

ÍNDICE GERAL

ÍNDICE GERAL	i
ÍNDICE DE FIGURAS E TABELAS	iv
LISTA DE SÍMBOLOS	vi
SUMÁRIO	ix
ABSTRACT	x
AGRADECIMENTOS	xi
I. INTRODUÇÃO	1
I.1. SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE INTERESSE EM ENGENHARIA.....	1
I.2. SOLUÇÃO POR MÉTODO NUMÉRICO	1
I.3. CONVERGÊNCIA DA SOLUÇÃO NUMÉRICA.....	3
I.4. OBJETIVO, ESCOPO E ORGANIZAÇÃO DO PRESENTE TRABALHO.....	5
II. MODELO MATEMÁTICO	7
II.1. EQUAÇÕES DO ESCOAMENTO LAMINAR	7
II.2. EQUAÇÃO GERAL DE TRANSPORTE	8
II.3. CONDIÇÕES DE CONTORNO	10
II.3.1. Parede sólida.....	11
II.3.2. Linha de simetria	11
II.3.3. Perfil de entrada.....	11
II.3.4. Perfil de saída	11
III. OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS	12

III.1. FORMULAÇÃO EM VOLUMES FINITOS	12
III.2. DISCRETIZAÇÃO DOS TERMOS DA EGT	14
III.2.1. Discretização dos termos convectivos	14
III.2.2. Discretização dos termos difusivos	16
III.2.3. Discretização dos termos convectivos e difusivos - esquema WUDS	17
III.2.4. Discretização do termo fonte	18
III.2.5. Forma final da equação algébrica	18
III.3. TRATAMENTO DOS TERMOS FONTES	19
III.3.1. Termo fonte da EGT para a quantidade de movimento	19
III.3.2. Termo fonte da EGT para a energia	20
III.4. TRATAMENTO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO	20
III.4.1. Superfície sólida	21
III.4.2. Linha de simetria	22
III.4.3. Perfil de entrada	22
III.4.4. Perfil de saída	23
III.4.5. Tratamento para esquema WUDS	23
III.5. ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE	24
III.5.1. Equação de correção da pressão	24
III.5.2. Condições de contorno para a equação da correção da pressão	27
III.5.3. Atualização da pressão, das velocidades e dos fluxos mássicos	27
III.6. PARÂMETROS DE SUB-RELAXAÇÃO	28
IV. O MÉTODO MULTIGRID	30
IV.1. A FILOSOFIA DO MÉTODO MULTIGRID	30

IV.2. CORRECTION STORAGE - CS	32
IV.3. FULL APPROXIMATION STORAGE - FAS	34
IV.4. PROCEDIMENTOS DE MUDANÇA DE NÍVEL MALHA	35
IV.4.1. Transferência de valores	35
IV.4.2. Obtenção da matriz dos coeficientes.....	39
IV.4.3. Tratamento das coordenadas da malha computacional.....	40
IV.5. ESTRATÉGIA DE MUDANÇA DE NÍVEL DE MALHA.....	43
IV.6. FLUXOGRAMA DO ALGORITMO MULTIGRID CS	44
V. RESULTADOS E DISCUSSÃO	47
V.1. SOLUÇÃO DE PROBLEMA TÉRMICO SIMPLES	47
V.2. SOLUÇÃO DE ALGUNS PROBLEMAS HIDRODINÂMICOS	62
V.2.1. Escoamento entre placas planas e paralelas	62
V.2.2. Escoamento entre placas com expansão abrupta.....	67
V.2.3. Jato confinado	69
V.2.4. Escoamento em tanque retangular.....	72
VI. CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS	75
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	78

ÍNDICE DE FIGURAS E TABELAS

Fig. I-1 A idéia do método numérico.	2
Fig. II-1 Condições de contorno implementadas nos problemas de escoamento.	10
Fig. III-1 Disposição dos volumes de controle no domínio de cálculo.	12
Fig. III-2 Esquema e nomenclatura de cada volume de controle.	13
Fig. IV-1 Comportamento de componentes do erro em métodos iterativos de suavização.	31
Fig. IV-2 Esquema dos procedimentos de restrição (a) e de prolongamento (b).	36
Fig. IV-3 Detalhes do procedimento de prolongamento.	37
Fig. IV-4 Modo de armazenamento das grandezas pelos vários níveis de malha.	39
Fig. IV-5 Combinação dos fluxos mássicos nas interfaces	40
Fig. IV-6 Representação de uma malha não-uniforme.	41
Fig. IV-7 Sequência de operações em iteração <i>multigrid</i> completa com 4 malhas.	44
Fig. IV-8 Fluxograma do algoritmo <i>multigrid</i> na formulação CS.	46
Fig. V-1 Esquema do problema térmico estudado.	48
Fig. V-2 Influência do refinamento da malha na qualidade da solução.	49
Fig. V-3 Validação numérica das soluções obtidas com 1 e com 4 malhas.	49
Fig. V-4 Problema térmico: resíduo em 1 malha e em <i>multigrid</i> ciclo-V, $U=V=0$	51
Fig. V-5 Problema térmico: resíduo em 1 malha e em <i>multigrid</i> ciclo-V, $U=0$, $V=-1$ m/s. ...	51
Fig. V-6 Problema térmico: resíduo em 1 malha e em <i>multigrid</i> ciclo-V, $U=0$, $V=-10$ m/s. .	52
Fig. V-7 Problema térmico: resíduo em 1 malha e em <i>multigrid</i> ciclo-V, $U=-V=1$ m/s.	52
Fig. V-8 Problema térmico: resíduo em 1 malha e em <i>multigrid</i> ciclo-V, $U=-V=10$ m/s.	53
Fig. V-9 Problema térmico: resíduo em <i>multigrid</i> ciclo-W, $U=V=0$	53
Fig. V-10 Problema térmico: resíduo em <i>multigrid</i> ciclo-W, $U=0$, $V=-10$ m/s.	54
Fig. V-11 Problema térmico: resíduo em <i>multigrid</i> ciclo-W, $U=-V=10$ m/s.	54
Fig. V-12 Influência do campo de velocidades na distribuição de temperatura.	57

Fig. V-13 Escoamento entre placas planas e paralelas.....	63
Fig. V-14 Escoamento entre placas: validação numérica da solução <i>multigrid</i>	64
Fig. V-15 Escoamento entre placas: resíduos em 1 malha e em 4 malhas ciclo-V.....	65
Fig. V-16 Escoamento entre placas com expansão abrupta.	67
Fig. V-17 Escoamento com expansão abrupta: resíduos em 1 malha e em 4 malhas ciclo-V.	69
Fig. V-18 Escoamento com expansão abrupta: visualização da região de entrada.....	69
Fig. V-19 Escoamento de jato confinado.	70
Fig. V-20 Jato confinado: trecho da malha computacional não-uniforme.	71
Fig. V-21 Jato confinado: resíduos em 1 malha e em 3 malhas ciclo-V.....	72
Fig. V-22 Visualização do escoamento de jato confinado.	72
Fig. V-23 Escoamento em tanque retangular.	73
Fig. V-24 Escoamento em tanque retangular: resíduos em 1 malha e em 3 malhas ciclo-V. ..	74
Fig. V-25 Visualização do escoamento em tanque retangular.	74
Tab. II-1 Coeficientes de difusão e termos fontes da EGT.	9
Tab. III-1 Resumo das condições de contorno implementadas.	21
Tab. V-1 Esforço computacional de soluções <i>multigrid</i> em 4 malhas para diferentes Pe	56
Tab. V-2 Influência da escolha do algoritmo de solução no esforço computacional.....	58
Tab. V-3 Influência do número de iterações na malha mais grossa.	60
Tab. V-4 Influência do número de iterações de pré- e pós-suavizações.	61
Tab. V-5 Escoamento entre placas: esforço computacional em malha 160 x 32	65
Tab. V-6 Escoamento entre placas: influência do refinamento da malha.	66
Tab. V-7 Escoamento com expansão abrupta: esforço computacional em malha 144 x 48 ..	68
Tab. V-8 Jato confinado: esforço computacional em malha 160 x 64	71
Tab. V-9 Escoamento em tanque retangular: esforço computacional em malha 128 x 96	73

LISTA DE SÍMBOLOS

A	matriz dos coeficientes das equações algébricas; matriz genérica
<i>C</i>	fluxo mássico
C_p	calor específico a pressão constante
<i>I</i>	operador de interpolação (restrição ou prolongamento)
<i>K</i>	condutividade térmica
<i>L</i>	comprimento
M	número de malhas computacionais
M	matriz de iteração
<i>N, NI, NJ</i>	número de volumes de controle (pontos nodais)
<i>P</i>	pressão de movimento
<i>P'</i>	correção para a pressão (método SIMPLE)
Pe	número de Peclet
<i>R</i>	resíduo normalizado (malha mais fina)
<i>RE</i>	razão de espaçamento
Re	número de Reynolds
<i>S</i>	termo fonte nas equações para as grandezas do escoamento
<i>T</i>	temperatura
<i>U, V</i>	componentes cartesianas da velocidade
<i>X, Y</i>	coordenadas cartesianas (malha grossa)
<i>a</i>	coeficiente na equação de transporte discretizada
<i>b</i>	termo fonte na equação de transporte discretizada
b	matriz dos termos fontes

f	fator de interpolação linear
k	nível de malha computacional
q	razão da progressão geométrica
r	resíduo
\mathbf{r}	matriz dos resíduos
s	termo fonte viscoso para a velocidade
t	tempo de CPU (tempo computacional)
x, y	coordenadas cartesianas (malha fina)
$\Delta x, \Delta y$	distâncias internodais
Φ	matriz das incógnitas (grandeza do escoamento sendo resolvida)
Γ	coeficiente de difusão da grandeza do escoamento
α, β	coeficientes do esquema WUDS de interpolação
$\delta v, \delta x, \delta y$	dimensões do volume de controle
ϕ	grandeza genérica do escoamento
Φ	matriz das correções para a grandeza genérica do escoamento
γ	parâmetro de escolha entre ciclo-V e ciclo-W
η	raio espectral de matriz
φ	autovalor de matriz
λ	fator de <i>flux-blending</i> (combinação entre os esquemas UDS e CDS)
μ	viscosidade molecular
v	número de iterações em determinado nível de malha
ρ	densidade
σ	espectro de matriz

ξ fator de sub-relaxação

Sobrescritos e subscritos

DC *deferred correction*

new valor atualizado (nível iterativo corrente)

* nível iterativo anterior

– valor aproximado (após determinado número de iterações)

E, W, S, N pontos nodais vizinhos a leste, a oeste, a sul e a norte, respectivamente

I, J índices em malha grossa

M referente ao nível de malha mais fino

P ponto nodal central

T, U, V, P' relativo à temperatura, às componentes da velocidade e à correção da pressão

aux referente à matriz auxiliar das incógnitas (procedimentos de interpolação)

c termo fonte não-associado ao ponto nodal central

e, w, s faces leste, oeste e sul do volume de controle

i, j índices em malha fina

k nível de malha computacional

m referente à massa (equação para a correção da pressão)

n face norte do volume de controle; direção normal

t direção tangencial

vz pontos nodais vizinhos (em somatório)

ϕ relativo à grandeza genérica do escoamento

SUMÁRIO

Foi aplicada a técnica *multigrid* na implementação de dois programas computacionais visando a solução numérica de problemas em regime permanente de escoamentos laminares com geometrias simples e de um problema simples de transferência de calor em que o campo de velocidade é conhecido e constante, todos bidimensionais em coordenadas cartesianas. Os programas empregaram malhas computacionais estruturadas e ortogonais, estando os mesmos generalizados ao uso de malhas não-uniformes. As equações algébricas foram obtidas segundo uma formulação em volumes finitos, com as variáveis armazenadas no centro dos volumes elementares segundo um arranjo colocalizado e foram utilizados esquemas de interpolação distintos para cada classe de problema. O sistema de equações resultante foi relaxado através dos algoritmos Gauss-Seidel e TDMA - *TriDiagonal Matrix Algorithm*. O acoplamento pressão-velocidade foi feito segundo o método SIMPLE - *Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*. O algoritmo *multigrid* foi implementado na formulação *correction storage* em ambos os programas. A técnica foi demonstrada para alguns problemas *bench-mark*, com os resultados apresentando uma aceleração significativa do processo de convergência da solução numérica *multigrid* em relação às soluções em malha única, especialmente nas situações em que foram empregadas malhas bastante refinadas e foi exigida elevada precisão.

ABSTRACT

The multigrid technique was applied in the implementation of two computational programs aiming at the numerical solution of two-dimensional Cartesian coordinates steady-state problems involving simple geometry laminar flows and a simple heat transfer problem in which flow field was known and kept constant. Structured orthogonal computational meshes were employed and programs were generalized for the use of non-uniform grids. Algebraic equations were obtained using a finite volume formulation with variables being stored in a cell-centered collocated arrangement and each class of problem used a distinct interpolation scheme. The resulting equation system was relaxed through the Gauss-Seidel algorithm and the TriDiagonal Matrix Algorithm (TDMA). Pressure-velocity coupling was based upon the Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations (SIMPLE). The multigrid algorithm was implemented in a correction storage manner for both programs. The technique was demonstrated for some bench-mark problems and results showed a significant convergence rate speed up of the multigrid numerical solution when compared to the single grid counterpart, especially in those cases where well refined grids were employed and high accuracy was desired.

AGRADECIMENTOS

O autor gostaria primeiramente de agradecer ao seu orientador Prof. Dr. Marcelo J. S. de Lemos pela confiança, pelo apoio e pela assistência acadêmica ao longo do curso, indispensáveis a todo e qualquer trabalho deste caráter. Agradecimentos também são dirigidos aos colegas do Laboratório de Computação em Fenômenos de Transporte, Prof. Dr. Edson L. Zaparoli, Rosângela Meireles Gomes Leite e, em especial, Cláudia Regina de Andrade, pela amizade, pela convivência e pelos auxílios e sugestões prestados na execução deste trabalho. O autor agradece também aos pais pelo amor e incentivo sempre dados em todas as etapas importantes de sua vida, assim como aos seus familiares de São José dos Campos que muito o ajudaram quando recém-chegado. Por fim e acima de tudo, o autor agradece a Deus que com Sua bondade e assistência permitiu que tudo isso fosse possível.

I. INTRODUÇÃO

I.1. SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE INTERESSE EM ENGENHARIA

De um modo geral, para se resolver um determinado problema de interesse em engenharia pode-se recorrer a *métodos analíticos*, a *métodos numéricos* (experimentação numérica) ou à *experimentação em laboratório* (experimentação física).

A experimentação em laboratório tem a grande vantagem de tratar com a configuração real. No entanto, muitas vezes é de alto custo e não pode ser realizada ou por questões de segurança ou pela dificuldade de reprodução das condições reais.

Os problemas resolvidos por métodos analíticos na maioria das vezes possuem hipóteses que muito os afastam do fenômeno físico real ou permitem apenas geometria e/ou condições de contorno simples. Ainda assim, soluções analíticas são extremamente úteis para validar casos limites da experimentação numérica.

Por sua vez, os métodos numéricos praticamente não apresentam restrições, podendo resolver problemas com condições de contorno complicadas e geometrias arbitrárias, apresentando resultados com boa rapidez. Entretanto, os dados obtidos devem ser confiáveis. A comparação dos resultados numéricos com resultados analíticos (se existirem) ou com outros resultados numéricos caracteriza a *validação numérica*, enquanto que a *validação física* é feita pela comparação com resultados experimentais.

I.2. SOLUÇÃO POR MÉTODO NUMÉRICO

A obtenção de uma solução numérica de qualquer problema físico requer inicialmente a adoção do modelo matemático correspondente, o qual via de regra é descrito por meio de

equações diferenciais parciais (EDPs). Tal modelo deve ser passível de ser resolvido em tempos de computação não-proibitivos e os resultados obtidos devem bem representar o fenômeno físico em questão.

A idéia do método numérico é resolver as EDPs, substituindo as derivadas nelas existentes por expressões algébricas envolvendo a função incógnita. Ao contrário do método analítico que permite calcular os valores das variáveis dependentes em um número *infinito* de pontos, a aproximação numérica fornece a solução em um número *finito* de pontos (ditos *pontos nodais*) definidos pela chamada *malha computacional*, conforme ilustra a Fig. I-1. Espera-se que quanto maior for o número de pontos nodais, mais próxima da solução exata esteja a solução numérica.

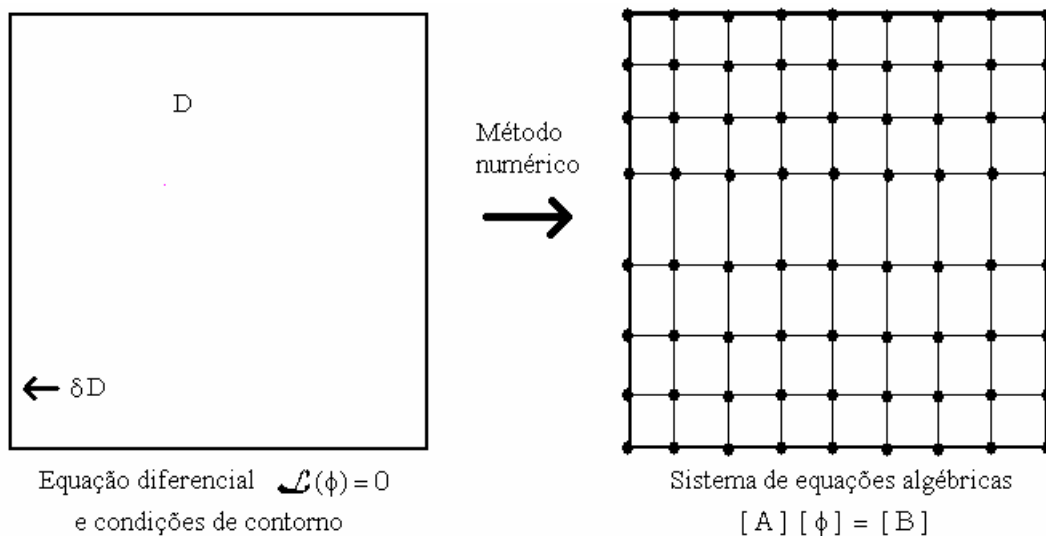


Fig. I-1 A idéia do método numérico.

O passo seguinte está relacionado com a maneira de se obter as equações algébricas, comumente denominado *discretização*. Três classes merecem destaque, a saber: discretização em *elementos finitos*, em *diferenças finitas* e em *volumes finitos*. No presente trabalho foi

adotada esta última classe, a qual será discutida em detalhes no Capítulo II. Algumas considerações básicas acerca das outras duas classes podem ser encontradas em [1, 2].

Quando a EDP é linear, o processo de discretização dá origem a um sistema linear de equações, cuja matriz de coeficientes permanece constante ao longo do processo iterativo. Em problemas como os de escoamento de fluidos, surgem porém não-linearidades que são transferidas para a matriz dos coeficientes, com vistas a manter linear o sistema de equações. Como consequência do ponto de vista computacional surge a necessidade de um processo iterativo “interno”, responsável pela atualização (recálculo) desta matriz à medida que a solução numérica evolui.

A etapa final do método numérico diz respeito à escolha do algoritmo para a solução do sistema de equações algébricas, com base nas características do próprio sistema. Os algoritmos de solução podem ser *diretos* (os quais necessitam da inversão da matriz dos coeficientes) ou *iterativos*. Neste trabalho, foram adotados métodos iterativos de solução.

I.3. CONVERGÊNCIA DA SOLUÇÃO NUMÉRICA

Para um sistema de equações não-lineares, não é possível fazer afirmações *a priori* acerca da convergência da solução numérica. Valores adequados de tamanho da malha, de intervalo de tempo (para problemas transientes) e de fatores de sub-relaxação que garantam a estabilidade e convergência da solução numérica são muitas vezes encontrados de maneira empírica. Em todo caso, a observação de certas regras (ex: positividade dos coeficientes) ajuda na convergência da solução numérica [1, 2].

No início dos cálculos, a taxa de convergência é máxima, passando porém a decair sensivelmente à medida que o processo iterativo evolui. Tal efeito é tanto mais pronunciado quanto mais refinada for a malha computacional. Através de considerações da álgebra linear,

Hackbusch [3] mostra que tal comportamento vem do fato de o método iterativo ser eficiente na remoção somente daquelas componentes de Fourier do erro (diferença entre o valor verdadeiro e o valor numérico da grandeza sendo resolvida) cujos comprimentos de onda são menores que ou comparáveis ao espaçamento da malha. Após algumas iterações diz-se então que as componentes de baixo comprimento de onda já foram *suavizadas* e que o processo de convergência tornou-se lento em decorrência do baixo desempenho do método iterativo na suavização das componentes de comprimento de onda elevado.

Com base nessa observação, a idéia do método *multigrid* é cobrir um espectro maior de comprimentos de onda através da iteração não apenas em uma única malha, mas em uma seqüência de malhas cada vez mais grossas, isto é, de maior espaçamento internodal. Deste modo, comprimentos de onda de componentes do erro que são grandes em um domínio refinado são transformados em comprimentos menores em malhas grossas, sendo o erro ali melhor suavizado. O processo de convergência é assim acelerado, realizando-se iterações em espaçamentos variados, nas quais as componentes do erro com comprimentos de onda correspondentes podem ser eficientemente reduzidas.

Segundo Brandt [4], as primeiras investigações acerca dos métodos *multigrid* foram feitas por Fedorenko em 1964 e por Bakhvalov em 1966, embora seus procedimentos básicos como a suavização de erro por relaxação e cálculo de correções em malhas grossas com aplicação recursiva já vinham sendo estudados por vários autores, conforme citam Stüben e Trottenberg [5]. Contudo, a eficiência da técnica foi verificada por Brandt em 1972, que mais tarde apresentou uma descrição precisa de seu algoritmo *multigrid* [4], incluindo a solução de problemas não-lineares, como é o caso de problemas de mecânica dos fluidos. Um histórico mais detalhado sobre a evolução da técnica pode ser encontrado em [3, 4, 5] enquanto que um breve histórico dos desenvolvimentos posteriores e mais recentes pode ser encontrado em [6].

Embora tanto a filosofia geral do método *multigrid* como o seu algoritmo sejam de fácil compreensão, a sua aplicação não é trivial. Conforme comentário de Hackbusch [3], “não há algoritmo *multigrid* operando como uma ‘caixa-preta’ para todos os problemas de valor de contorno.” Os seus diferentes componentes devem ser adaptados de acordo com a natureza do problema abordado. Assim, além dos cuidados necessários à toda implementação de uma solução numérica, cuidados especiais devem ser tomados quando da utilização de mais de uma malha computacional, sobretudo em relação aos procedimentos de mudança de nível de malha.

I.4. OBJETIVO, ESCOPO E ORGANIZAÇÃO DO PRESENTE TRABALHO

A área de Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor Computacional tem experimentado grande desenvolvimento graças não só à crescente disponibilidade de computadores de alta velocidade, grande capacidade de armazenamento e baixo custo, como também ao uso de métodos numéricos eficientes e precisos. Atualmente, a simulação numérica já está incorporada à solução de problemas de interesse em engenharia, tais como: processos de produção de energia, fenômenos ambientais, projetos de equipamentos térmicos e problemas de engenharia aeronáutica e aeroespacial. Nesses problemas, o escoamento de fluidos (com ou sem transferência de calor) está presente e deve ser adequadamente descrito por ser fundamental em tais processos.

No presente trabalho procurou-se aplicar a técnica *multigrid* na solução numérica de problemas em regime permanente de mecânica dos fluidos e transferência de calor em coordenadas cartesianas bidimensionais, resultando no desenvolvimento de dois programas computacionais distintos. O primeiro deles resolveu um problema térmico simples, no qual o

campo de velocidades é conhecido e constante. O segundo, inspirado no pacote computacional GENC [7], visou a solução de problemas envolvendo escoamentos laminares incompressíveis com propriedades constantes (sem transferência de calor). Para a discretização em volumes finitos foram empregadas malhas computacionais estruturadas e ortogonais e o sistema de equações algébricas resultante foi resolvido por meio de algoritmos iterativos.

Vale mencionar que este trabalho faz parte de um projeto amplo que visa a elaboração de um pacote computacional mais completo, com o intuito de resolver problemas complexos de mecânica dos fluidos e transferência de calor. Nestes problemas serão então considerados modelos de turbulência, outros sistemas de coordenadas, regime transiente, propriedades variáveis, entre outros aspectos. Assim, por este trabalho não ter como enfoque principal a solução de problemas mais complexos mas sim a aplicação da técnica *multigrid*, os problemas aqui estudados são relativamente simples (seja no modelo físico-matemático, seja na geometria), para que a aplicação da técnica pudesse ser feita de modo claro e preciso.

A organização do texto é descrita a seguir. O Cap. I situa o trabalho e faz uma breve introdução aos principais assuntos por ele envolvidos. No Cap. II são apresentadas as equações governantes e as condições de contorno dos problemas estudados. Os Caps. III e IV dizem respeito à implementação da solução numérica, enquanto que o Cap. V é reservado para a apresentação e discussão de estudos comparativos da velocidade de convergência dos diferentes métodos de solução implementados e da qualidade dos resultados obtidos. Por fim, o Cap. VI contém as principais conclusões e sugere desenvolvimentos futuros.

II. MODELO MATEMÁTICO

II.1. EQUAÇÕES DO ESCOAMENTO LAMINAR

No presente trabalho foram analisados apenas escoamentos laminares bidimensionais, incompressíveis e em regime permanente. As equações que descrevem o movimento de um fluido e do transporte de energia através dele são as equações para a massa, para a quantidade de movimento e para a energia. Elas representam matematicamente o princípio de conservação destas grandezas e são abaixo apresentadas para um sistema de coordenadas cartesianas. Maiores detalhes sobre a obtenção destas equações são encontrados em [8, 9].

A **equação da continuidade (conservação de massa)** para os escoamentos estudados neste trabalho é

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho U) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V) = 0 \quad , \quad (\text{II-1})$$

onde ρ é a densidade e U e V são as velocidades nas direções x e y respectivamente.

A **equação da quantidade de movimento** ou **equação de Navier-Stokes** pode ser escrita para cada uma das direções coordenadas, sendo dadas por

$$\text{direção } x: \quad \frac{\partial}{\partial x}(\rho U^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho UV) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial U}{\partial y}\right) - \frac{\partial P}{\partial x} + s_U \quad (\text{II-2})$$

$$\text{direção } y: \quad \frac{\partial}{\partial x}(\rho UV) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho V^2) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial V}{\partial y}\right) - \frac{\partial P}{\partial y} + s_V \quad (\text{II-3})$$

onde μ é a viscosidade molecular e P é a *pressão de movimento*, que representa a diferença entre a pressão estática e a pressão hidrostática [7]. Os termos s_U e s_V guardam os chamados termos fontes viscosos e são dados por

$$s_U = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad \text{e} \quad s_V = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial V}{\partial y} \right) \quad (\text{II-4})$$

que se anulam pela equação da continuidade, Eq. (II-1), para fluidos com ρ e μ constantes.

Por fim, a **equação da energia** aqui resolvida é escrita em termos da temperatura T e pode ser simplificada desprezando-se os trabalhos devido à pressão e às forças viscosas. Esta hipótese é válida para escoamentos a baixos números de Mach [7], a qual é consistente com a hipótese de densidade constante aqui assumida (escoamentos incompressíveis). A equação então assume a forma

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho U T) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho V T) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{K}{C_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{K}{C_p} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + S_T \quad (\text{II-5})$$

sendo S_T o termo fonte (geração interna de calor), K a condutividade térmica e C_p o calor específico a pressão constante.

II.2. EQUAÇÃO GERAL DE TRANSPORTE

As equações de transporte vistas no item anterior descrevem fenômenos físicos similares e, portanto, são compostas de termos semelhantes. Este fato sugere escrevê-las de uma maneira geral, cuja forma para problemas em coordenadas cartesianas bidimensionais e em regime permanente é

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho U \phi) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho V \phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S_\phi \quad , \quad (\text{II-6})$$

onde ϕ está relacionado a alguma grandeza do escoamento (densidade, componentes do vetor velocidade, temperatura), Γ_ϕ é o coeficiente de difusão da grandeza em questão e S_ϕ é o termo fonte. Este último é responsável por acomodar todos aqueles termos que não se encaixam na forma apresentada pela Eq. (II-6), conhecida na literatura como **equação geral**

de transporte (EGT). A tabela a seguir contém os valores assumidos por ϕ , Γ_ϕ e S_ϕ para as grandezas resolvidas no presente trabalho.

Tab. II-1 Coeficientes de difusão e termos fontes da EGT.

ϕ	Γ_ϕ	S_ϕ
U	μ	$-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial V}{\partial x} \right)$
V	μ	$-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial V}{\partial y} \right)$
T	$\frac{K}{C_p}$	S_T

Os termos do lado esquerdo da Eq. (II-6) representam o balanço convectivo da variável ϕ e são os termos mais delicados para o tratamento numérico em problemas hidrodinâmicos devido às não-linearidades. Os dois primeiros termos do lado direito representam o balanço dos fluxos difusivos. O termo fonte é o responsável por acomodar todos aqueles termos que não se encaixam na forma apresentada pela Eq. (II-6), possibilitando estabelecer normas gerais para que sua solução possa ser estabelecida.

Vale lembrar que para o caso de escoamentos com μ e ρ constantes, os termos fontes viscosos se anulam ($s_U = s_V = 0$). Deste modo, os termos fontes para as velocidades simplificam-se em

$$s_U = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad , \quad s_V = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad . \quad (II-7)$$

Por último e apenas como um adendo, vale citar que na Tab. II-1 não foram apresentados os termos referentes à densidade ($\phi = 1$, $\Gamma_\phi = 0$, $S_\phi = 0$) por esta não ser uma grandeza resolvida uma vez que os escoamentos analisados são incompressíveis.

II.3. CONDIÇÕES DE CONTORNO

A solução da EGT para as grandezas do escoamento só é possível mediante a especificação das condições de contorno do problema em questão. Quatro diferentes tipos de condições de contorno foram implementados no programa que resolve escoamentos de fluidos: **(1) parede sólida**, **(2) linha de simetria**, **(3) perfil de entrada** ou **(4) perfil de saída**. A seleção e aplicação de um determinado tipo se faz conforme à geometria / física do problema de interesse investigado, como ilustra a Fig. II-1. O subscrito n refere-se à direção normal à fronteira e t refere-se à direção tangencial.

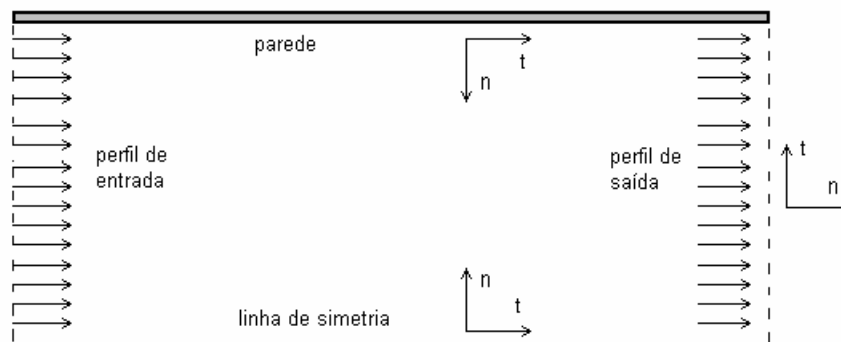


Fig. II-1 Condições de contorno implementadas nos problemas de escoamento.

Cada tipo de condição de contorno para as componentes da velocidade é sucintamente analisado a seguir. A discussão sobre a implementação numérica de cada um será vista no Capítulo III. No programa que resolve problemas térmicos somente a condição de valor prescrito na fronteira (condição de contorno de Dirichlet) foi implementada.

II.3.1. Parede sólida

Em escoamentos laminares, a condição de aderência é aplicada sobre paredes. Para superfícies impermeáveis, é atribuído o valor zero para ambas as componentes da velocidade.

II.3.2. Linha de simetria

Ao longo de uma linha de simetria são atribuídos valores nulos para o gradiente na direção normal da velocidade tangencial a ela e para a componente da velocidade normal à linha.

II.3.3. Perfil de entrada

Os perfis de entrada a serem prescritos podem ser extraídos de dados experimentais ou de outra forma de informação empírica. Por um outro lado, podem ser simplesmente arbitrados conforme o interesse ou a conveniência em relação ao problema analisado.

II.3.4. Perfil de saída

Quando o perfil de saída está suficientemente distante de regiões com recirculação, assume-se estar o escoamento totalmente desenvolvido. Deste modo, são desprezados os gradientes das velocidades na direção principal do escoamento.

constantes. As malhas resultantes são estruturadas e ortogonais, podendo ou não ser uniformes. Os pontos nodais localizam-se no centro do VC (esquema *cell-centered*) e são numerados a partir do canto inferior esquerdo. A existência de pontos nodais sobre as fronteiras do domínio (VC de dimensão nula) relaciona-se com a aplicação das condições de contorno. A Fig. III-2 mostra o esquema de um VC típico e apresenta em detalhe a nomenclatura de suas principais dimensões.

Há duas maneiras [1] de se obter as equações algébricas no método de volumes finitos. Em uma delas, as equações são obtidas através de balanços de conservação da grandeza no VC. Tal tarefa consiste basicamente em se escrever as taxas macroscópicas de acumulação, de transporte, de produção e de dissipação da propriedade no interior e nas faces do VC.

Contudo, a forma mais recomendada é partir da EGT na forma conservativa e integrá-la sobre o VC. Isto vem do fato de que nem todos os balanços são fáceis de se deduzir. Esta forma foi adotada no presente trabalho e suas linhas gerais são descritas na próxima seção.

Por fim, vale mencionar que as variáveis dependentes foram armazenadas segundo um *arranjo colocalizado*, o mesmo VC sendo usado para realizar a integração da EGT para todas as variáveis. De acordo com Patankar [2], no uso deste arranjo podem surgir problemas relacionados ao acoplamento pressão-velocidade e à detecção de campos oscilatórios. Um modo de evitá-los é pelo uso do arranjo desencontrado [1, 2]. O outro é realizar um esquema

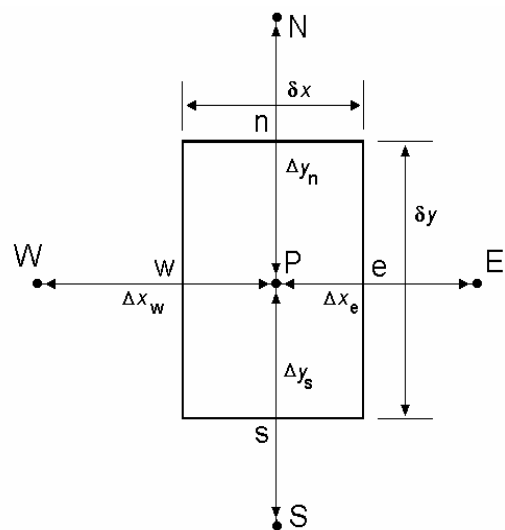


Fig. III-2 Esquema e nomenclatura de cada volume de controle.

especial de interpolação para se obter os valores das velocidades nas faces do VC. Este último procedimento foi aqui adotado e será descrito na seção III.5.

III.2. DISCRETIZAÇÃO DOS TERMOS DA EGT

A integração da EGT, Eq. (II-6), sobre um VC como o da Fig. III-2 faz-se segundo

$$\int_{\delta v} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho U \phi) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho V \phi) \right] dv = \int_{\delta v} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] dv + \int_{\delta v} S_{\phi} dv \quad (\text{III-1})$$

onde $\delta v = \delta x \delta y$ define a extensão do VC. O próximo passo é a discretização da Eq. (III-1) que será apresentada separadamente para os seguintes termos:

- termos convectivos (integral do lado esquerdo);
- termos difusivos (primeira integral do lado direito) e
- termo fonte (última integral do lado direito).

III.2.1. Discretização dos termos convectivos

A integração dos termos convectivos sobre o VC pode ser expressa na forma

$$\int_s^e \int_w^n \frac{\partial}{\partial x} (\rho U \phi) dx dy + \int_w^n \int_s^e \frac{\partial}{\partial y} (\rho V \phi) dy dx \quad (\text{III-2})$$

que após uma primeira integração fica

$$\int_s^n [(\rho U \phi)_e - (\rho U \phi)_w] dy + \int_w^n [(\rho V \phi)_n - (\rho V \phi)_s] dx \quad , \quad (\text{III-3})$$

onde os subscritos e , w , n , s representam as faces do VC sobre as quais as grandezas devem ser calculadas.

Aqui é feita então a hipótese de que a grandeza avaliada no meio da face do VC seja constante ao longo da mesma. Nestas condições, a integração resulta em

$$C_e \phi_e - C_w \phi_w + C_n \phi_n - C_s \phi_s \quad (\text{III-4})$$

onde

$$C_e = (\rho U)_e \delta y \quad , \quad C_w = (\rho U)_w \delta y \quad , \quad C_n = (\rho V)_n \delta x \quad , \quad C_s = (\rho V)_s \delta x \quad (\text{III-5})$$

são os fluxos mássicos através das faces do VC.

Neste ponto torna-se necessário introduzir um *esquema de interpolação* que permita o cálculo das grandezas e de suas derivadas nas interfaces do VC em função dos valores das mesmas em pontos nodais vizinhos. Em [1, 2] são encontrados e discutidos exemplos de diversos esquemas de interpolação: CDS - *central differencing scheme*, UDS - *upwind differencing scheme*, esquema exponencial, esquema híbrido e WUDS - *weighted upstream differencing scheme*, apenas para citar alguns.

No programa desenvolvido para a solução do problema térmico foi adotado o esquema WUDS, o qual será discutido no item III.2.3 por também abranger a discretização dos termos difusivos. Para problemas hidrodinâmicos, preservou-se o esquema originalmente adotado em [7] conhecido como *flux-blended deferred correction* [10], o qual faz uma combinação linear dos esquemas CDS e UDS, apresentado a seguir.

Tomando a face leste como exemplo, os valores sobre a mesma são calculados segundo

$$\phi_e = \lambda \phi_e^{\text{CDS}} + (1 - \lambda) \phi_e^{\text{UDS}} = \phi_e^{\text{UDS}} + \lambda (\phi_e^{\text{CDS}} - \phi_e^{\text{UDS}}) \quad (\text{III-6})$$

onde o fator de combinação λ varia entre 0 (UDS puro) e 1 (CDS puro). No procedimento numérico, o termo entre parênteses é calculado com valores oriundos do nível iterativo anterior (denotados com asterisco), fornecendo

$$\phi_e = \phi_e^{\text{UDS}} + \lambda (\phi_e^{\text{CDS}} - \phi_e^{\text{UDS}})^* \quad (\text{III-7})$$

Este procedimento torna a matriz dos coeficientes estritamente positiva e com predominância diagonal, o que é interessante do ponto de vista numérico [1, 2].

No esquema UDS, o valor da função na interface é igual ao valor da função no ponto nodal do VC à montante do escoamento. Este esquema é, portanto, fisicamente consistente para problemas convectivos, ou seja, de caráter parabólico. Matematicamente tem-se

$$\begin{aligned}
 C_e^* \phi_e &= \max[C_e^*, 0] \phi_P - \max[-C_e^*, 0] \phi_E \\
 C_w^* \phi_w &= \max[C_w^*, 0] \phi_W - \max[-C_w^*, 0] \phi_P \\
 C_n^* \phi_n &= \max[C_n^*, 0] \phi_P - \max[-C_n^*, 0] \phi_N \\
 C_s^* \phi_s &= \max[C_s^*, 0] \phi_S - \max[-C_s^*, 0] \phi_P
 \end{aligned} \tag{III-8}$$

O operador $\max[a,b]$ fornece o maior entre a e b .

Por outro lado, o esquema CDS é consistente para problemas de dominância difusiva, ou seja, de caráter elíptico. Um perfil linear por partes é utilizado para relacionar os pontos nodais vizinhos, matematicamente expresso por

$$\begin{aligned}
 \phi_e &= (1 - f_{x,P}) \phi_P + f_{x,P} \phi_E & \phi_w &= (1 - f_{x,W}) \phi_W + f_{x,W} \phi_P \\
 \phi_n &= (1 - f_{y,P}) \phi_P + f_{y,P} \phi_N & \phi_s &= (1 - f_{y,S}) \phi_S + f_{y,S} \phi_P
 \end{aligned} \tag{III-9}$$

onde os fatores de interpolação linear $f_{x,P}$, $f_{x,W}$, $f_{y,P}$, $f_{y,S}$ são calculados segundo

$$f_{x,P} = \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P}, \quad f_{x,W} = \frac{x_w - x_P}{x_P - x_W}, \quad f_{y,P} = \frac{y_n - y_P}{y_N - y_P}, \quad f_{y,S} = \frac{y_s - y_P}{y_P - y_S}. \tag{III-10}$$

III.2.2. Discretização dos termos difusivos

A integração dos termos difusivos sobre o VC é expressa por

$$\int_s^e \int_w^n \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy + \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dy dx. \tag{III-11}$$

Após uma primeira integração e pela hipótese de derivada constante ao longo da face, tem-se

$$\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e \delta y - \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_w \delta y + \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_n \delta x - \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_s \delta x \quad . \quad (\text{III-12})$$

Por fim, o esquema CDS é novamente utilizado para se calcular os gradientes nas faces do VC

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e &= \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_e} & \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_w &= \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_w} \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_n &= \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta y_n} & \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_s &= \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta y_s} \end{aligned} \quad . \quad (\text{III-13})$$

III.2.3. Discretização dos termos convectivos e difusivos - esquema WUDS

O esquema WUDS proposto por Raithby e Torrance [11] usa dois coeficientes α e β que servem como pesos entre os processos de convecção e difusão. Conforme mencionado, ele foi empregado no programa que resolve problemas térmicos. Tomando a face leste como exemplo, o valor da temperatura e de sua derivada na interface são aproximados por

$$T_e = \left(\frac{1}{2} + \alpha_e\right) T_P + \left(\frac{1}{2} - \alpha_e\right) T_E \quad \text{e} \quad \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_e = \beta_e \left(\frac{T_E - T_P}{\Delta x_e}\right) \quad (\text{III-14})$$

com os coeficientes sendo expressos por

$$\alpha_e = \frac{1}{2} - \frac{\exp(\text{Pe}_e/2) - 1}{\exp(\text{Pe}_e) - 1} \quad \text{e} \quad \beta_e = \text{Pe}_e \frac{\exp(\text{Pe}_e/2)}{\exp(\text{Pe}_e) - 1} \quad . \quad (\text{III-15})$$

O parâmetro Pe_e é o *número de Peclet* do VC, baseado na distância internodal Δx_e . Ele é avaliado com os valores do nível iterativo anterior segundo

$$\text{Pe}_e = \left. \frac{\rho U \Delta x}{K / C_p} \right|_e^* \quad (\text{III-16})$$

Para as demais faces são propostas expressões análogas às anteriores [1], com Pe calculado usando-se os valores das grandezas na interface e a respectiva distância internodal.

Contudo, as expressões para α e β dadas pelas Eqs. (III-15) acarretam dificuldades relacionadas com o tempo de computação para avaliar as exponenciais. Para contorná-las, Raithby [12] propõe as seguintes aproximações, aqui também adotadas,

$$\alpha_e = \frac{Pe_e^2}{10 + 2 Pe_e^2} \quad e \quad \beta_e = \frac{1 + 0.005 Pe_e^2}{1 + 0.05 Pe_e^2} \quad . \quad (III-17)$$

III.2.4. Discretização do termo fonte

Com base no teorema do valor médio, a integral do termo fonte é expressa como o produto de um valor médio (associado ao ponto nodal central) pelo volume do VC, ou seja,

$$\int_{\delta V} S_\phi dV = \bar{S}_\phi \delta V \approx S_{\phi,P} \delta V \quad . \quad (III-18)$$

Em casos onde, por exemplo, o termo fonte S_ϕ depende (linearmente ou não) da própria grandeza ϕ , recomenda-se [1, 2] proceder uma linearização da forma

$$S_{\phi,P} = S_c + S_P \phi_P \quad . \quad (III-19)$$

Por último, para obter soluções fisicamente realistas e por questões de estabilidade e convergência, é desejável manter o coeficiente S_P negativo. Contribuições positivas ao termo fonte devem ser incorporadas a S_c , conforme discutido em [1, 2].

III.2.5. Forma final da equação algébrica

Para obter a equação algébrica final para o ponto nodal P são introduzidas na EGT integrada sobre o VC, Eq. (III-1), todas as discretizações apresentadas nos itens III.2.1 a III.2.4. Após algumas manipulações algébricas, chega-se à equação algébrica

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + b \quad . \quad (III-20)$$

Para a discretização com base no esquema *flux-blended*, os coeficientes são dados por

$$\begin{aligned}
a_E &= \max[-C_e^*, 0] + \frac{\mu_e^* \delta y}{\Delta x_e} & a_W &= \max[C_w^*, 0] + \frac{\mu_w^* \delta y}{\Delta x_w} \\
a_N &= \max[-C_n^*, 0] + \frac{\mu_n^* \delta x}{\Delta y_n} & a_S &= \max[C_s^*, 0] + \frac{\mu_s^* \delta x}{\Delta y_s} \\
a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S - S_P \delta v
\end{aligned} \tag{III-21}$$

O termo b contém contribuições do termo fonte e do termo referente à *deferred correction*

$$b = S_c \delta v + \lambda (a_W^{DC} \phi_W^* + a_E^{DC} \phi_E^* + a_S^{DC} \phi_S^* + a_N^{DC} \phi_N^* - a_P^{DC} \phi_P^*) \tag{III-22}$$

onde os coeficientes desta última contribuição são dados por

$$\begin{aligned}
a_E^{DC} &= -\max[-C_e^*, 0] - C_e^* f_{x,P} & a_W^{DC} &= -\max[C_w^*, 0] + C_w^* (1 - f_{x,W}) \\
a_N^{DC} &= -\max[-C_n^*, 0] - C_n^* f_{y,P} & a_S^{DC} &= -\max[C_s^*, 0] + C_s^* (1 - f_{y,S}) \\
a_P^{DC} &= a_E^{DC} + a_W^{DC} + a_N^{DC} + a_S^{DC}
\end{aligned} \tag{III-23}$$

Por outro lado, para a discretização com base no esquema WUDS, os coeficientes são

$$\begin{aligned}
a_E &= -\left(\frac{1}{2} - \alpha_e\right) C_e^* + \frac{\beta_e (K/C_p)_e^* \delta y}{\Delta x_e} & a_W &= \left(\frac{1}{2} + \alpha_w\right) C_w^* + \frac{\beta_w (K/C_p)_w^* \delta y}{\Delta x_w} \\
a_N &= -\left(\frac{1}{2} - \alpha_n\right) C_n^* + \frac{\beta_n (K/C_p)_n^* \delta x}{\Delta y_n} & a_S &= \left(\frac{1}{2} + \alpha_s\right) C_s^* + \frac{\beta_s (K/C_p)_s^* \delta x}{\Delta y_s} \\
a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S - S_P \delta v & b &= S_c \delta v
\end{aligned} \tag{III-24}$$

III.3. TRATAMENTO DOS TERMOS FONTES

A Tab. II-1 apresenta os termos fontes na EGT para cada grandeza resolvida pelos programas. O tratamento dado a cada um destes termos é discutido a seguir.

III.3.1. Termo fonte da EGT para a quantidade de movimento

Os termos fontes nas equações discretizadas para a quantidade de movimento recebem contribuições do gradiente de pressão e dos termos viscosos. Estes últimos, contudo, não

foram considerados pois se anulam para escoamentos com ρ e μ constantes, nos quais os escoamentos estudados no presente trabalho estão enquadrados.

Na direção x , a integração do gradiente de pressão sobre o VC da Fig. III-2 leva à

$$-\int_{\delta v} \frac{\partial P}{\partial x} dv = -\int_n^s \int_w^e \frac{\partial P}{\partial x} dx dy = -(P_e - P_w) \delta y \quad (\text{III-25})$$

onde P_e e P_w são os valores da pressão nas faces leste e oeste, respectivamente, e são relacionados com os valores armazenados nos pontos nodais segundo uma interpolação linear

$$P_e = (1 - f_{x,P}) P_P + f_{x,P} P_E \quad , \quad P_w = (1 - f_{x,W}) P_W + f_{x,W} P_P \quad . \quad (\text{III-26})$$

Nas faces coincidentes com as fronteiras do domínio, os valores da pressão são obtidos por extrapolação linear dos valores em pontos nodais vizinhos anteriores

$$P_e = P_P + (P_P - P_W)(1 - f_{x,W}) \quad , \quad P_w = P_P - (P_E - P_P)f_{x,P} \quad . \quad (\text{III-27})$$

Analogamente, para a direção y tem-se

$$-\int_{\delta v} \frac{\partial P}{\partial y} dv = -(P_n - P_s) \delta x \quad (\text{III-28})$$

com

$$\text{pontos internos:} \quad P_n = (1 - f_{y,P}) P_P + f_{y,P} P_N \quad , \quad P_s = (1 - f_{y,S}) P_S + f_{y,S} P_P \quad (\text{III-29})$$

$$\text{pontos de fronteira:} \quad P_n = P_P + (P_P - P_S)(1 - f_{y,S}) \quad , \quad P_s = P_P - (P_N - P_P)f_{y,P} \quad (\text{III-30})$$

Com relação à Eq. (III-19), as contribuições ao termo fonte devido aos gradientes de pressão são guardadas em $S_c \delta v$ e faz-se $S_p = 0$.

III.3.2. Termo fonte da EGT para a energia

No problema estudado não foram consideradas fontes internas de calor. Assim, $S_T = 0$.

III.4. TRATAMENTO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

Com base no que foi discutido no capítulo anterior, a Tab. III-1 resume a forma como as condições de contorno são aplicadas. Para as componentes da velocidade, os subscritos n e t referem-se às direções normal e tangencial à fronteira, respectivamente. Nos itens seguintes é apresentada a implementação destas condições de contorno para a fronteira sul (subscrito s), primeiramente para o esquema *flux-blended* (para U e V) e em seguida para o esquema WUDS (para T). A implementação para as demais faces pode ser inferida por analogia. No problema térmico estudado somente foi empregada a condição de valor prescrito na fronteira, constando na Tab. III-1 como condição de contorno de perfil de entrada.

Tab. III-1 Resumo das condições de contorno implementadas.

Tipo de fronteira	condição de contorno
superfície sólida	$U_t = U_n = 0$
linha de simetria	$\frac{\partial U_t}{\partial n} = U_n = 0$
perfil de entrada	perfis fornecidos: U_t, U_n, T
perfil de saída	$\frac{\partial U_t}{\partial n} = \frac{\partial U_n}{\partial n} = 0$

III.4.1. Superfície sólida

Pela condição de aderência e impermeabilidade, ambas as componentes da velocidade e o fluxo mássico normal são nulos ao longo da parede, $U_s = V_s = C_s^* = 0$. Assim, também é nula a contribuição ao termo convectivo na equação para ambas as velocidades, Eq. (III-8). Para a velocidade tangencial, a contribuição ao termo difusivo, Eq. (III-12), é aproximada por

$$\mu_s^* \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_s \delta x \approx \mu_s^* \frac{U_P - U_s}{\delta y / 2} \delta x = \frac{\mu_s^* \delta x}{\delta y / 2} U_P \quad , \quad (\text{III-31})$$

enquanto que para a velocidade normal tal contribuição se anula pelo fato de $(\partial V / \partial y)_s = 0$ pela equação da continuidade. Por estas considerações, na Eq. (III-20) para a velocidade tangencial são introduzidas as modificações

$$U_S = U_s = 0 \quad a_s = \frac{\mu_s^* \delta x}{\delta y / 2} \quad , \quad (\text{III-32})$$

enquanto que para a velocidade normal as modificações são

$$V_S = V_s = 0 \quad a_s = 0 \quad . \quad (\text{III-33})$$

III.4.2. Linha de simetria

Como a velocidade normal V_s à linha de simetria é nula, o fluxo convectivo se anula para todas as grandezas do escoamento. Embora $V_s = 0$, seu gradiente normal não precisa ser necessariamente nulo também e pode ser aproximado de maneira análoga à Eq. (III-31), levando às seguintes modificações

$$V_S = V_s = 0 \quad a_s = \frac{\mu_s^* \delta x}{\delta y / 2} \quad . \quad (\text{III-34})$$

Como o gradiente normal de U é nulo, as modificações necessárias são

$$U_S = U_P \quad a_s = 0 \quad . \quad (\text{III-35})$$

III.4.3. Perfil de entrada

Os valores prescritos às variáveis no perfil de entrada são atribuídos aos pontos nodais, enquanto que os fluxos difusivos são aproximados segundo a Eq. (III-31). Assim,

$$U_S = U_{\text{entrada}} \quad V_S = V_{\text{entrada}} \quad a_s = \frac{\mu_s^* \delta x}{\delta y / 2} \quad . \quad (\text{III-36})$$

III.4.4. Perfil de saída

Do ponto de vista computacional, a implementação das condições de contorno de saída é idêntica àquela utilizada para a condição de simetria, com exceção à componente normal da velocidade, cujo gradiente passa agora a ser nulo também. Assim, deve-se fazer

$$U_S = U_P \quad , \quad V_S = V_P \quad , \quad a_S = 0 \quad (\text{em ambas equações}) \quad . \quad (\text{III-37})$$

Além disso os fluxos mássicos de saída são corrigidos em relação aos fluxos de entrada de modo a preservar a conservação de massa no interior do domínio:

$$C_{\text{saída}} = cf \cdot C_{\text{saída}}^* \quad , \quad cf = \frac{\dot{m}_{\text{entrada}}}{\dot{m}_{\text{saída}}} \quad (\text{III-38})$$

onde \dot{m}_{entrada} e $\dot{m}_{\text{saída}}$ correspondem respectivamente ao somatório de todos os fluxos mássicos de entrada e de saída pelas fronteiras do domínio.

III.4.5. Tratamento para esquema WUDS

Em resumo, as condições de contorno para as equações obtidas por meio do esquema WUDS são implementadas observando-se o tipo de condição matemática exigida. Será tomada novamente como exemplo a fronteira sul, podendo as demais serem inferidas por analogia.

A condição de contorno implementada é a de Dirichlet (valor prescrito, mesmo que nulo). Assim, na Eq. (III-20) escrita para a temperatura, deve-se introduzir o valor $T_S = T_s$, o qual é obtido impondo-se $\alpha_s = 1/2$ na expressão para T_s

$$T_s = \left(\frac{1}{2} + \alpha_s\right) T_S + \left(\frac{1}{2} - \alpha_s\right) T_P \quad . \quad (\text{III-39})$$

Por sua vez, β_s é avaliado com Pe_s sendo calculado com $\Delta y_s = \delta y / 2$. Os novos valores destes dois parâmetros são então levados às Eq. (III-24).

III.5. ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE

Segundo Patankar [2], a maior dificuldade no cálculo do campo de velocidade em escoamentos incompressíveis relaciona-se ao cálculo do campo de pressão, pois não há uma equação direta para esta grandeza. No entanto, ele pode ser especificado indiretamente através da equação da continuidade. Quando o campo correto de pressão é substituído nas equações da quantidade de movimento, o campo de velocidade daí resultante satisfaz a continuidade.

O acoplamento pressão-velocidade aqui adotado é baseado no algoritmo SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*) desenvolvido por Patankar e Spalding [13]. O algoritmo é composto das seguintes etapas:

- a) Valores iniciais das grandezas são estimados a fim de se avaliar os coeficientes (fluxos convectivos e difusivos) das EGTs na forma discretizada e as diferenças de pressão.
- b) As equações da quantidade de movimento são montadas e relaxadas, resultando nos campos U^* e V^* . Como a aproximação inicial do campo de pressão P^* é provavelmente incorreta, estas velocidades não satisfazem a continuidade.
- c) A partir da equação da continuidade e das equações da quantidade de movimento, é derivada uma equação que forneça um campo de pressão corrigido P , cuja obtenção resulta em correções às velocidades, de modo a satisfazer a continuidade.
- d) Caso estejam sendo resolvidas, as demais grandezas do escoamento são agora tratadas.
- e) O novo valor P é tido como uma nova aproximação P^* e o algoritmo é retomado a partir do passo (b), até atingir a convergência.

III.5.1. Equação de correção da pressão

A equação da continuidade discretizada pode ser colocada na forma

$$\rho_e U_e \delta y - \rho_w U_w \delta y + \rho_n V_n \delta x - \rho_s V_s \delta x = 0 \quad . \quad (\text{III-40})$$

A introdução das velocidades U^* e V^* , conforme o passo (b), faz com que a continuidade não seja mais satisfeita, produzindo uma fonte de massa S_m

$$\rho_e U_e^* \delta y - \rho_w U_w^* \delta y + \rho_n V_n^* \delta x - \rho_s V_s^* \delta x = S_m \quad . \quad (\text{III-41})$$

Neste ponto é importante discutir o esquema de interpolação empregado na determinação das velocidades nas faces U_e^* , U_w^* , V_n^* e V_s^* . A razão é que para um arranjo colocalizado de variáveis (que é o caso), a aplicação direta da interpolação linear leva ao desacoplamento da velocidade com a pressão e a possíveis soluções oscilatórias [2]. A seguir é apresentada a determinação de U_e^* , sendo análogas as expressões para as demais faces.

As equações das quantidades de movimento para os pontos nodais P e E, com base na Eq. (III-20) escritas com os termos fontes b^P e b^E expandidos, ficam na forma

$$\begin{aligned} a_p^P U_p^* &= \sum_{vz} a_{vz}^P U_{vz}^* + s_U^P - \delta y (P_e^* - P_w^*) \\ a_p^E U_e^* &= \sum_{vz} a_{vz}^E U_{vz}^* + s_U^E - \delta y (P_{ee}^* - P_e^*) \end{aligned} \quad . \quad (\text{III-42})$$

O índice do somatório vz cobre os pontos nodais vizinhos a oeste, leste, sul e norte e os termos s_U^P e s_U^E correspondem aos termos fontes viscosos já discretizados. (Vale lembrar que os mesmos se anulam para o tipo de escoamento aqui considerado; este fato porém não prejudica as manipulações algébricas apresentadas a seguir, tornando-as gerais.)

A velocidade U_e^* é obtida interpolando-se linearmente todos os termos nas Eqs. (III-42), exceto a diferença de pressão que é avaliada segundo uma malha desencontrada, donde

$$U_e^* = \frac{\sum_{vz} a_{vz} U_{vz}^* + s_U}{a_p} \Bigg|_e - \frac{\delta y}{(a_p)_e} (P_E^* - P_P^*) \quad . \quad (\text{III-43})$$

A interpolação do primeiro termo do lado direito da equação acima pode ser feita com o auxílio das Eqs. (III-42), de modo que a expressão final para U_e^* fica

$$U_e^* = (1 - f_{x,P}) \left[U_P^* + \frac{\delta y}{a_P} (P_e^* - P_w^*) \right] + f_{x,P} \left[U_E^* + \frac{\delta y}{a_P^E} (P_{ee}^* - P_e^*) \right] - \frac{\delta y (P_E^* - P_P^*)}{(1 - f_{x,P}) a_P^P + f_{x,P} a_P^E} \quad (\text{III-44})$$

A inserção das velocidades interpoladas para as faces na Eq. (III-41) permite o cálculo da fonte de massa S_m . Assim, correções para a velocidade e para a pressão devem ser obtidas com vistas a satisfazer a continuidade. As correções para a velocidade são da forma

$$\rho_e (U_e^* + U_e') \delta y - \rho_w (U_w^* + U_w') \delta y + \rho_n (V_n^* + V_n') \delta x - \rho_s (V_s^* + V_s') \delta x = 0 \quad (\text{III-45})$$

que, com o auxílio da própria Eq. (III-41), pode ser rescrita segundo

$$\rho_e U_e' \delta y - \rho_w U_w' \delta y + \rho_n V_n' \delta x - \rho_s V_s' \delta x = -S_m \quad (\text{III-46})$$

No passo seguinte, as correções para a velocidade são relacionadas com as correções para a pressão. Para tanto, são utilizadas as equações da quantidade de movimento na forma discretizada, resultando em uma expressão semelhante à Eq. (III-43), a saber

$$U_e' = \frac{\sum_{vz} a_{vz} U'_{vz} + s'_U}{a_P} \Big|_e - \frac{\delta y}{(a_P)_e} (P'_E - P'_P) \quad (\text{III-47})$$

No algoritmo SIMPLE, são desprezados os efeitos (implícitos) das correções para a velocidade nos pontos vizinhos, simplificando a expressão acima para

$$U_e' = -\frac{\delta y}{(a_P)_e} (P'_E - P'_P) \quad (\text{III-48})$$

As demais correções podem ser escritas de forma análoga. Inserindo as Eqs. (III-48) na Eq. (III-46) resulta na equação para a correção da pressão

$$a_P P'_P = a_W P'_W + a_E P'_E + a_S P'_S + a_N P'_N - S_m \quad (\text{III-49})$$

com

$$a_w = \frac{\rho_w \delta y^2}{(a_p)_w} \quad a_e = \frac{\rho_e \delta y^2}{(a_p)_e} \quad a_s = \frac{\rho_s \delta x^2}{(a_p)_s} \quad a_n = \frac{\rho_n \delta x^2}{(a_p)_n} \quad . \quad (\text{III-50})$$

$$a_p = a_w + a_e + a_s + a_n$$

III.5.2. Condições de contorno para a equação da correção da pressão

As condições de contorno aplicadas dizem respeito a valores conhecidos para as velocidades normais. Tal é o caso dos tipos de condições implementadas: paredes sólidas, linhas de simetria e perfis de entrada / saída. Nestas circunstâncias, a velocidade normal não precisa ser corrigida.

Considerando por exemplo a fronteira sul, deve-se impor $V'_s = 0$, de modo que a Eq. (III-46) fica na forma

$$\rho_e U'_e \delta y - \rho_w U'_w \delta y + \rho_n V'_n \delta x = -S_m \quad . \quad (\text{III-51})$$

Introduzindo na relação acima as expressões para as correções para a velocidade, Eq. (III-48), chega-se à equação da correção para a pressão, desta vez porém com $a_s = 0$. Do ponto de vista de implementação numérica, tal situação corresponde a uma condição de contorno de von Neumann de gradiente nulo. Expressões análogas podem ser obtidas para as demais fronteiras.

III.5.3. Atualização da pressão, das velocidades e dos fluxos mássicos

Após a equação da correção da pressão ter sido relaxada, a pressão em si, as componentes da velocidade e os fluxos mássicos são atualizados segundo

$$P_p = P_p^* + P'_p$$

$$U_p = U_p^* - \frac{\delta y}{a_p} (P'_e - P'_w) \quad V_p = V_p^* - \frac{\delta x}{a_p} (P'_n - P'_s) \quad (\text{III-52})$$

$$C_e = C_e^* - \frac{\rho_e \delta y^2}{(a_p)_e} (P'_E - P'_P) \quad C_n = C_n^* - \frac{\rho_n \delta x^2}{(a_p)_n} (P'_N - P'_P)$$

Estes novos valores satisfazem a conservação de massa mas não mais satisfazem as equações da quantidade de movimento e servem como aproximação inicial para o próximo passo iterativo.

III.6. PARÂMETROS DE SUB-RELAXAÇÃO

Em virtude da não-linearidade das equações para a quantidade de movimento, do acoplamento pressão-velocidade e do fato de alguns termos serem desprezados na dedução da equação para a correção da pressão, o algoritmo SIMPLE pode divergir caso não seja empregada alguma forma de sub-relaxação. A prática adotada no presente trabalho segue aquela existente no pacote computacional original [7].

Ao invés da Eq. (III-52), a pressão é corrigida segundo

$$P_p = P_p^* + \xi_p P_p' \quad (\text{III-53})$$

onde ξ_p é o fator de sub-relaxação para a pressão.

Para as componentes da velocidade, a Eq. (III-20) é rescrita adicionando-se e subtraindo-se em seu lado direito o valor ϕ_p^* oriundo da iteração anterior

$$\phi_p = \phi_p^* + \left(\frac{\sum_{vz} a_{vz} \phi_{vz} + b_p}{a_p} - \phi_p^* \right) . \quad (\text{III-54})$$

Ao termo entre parênteses, que representa a variação de ϕ_p por iteração, é então aplicado um fator de sub-relaxação ξ_ϕ (ou seja, ξ_U e ξ_V) de modo a ter

$$\phi_p = \phi_p^* + \xi_\phi \left(\frac{\sum_{vz} a_{vz} \phi_{vz} + b_p}{a_p} - \phi_p^* \right) \quad (\text{III-55})$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{a_P}{\xi_\phi} \phi_P = \sum_{vz} a_{vz} \phi_{vz} + b_P + (1 - \xi_\phi) \frac{a_P}{\xi_\phi} \phi_P^* \quad . \quad (\text{III-56})$$

Este mesmo tipo de sub-relaxação é também sugerida em [2].

IV. O MÉTODO MULTIGRID

IV.1. A FILOSOFIA DO MÉTODO MULTIGRID

No capítulo anterior foi apresentado o procedimento de discretização da EGT aplicado a cada grandeza do escoamento com vistas a obter as equações algébricas a serem resolvidas computacionalmente. A equação algébrica resultante para um dado ponto nodal (no centro do respectivo VC) pode ser colocada de um modo geral na forma sugerida pela Eq.(III-20), mas aqui ela é rescrita na forma

$$a_P \phi^{ij} - a_W \phi^{i-1j} - a_E \phi^{i+1j} - a_S \phi^{ij-1} - a_N \phi^{ij+1} = b^{ij} \quad . \quad (IV-1)$$

Os índices i e j localizam na malha o ponto nodal nas direções x e y respectivamente.

Promovendo a varredura de todos os índices i e j , as Eqs. (IV-1) resultantes formam um sistema de equações algébricas expresso na forma matricial por

$$\mathbf{A}_k \boldsymbol{\Phi}_k = \mathbf{b}_k \quad , \quad (IV-2)$$

onde \mathbf{A}_k é a chamada *matriz dos coeficientes*, $\boldsymbol{\Phi}_k$ é a *matriz das incógnitas* e \mathbf{b}_k é a matriz que acomoda os termos fontes. O índice k refere-se ao nível de malha em questão. Quando o sistema é resolvido em apenas uma malha, este índice torna-se desnecessário.

A solução do sistema (IV-2) pode se dar através da aplicação de algum método iterativo. Em métodos clássicos como o de Jacobi, o de Gauss-Seidel ou o TDMA - *TriDiagonal Matrix Algorithm* [1, 2], a velocidade de convergência da solução numérica é elevada no início dos cálculos, decaindo sensivelmente à medida que o processo iterativo evolui. Tal comportamento é explicado através de uma análise espectral (ou de Fourier).

Um parâmetro importante é o *raio espectral* (de uma dada matriz \mathbf{A}), definido como

$$\eta(\mathbf{A}) = \max \{ |\phi| : \phi \in \sigma(\mathbf{A}) \} \quad (IV-3)$$

onde $\sigma(\mathbf{A}) = \{\varphi \in \mathbb{C} : \varphi \text{ é um autovalor de } \mathbf{A}\}$ é o espectro de \mathbf{A} . Outra definição fundamental é a *taxa de convergência*, dada pelo raio espectral $\eta(\mathbf{M}_k)$, onde \mathbf{M}_k é a chamada *matriz de iteração*, a qual está relacionada à matriz dos coeficientes \mathbf{A}_k e ao espaçamento da malha [3]. A relevância desta taxa está no fato de ela governar o comportamento dos erros durante o processo iterativo.

Mostra-se, com base na taxa de convergência, que métodos iterativos clássicos são eficientes somente na *suavização*, isto é, na remoção de componentes de Fourier do erro de altas frequências, o mesmo não ocorrendo para o espectro de baixas frequências [3, 4, 5]. A Fig. IV-1 procura ilustrar este comportamento [5].

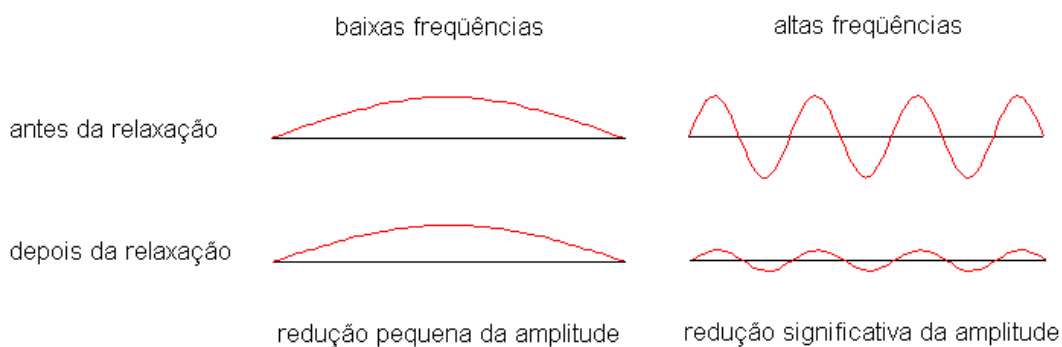


Fig. IV-1 Comportamento de componentes do erro em métodos iterativos de suavização.

Conclui-se, pois, que as componentes do erro de baixas frequências são as responsáveis pela lenta convergência demonstrada pelos processos iterativos que usam um único nível de malha. Como as componentes de altas frequências são aquelas cujos comprimentos de onda são menores que ou comparáveis ao espaçamento da malha computacional, a taxa de convergência cai conforme a mesma se torna mais refinada.

A filosofia do método *multigrid* baseia-se na premissa de que cada faixa de frequência do erro deve ser suavizada no espaçamento mais adequado para tal. Para que as componentes

do erro de longos comprimentos de onda (baixas frequências) possam ser eliminados com eficiência, o método *multigrid* procura trabalhar não com uma única malha, mas com uma seqüência de malhas cada vez mais grossas. Assim, comprimentos de onda que são longos em malhas finas, são transformados em curtos em malhas grossas, onde então o erro pode ser rapidamente suavizado. Em cada nível de malha, as componentes do erro correspondentes são eficientemente reduzidas, acelerando o processo de convergência.

Dependendo de como o sistema de equações algébricas é operado nas malhas mais grossas, há dois modos de se construir o algoritmo *multigrid*: na formulação *correction storage* (CS) e na formulação *full approximation storage* (FAS). Em [14] são mostradas as operações necessárias para se migrar do CS ao FAS. Para problemas lineares, recomenda-se o uso do CS, enquanto que o FAS é mais adequado para situações não lineares [4, 14, 15]. Ainda assim, Jiang *et al.* [16] relataram ter obtido bons resultados com a aplicação do método *multigrid* CS na solução de alguns problemas bidimensionais de mecânica dos fluidos.

Conforme poderá ser verificado logo adiante, a maior vantagem do algoritmo *multigrid* CS frente ao FAS é que, quando da passagem de uma malha fina para uma mais grossa (operação de *restrição*), requer-se apenas a manipulação dos resíduos das equações na malha fina, não se requerendo também a manipulação das grandezas. Computacionalmente, a restrição dos resíduos é bem mais simples do que a restrição das grandezas e o algoritmo então torna-se de fácil implementação. Desta forma, optou-se neste trabalho pela formulação CS.

IV.2. CORRECTION STORAGE - CS

Neste esquema, procura-se obter nas malhas grossas (isto é, em todas as malhas exceto a mais fina) aproximações para a *correção* da grandeza do escoamento, sendo esta última

resolvida unicamente na malha mais fina. Em outras palavras, Φ_k na malha mais fina guarda aproximações da própria grandeza enquanto que nas demais guarda aproximações da sua correção (donde o nome *correction storage*).

Após um certo número de iterações aplicadas ao sistema (IV-2), obtém-se uma aproximação $\bar{\Phi}_k$, acompanhada da respectiva correção ϕ_k

$$\phi_k = \Phi_k - \bar{\Phi}_k \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_k = \bar{\Phi}_k + \phi_k \quad . \quad (IV-4)$$

O *resíduo* r_k é definido como sendo

$$r_k = b_k - A_k \bar{\Phi}_k \quad . \quad (IV-5)$$

Inserindo a Eq. (IV-4) na Eq. (IV-2) e levando em conta a definição (IV-5) e mostra-se que a correção ϕ_k é a solução de

$$A_k \phi_k = r_k \quad , \quad (IV-6)$$

a qual tem a mesma forma que a Eq. (IV-2). A solução exata da Eq. (IV-6) é tão difícil quanto a da Eq. (IV-2). Contudo, ϕ_k pode ser melhor aproximada que Φ_k [3]. Tal aproximação é realizada nas malhas mais grossas

$$A_{k-1} \phi_{k-1} = r_{k-1} \quad , \quad (IV-7)$$

onde r_{k-1} é obtido segundo

$$r_{k-1} = I_k^{k-1} r_k \quad . \quad (IV-8)$$

O operador I_k^{k-1} , denominado *restrição*, leva valores da malha k para a malha $k-1$ e será discutido em item posterior.

Na malha mais grossa ($k = 1$), recomenda-se [3] que a Eq. (IV-7) seja resolvida exatamente ou que nela seja aplicado um número bem maior de iterações. Por envolver um número expressivamente menor de VCs e, portanto, corresponder ao menor sistema de equações, tal procedimento não compromete muito o esforço computacional.

Após obtida, a aproximação da correção $\bar{\phi}_{k-1}$ em malha grossa é levada de volta para malhas mais finas através do operador *prolongamento* I_{k-1}^k (também discutido adiante)

$$\bar{\phi}_k = I_{k-1}^k \bar{\phi}_{k-1} \quad , \quad (\text{IV-9})$$

de forma a refinar a aproximação $\bar{\Phi}_k$ segundo

$$\Phi_k^{\text{new}} = \bar{\Phi}_k + \bar{\phi}_k \quad . \quad (\text{IV-10})$$

De um modo abrangente, todo o procedimento pode ser resumido na expressão

$$\Phi_k^{\text{new}} = \bar{\Phi}_k + I_{k-1}^k \mathbf{A}_{k-1}^{-1} I_k^{k-1} (\mathbf{b}_k - \mathbf{A}_k \bar{\Phi}_k) \quad . \quad (\text{IV-11})$$

Em [4] é discutida a melhor aplicabilidade desta formulação para problemas lineares.

IV.3. FULL APPROXIMATION STORAGE - FAS

Nesta formulação, ao invés de se guardar nas malhas grossas correções para a grandeza do escoamento, a idéia é continuar guardando em Φ_{k-1} a aproximação da própria grandeza.

Novamente parte-se da equação para a correção, Eq. (IV-6), porém escrita na forma

$$\mathbf{A}_k \Phi_k - \mathbf{A}_k \bar{\Phi}_k = \mathbf{r}_k \quad , \quad (\text{IV-12})$$

cuja aproximação em malha grossa se faz segundo

$$\mathbf{A}_{k-1} \Phi_{k-1} - \mathbf{A}_{k-1} \bar{\Phi}_{k-1} = \mathbf{r}_{k-1} \quad , \quad (\text{IV-13})$$

sendo este o sistema a ser resolvido neste nível. A exemplo de \mathbf{r}_{k-1} , Eq. (IV-8), a aproximação da grandeza na malha grossa é dada por

$$\bar{\Phi}_{k-1} = I_k^{k-1} \bar{\Phi}_k \quad . \quad (\text{IV-14})$$

Vê-se que, em contraste ao CS, não apenas o resíduo mas também a aproximação da grandeza deve ser restringida. Porém, os operadores de restrição aplicados a cada um não são necessariamente os mesmos [5, 14].

No procedimento de prolongamento deve-se lembrar que em última instância é a correção que está sendo suavizada. Assim, após obtido um novo valor $\bar{\Phi}_{k-1}^{new}$, a correção a ser prolongada é dada por

$$\bar{\phi}_{k-1} = \bar{\Phi}_{k-1}^{new} - \bar{\Phi}_{k-1} \quad , \quad (IV-15)$$

de modo que na malha fina a atualização da aproximação é feita segundo

$$\bar{\Phi}_k^{new} = \bar{\Phi}_k + \bar{\phi}_k = \bar{\Phi}_k + I_{k-1}^k \bar{\phi}_{k-1} \quad . \quad (IV-16)$$

Com o auxílio das Eqs. (IV-14) e (IV-15), a equação acima é rescrita na forma comumente encontrada na literatura [4, 6, 15, 17]

$$\bar{\Phi}_k^{new} = \bar{\Phi}_k + I_{k-1}^k (\bar{\Phi}_{k-1}^{new} - I_k^{k-1} \bar{\Phi}_k) \quad . \quad (IV-17)$$

Em [4] é discutida a melhor aplicabilidade desta formulação para problemas não-lineares.

IV.4. PROCEDIMENTOS DE MUDANÇA DE NÍVEL MALHA

Conforme discutido nos itens anteriores, no algoritmo *multigrid* é necessário realizar a transferência de valores entre os diferentes níveis de malha como também ter disponível a matriz dos coeficientes \mathbf{A}_k e as coordenadas x e y da malha em todos estes níveis. Os procedimentos envolvidos em cada uma destas operações são apresentados a seguir.

IV.4.1. Transferência de valores

A transferência de valores entre as malhas se dá mediante o uso de operadores de interpolação. Quando a transferência é no sentido “fina-para-grossa” (k para $k-1$), utiliza-se o operador de *restrição* (I_k^{k-1}); quando a transferência se dá no sentido oposto ($k-1$ para k), o operador empregado é o de *prolongamento* (I_{k-1}^k).

Uma forma de interpolação via de regra empregada na literatura [6, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21] é a *interpolação bilinear*. Em algumas destas referências, este operador está definido para uma malha uniforme (espaçamento igual entre os pontos nodais), o que lhe confere uma forma invariante. No presente trabalho porém, em que se procurou também utilizar malhas não-uniformes, optou-se pelo emprego deste operador em uma situação genérica.

Do ponto de vista computacional, a idéia é construir uma malha intermediária entre as malhas fina e grossa. Esta malha auxiliar define um novo conjunto de pontos nodais, onde ficam armazenados temporariamente os valores Φ_{aux} resultantes da aplicação do operador I sobre Φ segundo uma *única* direção coordenada. Em seguida, o operador é aplicado sobre Φ_{aux} segundo a direção coordenada remanescente para obter Φ na nova malha interpolada.

A Fig. IV-2 procura ilustrar esta seqüência de operações na restrição e no prolongamento.

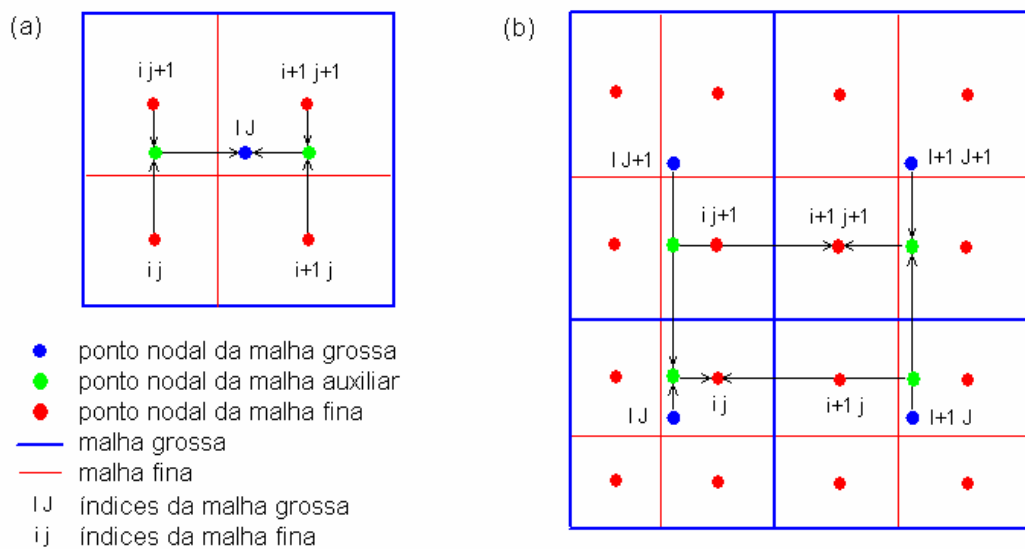


Fig. IV-2 Esquema dos procedimentos de restrição (a) e de prolongamento (b).

Vale ressaltar que a operação esquematizada em (a) não é aplicada para realizar a restrição do resíduo, Eq. (IV-8), mas apenas das aproximações das grandezas, Eq. (IV-14). Conseqüentemente, ela se torna desnecessária para o algoritmo *multigrid* na formulação CS.

Considerando a malha auxiliar já construída, a operação de prolongamento para se obter os valores na malha fina é realizada através da expressão

$$\phi_k^{ij} = (1 - f) \phi_{k-1}^{lj} + f \phi_{k-1}^{l+1j} \quad (\text{IV-18})$$

onde o fator de interpolação linear f , com base no esquema exibido na Fig. IV-3 (cuja simbologia e nomenclatura seguem as da Fig. IV-2), é dado por

$$f = \frac{\Delta x}{\Delta X} = \frac{x_{i-1} - x_{i-2}}{x_{i+2} - x_{i-2}} \quad (\text{IV-19})$$

As coordenadas x na Fig. IV-3 e na Eq. (IV-19) referem-se à malha fina.

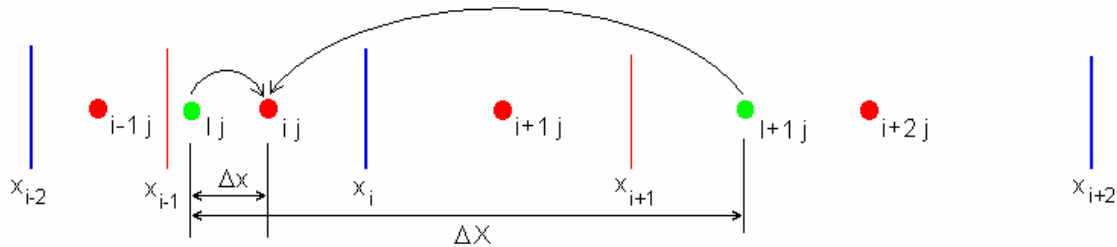


Fig. IV-3 Detalhes do procedimento de prolongamento.

O cálculo de f de acordo com o exemplo acima é um caso particular, onde o índice i é um número ímpar devido à existência de VCs de dimensões nulas (ver Fig. III-1). A generalização pode ser feita segundo

$$f = \frac{x_{i-1+ii} - x_{i-2-ii}}{x_{i+2-ii} - x_{i-2-ii}} \quad (\text{IV-20})$$

onde o índice ii acrescentado é definido por

$$ii = \text{mod}(i-1, 2) \quad (\text{IV-21})$$

O operador $\text{mod}(a, b)$ devolve o resto da divisão de a por b , ambos sendo números inteiros. Além disso, o índice I na Eq. (IV-18) referente à malha grossa é calculado segundo

$$I = \frac{i+1}{2} \quad (\text{IV-22})$$

sendo esta operação realizada em aritmética de números inteiros.

A malha auxiliar é obtida a partir da malha grossa de modo análogo, aplicado porém na direção y . A vantagem deste procedimento é que ele pode ser estendido para uma situação tridimensional, uma vez que cada direção é tratada separadamente.

A prática utilizada na restrição do resíduo é simplesmente compor o resíduo do VC da malha grossa somando-se os resíduos dos 4 VCs da malha fina que o compõem [16, 17, 18, 19, 20, 22], segundo um esquema semelhante ao da Fig. IV-2(a) (mas sem a necessidade de construir uma malha auxiliar). Matematicamente esta operação é expressa por

$$r_{k-1}^{IJ} = r_k^{ij} + r_k^{i,j+1} + r_k^{i+1,j} + r_k^{i+1,j+1} \quad . \quad (IV-23)$$

A razão disso é que as equações algébricas obtidas através da formulação em volumes finitos representam o balanço dos fluxos através das faces do VC e das fontes integradas no seu interior. Deste modo, a equação de balanço na malha grossa é equivalente à soma das quatro equações de balanço dos VCs de malha fina correspondentes. Vê-se assim que a restrição do resíduo é bem mais simples e direta que a restrição das grandezas, sendo esta a principal vantagem da formulação CS frente à formulação FAS.

Vale aqui citar o modo de como as grandezas Φ_k foram armazenadas para todos os níveis k . Primeiramente os índices i e j foram condensados em um único índice ij segundo um procedimento idêntico ao que é adotado em [7], permitindo o armazenamento em um vetor unidimensional. Em seguida, cada um dos vetores referentes aos vários níveis de malha foram guardados seqüencialmente a partir de $k = 1$ até $k = M =$ número de malhas. A Fig. IV-4 procura ilustrar a forma do vetor unidimensional resultante deste modo de armazenamento.



Fig. IV-4 Modo de armazenamento das grandezas pelos vários níveis de malha.

Desconsiderando os VCs de fronteira, as dimensões das malhas (número de VCs existentes) caem segundo uma PG de razão $q = 1/4$ à medida que k vai de M até 1. Assim, sendo d_M a dimensão da malha mais fina, o tamanho (superestimado) do vetor unidimensional da Fig. IV-4 pode ser determinado *a priori* lembrando que a soma dos termos de uma PG *infinita* é dada por $S_\infty = d_M / (1 - q)$, donde $S_\infty = 4 d_M / 3 \cong 1.333 d_M$. No trabalho foi adotado $S_\infty = 2 d_M$ de modo a acomodar (com folgas) os VCs da fronteira.

Porém, para a manipulação dos valores Φ_k foram definidas matrizes de trabalho $\phi(i, j)$ (com os índices desacoplados) dimensionadas de acordo com o tamanho da malha mais fina. Estas matrizes devolvem para e recebem do vetor unidimensional os valores Φ_k do nível de malha em questão, sendo implementadas para realizar estas tarefas uma rotina de importação (do vetor para a matriz-trabalho) e outra de exportação (da matriz-trabalho para o vetor).

IV.4.2. Obtenção da matriz dos coeficientes

Considerando as Eqs. (III-21) e (III-24), observa-se que os coeficientes que compõem a matriz A_k contem uma contribuição convectiva e outra difusiva, condizente com a física envolvida na EGT, Eq. (II-6), ponto de partida na obtenção destes coeficientes. Conforme será visto adiante, o algoritmo *multigrid* implementado tem início na malha mais fina, onde então estas contribuições são calculadas e os coeficientes, montados.

À medida que vão se procedendo as restrições, torna-se necessário obter a matriz A_k em níveis mais grossos ($k < M$). O procedimento adotado consistiu em tratar separadamente as contribuições convectivas e difusivas, conforme sugerido em [16, 18, 19]. As contribuições difusivas, por depender da geometria da malha computacional, são recalculadas a cada

mudança de nível de malha (independentemente do sentido). Os fluxos mássicos nas interfaces (contribuições convectivas) são combinados, isto é, somados de modo a compor os respectivos fluxos na malha grossa. A Fig. IV-5 procura ilustrar este procedimento, onde os fluxos referentes às faces w e s foram omitidos por simplicidade.

Recentemente, Sathyamurthy e Patankar [22] reportaram a implementação de um algoritmo *multigrid* no qual os coeficientes na malha grossa são obtidos a partir de combinações apropriadas dos coeficientes da malha fina. No entanto, nenhuma informação é fornecida acerca do modo de como se operar tal combinação apropriada.

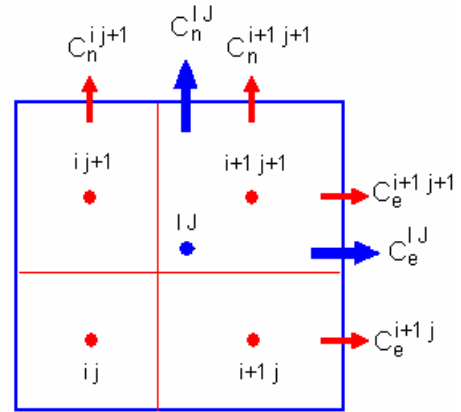


Fig. IV-5 Combinação dos fluxos mássicos nas interfaces

IV.4.3. Tratamento das coordenadas da malha computacional

As malhas consideradas no presente trabalho são estruturadas e ortogonais, podendo ou não ser uniformes (regulares). Sendo assim, os programas computacionais implementados visam tratar da situação mais genérica que corresponde às malhas não-uniformes, consistindo a malha uniforme em um caso particular.

As malhas irregulares são úteis para se promover um refinamento maior em regiões do domínio de cálculo onde há gradientes elevados, aumentando a concentração de pontos nodais nestas regiões, sem aumentar o total de VCs da malha. Em [23] são apresentados exemplos de funções (*stretching functions*) capazes de realizar tais refinamentos da malha.

Contudo, no presente trabalho foi elaborado um algoritmo de construção de malha que calcula as coordenadas das faces dos VCs de modo que as dimensões dos mesmos formem

uma progressão geométrica (PG) crescente ou decrescente. A razão de tal adoção será explicitada mais adiante. A malha que de fato é construída é a malha mais fina ($k = M$), sendo as demais obtidas recursivamente a partir desta.

Um parâmetro importante é a razão de espaçamento RE definida como a razão entre as dimensões (não-nulas) em uma dada direção coordenada do primeiro e do último VC da malha ou de um trecho da malha. Com o auxílio da Fig. IV-6, tem-se para a direção x

$$RE_x = \frac{\delta x_2}{\delta x_{NI-1}} \quad , \quad (IV-24)$$

onde NI é o número total de pontos nodais nesta direção (incluindo os da fronteira). Para valores crescentes de i , a PG é decrescente se $RE_x > 1$ ou crescente se $RE_x < 1$.

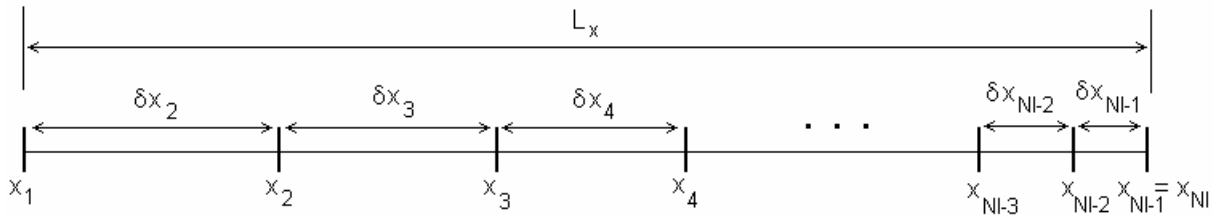


Fig. IV-6 Representação de uma malha não-uniforme.

Sendo $N = NI-2$ o número de VCs de dimensões não-nulas e o comprimento L_x definido como mostra a Fig. IV-6, mostra-se que a razão da PG q_x e a dimensão inicial δx_2 são dadas respectivamente por

$$q_x = \left(\frac{1}{RE_x} \right)^{\frac{1}{N-1}} \quad \text{e} \quad \delta x_2 = L_x \frac{1 - q_x}{1 - q_x^N} \quad . \quad (IV-25)$$

As demais dimensões são obtidas recursivamente segundo

$$\delta x_i = q_x \delta x_{i-1} \quad , \quad i = 3, NI-1 \quad . \quad (IV-26)$$

A malha uniforme corresponde ao caso $RE_x = q_x = 1$ e $\delta x_2 = \dots = \delta x_i = \dots = \delta x_{NI-1} = L_x / N$. Para a direção y , aplica-se procedimento semelhante.

Em casos em que é desejável promover um refinamento nas proximidades de ambas as fronteiras do domínio a partir da linha média (ou em casos onde ocorra o contrário, isto é, refinamento próximo à linha média a partir das fronteiras), deve-se primeiramente dividir o domínio ao meio e construir uma malha não-uniforme para cada metade segundo o procedimento anteriormente descrito. Em um dos trechos a razão da PG é q_x , enquanto que na outra metade é q_x^{-1} . Obviamente, para permitir a divisão ao meio, há a necessidade de existir no domínio computacional um número par de VCs.

As coordenadas na malha grossa X_I são obtidas promovendo-se as igualdades $X_I = x_i$, onde os índices da malha fina i variam de 1 até $NI-1$, percorridos de 2 em 2 ($i = 1, 3, 5, \dots, NI-1$), ao passo que os da malha grossa são contados de 1 em 1 a partir de 1 enquanto durar a varredura dos índices i . Ao término desta, é feita a igualdade entre as coordenadas coincidentes $X_{NI} = X_{NI-1}$ (ver Fig. III-1).

A vantagem da adoção da malha não-uniforme em PG surge quando se opera o prolongamento. As coordenadas coincidentes podem ser recuperadas em um procedimento similar àquele descrito no parágrafo anterior, enquanto que as coordenadas intermediárias são recuperadas através da expressão

$$x_i = \frac{q_x x_{i-1} + x_{i+1}}{1 + q_x} \quad . \quad (IV-27)$$

Inserindo $q_x = 1$ na expressão acima, observa-se que o caso uniforme (divisão ao meio) é satisfeito, podendo a mesma ser usada em qualquer situação. A vantagem consiste no fato de que nem sempre é fácil obter as funções inversas (se existirem) para outras funções de refinamento, que seriam necessárias para a recuperação das coordenadas intermediárias.

As coordenadas x_i e y_j são armazenadas em um único vetor, uma vez que podem ser reescritas a cada mudança de malha. Este tipo de tratamento tem, pois, a vantagem de se economizar memória que pode ser significativa em problemas que exijam vários VCs e/ou níveis de malha. Tem, porém, a desvantagem de acarretar em um esforço computacional extra a cada mudança de malha que pode prejudicar a performance do algoritmo.

Um procedimento alternativo seria calcular no início do algoritmo não apenas as coordenadas da malha fina como também as coordenadas em todos os níveis de malha. Com isso, evitar-se-ia a necessidade de a cada mudança de nível recalcularem-se as coordenadas da malha em questão, poupando tempo de computação. Em contrapartida, aumenta-se a quantidade de informação a ser armazenada que pode ser relevante para problemas em que sejam resolvidas várias grandezas do escoamento. Como futuramente estas outras grandezas serão incorporadas ao programa, este procedimento não foi adotado no presente trabalho.

IV.5. ESTRATÉGIA DE MUDANÇA DE NÍVEL DE MALHA

Durante o algoritmo *multigrid*, diferentes níveis de malha são visitados, nos quais as componentes do erro com comprimentos de onda comparáveis ao espaçamento da malha correspondente são eficientemente suavizadas. A seqüência de como os procedimentos (IV-11) e (IV-17) são concatenados entre níveis consecutivos de malha caracteriza os chamados *ciclo-V* e *ciclo-W*. A Fig. IV-7 mostra a seqüência de operações em cada ciclo durante uma iteração *multigrid* completa. As operações são de pré-suavização (s), de restrição (r), de iteração em malha grossa (g) e de prolongamento (p). As operações de pós-suavização (realizadas após o prolongamento) não são apresentadas por simplicidade.

implementação, seu emprego foi estendido para o segundo programa que lida com escoamentos laminares. Embora nestes casos o uso da formulação FAS seja o mais adequado, na literatura há precedentes da utilização do algoritmo *multigrid* CS na solução desta classe de problemas não-lineares [16], conforme citado no início deste capítulo.

O fluxograma do algoritmo *multigrid* CS [3] é mostrado na Fig. IV-8. O parâmetro γ é o que determina o tipo de ciclo *multigrid*. As escolhas $\gamma = 1$ e $\gamma = 2$ levam aos ciclos-V e W, respectivamente. Em malhas grossas (isto é, exceto na mais fina), vê-se que antes de proceder a pré-suavização, as correções são inicialmente zeradas.

No teste de parada / convergência é verificado se o resíduo na malha mais fina r_M está abaixo de uma certa precisão (convergência) ou acima de um dado limite (divergência), se o tempo de computação e se o número de iterações excederem seus limites respectivos. A veracidade de apenas um destes testes é suficiente para provocar o término da execução.

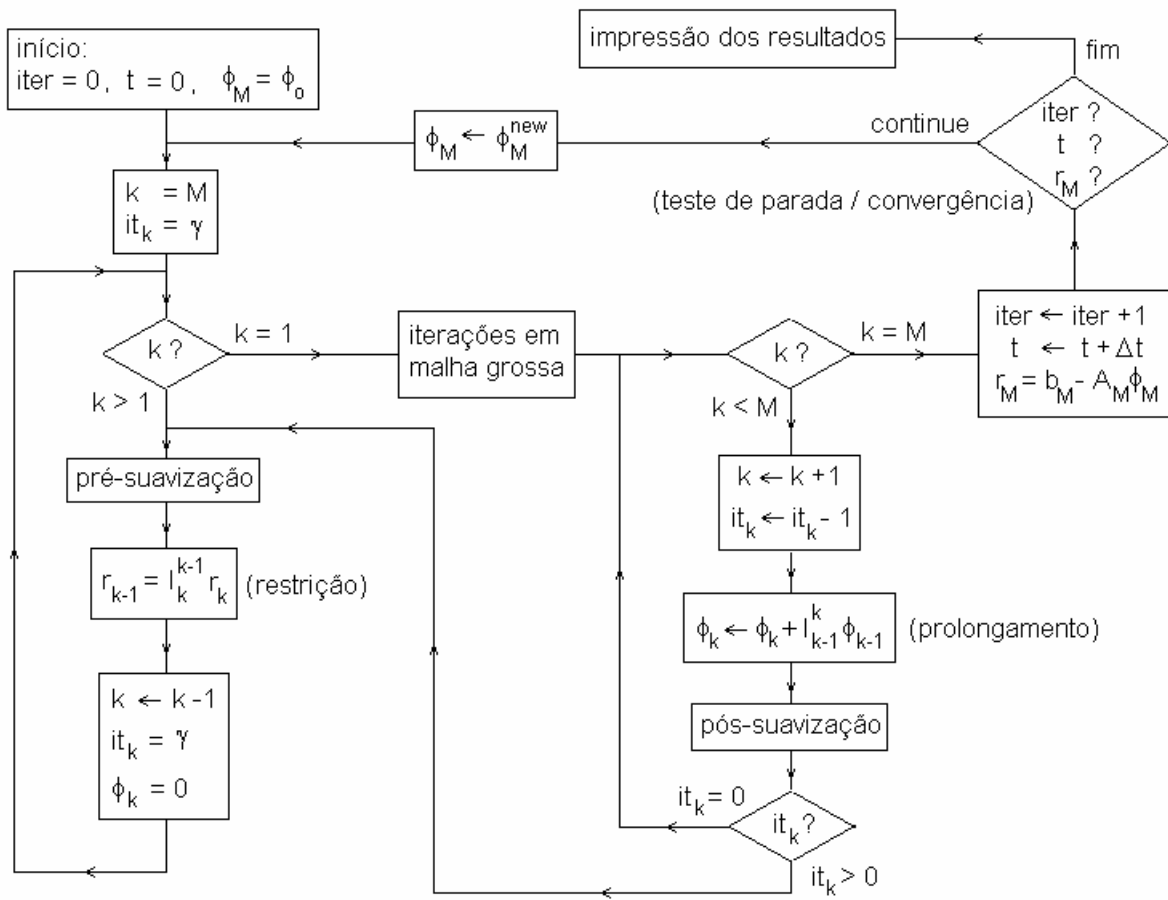


Fig. IV-8 Fluxograma do algoritmo *multigrid* na formulação CS.

V. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos a partir da execução dos dois programas computacionais desenvolvidos. Todos os ensaios apresentados foram realizados em um computador IBM-PC com processador *Intel Pentium* de 166 MHz. Os programas foram escritos em linguagem FORTRAN 90, através do *Microsoft Fortran Power Station*.

Os problemas resolvidos por ambos programas implementados são bidimensionais e em regime permanente. No primeiro foi abordado um problema térmico, com o campo de velocidades tido como conhecido e constante. O método *multigrid* foi então aplicado para a obtenção do campo $T(x,y)$, única variável do problema.

O segundo programa visou a solução de problemas hidrodinâmicos sem transferência de calor, lidando por ora com escoamentos laminares incompressíveis com propriedades constantes. O método *multigrid* foi aplicado simultaneamente nas três variáveis do problema: $U(x,y)$, $V(x,y)$ e $P'(x,y)$. Na malha mais fina, as equações para estas grandezas foram montadas e relaxadas (com auxílio do algoritmo SIMPLE para o caso de P') e serviram como ponto de partida para a montagem e relaxação das equações nas demais malhas (destinadas à obtenção das correções para estas grandezas).

V.1. SOLUÇÃO DE PROBLEMA TÉRMICO SIMPLES

O problema térmico estudado refere-se a um caso de condução-convecção sobre um domínio retangular com temperatura prescrita em suas fronteiras. O regime é permanente, não há fontes internas de calor e o campo de velocidades \vec{V} no interior do domínio é conhecido e mantido constante, conforme mostra a Fig. V-1. Este problema é normalmente utilizado como

bench-mark na análise e comparação de funções de interpolação [1]. Aqui, porém, o mesmo está sendo utilizado para uma aplicação preliminar da técnica *multigrid*.

Para as constantes físicas na Eq. (II-5) foram adotados os valores $K/C_p = 1 \text{ kg/m.s}$ e $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ e para as velocidades U e V os valores 0, 1 e 10 m/s foram utilizados (no caso de V são tomados os respectivos valores negativos). Para o problema puramente difusivo ($U = V = 0$), a solução analítica para as condições de contorno mostradas na Fig. V-1 é

$$T(x, y) = \frac{\sinh(\pi y/L_x)}{\sinh(\pi L_y/L_x)} \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L_x}\right), \quad (\text{V-1})$$

L_x e L_y sendo as dimensões do domínio retangular.

A Fig. V-2 mostra como o refinamento da malha computacional influi na qualidade da solução do problema de condução pura, onde o perfil de temperatura exibido corresponde à posição $x = L_x/2$. Para efeitos de comparação, a solução exata calculada pela Eq. (V-1) para a mesma posição também é mostrada. Para os casos apresentados nesta figura, uma única malha foi utilizada e o algoritmo de solução aplicado foi o TDMA. Vê-se que com a malha 18×18 (incluindo os VCs de fronteira) já é possível produzir bons resultados. Espera-se, pois, haver em malhas mais refinadas (como as que foram empregadas nos demais ensaios mostrados adiante) pouca diferença entre a solução analítica e as soluções numéricas obtidas nestas malhas.

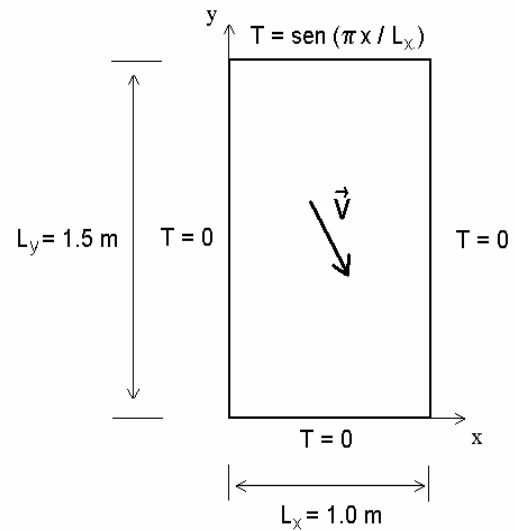


Fig. V-1 Esquema do problema térmico estudado.

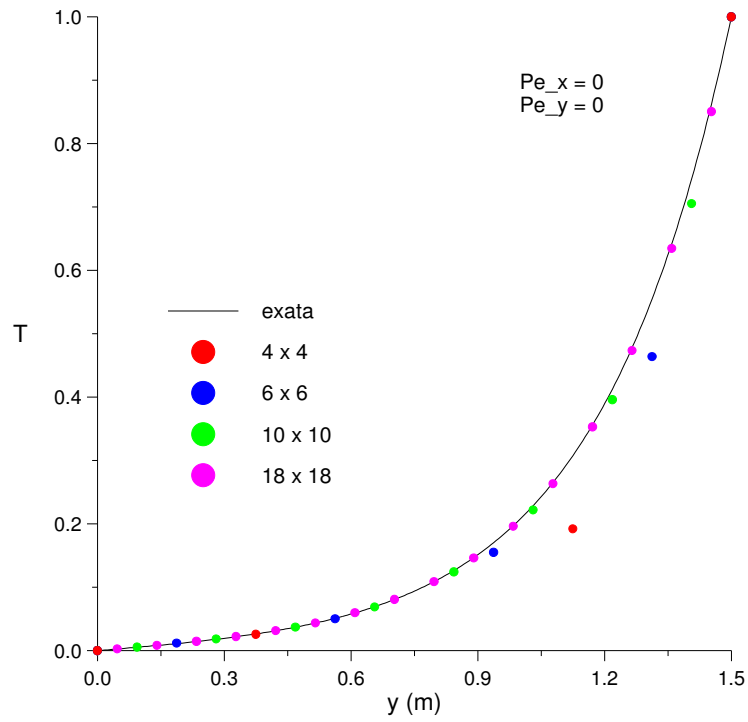


Fig. V-2 Influência do refinamento da malha na qualidade da solução.

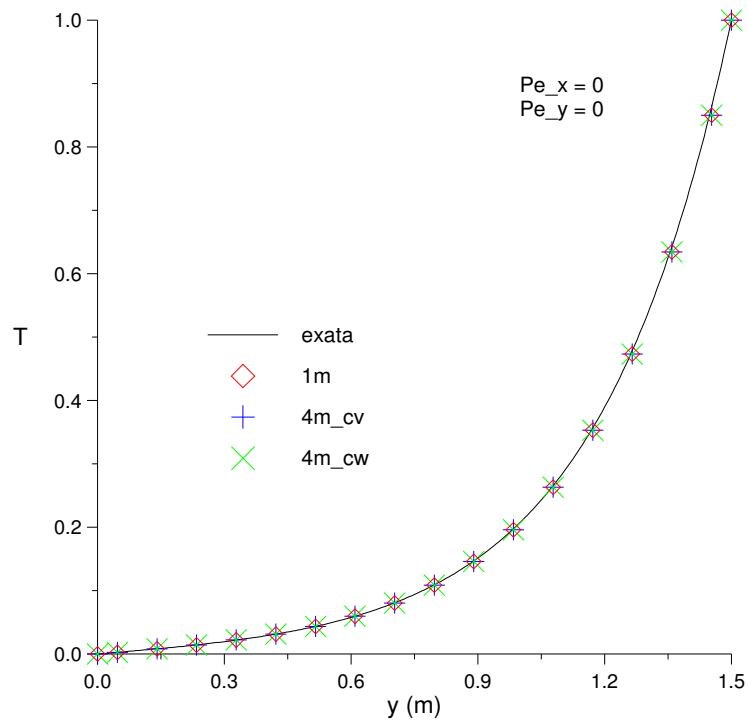


Fig. V-3 Validação numérica das soluções obtidas com 1 e com 4 malhas.

A Fig. V-3 exibe a validação numérica das soluções do problema de condução pura obtidas com 1 malha (1m) e com 4 malhas em ciclo-V (4m_cv) e em ciclo-W (4m_cw). O algoritmo TDMA é novamente utilizado para a solução em malha única e para realizar as suavizações na malha mais grossa ($k = 1$) nas soluções *multigrid*. Nos demais níveis ($1 < k \leq M = 4$) é aplicado o algoritmo Gauss-Seidel ponto-a-ponto. A dimensão da malha única e da malha mais fina ($k = M$) das soluções *multigrid* é de 18×18 VCs, ambas uniformes. Observa-se para todos os casos analisados a boa concordância com a solução exata.

As figuras seguintes comparam o comportamento do resíduo normalizado em função do tempo de CPU para a obtenção das soluções. A malha mais fina das soluções *multigrid* com 3, 4, 5 ou 6 níveis, ciclo-V ou ciclo-W (3m_cv, 4m_cv, etc.) é também uniforme e contém $NI \times NJ$ VCs, $NI = 130$ e $NJ = 194$ (incluindo os de fronteira), o mesmo ocorrendo para a malha da solução em único nível (1m). O resíduo normalizado é calculado segundo

$$R = \sqrt{\sum_{ij} (r_{ij}^2) / (NI - 2)(NJ - 2)} \quad , \quad r_{ij} = A_P T_P - \left(\sum_{vz} A_{vz} T_{vz} \right) \quad . \quad (V-2)$$

Os índices ij identificam um dado VC na malha mais fina (ou única) enquanto que vz referem-se aos volumes vizinhos do VC em questão.

As soluções *multigrid* foram implementadas com a estratégia de números fixos de pré- e pós-suavizações e de iterações na malha mais grossa. Numa primeira abordagem, foram adotadas 2 iterações para as pré- e pós-suavizações e 5 iterações na malha mais grossa.

Os números de Peclet exibidos (Pe_x , Pe_y) nas figuras anteriores e nas subseqüentes são baseados nos espaçamentos da malha mais fina. Pelos valores adotados para as constantes e lembrando que as malhas empregadas são uniformes (Δx , Δy constantes), estes parâmetros, Eq. (III-16), são numericamente dados por

$$Pe_x = 0.0078125 U \quad e \quad Pe_y = 0.0078125 V \quad . \quad (V-3)$$

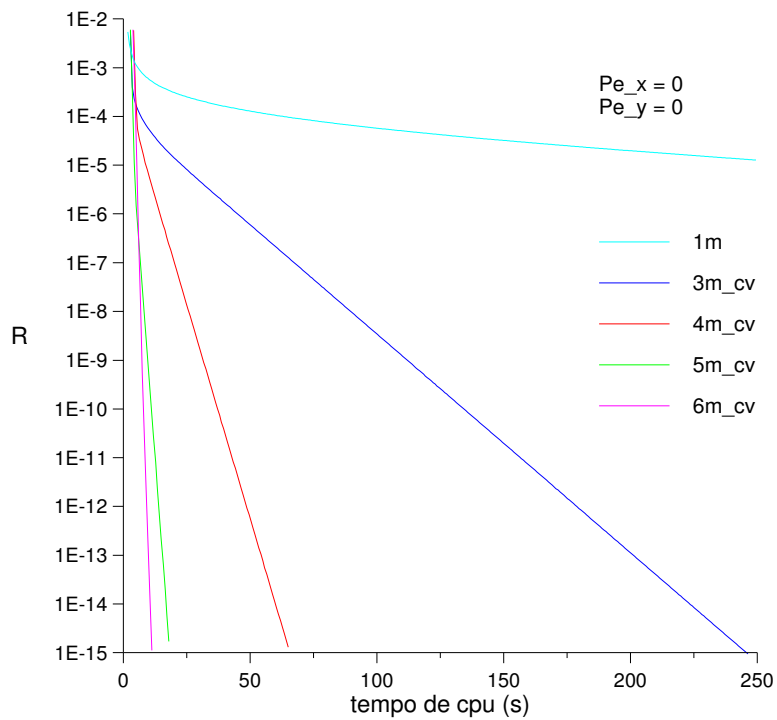


Fig. V-4 Problema térmico: resíduo em 1 malha e em *multigrid* ciclo-V, $U=V=0$.

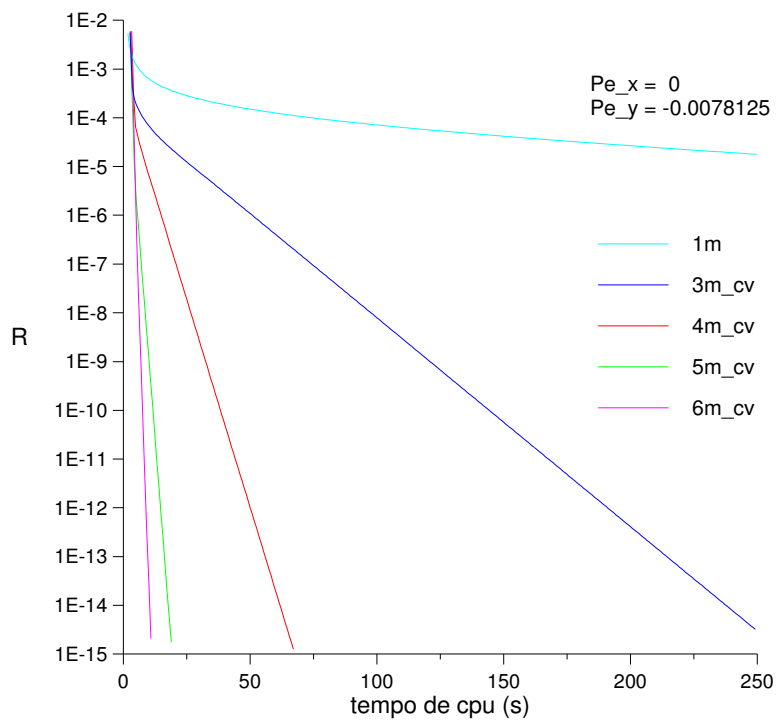


Fig. V-5 Problema térmico: resíduo em 1 malha e em *multigrid* ciclo-V, $U=0$, $V=-1$ m/s.

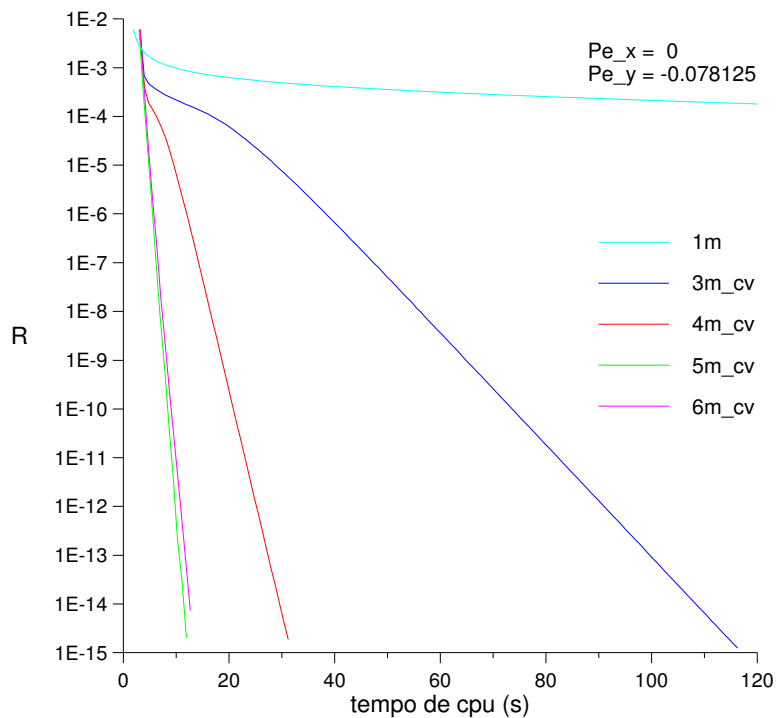


Fig. V-6 Problema térmico: resíduo em 1 malha e em *multigrid* ciclo-V, $U=0$, $V=-10$ m/s.

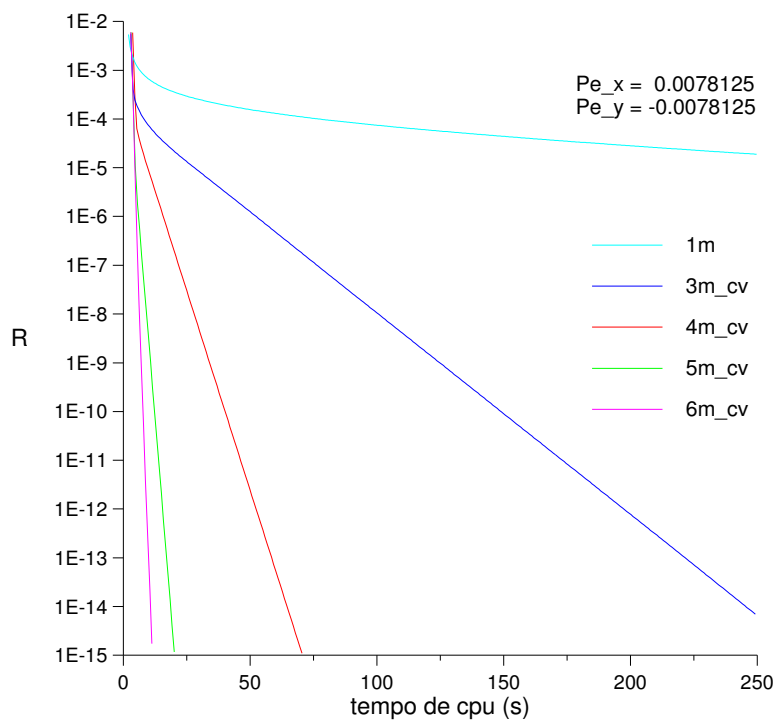


Fig. V-7 Problema térmico: resíduo em 1 malha e em *multigrid* ciclo-V, $U=-V=1$ m/s.

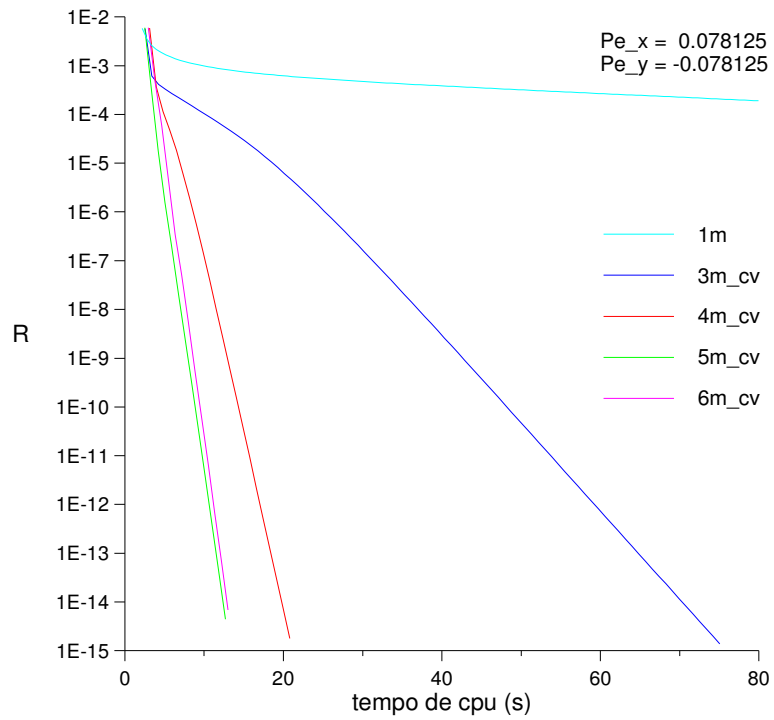


Fig. V-8 Problema térmico: resíduo em 1 malha e em *multigrid* ciclo-V, $U=-V=10$ m/s.

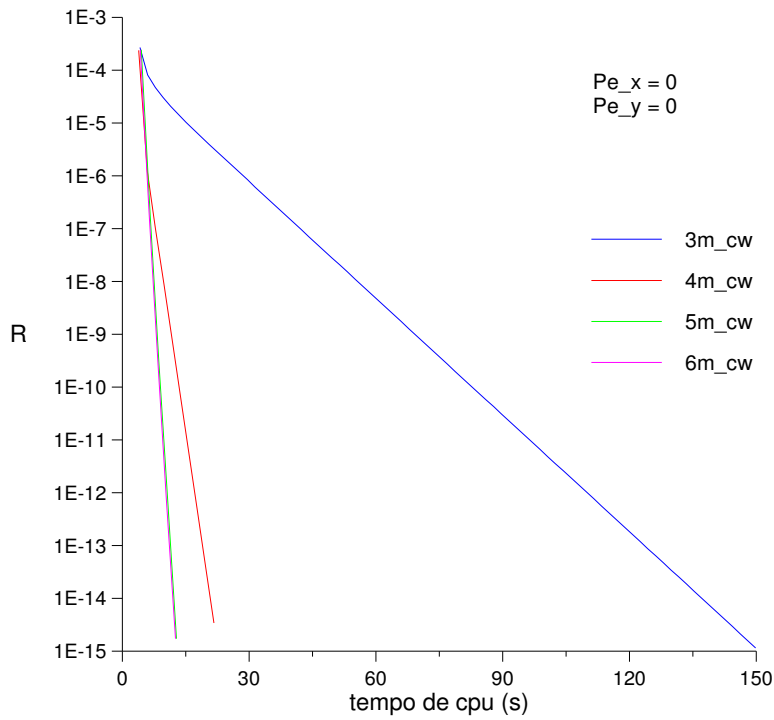


Fig. V-9 Problema térmico: resíduo em *multigrid* ciclo-W, $U=V=0$.

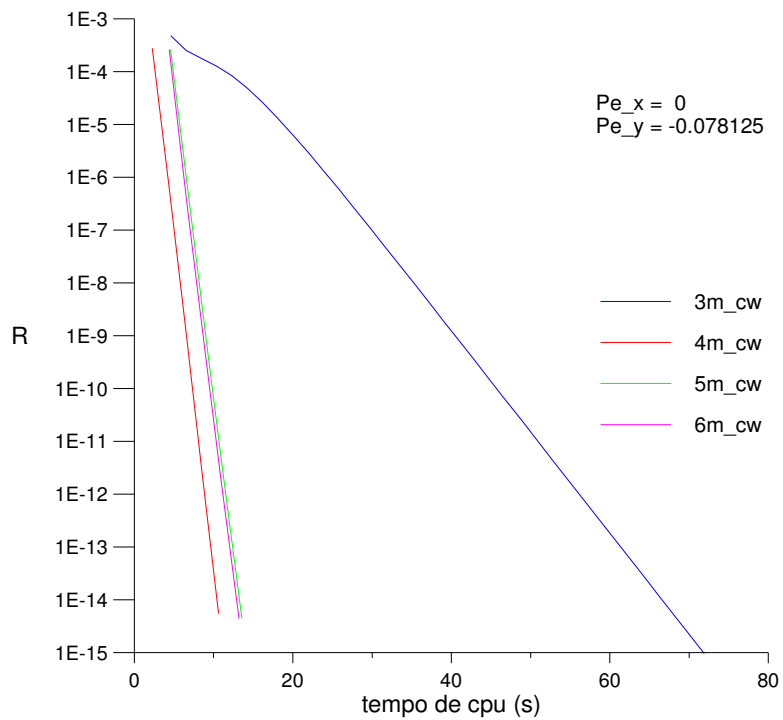


Fig. V-10 Problema térmico: resíduo em *multigrid* ciclo-W, $U=0$, $V=-10$ m/s.

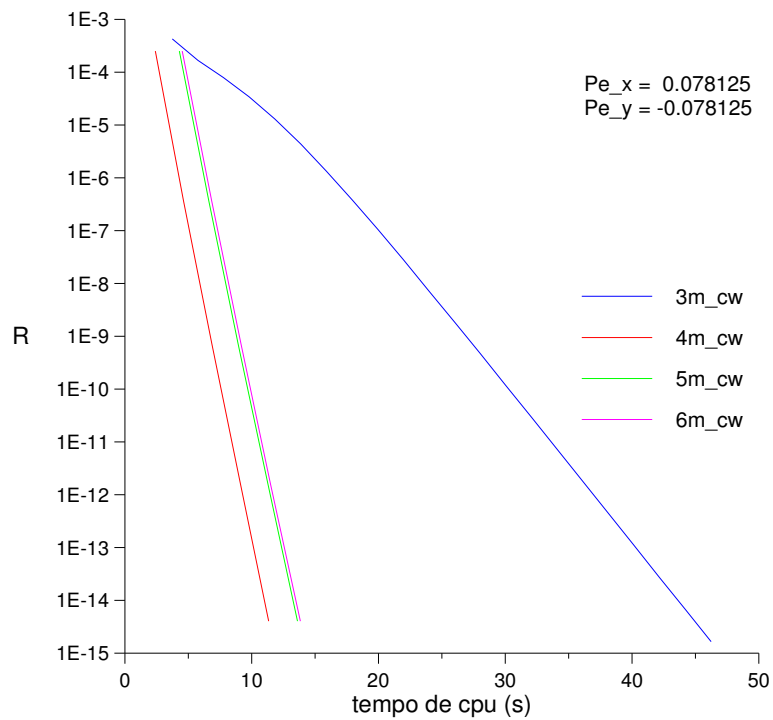


Fig. V-11 Problema térmico: resíduo em *multigrid* ciclo-W, $U=-V=10$ m/s.

Em todas as figuras é observado o melhor desempenho das soluções *multigrid* frente ao da solução em malha única (o qual é exibido nas Fig. V-4 a Fig. V-8). Tal desempenho é tanto melhor quanto maior a precisão numérica exigida para a solução. É esta característica que torna o método *multigrid* atraente, justificando sua crescente utilização.

Comparando as Fig. V-4, Fig. V-6 e Fig. V-8 respectivamente com as Fig. V-9, Fig. V-10 e Fig. V-11, verifica-se que as soluções *multigrid* em ciclo-W possuem maior velocidade de convergência, apesar de sua iteração *multigrid* completa ser bem maior e, portanto, mais demorada que a do ciclo-V (Fig. IV-7). Contudo, o maior número de iterações acarretado pelo ciclo-W é realizado na maior parte em malhas mais grossas. Assim, componentes do erro com comprimentos de onda maiores são mais rapidamente reduzidas, compensando a deficiência do operador de suavização que atua de modo mais eficiente sobre as componentes de menores comprimentos de onda.

É importante observar a influência de Pe na taxa de convergência. As Fig. V-4, Fig. V-5 e Fig. V-7 mostram que há pouca diferença entre o tempo de CPU gasto para a reduzir R a ordem de 10^{-15} . Uma explicação é que os valores de Pe referentes às situações das Fig. V-5 e Fig. V-7 não são suficientemente grandes para alterar o padrão da solução puramente condutiva (Fig. V-4), podendo a convergência até ser ligeiramente mais lenta, como mostra a Tab. V-1 adiante. Uma possível razão seria um pequeno aumento relacionado ao tempo de computação dos coeficientes α e β do esquema WUDS.

Considerando, porém, o resultado apresentado pela Fig. V-6 e, sobretudo, pela Fig. V-8, nas quais Pe assume valores maiores (em módulo), nota-se uma acentuada redução do tempo de CPU. Tal efeito deve-se ao fato das condições de contorno serem mais rapidamente “varridas” para o interior do domínio pelo mecanismo de convecção devido, em última

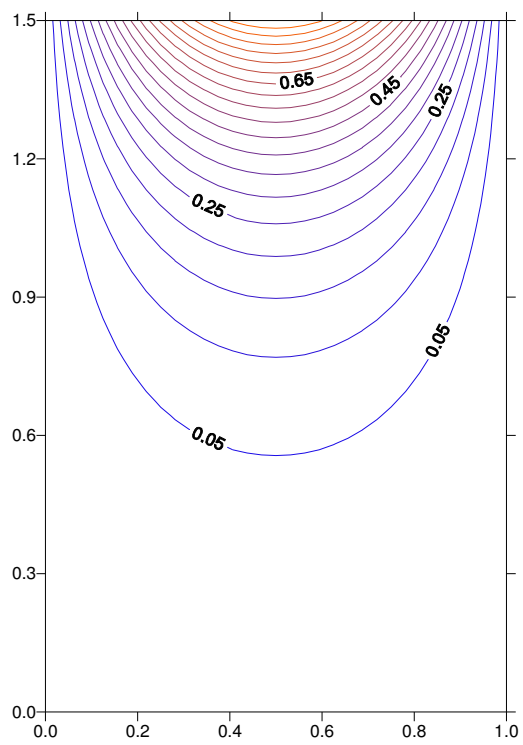
análise, a um aumento dos coeficientes a jusante na Eq. (III-20), compensando o tempo de cálculo dos coeficientes α e β .

No que diz respeito ao que foi discutido nos parágrafos acima, a Tab. V-1 procura condensar as informações contidas nos gráficos das figuras anteriores para as soluções *multigrid* em 4 malhas. Nela também estão incluídos os resultados finais (tempo de convergência e nível do resíduo) referentes aos casos $U = 0, 1$ m/s com $V = -1$ m/s em ciclo-W.

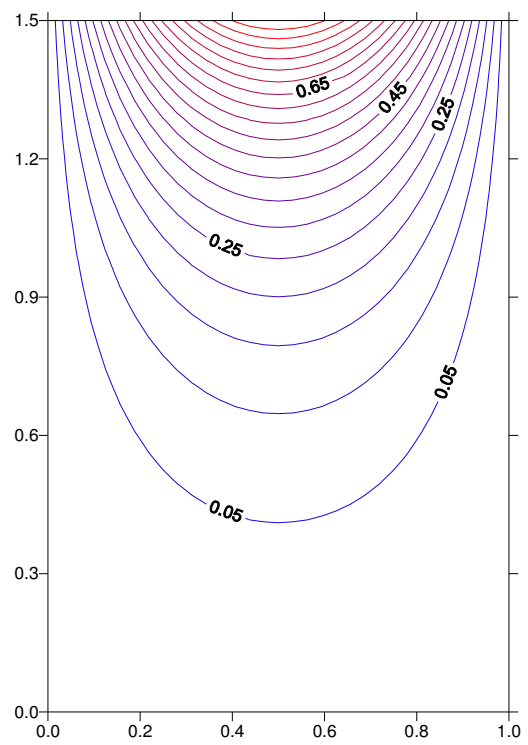
Tab. V-1 Esforço computacional de soluções *multigrid* em 4 malhas para diferentes Pe .

U	V	Pe_x	Pe_y	ciclo -V		ciclo -W	
				$R (x 10^{-16})$	t (s)	$R (x 10^{-16})$	t (s)
0	0	0	0	9.564	65.80	3.035	23.65
0	-1	0	-0.0078125	9.195	67.85	2.887	25.28
1	-1	0.0078125	-0.0078125	7.984	71.26	1.985	26.81
0	-10	0	-0.078125	8.108	31.99	12.71	14.61
10	-10	0.078125	-0.078125	4.438	21.62	12.09	13.56

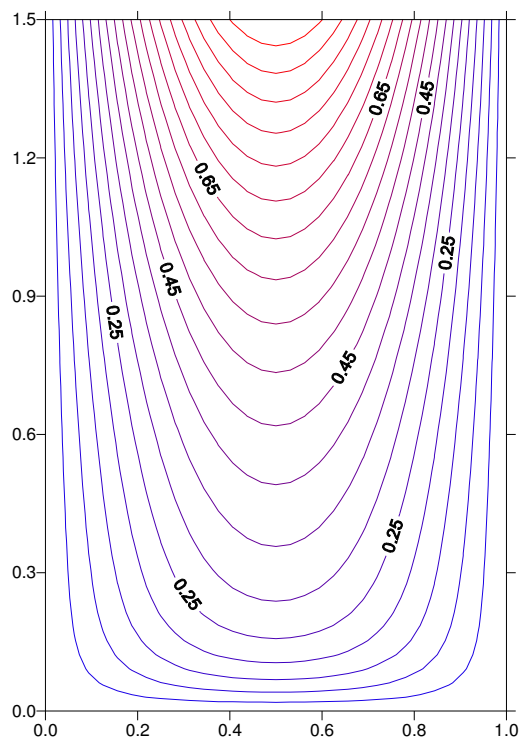
A influência da variação do campo de velocidades na distribuição de temperatura pode ser visualizada através das Fig. V-12. O caso $U = V = 0$ é retratado em (a), o caso $U = 0$ e $V = -1$ m/s em (b), o caso $U = 0$ e $V = -10$ m/s em (c) e o caso $U = -V = 10$ m/s em (d). Estas figuras foram geradas respectivamente a partir da solução *multigrid* com 4 malhas em ciclo-V, 5 malhas em ciclo-V, 5 malhas em ciclo-W e 6 malhas em ciclo-W. Os padrões observados condizem com os padrões esperados, mostrando que a técnica *multigrid* mesmo propiciando soluções em tempos de computação expressivamente menores, não afeta a qualidade das mesmas.



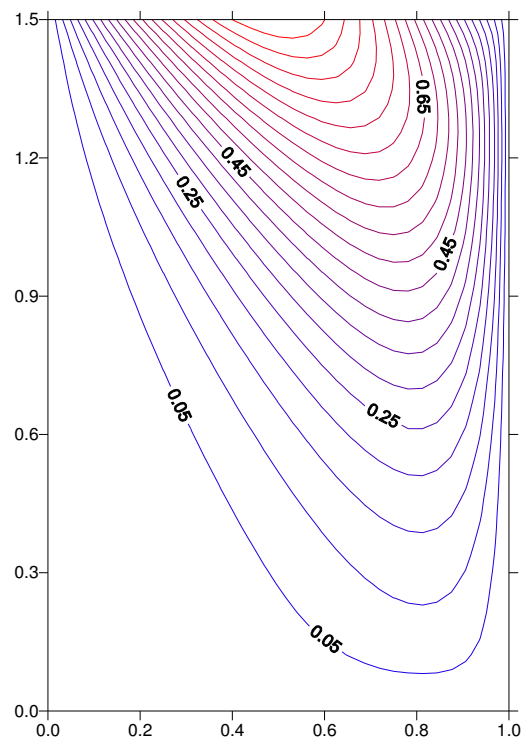
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. V-12 Influência do campo de velocidades na distribuição de temperatura.

Um aspecto interessante verificado é a influência da escolha do algoritmo iterativo de solução para cada nível de malha. Nos casos anteriormente apresentados, conforme já citado, na malha mais grossa ($k = 1$) é utilizado o TDMA enquanto que nas demais ($1 < k \leq M$) é utilizado o Gauss-Seidel (GS) ponto-a-ponto. A aplicação de diferentes algoritmos de solução em níveis distintos de malhas é sugerida em [3].

A Tab. V-2 compara os esforços computacionais na obtenção de soluções *multigrid* em 4 malhas ($M = 4$) ciclo-V com $U = V = 0$ e $U = -V = 10$ m/s, para todas as combinações possíveis de aplicação dos algoritmos TDMA e GS. Os números entre parênteses referem-se ao(s) nível(is) k de malha em que o algoritmo é aplicado.

Tab. V-2 Influência da escolha do algoritmo de solução no esforço computacional.

combinação		$U = V = 0$		$U = -V = 10$ m/s	
		$R (x 10^{-16})$	t (s)	$R (x 10^{-16})$	t (s)
GS (4, 3, 2)	TDMA (1)	9.564	65.80	4.438	21.62
GS (4, 3)	TDMA (2, 1)	7.598	58.97	5.368	19.86
GS (4)	TDMA (3, 2, 1)	8.870	59.38	2.690	20.48
	TDMA (4, 3, 2, 1)	7.674	69.64	9.501	22.13
TDMA (4, 3, 2)	GS (1)	9.203	111.63	8.061	35.18
TDMA (4, 3)	GS (2, 1)	9.566	127.88	7.233	39.77
TDMA (4)	GS (3, 2, 1)	8.719	127.83	4.988	40.71
	GS (4, 3, 2, 1)	9.494	110.38	6.960	35.43

É interessante reparar que a combinação GS(4,3) - TDMA(2,1) produz os melhores resultados enquanto que a sua combinação inversa TDMA(4,3) - GS(2,1) produz os piores. Para as outras combinações este comportamento parece se repetir.

Para as soluções *multigrid*, os gráficos também sugerem a existência de um número ótimo de malhas que varia com o ciclo empregado e com o valor do campo de velocidades. As soluções em ciclo-V com Pe relativamente baixos tiveram menores esforços computacionais quando foram empregadas 6 malhas (Fig. V-4, Fig. V-5 e Fig. V-7) ao passo que aquelas com Pe maiores o emprego de 5 malhas produziu resultados melhores (Fig. V-6 e Fig. V-8), embora a diferença seja pequena. Neste último caso, observa-se também em relação aos casos de baixos Pe , uma redução na diferença do emprego de 4 para o de 5 ou 6 malhas.

Já para as soluções em ciclo-W, os esforços computacionais para 5 e 6 malhas é praticamente o mesmo para Pe nulo (Fig. V-9), havendo pouca diferença para o esforço com 4 malhas. A situação se inverte para Pe maiores, passando 4 malhas ser o número ótimo (Fig. V-10 e Fig. V-11). Uma possível explicação é que as soluções em 5 ou 6 malhas possuem agora menor velocidade de convergência em virtude do esforço computacional para a transferência de valores entre as malhas no ciclo-W ser maior que no ciclo-V. Apesar do melhor desempenho por iteração *multigrid* completa que um número maior de malhas propicia no ciclo-V, este esforço extra parece não compensar o emprego de um número de malhas superior a 4 no ciclo-W.

Como nos procedimentos de restrição e prolongamento são introduzidas imprecisões aos valores sendo transferidos (grandezas) ou recalculados (coeficientes), é de se esperar que o esforço computacional seja sensível ao número de iterações na malha mais grossa e de pré- e pós-suavizações. Em outras palavras, uma vez que a suavização em um dado nível de malha atingiu uma precisão comparável aos erros introduzidos pelos operadores de interpolação, não mais convém continuar iterando neste nível.

Assim, com esta motivação foram realizados ensaios com vistas a estudar o esforço computacional das soluções *multigrid* para diferentes números de iterações de pré- e pós-

suavizações ($v^{pré}$ e $v^{pós}$) e de iterações na malha mais grossa (v^{gr}). Para estes novos ensaios foram fixados $U = V = 0$, $M = 4$ e em todos os níveis de malha é empregado o algoritmo TDMA. Vale lembrar que todos os resultados até aqui apresentados foram obtidos mediante o uso de $v^{pré} = v^{pós} = 2$ e de $v^{gr} = 5$. As tabelas seguintes mostram respectivamente os resultados obtidos variando-se somente v^{gr} com $v^{pré} = v^{pós} = 2$ fixos e depois variando-se $v^{pré} = v^{pós}$ fixando $v^{gr} = 20$.

Tab. V-3 Influência do número de iterações na malha mais grossa.

v^{gr}	ciclo- V		ciclo- W	
	$R (x 10^{-16})$	$t (s)$	$R (x 10^{-16})$	$t (s)$
5	7.674	69.64	2.521	26.19
10	7.039	39.86	0.9836	17.93
20	7.242	22.71	0.9458	14.71
30	9.341	16.86	0.9418	15.22
40	2.553	14.18	0.9316	18.60
50	1.410	11.88	0.9708	17.25
60	1.319	12.40	0.9606	16.59
70	1.423	12.01	0.9186	17.21
80	1.531	12.69	0.9389	17.47
90	1.632	12.27	0.9257	18.49
100	1.709	12.49	0.9492	18.18
200	1.799	13.62	0.9580	22.75
300	1.812	14.62	0.9494	26.97
400	1.817	15.09	0.9679	31.12
1000	1.797	22.43	0.9478	57.28

Tab. V-4 Influência do número de iterações de pré- e pós-suavizações.

$v^{\text{pré}} = v^{\text{pós}}$	ciclo- V		ciclo- W	
	$R (x 10^{-16})$	$t (s)$	$R (x 10^{-16})$	$t (s)$
1	6.928	18.95	1.186	20.26
2	7.242	22.71	0.9458	14.71
3	8.991	26.25	0.9219	14.92
4	3.980	30.09	0.8901	17.02
5	6.442	32.83	0.9000	19.34

A perda de tempo relacionada a esta “sobre-suavização” pode ser verificada através dos resultados que empregam números elevados de iterações. Em particular, o efeito do aumento de v^{gr} é mais nítido nas soluções em ciclo-W provavelmente porque, conforme já mencionado, este ciclo inerentemente passa bem mais tempo na malha grossa ($k = 1$). Em contrapartida, o ciclo-V é mais sensível à elevação de $v^{\text{pré}}$ e $v^{\text{pós}}$ porque em relação ao ciclo-W ele gasta mais tempo nos níveis de malha de índices $k > 1$.

Visando diminuir este tipo de redução da taxa de convergência, Hackbusch [3] aponta para algumas variantes do algoritmo *multigrid*. Elas incluem uma determinação *a posteriori* do número de iterações de suavização e uma “mistura” dos ciclos-V e -W, dependendo do nível de malha ser par ou ímpar.

Por outro lado, um número reduzido de interações na malha mais grossa também pode ser contraproducente. Neste caso, as componentes do erro de elevado comprimento de onda (baixas frequências) não estão sendo suficientemente suavizadas e as soluções obtidas neste nível podem não ter boa precisão, ao contrário do desejado [3]. Daí a existência de um número ótimo de iterações ($v^{\text{gr}} \sim 50$ para o ciclo-V e $v^{\text{gr}} \sim 20$ para o ciclo-W). O mesmo

também ocorre para $v^{pré}$ e $v^{pós}$ ($v^{pré} = v^{pós} = 1$ para o ciclo-V e $v^{pré} = v^{pós} = 2$ para o ciclo-W).

Todavia, este número ótimo de varreduras em cada nível de malha não é facilmente determinado *a priori*. É justamente esta indeterminação que é criticada pelos autores que preferem optar pelo critério dinâmico de decisão de mudança de malha, monitorando-se a taxa de convergência em cada nível. Este critério porém não foi implementado no presente trabalho.

V.2. SOLUÇÃO DE ALGUNS PROBLEMAS HIDRODINÂMICOS

V.2.1. Escoamento entre placas planas e paralelas

O primeiro problema hidrodinâmico laminar considerado foi o de escoamento entre placas planas e paralelas. Este problema é interessante do ponto de vista de validação numérica das soluções *multigrid*, uma vez que o perfil desenvolvido da velocidade é um resultado bastante conhecido [25]. As dimensões do domínio de cálculo e as condições de contorno empregadas são esquematizadas na Fig. V-13.

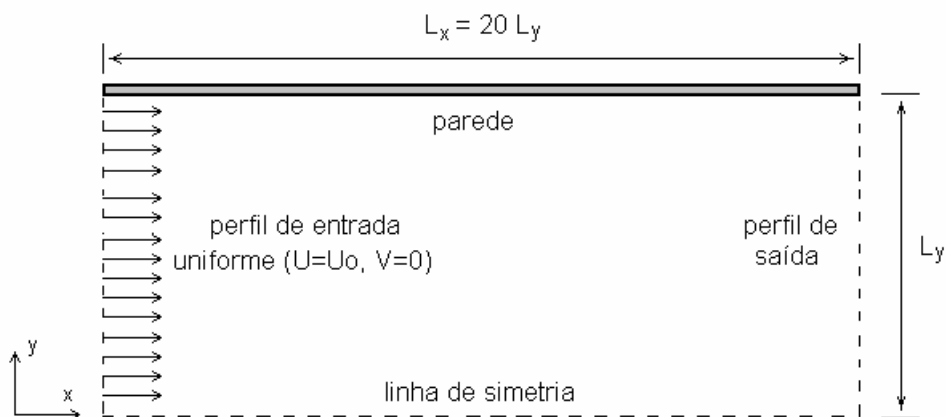


Fig. V-13 Escoamento entre placas planas e paralelas.

Os valores adotados foram $L_y = 0.05 \text{ m}$, $L_x = 1.0 \text{ m}$ e $U_0 = 0.1 \text{ m/s}$. Quanto às propriedades, foi considerado um fluido fictício com $\rho = 1.0 \text{ kg/m}^3$ e $\mu = 10^{-4} \text{ kg/m.s}$. Definindo-se o número de Reynolds Re com base do diâmetro hidráulico $D_h = 4L_y$,

$$Re = \frac{\rho U_0 D_h}{\mu} \quad (\text{V-4})$$

os valores considerados levam a $Re = 200$, condizente com a hipótese de escoamento laminar.

Neste problema os maiores gradientes encontram-se próximos à região de entrada e à parede. Foi então usada uma malha não-uniforme com 160×32 VCs, estando os mesmos mais concentrados nestas regiões. As razões de espaçamento usadas foram $RE_x = 0.5$ e $RE_y = 2$: a extensão δx do primeiro VC (região de entrada) é a metade da extensão do último VC (região de saída) e a extensão δy do VC junto à linha de simetria é o dobro da extensão do VC junto à parede. Em caso analisado mais adiante será mostrado um exemplo de malha não-uniforme.

Quando o escoamento encontra-se totalmente desenvolvido, tem-se $V = 0$ e o perfil da componente U da velocidade ao longo da seção transversal é dada por [25]

$$U(y) = \frac{3}{2}U_0 \left[1 - \left(\frac{y}{L_y} \right)^2 \right] \quad (\text{V-5})$$

com y medido a partir da linha de simetria. A Fig. V-14 compara o resultado obtido com o uso de 4 malhas computacionais com o perfil dado pela Eq. (V-5). Vê-se que a solução *multigrid* possui boa concordância com a solução analítica.

A Fig. V-15 compara o comportamento dos resíduos de U , V e P' na obtenção desta solução *multigrid* (4m) e em malha única (1m). Foram adotados $\xi_U = 0.8$, $\xi_V = 0.6$, $\xi_P = 0.05$

para os fatores de sub-relaxação e para a solução *multigrid* foi empregado o ciclo-V com $\nu^{\text{pré}} = \nu^{\text{pós}} = 1$ e $\nu^{\text{gr}} = 5$. Neste problema, como no subseqüentes, adotou-se $\lambda = 0$ (UDS puro).

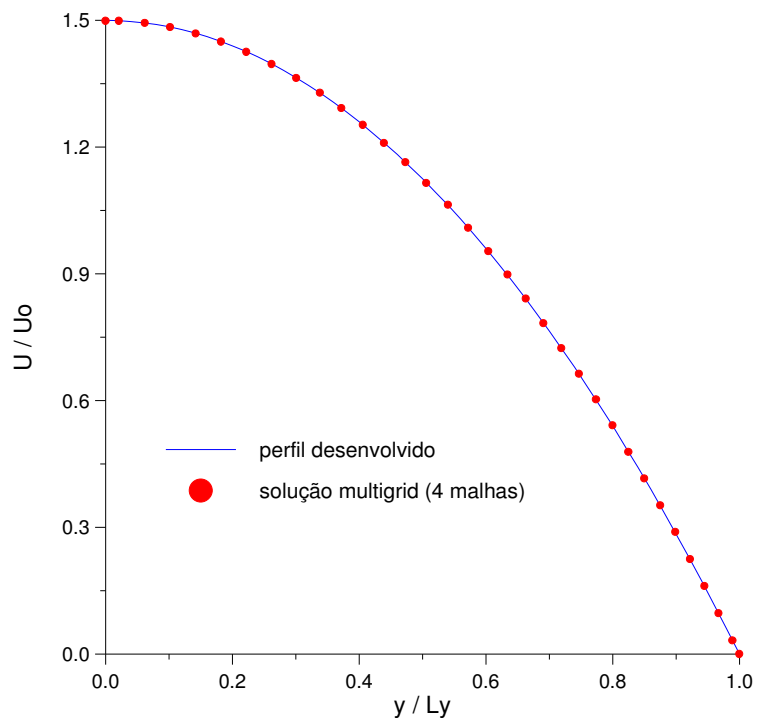


Fig. V-14 Escoamento entre placas: validação numérica da solução *multigrid*.

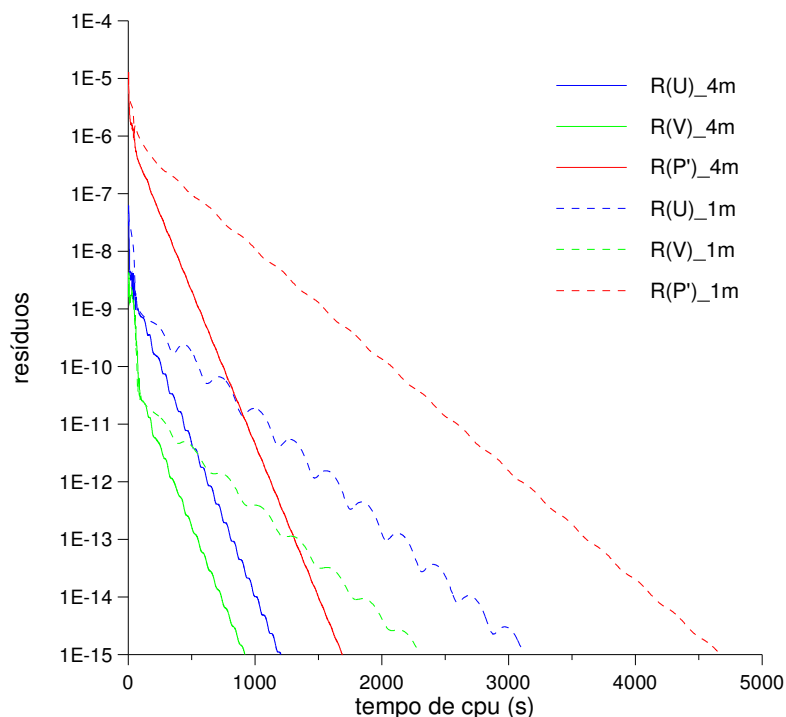


Fig. V-15 Escoamento entre placas: resíduos em 1 malha e em 4 malhas ciclo-V.

Em seguida foram realizados novos ensaios, agora variando-se o número de malhas e utilizando-se também o ciclo-W. A malha mais fina, o número de iterações em cada malha e os fatores de sub-relaxação permaneceram inalterados. A Tab. V-5 abaixo mostra os resultados obtidos via *multigrid* e em malha única para a comparação (cujos resultados são exibidos na coluna do ciclo-V mas valem também para o ciclo-W). O número de malhas é indicado por M e o tempo de computação t foi contado até que $R_{P'} \leq 1.0 \times 10^{-15}$.

Tab. V-5 Escoamento entre placas: esforço computacional em malha 160×32 .

M	ciclo -V				ciclo -W			
	$R_U (\times 10^{-18})$	$R_V (\times 10^{-20})$	$R_{P'}$	t (s)	$R_U (\times 10^{-18})$	$R_V (\times 10^{-20})$	$R_{P'}$	t (s)
4	2.76	9.22	9.95	1688	6.00	18.9	9.97	3756
3	2.01	6.59	10.0	1874	3.09	9.92	9.95	1776
2	1.29	4.74	9.99	1912	1.29	4.71	9.95	1917
1	1.70	3.56	9.87	4673	-	-	-	-

Novamente é verificada a superioridade das soluções *multigrid* em termos de velocidade de convergência. Aqui, contudo, observa-se que ao contrário do que ocorreu com as soluções em ciclo-V, a melhor solução em ciclo-W foi aquela com 3 malhas, estando o esforço computacional da solução com 4 malhas relativamente mais próximo do esforço da solução em malha única. Uma possível explicação é o reflexo do uso da formulação CS ao invés da formulação FAS. Nesta última, como é a própria aproximação para a grandeza que é manipulada em todos os níveis de malha, pode-se promover uma melhor atualização da matriz dos coeficientes A_k , o que ocorre somente na malha mais fina na formulação CS. Deste modo, como no ciclo-W fica-se mais tempo afastado do nível mais fino do que no ciclo-V, passa a não ser interessante aumentar o número de malhas de 3 para 4.

Na tabela seguinte, para as soluções *multigrid* em ciclo-V é verificada a influência do refinamento da malha no esforço computacional. O número de iterações em cada nível e os fatores de sub-relaxação foram os mesmos. Para se ter uma idéia da aceleração obtida, na última coluna é apresentada a razão entre o tempo de computação da solução em malha única e o tempo da solução em questão. Verifica-se que o ganho proporcionado pelo método *multigrid* aumentou à medida que malhas cada vez mais refinadas foram sendo empregadas.

Tab. V-6 Escoamento entre placas: influência do refinamento da malha.

Malha	M	$R_U (x 10^{-18})$	$R_V (x 10^{-20})$	$R_{P'} (x 10^{-16})$	t_M (s)	t_1 / t_M
160 x 32	4	2.76	9.22	9.95	1688.38	2.768
	3	2.01	6.59	10.0	1874.23	2.493
	2	1.29	4.74	9.99	1912.12	2.444
	1	1.70	3.56	9.87	4672.75	1
240 x 32	4	3.53	21.0	9.99	2615.35	4.066
	3	2.71	11.6	9.93	3218.22	3.304

	2	1.67	8.11	10.0	3457.12	3.076
	1	2.34	5.85	10.0	10634.46	1
320 x 32	4	6.56	53.0	9.98	2919.06	4.474
	3	3.07	17.5	9.95	3251.62	4.017
	2	3.44	13.0	9.93	3626.06	3.602
	1	3.85	12.7	9.95	13060.79	1

V.2.2. Escoamento entre placas com expansão abrupta

O segundo caso analisado foi o de um escoamento laminar entre placas com expansão abrupta (*backward facing step flow*), cujo esquema é mostrado na Fig. V-16.

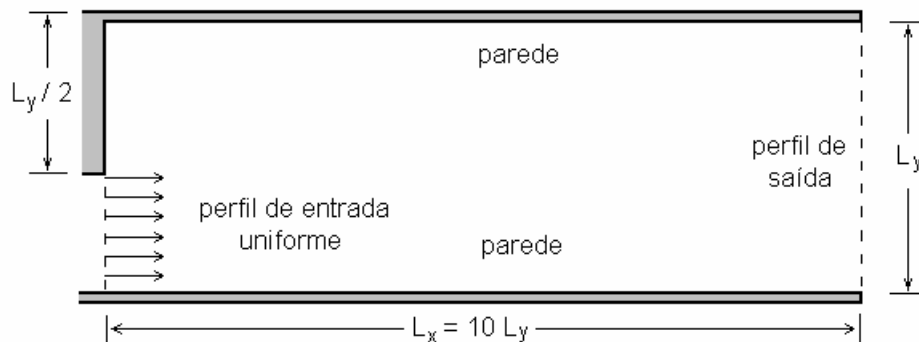


Fig. V-16 Escoamento entre placas com expansão abrupta.

Para este problema foram adotados $L_y = 0.05 \text{ m}$, $L_x = 0.5 \text{ m}$, $U_0 = 0.2 \text{ m/s}$, $\rho = 1.0 \text{ kg/m}^3$ e $\mu = 10^{-4} \text{ kg/m.s}$, de modo a ter $Re = 100$, com o número de Reynolds calculado segundo

$$Re = \frac{\rho U_0 L_y}{\mu} \quad . \quad (V-6)$$

Empregou-se uma malha não-uniforme com 144×48 VCs e $RE_x = RE_y = 0.333 \cong 1/3$, com RE_y calculada com base no VC próximo à parede e o VC junto à linha média (ou seja, há maior concentração junto às paredes e menor junto à linha média). Para a sub-relaxação

foram adotados $\xi_U = 0.8$, $\xi_V = 0.6$, $\xi_P = 0.03$ e a estratégia para as soluções *multigrid* em ciclo-V foi $v^{pré} = v^{pós} = 1$ e $v^{gr} = 5$. A Tab. V-7 compara o esforço computacional para a obtenção de soluções com diferentes números de malhas. Verifica-se novamente que as soluções *multigrid* propiciaram uma economia no tempo computacional

Tab. V-7 Escoamento com expansão abrupta: esforço computacional em malha 144 x 48 .

M	$R_U (x 10^{-18})$	$R_V (x 10^{-19})$	$R_P (x 10^{-16})$	t_M (s)	t_1 / t_M
4	2.99	3.96	9.92	1608.26	2.862
3	2.54	3.62	9.91	1797.00	2.562
2	2.52	4.78	9.95	1765.00	2.608
1	1.43	1.71	9.96	4603.03	1

Na Fig. V-17 é exibido o comportamento dos resíduos na solução em malha única (1m) e em 4 malhas (4m), enquanto que a Fig. V-18 contém a visualização dos vetores velocidade na região próxima à entrada, obtidos a partir da solução 4m, mostrando que qualitativamente a aplicação do método não comprometeu o padrão dos resultados.

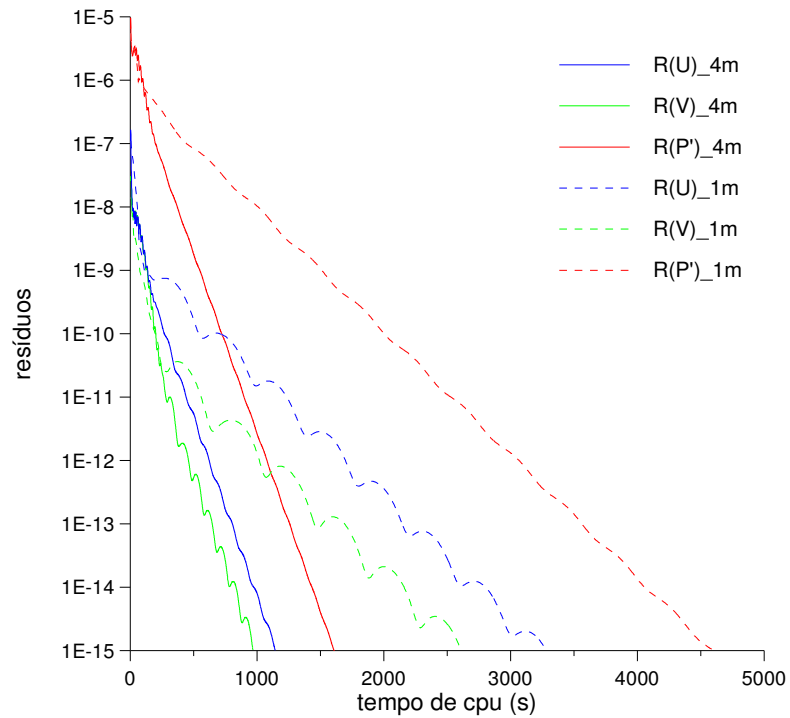


Fig. V-17 Escoamento com expansão abrupta: resíduos em 1 malha e em 4 malhas ciclo-V.

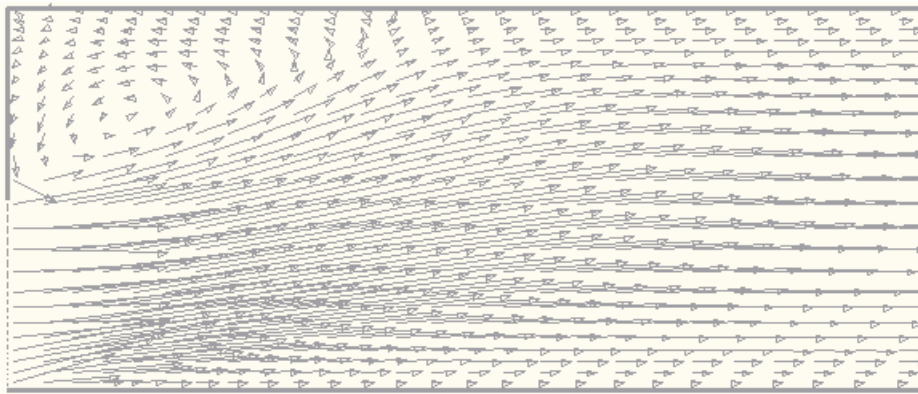


Fig. V-18 Escoamento com expansão abrupta: visualização da região de entrada.

V.2.3. Jato confinado

O caso seguinte analisado foi o do escoamento de um jato confinado, cujo esquema é exibido na Fig. V-19. Os valores adotados foram $L_y = 0.5 \text{ m}$, $L_x = 2.0 \text{ m}$, $U_0 = 0.01 \text{ m/s}$, $\rho = 1.0 \text{ kg/m}^3$ e $\mu = 10^{-4} \text{ kg/m.s}$.

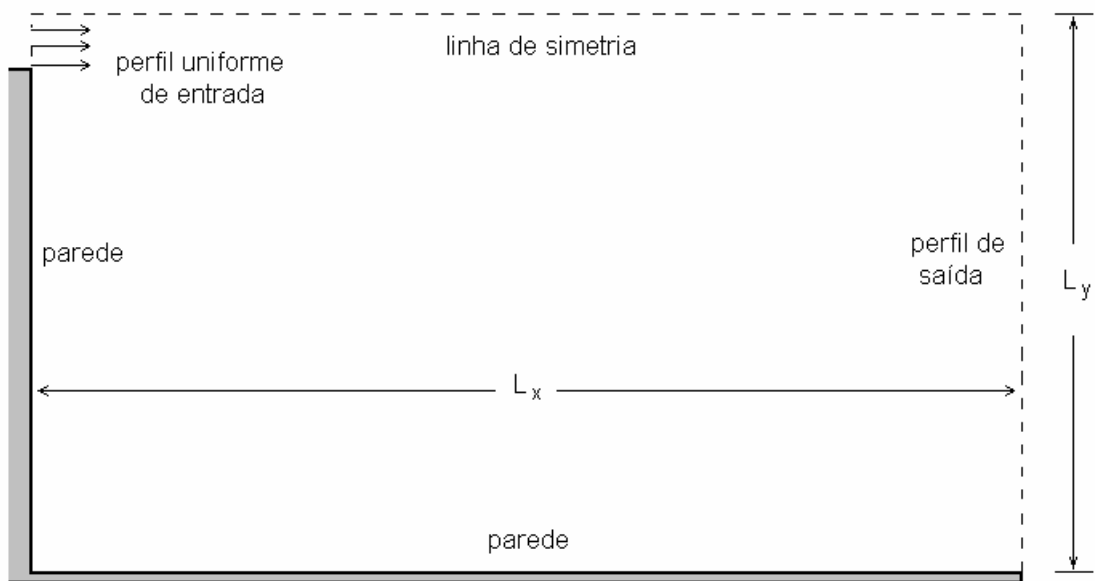


Fig. V-19 Escoamento de jato confinado.

Foi usada uma malha não-uniforme contendo 160 x 64 VCs e razões de espaçamento $RE_x = 0.25$ e $RE_y = 0.4$, esta última com base no VC próximo à parede (ou à linha de simetria) e o VC junto à linha média do domínio. A título de ilustração, a Fig. V-20 exibe o trecho da malha próximo à região de entrada do jato. Nesta figura pode-se ver que a extensão δy dos VCs crescem em direção à linha média (voltando depois a diminuir em direção à parede) enquanto que a extensão δx cresce suavemente em direção ao perfil de saída. Vê-se também que os pontos nodais ocupam o centro dos VCs e que somente 4 deles são utilizados para promover a entrada do jato, com os demais 60 correspondendo à parede.

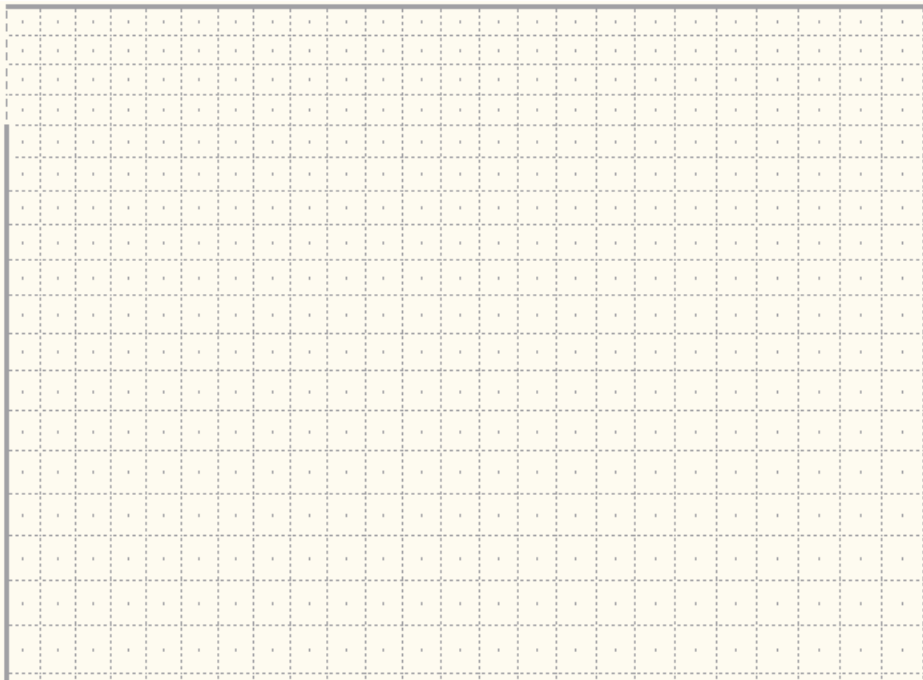


Fig. V-20 Jato confinado: trecho da malha computacional não-uniforme.

As soluções *multigrid* empregaram no máximo 3 níveis de malha. Não foi usado um quarto nível porque neste caso na malha mais grossa o VC do canto superior esquerdo (entrada do jato) seria solicitado à oeste por duas condições de contorno diferentes (entrada e parede). Para a sub-relaxação foram adotados $\xi_U = 0.8$, $\xi_V = 0.6$, $\xi_P = 0.01$ e a estratégia para as soluções *multigrid* em ciclo-V foi $v^{pré} = v^{pós} = v^{gr} = 1$. A Tab. V-8 compara o esforço computacional para a obtenção de soluções com diferentes números de malhas, onde se vê de novo que as soluções *multigrid* possuíram melhor desempenho

Tab. V-8 Jato confinado: esforço computacional em malha 160 x 64 .

M	$R_U (x 10^{-17})$	$R_V (x 10^{-18})$	$R_P (x 10^{-16})$	$t_M (s)$	t_1 / T_m
3	0.194	0.389	9.13	1558.64	4.833
2	0.997	1.37	9.60	3756.60	2.005
1	1.85	2.20	9.05	7533.12	1

Na Fig. V-21 é exibido o comportamento dos resíduos na solução em malha única (1m) e em 3 malhas (3m) e na Fig. V-22 é checado de maneira qualitativa o padrão dos resultados obtidos pela solução *multigrid* 3m.

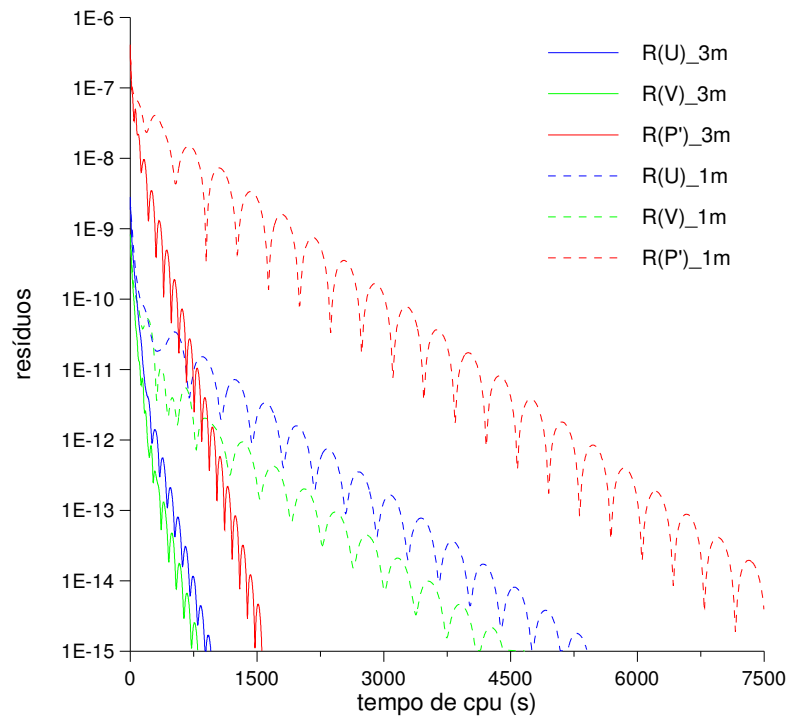


Fig. V-21 Jato confinado: resíduos em 1 malha e em 3 malhas ciclo-V.

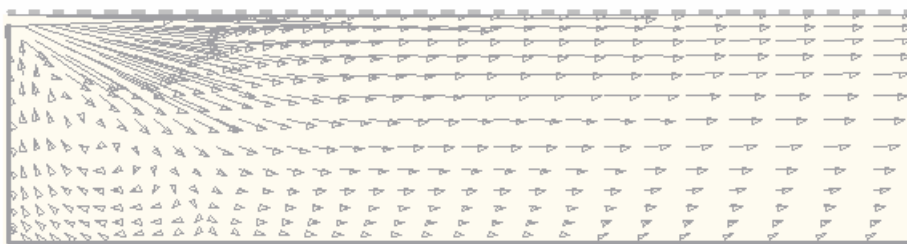


Fig. V-22 Visualização do escoamento de jato confinado.

V.2.4. Escoamento em tanque retangular

Por fim foi considerado o escoamento em um tanque retangular conforme esquema da Fig. V-23, onde $L_y = 0.6 \text{ m}$, $L_x = 0.8 \text{ m}$, $U_0 = 0.01 \text{ m/s}$, $\rho = 1.0 \text{ kg/m}^3$ e $\mu = 10^{-4} \text{ kg/m.s}$.

A malha não-uniforme empregada contém 128 x 96 VCs e as razões de espaçamento usadas foram $RE_x = RE_y = 0.5$, ambas calculadas de modo a promover maior concentração de VCs junto às paredes e menor junto ao centro do domínio. Os

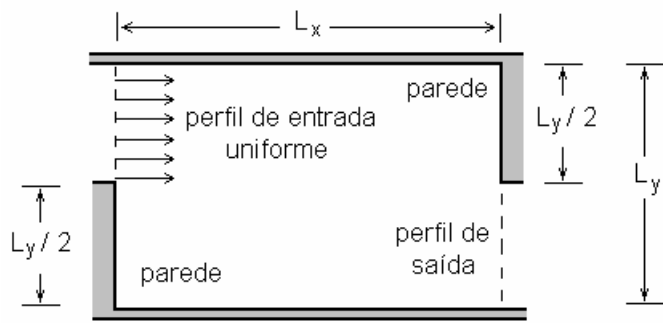


Fig. V-23 Escoamento em tanque retangular.

fatores de sub-relaxação adotados foram $\xi_U = 0.8$, $\xi_V = 0.6$, $\xi_P = 0.01$ e a estratégia para as soluções *multigrid* em ciclo-V foi $v^{pré} = v^{pós} = v^{gr} = 1$. Os esforços computacionais referentes às soluções com diferentes números de malhas são comparados na Tab. V-9. A exemplo dos demais casos, vê-se que as soluções *multigrid* obtiveram melhor desempenho.

Tab. V-9 Escoamento em tanque retangular: esforço computacional em malha 128 x 96.

M	$R_U (\times 10^{-18})$	$R_V (\times 10^{-18})$	$R_{P'} (\times 10^{-16})$	t_M (s)	t_1 / T_m
3	3.27	2.12	9.96	3887.78	2.098
2	2.55	2.07	9.96	4703.76	1.733
1	2.60	1.62	9.92	8157.98	1

Para este caso, porém, observou-se divergência na solução *multigrid* em 4 malhas. Tal fato possivelmente sugere que a malha mais grossa correspondente (16 x 12) não fosse fina o suficiente para tratar adequadamente as zonas de recirculação existentes. Infelizmente não foi possível realizar ensaios em malhas mais refinadas devido à sobrecarga de memória.

Por último, na Fig. V-24 é exibido o comportamento dos resíduos na solução em malha única (1m) e em 3 malhas (3m) e na Fig. V-25 o padrão dos resultados obtidos pela solução *multigrid* 3m é verificado de maneira qualitativa.

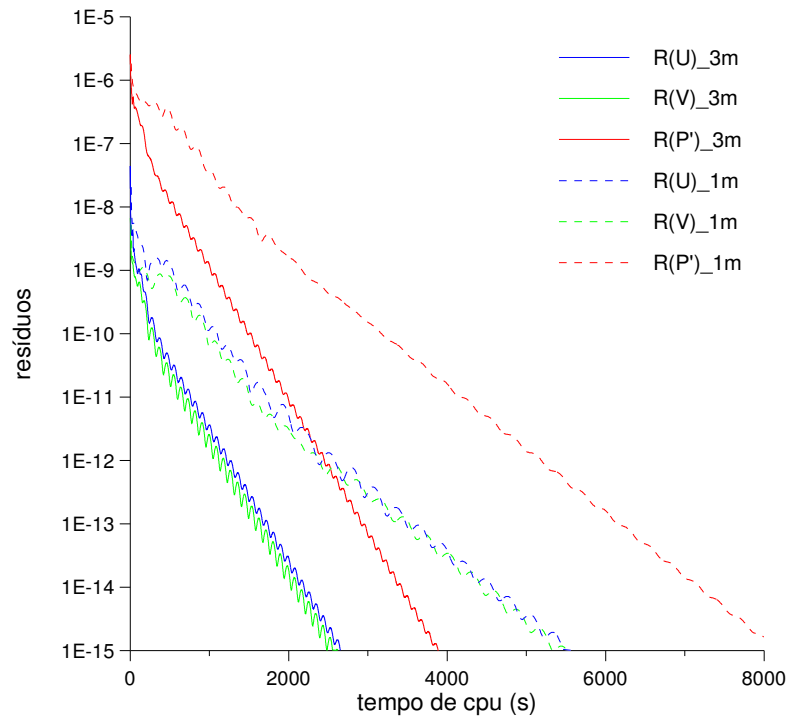


Fig. V-24 escoamento em tanque retangular: resíduos em 1 malha e em 3 malhas ciclo-V.

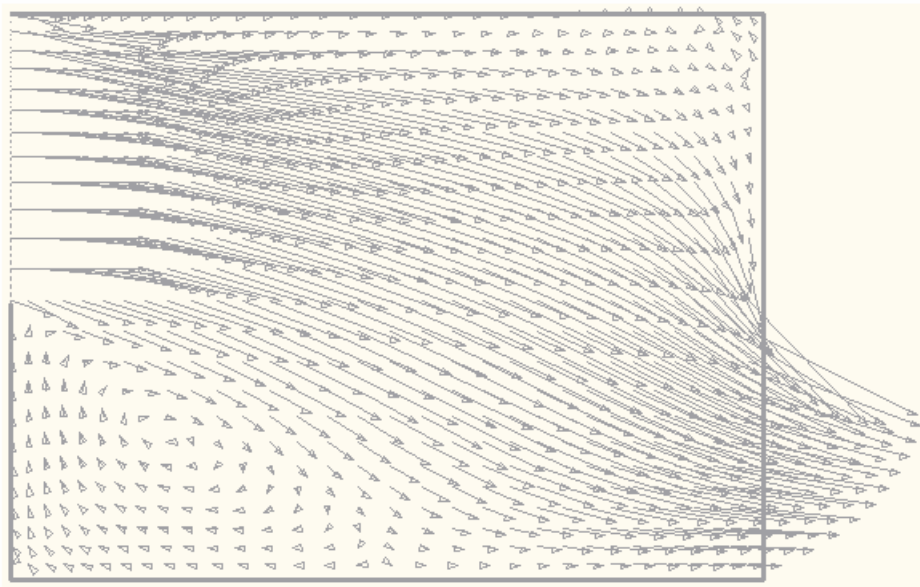


Fig. V-25 Visualização do escoamento em tanque retangular.

VI. CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

No presente trabalho foi aplicada a técnica *multigrid* na implementação de dois programas computacionais visando a solução numérica de problemas bidimensionais simples de mecânica dos fluidos (escoamentos laminares) e de transferência de calor, ambos em regime permanente. Para realizar a discretização em volumes finitos das equações de transporte, foram utilizadas malhas computacionais estruturadas e ortogonais, podendo ou não ser uniformes. O sistema de equações algébricas resultante foi resolvido por meio de algoritmos iterativos (Gauss-Seidel e TDMA). O método *multigrid* para acelerar a convergência da solução numérica foi empregado na formulação CS - *correction storage*.

Em todos os casos considerados e estudados constatou-se o melhor desempenho dos métodos iterativos em que foi-se aplicada a técnica *multigrid*. Através destes métodos pôde-se obter soluções numéricas com ganhos expressivos de tempo de computação em relação à solução obtida em malha única, sem ao mesmo tempo comprometer a qualidade da solução.

Para o problema linear estudado (problema térmico), o qual não exige a atualização da matriz dos coeficientes, verificou-se uma superioridade do ciclo-W frente ao ciclo-V, tendo como possível explicação o maior tempo gasto pelo ciclo-W em níveis mais grossos de malha, o que tende a melhorar a taxa de convergência. Observou-se uma redução do tempo de convergência para valores crescentes do número de Peclet Pe , refletindo a contribuição do mecanismo de convecção na taxa total de transporte através do domínio. Foi constatado também que o desempenho do algoritmo *multigrid* é influenciado pela estratégia de solução adotada para níveis de malha distintos, seja na determinação do número de iterações, seja na escolha do método iterativo.

Dentre os problemas não-lineares vale destacar o de escoamento entre placas planas e paralelas, no qual observou-se não ser interessante o uso de um número de malhas superior a 3 para as soluções em ciclo-W, cujo esforço computacional utilizando-se 4 malhas ficou relativamente mais próximo do esforço da solução em malha única. Uma possível explicação é o reflexo do uso da formulação CS ao invés da formulação FAS, uma vez que na primeira a atualização da matriz dos coeficientes ocorre somente na malha mais fina, da qual fica-se mais tempo afastado no ciclo-W. Neste primeiro problema, observou-se ainda ser o ganho no tempo computacional tanto maior quanto mais refinada for a malha computacional empregada.

Os desenvolvimentos futuros referem-se ao modelo físico-matemático, ao método numérico utilizado e ao próprio algoritmo *multigrid*. Conforme já discutido em capítulo anterior, este trabalho faz parte de um projeto mais abrangente, de modo que estes novos desenvolvimentos estão relacionados com esta proposta. São eles:

- Considerar problemas com propriedades do fluido variáveis (ρ e/ou μ) e problemas em regime transiente.
- Introduzir modelos de turbulência. Em [26] são analisados os principais modelos existentes. Em especial, é sugerido o modelo k - ϵ padrão de Launder e Spalding [27].
- Abordar problemas com simetria axial. As equações de transporte devem então ser escritas em coordenadas cilíndricas (r, z).
- Incluir tratamento de geometrias mais complexas. Uma extensão interessante seria a de escrever o programa computacional em coordenadas generalizadas, acarretando em cuidados especiais ao processo de discretização e à implementação do método *multigrid*.

- Aplicar a formulação FAS (*full approximation storage*) ao método *multigrid* e comparar o desempenho obtido com o da formulação CS.
- Implementar o algoritmo *multigrid* com critério dinâmico de mudança de nível de malha e comparar os resultados com os que aqui foram obtidos com a estratégia de números pré-fixados de iterações.
- Considerar outros métodos iterativos de solução (ex: SIP - *strongly implicit procedure*).
- Introduzir novas formas de aceleração da convergência da solução numérica, como por exemplo a técnica de processamento paralelo [28].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Maliska, C.R., *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1995.
- [2] Patankar, S.V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1980.
- [3] Hackbusch, W., *Multi-Grid Methods and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [4] Brandt, A., Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems, *Math. Comp.*, vol. 31, No. 138, pp. 333-390, 1977.
- [5] Stüben, K., Trottenberg, U., Multigrid Methods, IN: *Lect. Notes Math.*, vol. 960, pp. 1-76, Berlin, 1982.
- [6] Thompson, M.C., Ferziger, J.H., An adaptive multigrid technique for the incompressible Navier-Stokes equations, *J. Comp. Phys.*, vol. 82, pp. 94-121, 1989.
- [7] de Lemos, M.J.S., *GENC - 2D, Generalized coordinate code for turbulent flow analysis in two-dimensional complex geometries*, Computational Transport Phenomena Group, Computational Transport Phenomena Laboratory, IEME-ITA, São José dos Campos, 1998.
- [8] Bird, R.B., Stewart, W.E., Lightfoot, E.N., *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons, New York, 1960.
- [9] Eskinazi, S., *Vector mechanics of fluids and magnetofluids*, Academic Press, New York, 1967.
- [10] Khosla, P.K., Rubin, S.G., A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme, *Comput. Fluids*, vol. 2, No. 12, pp. 207, 1974.

- [11] Raithby, G.D., Torrance, K.E., Upstream-weighted differencing schemes and their application to elliptic problems involving fluid flow, *Comput. Fluids*, vol. 2, pp. 191-206, 1974.
- [12] Raithby, G.D., Prediction of dispersions by surface discharge, *Basin Investigation and Modelling Section - Canada Centre for Inland Waters*, Canada, 1976.
- [13] Patankar, S.V., Spalding, D.B., A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 15, pp. 1787-1806, 1972.
- [14] Brandt, A., Multigrid Methods, *Lect. Notes Math.*, vol. 960, pp. 272-282, 1982.
- [15] Vanka, S.P., Block-implicit multigrid calculation of two-dimensional recirculating flows, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 86, pp. 29-48, 1986.
- [16] Jiang, Y., Chen, C.P., Tucker, P.K., Multigrid solutions of unsteady Navier-Stokes equations using a pressure method, *Num. Heat Transfer - Part A*, vol. 20, pp. 81-93, 1991.
- [17] Bai, L., Mitra, N.K., Fiebig, M.C., Kost, A., A multigrid method for predicting periodically fully developed flow, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, vol. 18, pp. 843-852, 1994.
- [18] Peric, M., R uger, M., Scheuerer, G., A finite volume multigrid method for calculating turbulent flows, IN: *Seventh Symposium on Turbulent Shear Flows*, pp. 7.3.1-7.3.6, Stanford University, 1989.
- [19] Hortmann, M., Peric, M., Scheuerer, G, A., Finite volume multigrid prediction of laminar natural convection: bench-mark solutions, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, vol. 11, pp. 189-207, 1990.
- [20] Joshi, D.S., Vanka, S.P., Multigrid calculation procedure for internal flows in complex geometries, *Num. Heat Transfer - Part B*, vol. 20, pp. 61-80, 1991.

- [21] Bonhaus, D.L., An upwind multigrid method for solving viscous flows on unstructured triangular meshes, *M.S. Thesis*, University of Cincinnati, 1993.
- [22] Sathyamurthy P.S., Patankar, S.V., Block-correction-based multigrid method for fluid flow problems, *Num. Heat Transfer - Part B*, vol. 25, pp. 375-394, 1994.
- [23] Fletcher, C.A.J., *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, vol. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [24] Hutchinson, B.R., Galpin, P.F., Raithby, G.D., Application of additive correction multigrid to the coupled fluid flow equations, *Num. Heat Transfer*, vol. 13, pp. 133-147, 1988.
- [25] Shah, R. K., London, A. L., Laminar flow forced convection in ducts, IN: *Advances in Heat Transfer*, Academic Press, New York, 1978.
- [26] de Lemos, M.J.S., *Métodos em Engenharia para Cálculo de Escoamento Turbulento*, Embaixada do Brasil em Washington, Setor de Ciência e Tecnologia, 1986.
- [27] Launder, B.E., Spalding, D.B., The numerical computation of turbulent flows, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 3, pp. 269-289, 1974.
- [28] Fortuna, A.O., SCYL: A program for the numerical solution in parallel of the Navier-Stokes equations, IN: *XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (CD-ROM)*, Tema 44, COB 319, 1997.