões.

Na Figura V-47 o número de pré-/pós-suavizações foi fixado em $\nu^{pre}=\nu^{post}=3$ e o número de interações na malha mais grossa (ν^{cg}) varia livremente. Neste caso é possível detectar um valor ótimo para os parâmetros de relaxação. Este resultado confirma a influência do refinamento da malha no padrão dos resultados. Para isso basta confrontar os resultados da Figura V-45 com os da Figura V-47.

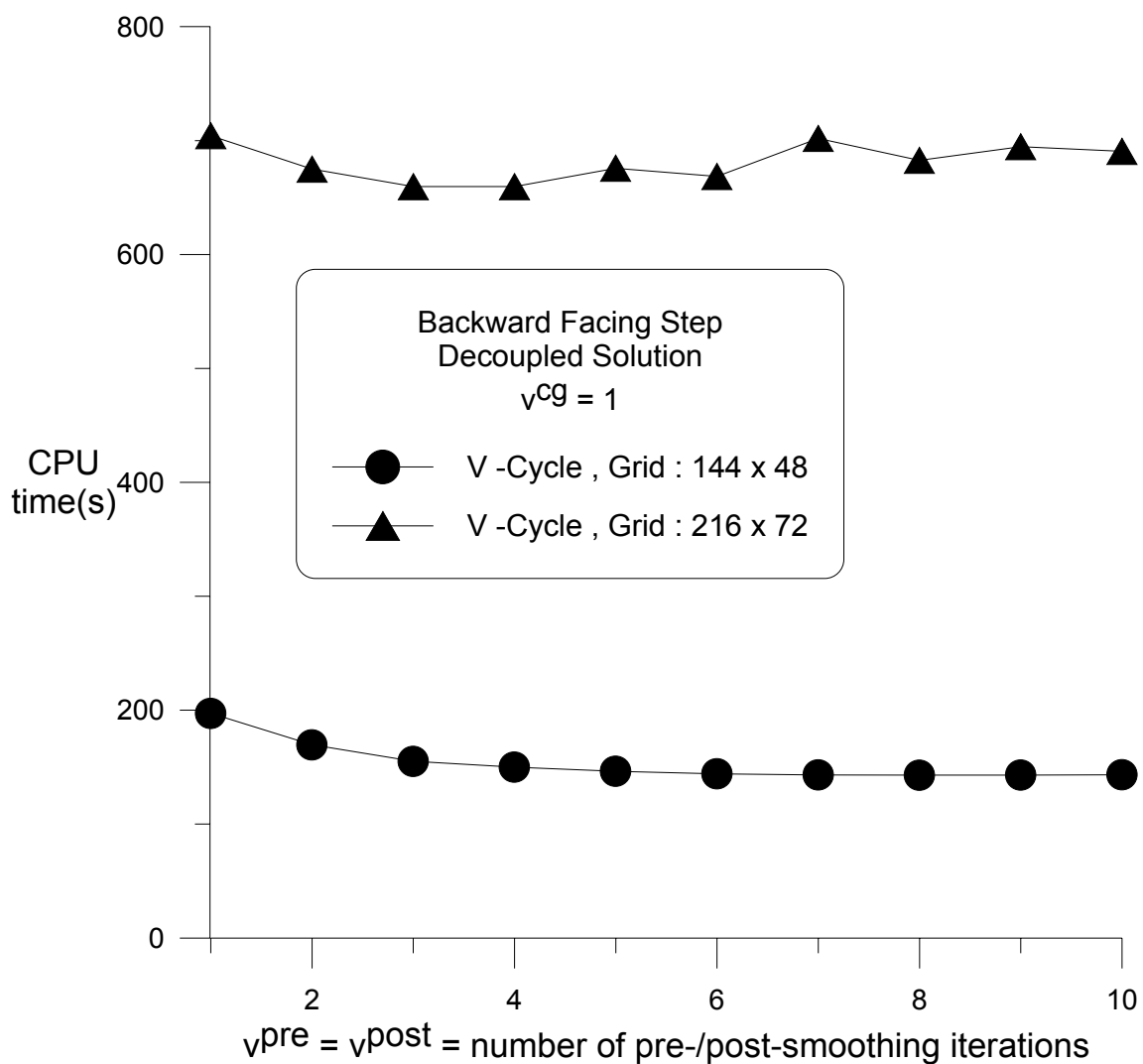


Figura V-46 - Escoamento com expansão abrupta: influência do refinamento da malha

$\nu^{cg} = 1$ Ciclo V, $Re = 100$

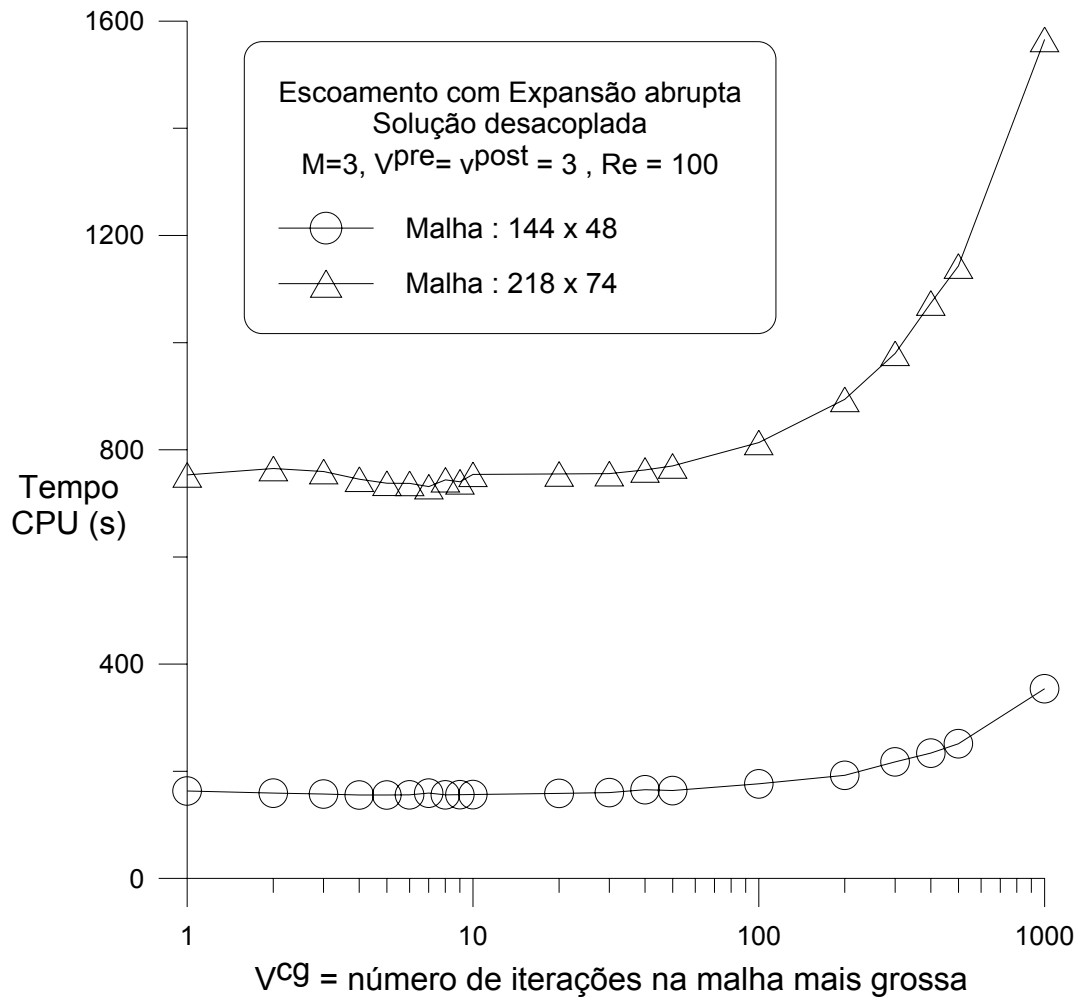


Figura V-47 - Escoamento com expansão abrupta: influência do refinamento da malha

$$v^{pre} = v^{post} \text{ ciclo } V.$$

V-5.b. Escoamento em tanque retangular

Baseado na Figura V-19 do escoamento em tanque retangular, para um número fixo de varreduras na malha mais grossa ($\nu^{cg} = 6$ e 10), a Figura V-48 reproduz o tempo necessário para convergência, quando o número de iterações pré-/pós-suavizações ($\nu^{pre} = \nu^{post}$) varia livremente.

Pode-se ver que mais de uma varredura para relaxação da solução intermediária, antes e depois da mudança de nível de malha, não traz necessariamente alguma vantagem e, conseqüentemente, quando o número de relaxações ultrapassa este limite, um aumento do esforço computacional é observado.

A vantagem obtida quando se usa o Ciclo W, também é aparente, ao visualizarmos a Figura IV-7 notamos que o tempo gasto na malha mais grossa no ciclo V é em média maior, conseqüentemente erros de baixa frequência são melhor suavizados (Rabi e de Lemos, 1998b). Entretanto esta explicação esta contrária aos resultados anteriormente apresentados. Assim sendo, não se pode tirar conclusões universais totais para os parâmetros ótimos em algoritmos multigrid.

Ainda, para os dois valores de ν^{cg} usados (6 e 10) não foi detectado, para ambos os ciclos, nenhuma melhora significativa no tempo computacional.

Na Figura V-49 o número de pré-/pós-suavizações foi fixado em $\nu^{pre} = \nu^{post} = 2$, de modo que o número de iterações na malha mais grossa ν^{cg} varia livremente. Um valor ótimo pode ser identificado claramente para ambos os ciclos e parâmetros maiores que estes não significam necessariamente ganho em tempo de CPU. Aqui novamente a superioridade do ciclo W é aparente.

As Figuras V-48 e V-49 sugerem um balanço delicado entre todos os parâmetros envolvidos com a finalidade de se obter um tempo mínimo de CPU. Um conjunto ótimo de parâmetros não pode ser facilmente determinado a priori. Como já foi mencionado, estratégias adaptativas foram propostas na literatura.

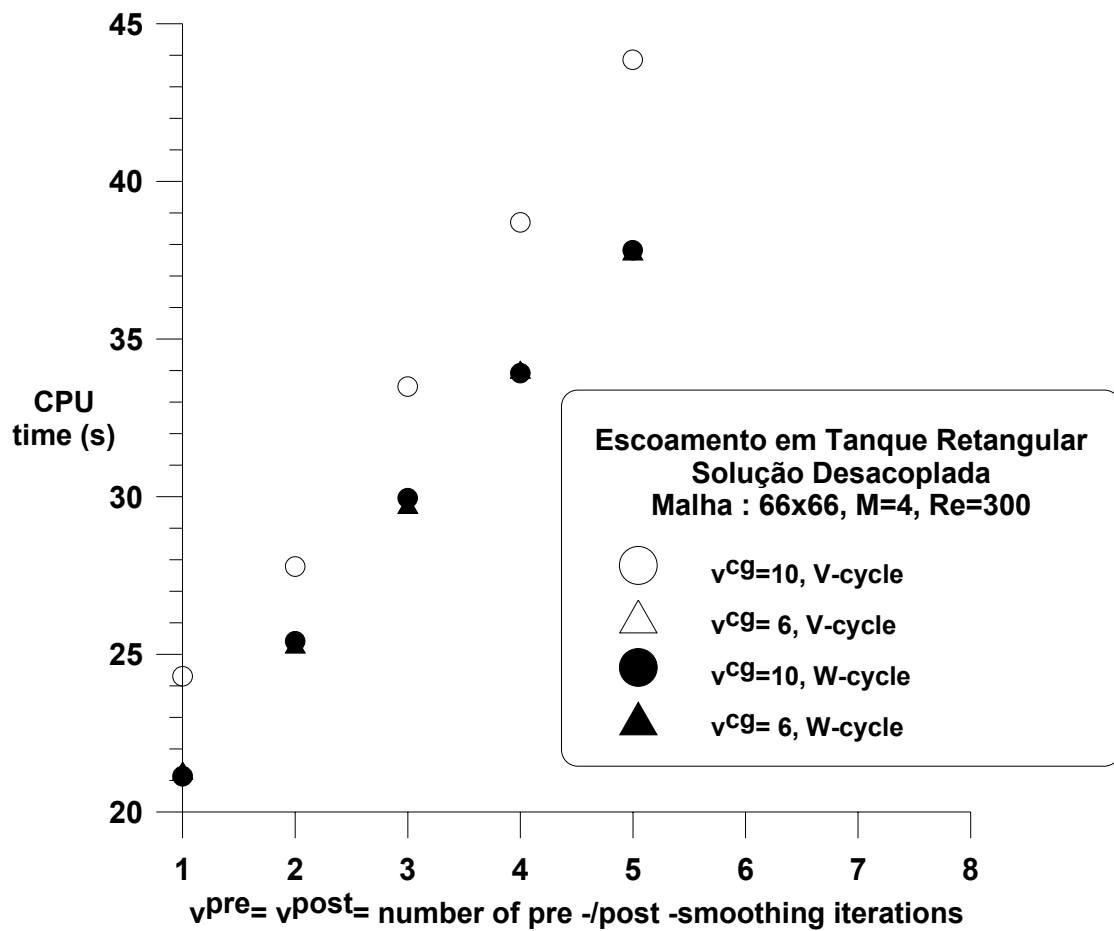


Figura V-48 - Escoamento em tanque retangular: esforço computacional para diferentes números de iterações de pré-/pós-suavizações ($v^{pre} = v^{post}$).

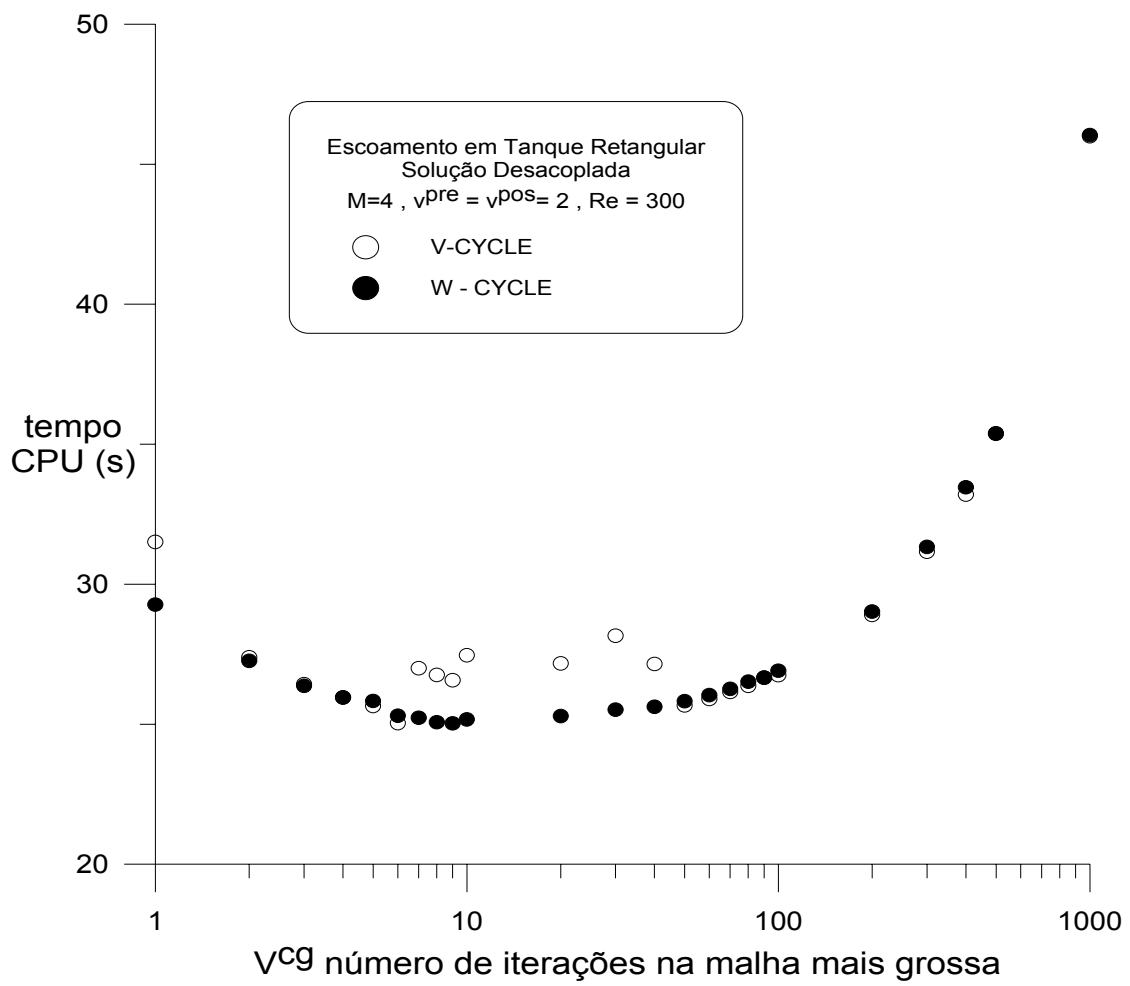


Figura V-49 - Escoamento em tanque retangular: Influência do número de iterações na malha mais grossa (ν^{CG}) sobre o esforço computacional.

V-5.c. escoamento de jato confinado

Conforme o esquema da Figura V-24 do escoamento em jato confinado, a Figura V-50 reproduz o tempo necessário para convergência, quando o número de iterações pré-/pós-suavizações ($\nu^{pre} = \nu^{post}$) varia livremente para um valor fixo do número de iterações na malha mais grossa ($\nu^{cg} = 3$). A partir dos resultados, é possível identificar claramente um valor ótimo para os parâmetros de relaxação. Um número de varreduras maior que este valor ótimo, pode vir a consumir um tempo computacional maior, comprometendo a eficiência do ciclo multigrid.

Finalmente na Figura V-51 o número de pré-/pós-suavizações foi fixado em $\nu^{pre} = \nu^{post} = 1$, de modo que o número de iterações na malha mais grossa ν^{cg} varia livremente. Através dos resultados é possível identificar valores ótimos para ambos os valores de Re .

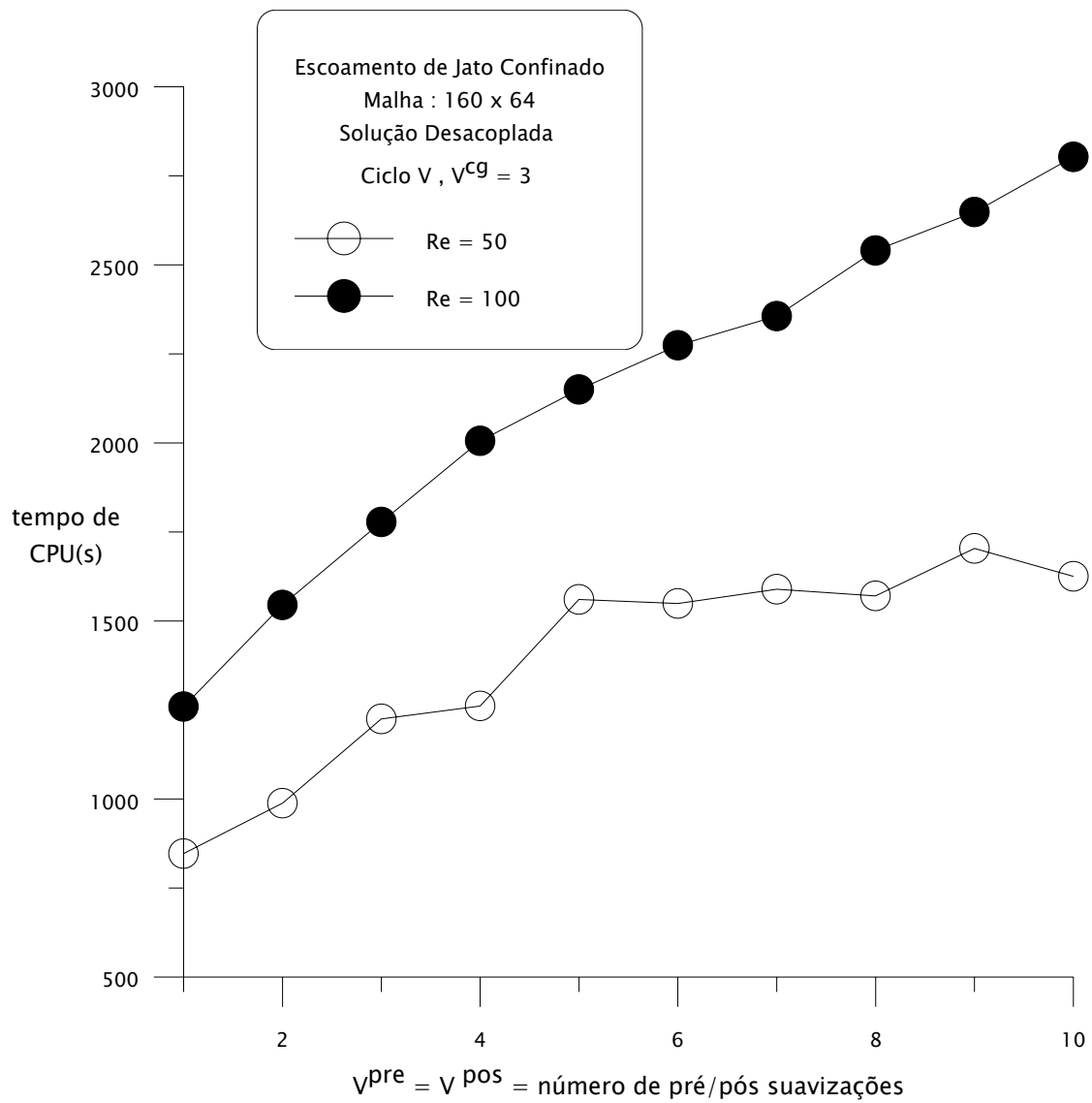


Figura V-50 - Escoamento de jato confinado: esforço computacional para diferentes números de iterações de pré-/ pós-suavizações, $Re= 50$ e 100 .

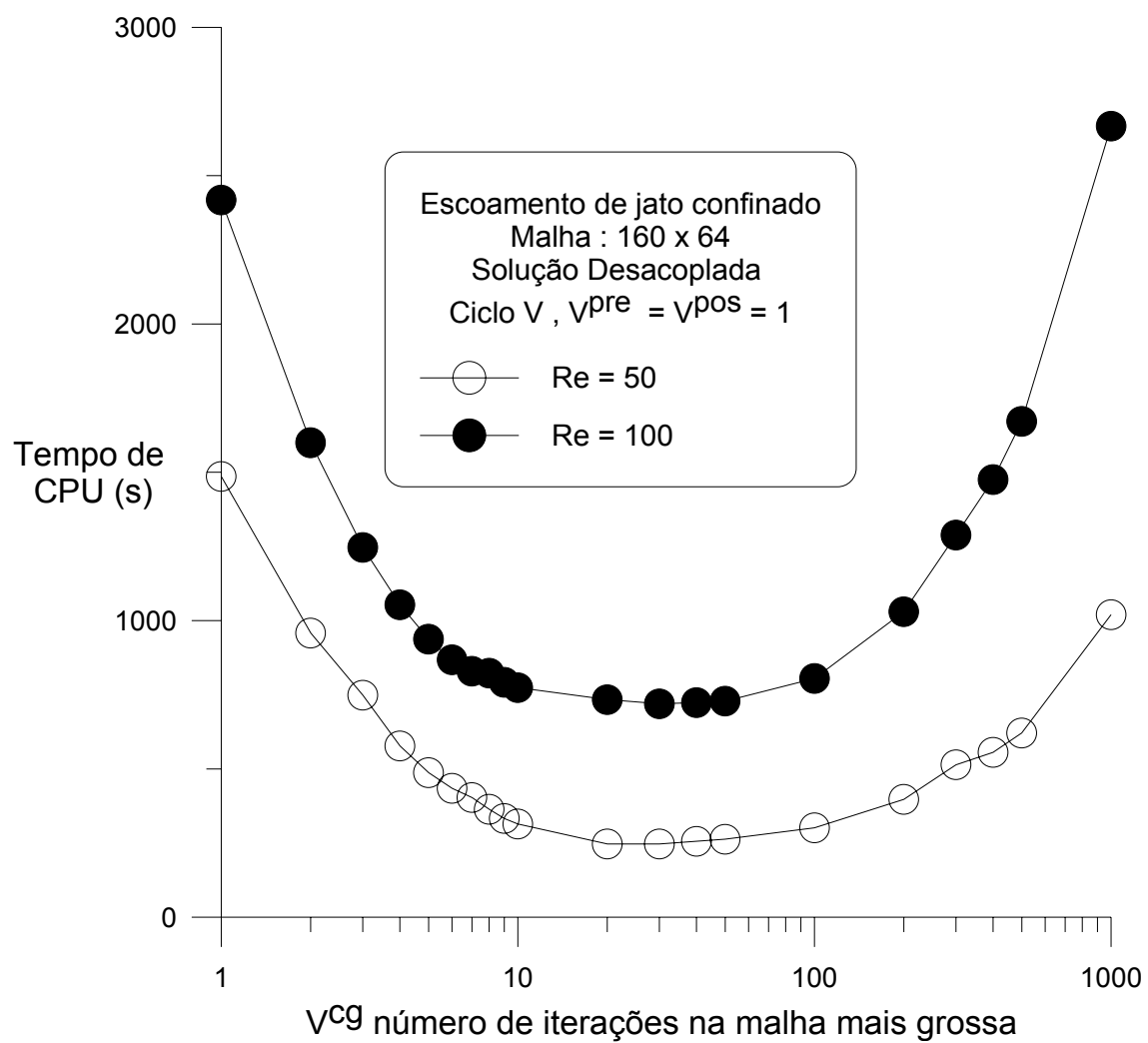


Figura V-51 - Escoamento de jato confinado: influência do número de iterações na malha mais grossa (ν^{cg}) sobre o esforço computacional.

CAPÍTULO VI CONCLUSÃO E DESENVOLVIMENTOS

FUTUROS

No presente trabalho foi aplicada a técnica multigrid na implementação de um programa computacional visando a solução numérica de problemas bidimensionais de mecânica dos fluidos (regime laminar) e transferência de calor. Foram utilizadas malhas computacionais estruturadas e ortogonais, assim como um algoritmo iterativo para a solução do sistema de equações algébricas, obtidas segundo uma discretização em volumes finitos. No método multigrid foi empregado o esquema CS (correction storage).

Em todos os casos considerados e estudados ficou nítida a melhor performance dos métodos iterativos com a formulação multigrid através destes métodos pode-se obter soluções numéricas com ganhos expressivos de tempo de computação em relação à solução obtida em malha única, sem ao mesmo tempo comprometer a qualidade da solução. Observou-se ainda ser este ganho tanto maior quanto mais refinada for a malha computacional empregada (nível de malha mais fino).

Foi verificado também que, no caso em que temos a solução desacoplada, com o incremento do número de Reynolds a solução tende a se tornar mais rápida, fato oposto ao verificado quando se tem a solução acoplada, ou seja, com o aumento de Reynolds, a taxa de convergência torna-se mais lenta.

Com relação a otimização dos parâmetros do ciclo multigrid, chegou-se a seguinte conclusão que cada caso é peculiar, tem que ser analisado separadamente, tanto a nível de refinamento das malhas quanto ao número de Reynolds.

Como desenvolvimentos futuros ao presente trabalho, podem ser apontados os seguintes:

- Considerar problemas com propriedades do fluido (ρ e/ou μ) variáveis (ex: convecção natural).
- Tratamento de problemas com fontes internas de calor (lineares e/ou não-lineares).
- Extensão para problemas tridimensionais. Para estes casos, além das extensões a serem introduzidas no procedimento de obtenção das equações algébricas, devem ser introduzidos passos adicionais nos procedimentos de restrição e prolongamento.
- Incluir tratamento de geometrias mais complexas. Uma extensão interessante seria a de escrever o programa computacional em coordenadas generalizadas, o que além de acarretar em dificuldades adicionais ao processo de discretização, deve trazer cuidados especiais na implementação do método *multigrid*.
- Implementação de algoritmo *multigrid* com critério dinâmico de mudança de nível de malha, com vistas a permitir comparação com o algoritmo de número pré-fixado de iterações em cada nível de malha (aqui utilizado).

CAPÍTULO VII REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Brandt, A., 1977, MULTI-LEVEL ADAPTIVE SOLUTIONS TO BOUNDARY-VALUE PROBLEMS, *Math. Comp.*, vol. 31, No. 138, pp. 333-390.
- Bai, L., Mitra, N.K., Fiebig, M.C., Kost, A., 1994, A multigrid method for predicting periodically fully developed flow, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, vol. 18, pp. 843-852.
- de Lemos, M.J.S., Mesquita, M.S., 1999a, MULTIGRID NUMERICAL SOLUTIONS OF NON-ISOTHERMAL LAMINAR RECIRCULATING FLOWS, *Applications of Computational Heat Transfer*, **ASME-HTD-vol. 364-3**, ISSN: 0272-5673, ISBN: 0-7918-1656-7, Ed..L.C. White, pg. 323-330.
- Hackbusch, W., 1985, MULTIGRID METHODS AND APPLICATIONS, Springer-Verlag, Berlin.
- Hortmann, M., Peric, M., Scheuerer, G., 1990, FINITE VOLUME MULTIGRID PREDICTION OF LAMINAR CONVECTION: BENCH-MARK SOLUTIONS, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, vol. 11, pp. 189-207.
- Hutchinson, B.R., Galpin, P.F., Raithby, G.D., 1988, APPLICATION OF ADDITIVE CORRECTION MULTIGRID TO THE COUPLED FLUID FLOW EQUATIONS, *Num. Heat Transfer*, vol. 13, pp. 133-147.
- Joshi, D.S., Vanka, S.P., Multigrid calculation procedure for internal flows in complex geometries, *Num. Heat Transfer - Part B*, vol. 20, pp. 61-80, 1991.

- Jiang, Y., Chen, C.P., Tucker, P.K., 1991, Multigrid solutions of unsteady Navier-Stokes equations using a pressure method, *Num. Heat Transfer - part A*, vol. 20, pp. 81-93.
- Khosla, P.K., Rubin, S.G., 1974, A DIAGONALLY DOMINANT SECOND-ORDER ACCURATE IMPLICIT SCHEME, *Comput. Fluids*, vol. 2, No. 12, pp. 207.
- Patankar, S.V., 1980, *NUMERICAL HEAT TRANSFER AND FLUID FLOW*, McGraw Hill.
- Peric, M., Rüger, M., Scheuerer, G., 1989, A FINITE VOLUME MULTIGRID METHOD FOR CALCULATING TURBULENT FLOWS, In: *Seventh Symposium on Turbulent Shear Flows*, pp. 7.3.1-7.3.6, Stanford University.
- Rabi, J.A., de Lemos, M.J.S., 1998a, MULTIGRID NUMERICAL SOLUTION OF INCOMPRESSIBLE LAMINAR RECIRCULATING FLOWS, *ENCIT98- Proc. of 7th Braz. Cong. Eng. Th. Sci.*, vol. 2, pp. 915-920, Rio de Janeiro, RJ, Nov. 3-6.
- Rabi, J.A., de Lemos, M.J.S., 1998b, THE EFFECTS OF PECLET NUMBER AND CYCLING STRATEGY ON MULTIGRID NUMERICAL SOLUTIONS OF CONVECTIVE-CONDUCTIVE PROBLEMS, *7th AIAA/ASME Jnt Thermcs & HT Conf*, **Paper AIAA-98-2584**, Albuquerque, New Mexico, USA, June 15-18.
- Raithby, G.D., Torrance, K.E., 1974, UPSTREAM-WEIGHTED DIFFERENCING SCHEMES AND THEIR APPLICATION TO ELLIPTIC PROBLEMS INVOLVING FLUID FLOW, *Comp. & Fluids*, vol. 2, pp. 191-206.
- Sathiyamurthy, P.S., Patankar, S.V., 1994, BLOCK-CORRECTION-BASED MULTIGRID METHOD FOR FLUID FLOW PROBLEMS, *Numerical Heat Transfer - Part B*, vol. 25, pp. 375-394.

- Shah, R. K., London, A. L., Laminar flow forced convection in ducts, IN: *Advances in Heat Transfer*, Academic Press, New York, 1978.
- Stüben, K., Trottenberg, U., 1982, MULTIGRID METHODS, In *Lect. Notes Math.*, vol. 960, pp. 1-76, Berlin
- Thompson, M.C., Ferziger, J.H., 1989, An adaptive multigrid technique for the incompressible Navier-Stokes equations, *J. Comp. Phys.*, vol. 82, pp. 94-121.
- Vanka, S.P. 1986, Block-implicit multigrid calculation of two-dimensional recirculating flows, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 86, pp. 29-48.
- Maliska, C.R. 1985, Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro.
- Bird, R.B., Stewart, W.E., Lightfoot, E.N., 1960, Transport Phenomena, John Wiley & Sons, New York
- Rabi, J.A, 1998, Aplicação do Método Multigrid na Solução Numérica de Problemas 2-D Simples de Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor, São José dos Campos, tese de mestrado, ITA..
- Eskinazi, S., 1960, Transport Phenomena, John Wiley & Sons, New York
- Patankar S. V., Spalding D. B., 1972, A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 15, pp.1787-1806.
- Brandt A., 1982, Multigrid Methods, *Lect. Notes Math.*, Vol. 960, pp. 272-282
- Joshi D. S., Vanka, S. P., 1991, Multigrid calculation procedure for internal flows in complex geometries, *Num. Heat Transfer- Part B*, Vol. 20, pp. 61-80.

- Bonhaus D.L., 1993, An upwind multigrid method for solving viscous flows on unstructure triangular meshes, M.S. Thesis, University of Cincinnati
- Peric M., R ger M., Scheurer G., 1989, A finite volume multigrid method for predicting periodically fully developed flow, Int. J. Num. Fluids, vol. 18, pp.843-852.
- Hortmann M., Peric M., Scheurer G. A.,1990, Finite volume multigrid prediction of laminar natural convection: bench-mark solutions, Int.J.Num.Meth. Fluids, vol.11, pp.189-207
- Shah R., K. London, A.L,1978, Laminar flow forced convection in ducts, In: Advances in Heat Transfer, Academic Press, New York
- Ozisik, M. Necati,1985, Heat Transfer A Basic Approach, McGraw-Hill
- Mesquita, M.S , de Lemos, M.J.S., 1999b,Convergence Characteristics of Multigrid Numerical Solutions of Non-Isothermal Recirculating Flows, COBEM 99 – XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mec nica,  guas de Lind ia, SP, Brasil, 22 a 26 Nov.
- de Lemos, M.J.S, Mesquita, M.S., 2000a, Acceleration of Multigrid Solutions of Non-Isothermal Recirculating Flows, Advances in Computational Heat and Mass Transfer, Paper **NHTC2000-12232**, 34th National Heat Transfer Conference, August 20-22, 2000, Pittsburgh, Pennsylvania, USA.
- Mesquita, M.S, de Lemos, M.J.S, 2000b, Numerical Solutions of Non-Isothermal Turbulent Recirculating Flows Using the Multigrid Method, submetido ao ENCIT2000, Porto Alegre, RS, Brasil, 3 a 6 de outubro.