



Ministério da
**Ciência, Tecnologia
e Inovação**



MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE “RENDEZVOUS AND DOCKING/BERTHING”

Narumi Seito

Tese de Doutorado do Curso de Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais – Curso de Mecânica Espacial e Controle, orientado pelos Dr. Ijar Milagre da Fonseca e Dr. Osamu Saitome, aprovada em 28 de maio de 2015.

URL do documento original:

[<http://urlib.net/xx/yy>](http://urlib.net/xx/yy)

INPE

São José dos Campos

2015

Ficha será revisada pelo SID.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Seito, Narumi

Cutter Modelagem e simulação de “*Rendezvous & Dockink/Berthing*” /
Narumi Seito - São José dos Campos: INPE, 2015.
i + 0p. ; (aa/bb/cc/dd-TDI)

Tese (Doutorado em Tecnologia Espaciais / Mecânica Espacial e
Controle) – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos
Campos, 2015.

Orientadores: Dr. Ijar Milagre da Fonseca e Dr. Osamu Saotome.

Copyright AAAA do MCT/INPE. Nenhuma parte desta publicação pode ser reproduzida, armazenada em um sistema de recuperação, ou transmitida sob qualquer forma ou por qualquer meio, eletrônico, mecânico, fotográfico, reprográfico, de microfilmagem ou outros, sem a permissão escrita do INPE, com exceção de qualquer material fornecido especificamente no propósito de ser entrado e executado num sistema computacional, para o uso exclusivo do leitor da obra.

Copyright AAAA by MCT/INPE. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, microfilming or otherwise, without written permission from the INPE, with the exception of any material supplied specifically for the purpose of being entered and executed on a computer system, for exclusive use of the reader of the work.

FOLHA DE APROVAÇÃO

CONFECCIONADA PELO SPG E INCLUÍDA PELO SID.

AGRADECIMENTOS

Ante ao desafio aceito: desbravar além fronteira na busca do Conhecimento, a batalha vencida, a alegria extravasada, a satisfação da missão cumprida. No momento em que estou comigo mesmo, contabilizando meu caminhar, agradecer se faz necessário.

Agradeço ao Pai, que nos momentos decisivos, norteou-me mantendo-me sempre confiante e resoluta na decisão tomada.

Agradeço aos meus pais, responsáveis para que eu me tornasse responsável.

Agradeço aos meus irmãos, por nos manter unidos numa sólida família, incentivando-me na busca da formação intelectual.

Agradeço as minhas filhas, Marjorie, Michelle e Melissa, incentivo maior do meu viver.

Agradeço (in memoriam) ao Dr Paulo Moraes Junior idealizador dessa Tese, incentivador incansável, amigo sempre presente.

Agradeço ao Dr Ijar Milagre da Fonseca, que insistiu, persistiu e nunca desistiu na sua firme e segura orientação.

Agradeço na pessoa do Dr. Evandro Marconi Rocco, a todo o INPE que me abrigou, formou e me possibilitou completar, com êxito, essa Tese.

Agradeço aos pesquisadores da ASE/IAE, especialmente aos Maj Dr. Élcio de Oliveira e ao Ten Eng Carlos Henrique Melo Souza, que nos momentos em que foram solicitados, prontamente realizaram as simulações do SARA.

Agradeço àqueles que, com a luz do saber, conduzem outros pelos caminhos do conhecimento, despertando potencialidades.

Que o meu agradecer seja concretizado, ao compartilhar o conhecimento acumulado, com outros que aceitem desbravar além fronteiras.

RESUMO

Esta tese tem como objetivo apresentar uma solução para o problema de RVD/B (encontro e acoplamento/atracação) entre duas espaçonaves, perseguidora e alvo, em órbita. Depois de uma breve revisão da literatura para contextualizar este trabalho, apresentam-se as estratégias de aproximação, as técnicas de sincronização de órbita e atitude, e a técnica de aproximação de proximidade, sendo suportadas por dois sistemas de equações diferenciais para os movimentos translacional e rotacional das espaçonaves. Duas configurações são consideradas para a espaçonave robótica perseguidora: uma, quando o manipulador robótico, nela incorporado, estiver inerte, e a outra, quando o manipulador robótico estiver em ação. Na primeira configuração, a formulação newtoniana é usada para obter as equações da dinâmica de translação de Hill-Clohessy-Wiltshire, e o movimento de atitude é determinado pelas equações de Euler. Estes dois sistemas de equações obtidos acima permitem conduzir o perseguidor até o espaço de trabalho de atracação do alvo. Na segunda configuração, a formulação de Lagrange, para quase-coordenadas e para coordenadas generalizadas, fornece as equações do movimento do manipulador robótico para a atracação no alvo. No equacionamento e na simulação numérica das aberturas do manipulador robótico, reside a originalidade da tese. As simulações computacionais da dinâmica de ambas as configurações foram implementadas utilizando-se o pacote de software MatLab[®].

MODELING AND SIMULATION OF RENDEZVOUS AND DOCKING/BERTHING

ABSTRACT

In this thesis strategies to solve the problem of the RVD/B (RendezVous and Docking/Berthing) orbital operations are studied. In a brief review of the literature, the strategies of approximation, the techniques for orbit and attitude synchronization, and the technique for the close proximity approximation are presented, all of them supported by two systems of differential equations for the translational and rotational motion of both spacecrafts. Two configurations are considered for the chaser: one when the robotic manipulator of the chaser is inert, and a second one when the robotic manipulator is in action. In the first configuration the Newtonian formulation is used to obtain the equations of Hill-Clohessy-Klein for the translational dynamics, while the attitude motion is determined by Euler's equations. These two systems of differential equations allow to guide the chaser up to the point for berthing the target. In the second configuration, the Lagrangian formulation for quasi-coordinates and generalized coordinates supplies the equations for the motion of the robotic manipulator when berthing the target. These latter equations and their numerical simulation of berthing the target are the original part of this thesis. The computational simulations of the dynamics are carried out by use of the software MatLab[®].

LISTA DE FIGURAS

Pág.

Figura 2.1 – Aproximação e acoplamento da Gemini 8 com Agena em 16MAR1966	5
Figura 2.2 Pouso do rover Curiosity e foto de Marte realizada em 28AGO12. .	6
Figura 2.3 - Pouso do módulo Philae no Cometa 67P/Churymov-Gerasimenko ...	7
Figura 2.4 - Visão artística e aproximação real do acoplamento da ATV à ISS, em 28MAR2012	10
Figura 2.5 – Dragon acoplado a ISS (25MAI2012) e seu retorno a Terra (31MAI2012)	12
Figura 3.1 – Concepção artística da nave Hayabusa na superfície do asteroide Itokawa	14
Figura 3.2 – Mostrando o módulo de pouso Philae descendo no cometa	15
Figura 3.3 – Acoplamento (docking) e atracação (berthing)	17
Figura 3.4 – Concepção artística do acoplamento espacial da ETS-VII	21
Figura 3.5 – Redução do ângulo de fase orbital entre a nave perseguidora e a nave alvo	22
Figura 3.6 – Exemplo de redução do ângulo de fase (phasing) para a operação de encontro do Space Shuttle com a ISS	25
Figura 3.7 – Perfil típico de aproximação de longa distância para o caso e RendezVous&Docking do Space Suttle	26
Figura 3.8 – Sistema equatorial centrado na Terra	28
Figura 3.9 – Sistema do plano da órbita	29
Figura 3.10 – Sistema orbital local da espaçonave	30
Figura 4.1 – Vetores posição das espaçonaves perseguidora e alvo em relação aos sistemas inercial e móvel	38
Figura 4.2 – Visualização do Teorema de Euler	45
Figura 4.3 – Movimento de X_B no intervalo de tempo Δt	56
Figura 4.4 – Movimento relativo do corpo rígido no referencial Newtoniano	63
Figura 4.5 – Movimento relativo do corpo rígido no referencial fixo no corpo, cuja origem está no centro de massa	65, 70

Figura 4.6 – Fluxograma do Regulador Linear Quadrático	74
Figura 5.1 – Inclinação entre os planos orbitais do perseguidor e do alvo na direção do eixo y	81
Figura 6.1 – Plataforma Orbital Recuperável SARA	86
Figura 6.2 – Concepção artística do ciclo de lançamento e retorno a Terra de uma nave visitante à plataforma SARA	87
Figura 6.3 – Posição relativa das naves em relação ao tempo	94
Figura 6.4 – Velocidade relativa & tempo	95
Figura 6.5 – Esforço do controle em translação & tempo	96
Figura 6.6 – Sincronização da atitude & tempo	97
Figura 6.7 – Sincronização da velocidade angular de ambas naves & tempo	98
Figura 6.8 – Esforço do controle em atitude & tempo	99
Figura 6.9 – Erro em atitude & tempo	100
Figura 6.10 – Configurações dinâmicas das naves robôs – operações de ancoragem.	103
Figura 6.11 – Controle de atitude da nave visitante considerando o manipulador robótico fora de serviço	109
Figura 6.12 – Esforço de controle para o caso do manipulador robótico fora de serviço	110
Figura 6.13 – Controle de atitude da nave visitante considerando o manipulador robótico em movimento para se acoplar com a nave alvo	111
Figura 6.14 – Esforço de controle, associado ao controle da nave, quando o robô está em operação	112
Figura 6.15 – Estabilidade em atitude para o caso em que os elos do manipulador se abrem sincronizados e em sentido contrário	113

LISTA DE TABELAS

	<u>Pág.</u>
Tabela 3.1 – Definições das fases dos eventos	24
Tabela 6.1 – Dados de entrada para as simulações do movimento rotacional da nave robótica.....	106

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

ATV	Automated Transfer Vehicle
CLA	Centro de Lançamento de Alcântara
ESA	European Space Agency
ESOC	European Space Operation Center
ETS-VII	Engineering Test Satellite VII
GNC	Guidance Navigation Control
ISS	International Space Station
JAXA	Japan Aerospace Exploration Agency
LEO	Low Earth Orbit
LQR	Linear Quadratic Regulator
MatLab	MATrix LABoratory
MTFF	Man-Tended Free-Flyer
NASA	National Aeronautics and Space Administration
POSL	Plano de Operação São Lourenço
RAAN	Right Ascension of Ascending Node
RVD/B	RendezVous&Docking/Berthing (encontro e acoplamento/atracação)
SARA	SATélite de Reentrada Atmosférica

SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1 INTRODUÇÃO	1
2 EVOLUÇÃO HISTÓRICA DAS MISSÕES DE RENDEZVOUS&DOCKING/ BERTHING.....	5
2.1. Utilização de RVD/B em programas espaciais	8
2.1.1 Nave espacial de carga russa Progress	9
2.1.2 Programa ATV (Automated Transfer Vehicle) da ESA	10
2.1.3 Programa SpaceX Dragon	12
3 ENCONTRO E ACOPLAMENTO/ATRACAÇÃO	13
3.1. Considerações subsidiárias relevantes	17
3.2. Eventos do encontro e acoplamento/atracação	19
3.3. Operacionalização dos eventos do encontro e acoplamento/atracação	21
3.4. Exemplo de RendezVous&Docking do Space Shuttle com a ISS	24
3.5. Sistemas de referência utilizados no estudo do RVD/B	27
3.5.1 Sistema de referência equatorial centrado na Terra.....	27
3.5.2 Sistema de referência plano da órbita	28
3.5.3 Sistema de referência orbital local da espaçonave	30
4 ANÁLISE E MODELAGEM DO PROBLEMA	33
4.1. Movimento orbital em torno de um corpo central.....	33
4.1.1 Movimento de translação do centro de massa	33
4.1.1.1 Cálculo da Matriz Jacobiana	35
4.1.2 Movimento de rotação em torno do seu centro de massa.....	40
4.1.2.1 Cinemática de rotação.....	40
4.1.2.1.1 Ângulos de Euler	41
4.1.2.1.2 Parâmetros de Euler.....	44
4.1.2.1.3 Parâmetros de Cayley-Klein	47
4.1.2.1.4 Parâmetros do quatérnio (Hamilton).....	51
4.1.2.1.5 Propagação do quatérnio	56
4.1.2.1.6 Modelo da cinemática para atitude relativa	61
4.1.2.2 Dinâmica de rotação.....	63
4.1.2.2.1 Equações de Euler para o quantidade de movimento angular	67
4.1.2.2.2 Torques que atuam nas espaçonaves.....	69

4.1.2.2.1 Torque devido ao gradiente de gravidade	69
4.2 Lei de Controle – Regulador Linear Quadrático (LQR).....	73
4.2.1 Introdução	73
4.2.2 Teoria sobre o LQR.....	73
5 ESTUDO DO CASO PARA A SOLUÇÃO HOMOGÊNEA:	
SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CLOHESSY-WILTSHIRE	75
5.1 Definição da estratégia de controle	76
5.2 Cálculo do incremento de velocidade total	77
5.3 Análise do movimento no eixo y (fora do plano xz)	79
5.4 Método de cálculo do tempo de voo do perseguidor até ao alvo.....	81
5.5 Cálculo do consumo de combustível	83
6 ESTUDO DE CASOS PARA SOLUÇÕES NÃO HOMOGÊNEAS	85
6.1 Estudo de caso 1: ancoragem autônoma utilizando a Plataforma Orbital SARA.....	85
6.1.1 Introdução	86
6.1.2 Modelagem matemática	88
6.1.2.1 Equações da dinâmica de translação para o movimento relativo.....	88
6.1.2.2 Equações da cinemática de rotação relativa	88
6.1.2.3 Equações da dinâmica de rotação relativa	89
6.1.2.4 Modelagem do sistema	89
6.1.2.5 Lei de controle – Regulador Linear Quadrático	91
6.1.2.6 Vetor de estado e condições iniciais	91
6.1.2.7 Simulações e resultados	93
6.2 Estudo de caso 2: atracação autônoma com a Plataforma SARA	101
6.2.1 Introdução	101
6.2.2 Esquema do estudo de duas configurações de nave robótica	102
6.2.3 Modelagem matemática	102
6.2.4 Vetor de estado e condições iniciais	105
6.2.5 Simulações e resultados	108
7 CONCLUSÃO.....	115
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	117

1 INTRODUÇÃO

As operações de RVD/B (RendezVous&Docking/Berthing) são aquelas que requerem encontro, ancoragem, atracação e/ou acoplamento, em órbita da Terra ou de outro corpo celeste. A ancoragem representa a operação de estacionar a espaçonave perseguidora a uma distância mínima da espaçonave alvo. Estacionar implica velocidade relativa zero entre as espaçonaves, de forma que ambas permaneçam à mesma distância, enquanto se movem em órbita da Terra. Essa distância mínima tem que atender aos requisitos de segurança para evitar colisão entre as naves. Para o caso de atracação, a distância mínima tem que satisfazer também o requisito de estar dentro do espaço de operação (workspace) do manipulador robótico, para que a atracação possa ser bem sucedida. Esse manipulador robótico pode estar na espaçonave alvo ou na espaçonave perseguidora. Agora, quando se tratar simplesmente de acoplamento, essa distância mínima com velocidade relativa zero, requer que o mecanismo de acoplamento da espaçonave perseguidora esteja alinhado com a porta de acoplamento da espaçonave alvo.

Essas operações de RVD/B envolvem duas grandes áreas da Dinâmica Orbital: movimento orbital e movimento de atitude. O primeiro estuda o movimento de translação das espaçonaves em torno da Terra. O segundo trata do movimento de atitude das espaçonaves. No caso de Docking/Berthing faz-se necessário estudar o movimento relativo de órbita e de atitude entre as espaçonaves.

As operações de RVD/B podem ser classificadas como cooperativas e não-cooperativas. No primeiro caso há interação entre o perseguidor e o alvo. No segundo caso o perseguidor não recebe nenhum dado, nenhuma cooperação do alvo e, em consequência, são operações mais complicadas e que exigem suporte tecnológico, tais como, visão computacional, detecção e identificação de padrões, envolvendo grande complexidade computacional. Como operações de RVD/B não-cooperativas podem-se citar aquelas em que os alvos não possuem porta de acoplamento, nem foram dotados com alguma forma de comunicação ativa, ou estão impossibilitados de utilizá-las. Estes tipos de

alvos, os não-cooperativos, podem ser satélites artificiais ou veículos espaciais sem porta de acoplamento (docking port), sem sistema de comunicação ativo, ou com a vida útil exaurida. Citam-se também os veículos espaciais que tenham atingido o fim de sua vida útil, são eles considerados detritos espaciais artificiais. Nesse sentido os detritos podem ser classificados como artificiais e naturais. Dentre os detritos naturais citam-se micro e pequenos asteroides. Os 500 mil detritos espaciais catalogados pela NASA (2015), hoje ocupam uma posição crescente de importância, dada a necessidade de limpar as regiões onde orbitam os satélites. Para a retirada desses detritos pode-se utilizar os rebocadores espaciais (space tugs), os quais necessitam estarem munidos de manipuladores robóticos para agarrar o alvo. Ou então, uma nave perseguidora que se atraque no alvo, através de algum mecanismo de garras, como por exemplo, as mãos mecânicas de um manipulador robótico. Neste sentido citam-se as garras do manipulador robótico usado no Space Shuttle (hoje fora de operação) e o atracamento do módulo Philae da nave Rosetta, que recentemente pousou em um cometa. O módulo Philae usou um dispositivo de arpões para se fixar no solo do cometa. Missões de RVD/B com alvos não cooperativos são missões espaciais complexas que requerem determinação da atitude do alvo, ou seja, neste tipo de operação é necessário a sincronização da atitude das duas naves (ARANTES, 2011) bem como identificação de um local no alvo para a atracação ou captura.

As operações de RVD/B podem ser também classificadas como autônomas e não autônomas. As operações autônomas são aquelas em que o perseguidor não é tripulado. Embora as operações autônomas sejam mais complexas, atualmente são as de maior uso, citam-se os exemplos dos ATV (Automated Transfer Vehicle) e do SpaceX Dragon, capazes de identificar o alvo e realizar automaticamente as operações de acoplamento, ou atracação, com o alvo. Entretanto a participação de astronautas continua sendo considerada muito importante e a SpaceX Dragon planeja produzir uma versão tripulada para RendezVous&Docking com a ISS.

São exemplos típicos de atividades espaciais que requerem as operações de RVD/B 2003 (FEHSE, 2003):

- Montagem de grandes estruturas em órbita baixa;
- Ressuprimento/manutenção de plataformas e estações orbitais;
- Troca de tripulação das estações orbitais;
- Reparo de espaçonave em órbita;
- Captura de espaçonave e retorno para a Terra;
- Reacoplar em um veículo em órbita e retornar para a Terra;
- Missões planetárias com retorno a Terra,
- Operações de captura e/ou desvios de debris para evitar colisões com veículos em órbita da Terra.

2 EVOLUÇÃO HISTÓRICA DAS MISSÕES DE RENDEZVOUS & DOCKING/ BERTHING

As operações de RVD/B remontam os anos 60, na primeira década da conquista do espaço.

O primeiro RVD não autônomo entre duas espaçonaves ocorreu em 16 de março de 1966, quando Neil Armstrong e Dave Scott manualmente realizaram o encontro da espaçonave perseguidora Gemini 8 com a espaçonave alvo Agena e se acoplaram em órbita (NASA/RVGeminiAgena,1966).



Figura 2.1 Aproximação e acoplamento da Gemini 8 com a Agena, em 16MAR1966.

Fonte: NASA (2012)

O primeiro RVD autônomo, ou seja, sem cosmonautas pilotando as espaçonaves, foi realizado em 30 de outubro de 1967, quando os veículos soviéticos Cosmos 186 e 188 se acoplaram em órbita terrestre (NASA/RVDAutomated, 1967).

Um exemplo audacioso de RVD/B foi a Missão Apollo 11 que levou o homem a Lua. O módulo lunar Eagle desacoplou do módulo de comando Columbia (em órbita lunar a 100 km acima de altitude) e realizou a alunissagem em 20 de julho de 1969. O Eagle retornou, acoplou novamente ao Columbia e, após a passagem dos astronautas para o módulo de comando, foi descartado (NASA/APOLLO11, 1968).

Outra missão que se destaca e é uma das missões mais memoráveis de prestação de serviço em órbita foi a do Space Shuttle STS-61, que lançado em 02 de dezembro de 1993, realizou a primeira missão espacial de manutenção, a do Telescópio Espacial Hubble. O serviço em órbita consistiu da instalação de uma nova câmera principal e um pacote de ótica corretiva no Hubble. Com uma carga de trabalho muito pesada, a missão STS-61 foi uma das mais complexas da história do Shuttle. Durou quase 11 dias e os membros da tripulação fizeram cinco caminhadas espaciais (EVA - ExtraVehicular Activity), um recorde histórico. Outro exemplo de prestação de serviço em órbita, se refere a missão STS-125 para executar reparos no Hubble Space Telescope em 2009 (NASA/HUBBLE, 2009).

Presentemente, uma das operações mais complexas e audaciosas, com desacoplamentos consecutivos de módulos, foi a Missão Marte, que colocou a sonda rover Curiosity na superfície de Marte, em 28AGO12 (NASA/MARS, 2012).



Figura 2.2 Pouso do rover Curiosity e foto de Marte realizada em 28AGO12.

Fonte: NASA (2012)

O potencial dessa tecnologia também foi testada em missões interplanetárias pela Agência Espacial Europeia (ESA), em dois de março de 2004, quando foi lançado da Base de Kourou, no topo do Ariane 5G+, uma nave espacial, cuja missão durou dez anos oito meses e dez dias, com destino final ao cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko. O lançamento dessa nave foi planejado no conjunto de missões HORIZON 2000 da ESA. Nessa nave espacial foram

acomodadas a Sonda Espacial Rosetta (em homenagem a Pedra de Roseta, que auxiliou no entendimento dos hieróglifos egípcios) e o módulo de pouso robótico Philae (ilha do Rio Nilo, onde foi descoberto um obelisco, que também contribuiu para decifrar os hieróglifos da Pedra de Roseta). O módulo Philae se separou da nave Rosetta e pousou no cometa, se fixando na superfície utilizando arpões.

Desde seu lançamento, a espaçonave orbitou o Sol cinco vezes, realizou dois sobrevoos a asteroides e um sobrevoo a Marte, enviando dados e imagens. Depois do sobrevoo ao planeta vermelho em 2007, em setembro de 2008 ela sobrevoou o Asteroide 287 Steins e em julho de 2010 o asteroide Lutetia. Depois de passar trinta e um meses em estado de “hibernação” no espaço, estabilizada por rotação e com todos os equipamentos desligados à exceção do computador de bordo, a nave foi religada numa órbita a caminho do encontro final com o cometa.

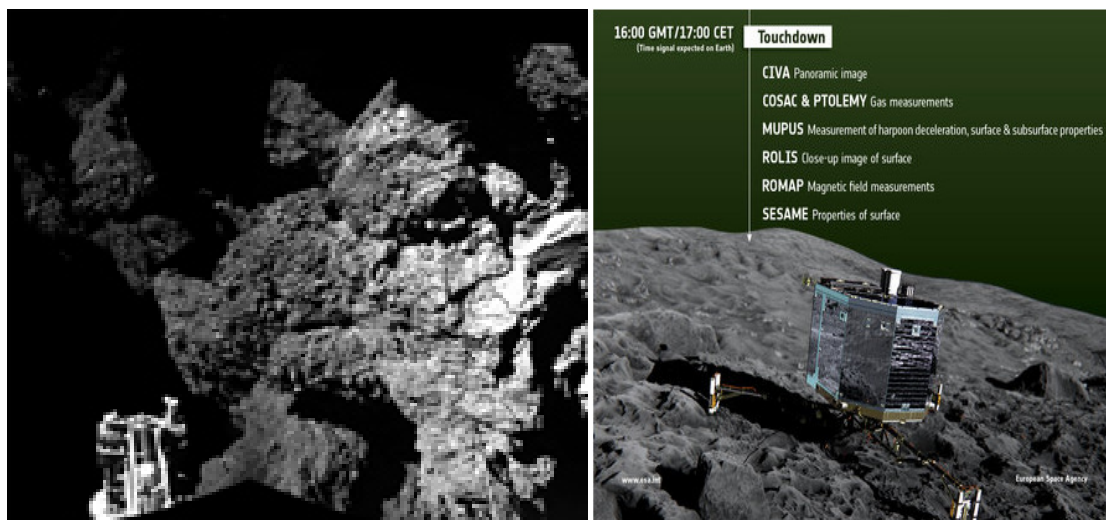


Figura 2.3 Pouso do módulo Philae no Cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko

Fonte: ESA (2014)

O despertar da nave foi realizado com sucesso em 20 de janeiro de 2014, pelos cientistas da ESA, a partir do Centro de Operações Espaciais (ESOC), em Darmstadt, Alemanha. Em 6 de agosto de 2014, Rosetta se tornou a

primeira sonda espacial da história a acompanhar a órbita de um cometa. Em 12 de novembro de 2014, o Módulo de pouso Philae se separou da nave espacial e pousou no cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko depois de sete horas de manobras de aproximação no espaço, às 16:03 UTC, tornando-se o primeiro objeto artificial a pousar na superfície de um cometa.

2.1 Utilização de RVD/B em programas espaciais

Após esses eventos pioneiros, as operações de RVD/B passaram a ser utilizadas com maior frequência nos programas espaciais dos Estados Unidos da América e da extinta União Soviética. Pode-se citar a título de exemplos (FEHSE, 2003):

- US Apollo (1968-1972) e Skylab programas (1973-1974);
- Salyut e Estação Espacial Mir do programa espacial soviético (1971-1999) com acoplamento da espaçonave pilotada Soyuz com a espaçonave não pilotada Progress;
- Missões de acoplamento entre a Apollo (USA) e a Soyuz (URSS) (Apollo-Soyuz Test Project, ASTP, 1975);
- Missões de manutenção e serviços prestados pelo Space Shuttle, que foram iniciadas em 1984 com a manutenção e reparos do Satélite;
- Solar Max em 1993, com a histórica realização do reparo do Telescópio Espacial Hubble. (www.nasa.gov, 25jul2011)
- Missões do Space Shuttle para a estação espacial russa Mir na década de 1990, como preparação para o programa da ISS (International Space Station);
- Montagem troca de tripulação e suprimento da ISS (iniciada em 1988).

As técnicas de RVD/B têm sido estudadas e desenvolvidas na Europa Ocidental pela ESA (European Space Agency) desde o começo dos anos 80,

primeiro como “tecnologia de capacitação” e, posteriormente nos meados dos anos 80 para o programa MTFF (Columbus Man-Tended Free-Flyer), o qual visava o acoplamento com a Estação Espacial Americana Freedom (atual ISS), e também com a Espaçonave Europeia Hermes.

Após o cancelamento dos Projetos MTFF e Hermes, resultado de mudanças políticas na Europa e a fusão dos programas das estações espaciais, oriental e ocidental, em um único programa, a Estação Espacial Americana Freedom foi renomeada ISS (International Space Station). A sua construção contou com as participações da Agência Espacial Canadense (CSA/ASC), Agência Espacial Europeia (ESA), Agência Japonesa de Exploração Aeroespacial (JAXA), Agência Espacial Federal Russa (ROSKOSMOS) e Administração Nacional de Aeronáutica e Espaço (NASA) (NASA/ISSPartners, 2012).

2.1.1 Nave espacial de carga russa Progress

A Progress é uma nave espacial russa de carga, utilizada para entregar suprimentos necessários para manter a presença humana em órbita. Essa espaçonave se acopla na estação espacial internacional por intermédio de uma porta de acoplamento. Através dessa porta, os cosmonautas retiram os suprimentos e repassam para a nave espacial. Após essa retirada de carga, a nave fica acoplada por um certo período. Nesse espaço de tempo, ela poderá ser utilizada para acomodar a tripulação. Terminado esse período, a nave retorna para a Terra carregada de resíduos, que são incinerados junto com a nave na sua reentrada na atmosfera terrestre (a Progress é uma nave descartável). O desenvolvimento da nave Progress derivou da nave espacial tripulada Soyuz e é lançada ao espaço pelo foguete de mesmo nome. Sua missão primordial era se acoplar na Estação Espacial Salyut, que possuía um segunda porta de acoplamento por onde a Progress se unia para reabastecer a estação. Com a Salyut 6, o programa de estações espaciais soviético envolvia estadias de curta e de longa-duração. Durante o período de 10dez1977 a 14mai1981 foram realizadas 16 estadias, 11 de curta e 5 de longa-duração. Com a desativação das estações soviéticas, a Progress passou a servir a

Estação Espacial Internacional, realizando anualmente de três a quatro voos. Nessas missões a Progress permanece atracada até pouco antes de ser substituída por uma nova Progress ou um Soyuz, que usam a mesma porta de acoplamento. Em seguida, ela é preenchida com resíduos descartáveis, desconectada, e com destino a Terra, reentra na atmosfera terrestre e se queima na reentrada. A Progress foi desenvolvida devido a necessidade de uma remessa constante de suprimentos (alimentos, água, ar, itens de manutenção e cargas úteis científicas) para dar suporte às missões espaciais de longa duração (SALYUT 6 wikipedia, 2015).

2.1.2 Programa ATV (Automated Transfer Vehicle) da ESA

Devido a necessidade de transportar cargas e retirar o material lixo e material descartável da ISS, o consórcio das agências participantes estabeleceu que seria necessário a construção de um veículo autônomo, o ATV (Automated Transfer Vehicle), e este seria uma das contribuições da Europa Ocidental para a ISS (CORNIER et al. 1999). Decisão esta que se tornou realidade, pois

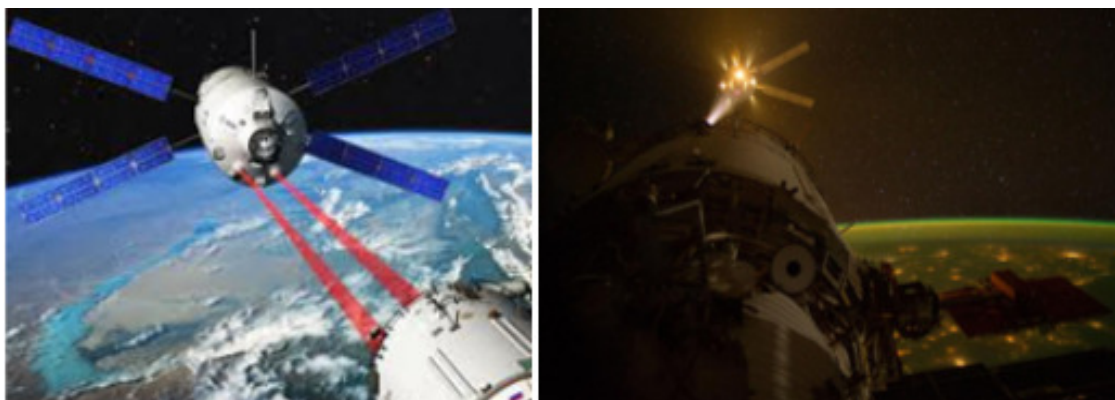


Figura 2.4 Visão artística e aproximação real do acoplamento da ATV à ISS.

Fonte: ESA (2015)

a partir de março de 2008, cinco ATV, Jules Verne, Johannes Kepler, Edoardo Amaldi, Albert Einstein e Georges Lemaître foram lançados com êxito e acoplaram na ISS autonomamente, se utilizando do mecanismo de acoplamento projetada para a espaçonave russa Progress. No dia 15 de

fevereiro de 2015, o quinto e último ATV completou sua missão para com a ISS, reentrou na atmosfera e se queimou com segurança sobre uma área desabitada no sul do Oceano Pacífico (www.esa.int/Our_Activities/Human_Spaceflight/Last_ATV_reentry_leaves_legacy_for_future_space_exploration) acessado em 21fev2015.

A título de exemplo, o ATV-003 *Edoardo Amaldi* (ESA), que participou de missões de reabastecimento de oxigênio e água, foi lançado em 23 de março de 2012 com 6.595 kg de carga útil (3.150 kg de propelente para impulsionar e controlar a atitude da ISS, 860 kg de propelente para reabastecer a ISS, 100 kg de oxigênio, 285 kg de água e 2.200 kg de carga seca (alimentos, roupas, equipamentos)). Em 22 de agosto de 2012 este mesmo ATV foi utilizado para corrigir a órbita da ISS, uma vez que devido ao arrasto atmosférico e perturbações, a ISS perde, em média, 100 metros de altitude por dia. O ATV-003 desacoplou da ISS em 25 de setembro de 2012 com 6.340 kg de material de descarte, que foi incinerado quando o ATV-003 *Edoardo Amaldi* reentrou na atmosfera terrestre (ESA/ATV-003, 2012).

Sobre as fases de voo dos ATV, foram previstas: lançamento, redução do ângulo de fase, aproximação e acoplagem. No lançamento, o ATV é injetado no mesmo plano da órbita da ISS, porém a 100 km mais baixo do que a ISS. Essa fase consome cerca de 75 minutos. Em seguida a etapa da redução do ângulo de fase orbital, conjunto de manobras orbitais executadas pelo Centro de Controle, que leva o ATV a uma distância de 39 Km pela retaguarda e 5 Km abaixo da ISS. Terminada essa etapa, o ATV, autônomo, utilizando tecnologia GPS, se aproxima da ISS até 250 m. Nesse ponto o ATV estará com a velocidade de 7 cm/s. Para as manobras finais, o ATV usa sensores tipo olho (eye-like) combinados com sistemas de medição paralelas adicionais, que garantem o encaixe automático na operação de acoplamento.

2.1.3 Programa SpaceX Dragon

A nave Dragon da SpaceX realizou o primeiro voo comercial à ISS em 25 de maio de 2012. Na operação de RendezVous foi utilizado o manipulador robótico Canadarm2 da ISS para a operação de atracação à espaçonave Dragon. A Dragon levou 460 Kg de carga (comida, água, roupas e recursos para a tripulação da estação). Neste primeiro voo de abastecimento ficou atracada durante 5 dias, 16 horas e 5 minutos à ISS, retornando à Terra com 600 Kg de equipamentos. Pousou no Oceano Pacífico em 31 de maio de 2012, algo que até então outros veículos espaciais não haviam realizado. Até março de 2015 foram realizadas cinco missões bem sucedidas à ISS, das quais quatro missões foram de reabastecimento oficial da NASA. Estão previstas doze missões à Estação Espacial Internacional conforme contrato firmado com a NASA. Essas missões foram formalizadas em dezembro de 2008, quando a NASA anunciou o final do Programa de Ônibus Espaciais (spacex.com/sites/spacex/files/spacex_nasa_crs-5_presskit, acessado em 05mar2015).

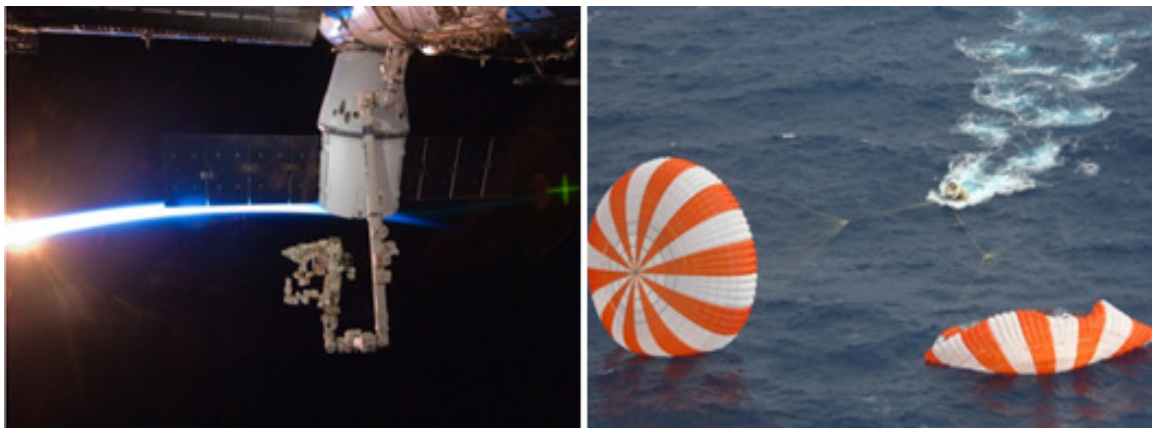


Figura 2.5 Dragon acoplado a ISS (25MAI12) e seu retorno a Terra (31mai12).

Fonte: NASA (2012)

3 ENCONTRO E ACOPLAMENTO/ATRACAÇÃO

As operações de encontro, acoplamento/atracação (RendezVous and Docking/Berthing, RVD/B) em órbita da Terra podem ser classificados, sob o ponto de vista tecnológico, como autônomas e não autônomas.

As operações orbitais autônomas envolvem tecnologia robótica, ou seja, uma nave robótica. As naves robóticas podem fazer uso de autonomia total, onde a nave robô realiza todo o ciclo das operações de forma autônoma. Cita-se como exemplos as naves Progress, ATV (Automated Transfer Vehicle – Veículo de Transferência Automatizado) e a Dragon. Progress é uma nave espacial de carga russa não tripulada, lançada pela nave russa Soyuz e é capaz de acoplar-se automaticamente à ISS. O ATV não era uma nave tripulada e já está fora de operação, mas enquanto em uso, esta nave robótica realizava o ciclo final de forma automática, usando tecnologia de sensor a laser para se guiar até a porta de docking. A outra nave robótica, a Dragon, opera de forma autônoma o voo orbital e se aproxima até se ancorar no espaço de trabalho da ISS, quando então é capturada pelo manipulador robótico Canadarm2 da Estação Espacial Internacional e completa o ciclo com o acoplamento na ISS.

As operações podem ser também não autônomas. Este tipo de operação a nave é tripulada e inclui sempre uma forte atuação do astronauta e do Centro de Controle para a tomada de decisões durante todo o ciclo da operação de RVD/B, principalmente na aproximação de proximidade. Exemplo deste tipo de nave foi a série de Space Shuttle, hoje fora de operação. As operações não autônomas incluem a interação homem-máquina no ciclo, com o astronauta ou o centro de controle na malha de controle para executar fases específicas da operação de RVD/B. O ciclo mais crítico tem início com a aproximação de proximidade (close approach) que termina com a atracação da nave robô na nave alvo, ou com o acoplamento da nave robô com a nave alvo. É neste ciclo que a atuação do operador, por razões de segurança, é muito importante.

Naves robôs que incluem o operador na malha de atividade são chamados telerrobôs. Até o presente, as operações de aproximação, acoplamento/atracação incluem sempre certo nível de interação com um operador remoto, seja no Centro de Controle baseado em Terra ou baseado na Estação Espacial Internacional.

Observe que operações de encontro (RendezVous) incluem também a interceptação de objetos bem como a aproximação e pouso de naves robôs em outros corpos celestes (planetas, asteroides e cometas).

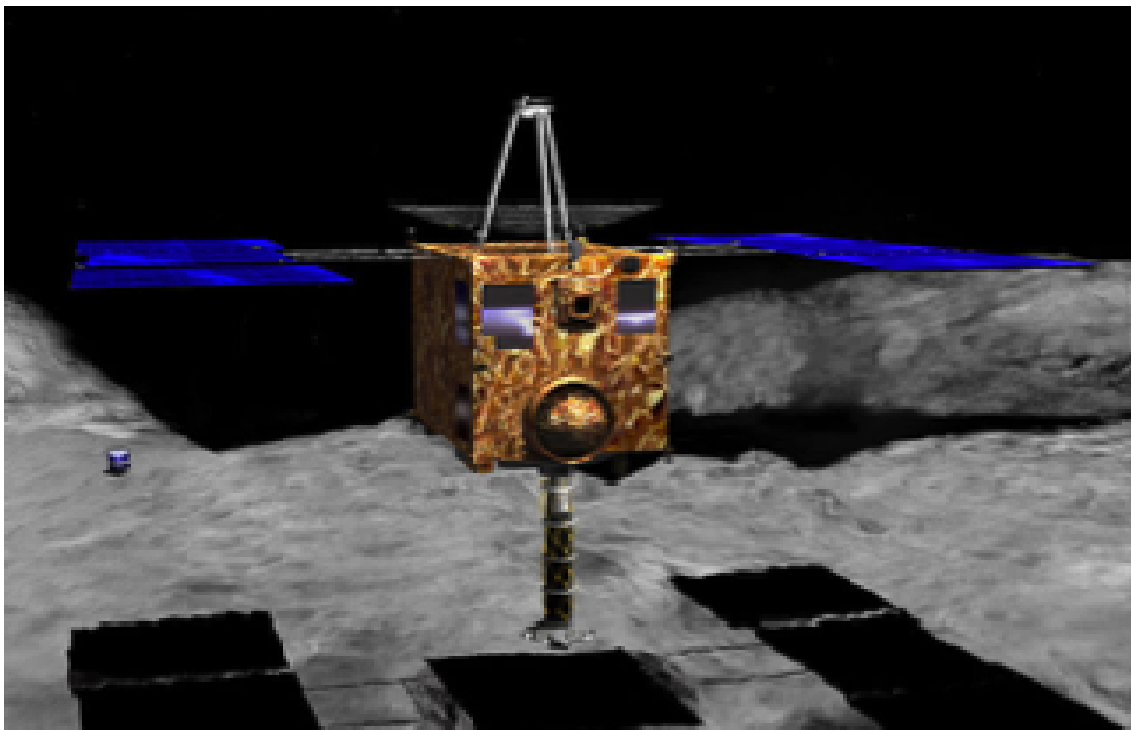


Figura 3.1 Concepção artística da nave na superfície do asteroide Itokawa.

Fonte: JAXA (2003)

Um exemplo deste tipo de RendezVous foi o da nave Hayabusa 1 desenvolvida pela JAXA (Japan Aerospace Exploration Agency – Agência de Exploração Aeroespacial do Japão), lançada em 2003. Tratava-se de uma nave robótica para encontrar com o asteroide chamado 25143 Itokawa. A missão incluiu o estudo da forma do asteroide, sua rotação, topografia, cores, composição e densidade, como também coletar material do asteroide e retornar a Terra. Em

2005 a nave pousou na superfície do asteroide, realizou a missão com bastante sucesso e retornou a Terra em 2010 com amostras micrométricas de material coletado. A figura 3.1 mostra uma concepção artística da nave na superfície do asteroide.

Outro exemplo é da nave robótica Rosetta (Orbitador) e o seu módulo de pouso Philae.



Figura 3.2 Mostrando o módulo de pouso Philae descendo no cometa.

Fonte: ESA (2014).

Enquanto em órbita, a ROSINA, um instrumento da Rosetta que utiliza espectrômetros para medir a abundância de gases, obteve o resultado bastante aguardado: a chamada proporção de deutério-hidrogênio da água na fina atmosfera do cometa. O valor medido no cometa 67P é muito maior do que nos oceanos da Terra e maior do que em outros cometas, afirma Kathrin Altwegg, pesquisadora-chefe do ROSINA, da Universidade de Berna (SCIENCE, 2014). A descoberta da proporção deutério-hidrogênio do cometa foi um dos objetivos científicos para justificar a missão Rosetta existir (Wall Street Journal, Science, 2014). Já na superfície do cometa, a equipe da Rosetta esperava encontrar moléculas orgânicas, mas não sabia exatamente

quais. Entretanto, para obter mais detalhes, os cientistas teriam que analisar amostras retiradas abaixo da superfície do cometa. O módulo Philae até perfurou o solo, mas a Agência Espacial Europeia diz que ele não conseguiu retirar amostras. Neste sentido o experimento parece ter falhado (ESA, 2014).

As operações de RVD/B incluem também a aproximação e atracação em satélites para atividades de manutenção e atuação de controle de órbita de veículos espaciais. A primeira e mais espetacular operação de manutenção foi realizada pelo Space Shuttle no telescópio espacial Hubble em 1993. O Space Shuttle ancorou próxima ao Hubble e os astronautas, utilizando o manipulador robótico do Shuttle, substituíram os painéis solares do telescópio espacial e depois o recolocaram em sua órbita. Outro exemplo de manutenção se refere ao ATV que após se acoplar com a ISS levantou sua órbita além de cumprir outros aspectos da missão, como levar material e incinerar posteriormente na atmosfera os resíduos coletados na ISS.

As missões de realização do encontro e acoplamento/atracação, que se iniciam em uma atmosfera densa e se completa no vácuo, requerem além do tempo necessário para a sua consecução, um planejamento que envolve técnicos especializados e infraestrutura extremamente complexa, pois várias áreas do conhecimento são envolvidas para que haja sucesso na missão, missão esta que consiste de uma série de manobras orbitais e trajetórias controladas. Essa série de eventos consecutivos é para conduzir o perseguidor até o alvo. Cuidado especial tem que ser direcionado à parte mais crítica da missão, ou seja, a trajetória final de aproximação. Essa trajetória é definida para a configuração em que o perseguidor se encontra muito próximo do alvo, com posição, atitude e velocidades requeridas para realizar o acoplamento ou a atracação entre as espaçonaves, ou entre espaçonave e objeto.

Das áreas envolvidas, o sistema GNC (Guiamento, Navegação e Controle) do perseguidor é primordial no caso do acoplamento, pois é esse que controla os parâmetros requeridos para atingir as interfaces de acoplamento, para depois realizar o acoplamento do perseguidor com o alvo. No caso da atracação, o

sistema GNC é programado para “estacionar” (velocidades relativas nominalmente zero) o perseguidor a uma distância pré determinada do alvo, distância esta que permita ao “manipulador robótico” capturar a outra espaçonave, ou objeto, e transferi-la para a posição final através da porta de acoplamento.

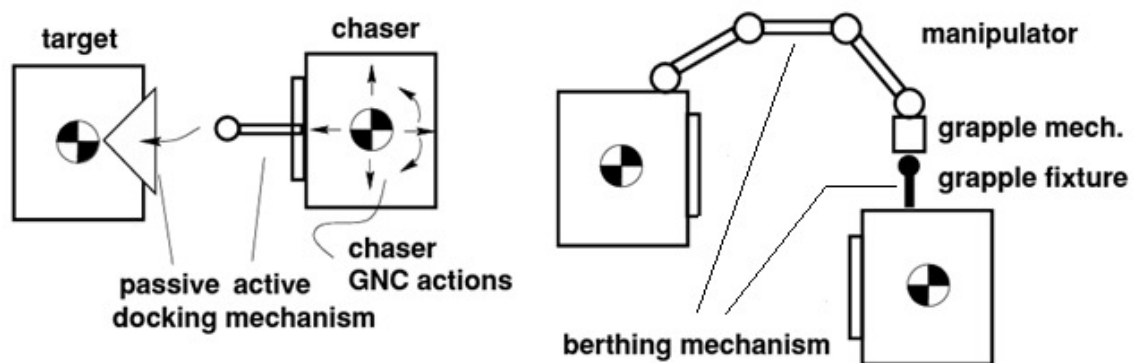


Figura 3.3 Acoplamento (docking) e atracação (berthing).

Fonte: FEHSE (2003).

A figura 3.3 acima ilustra os conceitos (infraestrutura) de acoplamento e de atracação. Deve-se observar que no mecanismo do acoplamento, existe uma porta de acoplamento no alvo, e no mecanismo da atracação, o previsto é o uso de garras.

Nesta tese assumiu-se que a nave alvo está em operação e que provê, para a nave perseguidora, informações sobre sua posição e estabilidade em atitude.

3.1. Considerações subsidiárias relevantes

Mesmo que toda a infraestrutura, todo o suporte técnico, todos os especialistas estejam orientados e preparados, ainda assim, é primordial considerar vários outros problemas que poderão impactar na condução da missão, estudá-los, equacioná-los e inseri-los dentro do planejamento da operação, que conduzirá o perseguidor ao alvo.

Dentre esses problemas, identificados ao longo das várias campanhas de lançamento, destacam-se aqueles relacionados com

a) os fatores naturais:

- A Terra não é perfeitamente esférica. A Terra é aproximadamente um elipsoide cujo semi-eixo maior (raio do equador terrestre) é de 6378,14 km e o semi-eixo menor (raio polar) é de 6356,75 km. Acresce a isto o fato da aceleração gravitacional variar de $9,78 \text{ m/s}^2$ no equador terrestre para $9,83 \text{ m/s}^2$ nos polos. Estes fatores introduzem perturbações na órbita. Para que o perseguidor esteja no mesmo plano, mesma altitude orbital, mesmo ângulo de fase e mesma excentricidade do alvo, não se pode negligenciar a flutuação do plano orbital devido ao achatamento da Terra, bem como as variações do campo gravitacional (FEHSE, 2003).

- A região de penumbra do Sol afeta o carregamento de energia dos painéis solares, podendo comprometer as condições de iluminação na parte final da aproximação, antes do processo de acoplamento/atracação. Isto porque, nessa parte final, é necessário o monitoramento do processo por procedimento visual, ou pela utilização de câmaras.

- Existem trechos da órbita onde a comunicação entre a nave visitante, ou perseguidora, com as estações baseadas na Terra, pode ter sua comunicação prejudicada, ou mesmo bloqueada, devido ao alcance limitado das suas antenas de comunicação.

b) os fatores humanos:

- Limitações humanas, falhas são previsíveis. Para tanto, deve-se definir zonas de segurança para evitar colisão do perseguidor com o alvo, para não expor a tripulação à riscos e para manter a integridade do perseguidor. É importante também atribuir à tripulação comandos simples com os sistemas embarcados, tais como, parar ou continuar e, a iniciação das manobras anti-colisão.

- pelo fato dessas campanhas de lançamento, acompanhamento e finalização da missão, se estender por vários dias, devem ser considerados ciclos de trabalho e descanso da tripulação. Para tanto, o pessoal de solo deve ter a responsabilidade de monitorar a aproximação final e o acoplamento.

c) outros fatores:

- o ambiente real de voo induz perturbações na trajetória nominal ocasionando desvios. Esses desvios necessitam ser corrigidos pelo sistema de controle embarcado. Devido à impossibilidade de testar as várias funções desse sistema completo no ambiente de voo, devem-se realizar tantas simulações quanto possíveis, para verificar criteriosamente o funcionamento e o desempenho dessas várias funções, isoladamente e em conjunto, a fim de atingir alto grau de confiabilidade.

- paralelamente, uma boa coordenação, atribuições de tarefas e uma hierarquia de autoridade devem ser estabelecidas entre os envolvidos na missão, a fim de evitar conflitos em momentos críticos (FEHSE, 2003).

3.2 Eventos do encontro e acoplamento/atracação

Uma missão espacial que comporta encontro e acoplamento/atracação pode ser dividida em dois eventos. O primeiro evento, o encontro, corresponde às manobras orbitais realizadas para aproximar o perseguidor do alvo, até que atinja o espaço de trabalho, com velocidade relativa zero. O segundo evento, o do acoplamento/atracação, ocorre após satisfeito as condições impostas no primeiro evento, é aquele que o perseguidor se acopla ou se atraca ao alvo.

As manobras orbitais do primeiro evento, a do encontro, compreendem duas ações de controle da órbita: alinhamento e sincronização de órbitas.

Para o alinhamento, o sistema de controle de órbita faz coincidir o plano da órbita do perseguidor com o plano da órbita do alvo. Para isto ocorrer, duas outras manobras são requeridas:

1. uma para corrigir a ascensão reta do nodo ascendente da órbita (RAAN Right Ascension of Ascending Node) do perseguidor, para que ambas as órbitas, do perseguidor e do alvo, tenham a mesma RAAN.
2. a outra manobra é na correção da inclinação da órbita do perseguidor, para que ambas as órbitas, do perseguidor e do alvo, fiquem no mesmo plano orbital.

Uma vez que as órbitas estejam no mesmo plano, tem início a segunda ação do controle da órbita, aquela para a sincronização das órbitas das duas espaçonaves. Para se efetuar a sincronização de órbitas das espaçonaves, manobras são requeridas para ajustar a velocidade e a altitude do perseguidor com as do alvo, e conduzir o perseguidor dentro dos limites do espaço de trabalho da aproximação final. Realizada a aproximação final até o ponto para o qual a velocidade relativa é nula, o perseguidor estará em condições de se acoplar/atracar ao alvo e neste ponto se encerra a primeira fase.

A figura 3.4 abaixo mostra que o perseguidor está em condições de se acoplar a nave alvo. Mas, para que isto possa ocorrer, dois requisitos são necessários: o primeiro é direcionar o perseguidor para realizar a conexão com a porta de acoplamento do alvo, sem colisão; a segunda é que o alvo esteja provido dessa porta de acoplamento. Satisfeito esses dois requisitos, o segundo evento (acoplamento/atracação) pode ser realizado.

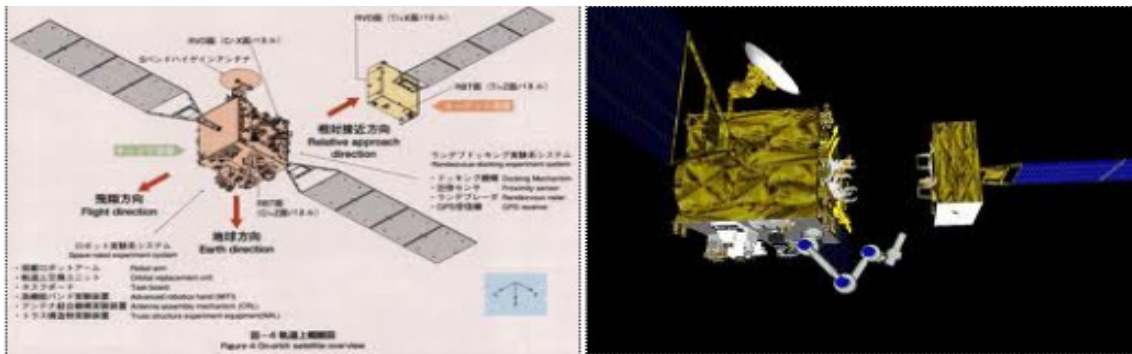


Figura 3.4 Concepção artística do acoplamento espacial da ETS-VII.

Fonte: NASDA (1997)

Essas manobras orbitais poderão ser muito complexas dependendo das correções que devam ser introduzidas. Portanto, para operacionalizar esse tipo de missão, necessário se faz subdividir os dois eventos em fases a serem planejadas e gerenciadas, a fim de minimizar custos.

3.3 Operacionalização dos eventos do encontro e acoplamento/atracação

Para melhor executar os eventos do encontro e acoplamento/atracação, eles foram divididos em fases, com característica distinta, como mostrada em (FEHSE, 2003). As principais fases do encontro são: lançamento, redução do ângulo de fase, transferência de órbita do perseguidor para a órbita do alvo, redução da distância relativa e aproximação final. O outro evento, realizado numa única fase é o acoplamento/atracação.

1. Lançamento objetiva a injeção do perseguidor no mesmo plano da órbita do alvo, em condições orbitais estáveis. Os erros de desalinhamentos entre os planos orbitais ocorrem por causa de atraso do lançamento em relação à janela de lançamento determinada pela órbita do alvo. Observe que a base lançamento se move com a rotação da Terra, a uma velocidade de 15 graus por hora. Portanto é de 0.25 graus por minuto, o atraso em relação a janela de lançamento. Mesmo que se tenha lançado dentro da janela, ocorreram desvios orbitais, por razões de economia de combustível é recomendável fazer as correções desses desvios entre os

planos orbitais, imediatamente após a partida do lançador (usando o sistema de controle do lançador), quando a velocidade relativa (entre a velocidade tangencial da Terra e a do lançador) ainda é pequena. As correções de desvios entre os planos orbitais ficam muito mais caras, se realizadas no final da órbita, pois requerem um ΔV (incremento de velocidade) muito maior.

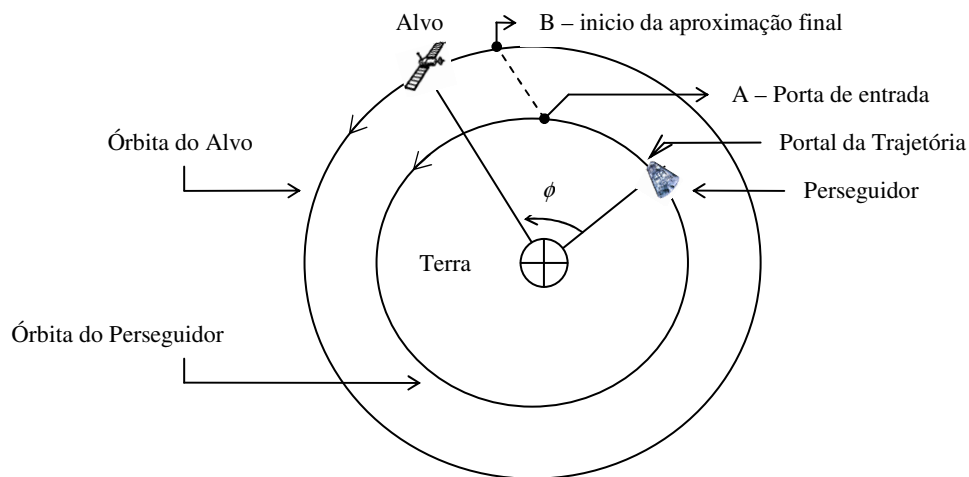


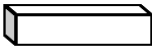
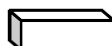
Figura 3.5 Redução do ângulo de fase orbital (ϕ) entre a nave perseguidora e a nave alvo. Fonte: Adaptado de Chohessy&Wiltshire (1960)

2. Redução do ângulo de fase (phasing). Nesta fase faz-se as correções de erros de injeção em órbita, ou seja, inclinação e RAAN são sucessivamente corrigidas pelo sistema de controle. Regra geral essas correções são feitas a partir de estações de controle em Terra. Após essas correções, o perseguidor estando no mesmo plano da órbita do alvo, realiza a redução do ângulo de fase orbital (ϕ) entre a sua posição e da nave alvo. Esta configuração é mostrada na figura 3.5 aonde a nave perseguidora vem de uma órbita mais baixa, em conseqüência, com o período orbital menor. A ideia é considerar os períodos diferentes entre as duas naves, para executar esta fase. O trecho entre o portal da trajetória até o ponto A (porta de entrada), deve ser prevista e executada pela nave perseguidora, de tal maneira que a sua trajetória tangencie a

órbita da nave alvo o mais próximo possível do ponto B (início da aproximação final). Para que se atinja o ponto B, faz-se a transferência de órbita da nave perseguidora para que sua trajetória esteja na mesma órbita da nave alvo.

3. Executada a transferência, iniciam-se as operações para reduzir a distância relativa entre as duas naves visando a aquisição da nave alvo pela nave perseguidora na reta de aproximação final. Esta fase inclui, além da aquisição da reta final, a definição das condições de captura, do ponto de captura e da aproximação final.
4. A última fase se refere ao acoplamento ou da atracação (quando for o caso). Nesta fase, para o guiamento, são utilizadas as equações da dinâmica de (CLOHESSY WILTSHIRE, 1960) com seis graus de liberdade. Quanto ao gerenciamento e procedimentos de operação desta fase, prevê-se também uma manobra anti-colisão, que é ativada automaticamente a bordo, para abortar o processo de acoplamento e evitar a colisão entre o perseguidor e o alvo. A captura requer cuidados especiais para evitar o escape do dispositivo de acoplamento e de atenuação de possíveis choques. Para tanto é requerida uma conexão estrutural segura, ou uma inserção segura nas interfaces estruturais da trava quando da captura. A manobra anti-colisão, um recurso para abortar a aproximação evitar colisão não é permitida na aproximação final, pois a relação espaço-tempo é muito restritiva para qualquer medida de evasão. Em consequência, diminui-se a velocidade de aproximação para uma velocidade segura, tal que, mesmo havendo um impacto de baixa intensidade com o alvo, este não venha a sofrer danos materiais, ou incremento indesejável nas grandezas cinemáticas. Na atracação, o braço robótico não poderá perturbar a estabilidade do perseguidor. A estabilidade em atitude é requisito para se realizar manobras sem erros críticos (evitando colisões), bem como para manter o subsistema de comunicação das naves em funcionamento.

Tabela 3.1 Definição das fases dos eventos.

RVD phase	Distance from	Injection accuracy
(1) Launch	~10000 Km	 20Km 1000 Km
(2) Orbit transfer	~20 Km	 1 Km 2 Km
(3) Relative approach	~500 m	 100 m 100 m
(4) Final approach	10 m - 2 m	 50 cm 50 cm
(5) Docking/berthing	~0 m	 10 cm 10 cm

Fonte: Kawano et al.(1994).

A tabela acima estabelece as distâncias em que estão definidas as fases dos eventos de RVD/B e as precisões de injeção para cada uma delas, colhida da experiência japonesa, ao realizar o acoplamento espacial autônomo do Satélite de Teste de Engenharia ETS-VII.

3.4 Exemplo de RendezVous&Docking do Space Shuttle com a ISS

Com a finalidade de exemplificar as manobras orbitais realizadas durante uma missão espacial, outro exemplo que pode ser citado se refere à trajetória de aproximação de longa distância. A figura 3.6 ilustra a trajetória de aproximação de longa distância do Space Shuttle na direção da ISS, com várias atuações de controle visando o ponto de início da aproximação de proximidade.

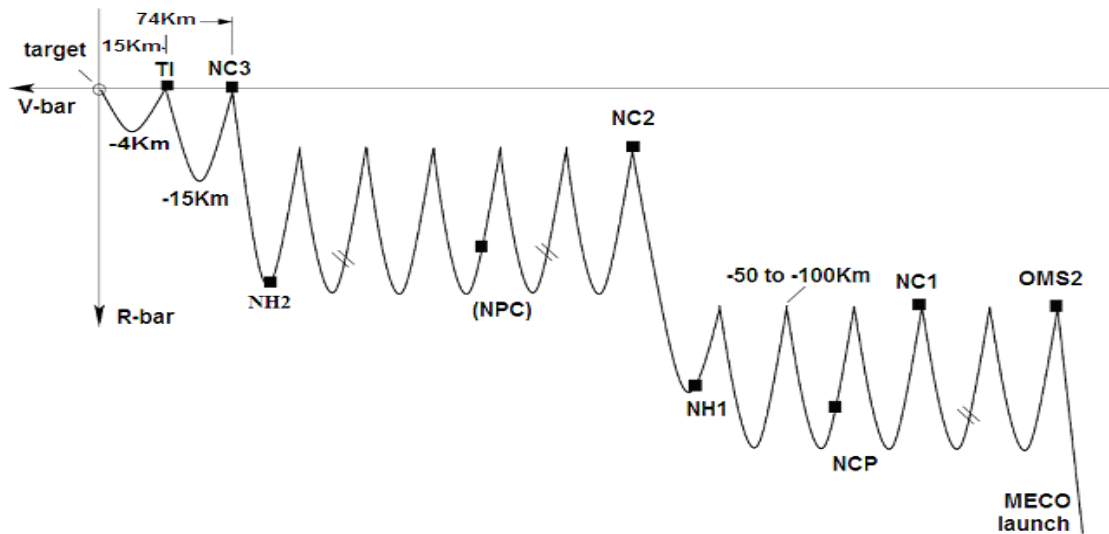


Figura 3.6 Exemplo de redução do ângulo de fase (phasing) para operação de encontro do Space Shuttle com a ISS

Fonte: FEHSE (2003)

onde:

MECO (Main Engine Cut Off) launch → lançamento onde os motores principais ou estágio do veículo de lançamento têm acelerações controladas.

OMS2 → manobra executada pelo sistema de manobra orbital (Orbital Maneuvering System), para elevar o perigeu e alcançar a órbita com um ângulo de fase viável.

NC → séries de manobras no plano da órbita para executar a operação de redução do ângulo de fase, para ajustar erros de perigeu e corrigir erros causados por incremento de velocidade em manobras anteriores.

NH → manobra de ajuste de altitude.

NPC → manobra de correção para atingir o plano da órbita do alvo

As manobras de controle ilustradas na figura 3.6 são executadas pelo Centro de Controle baseado na Terra.

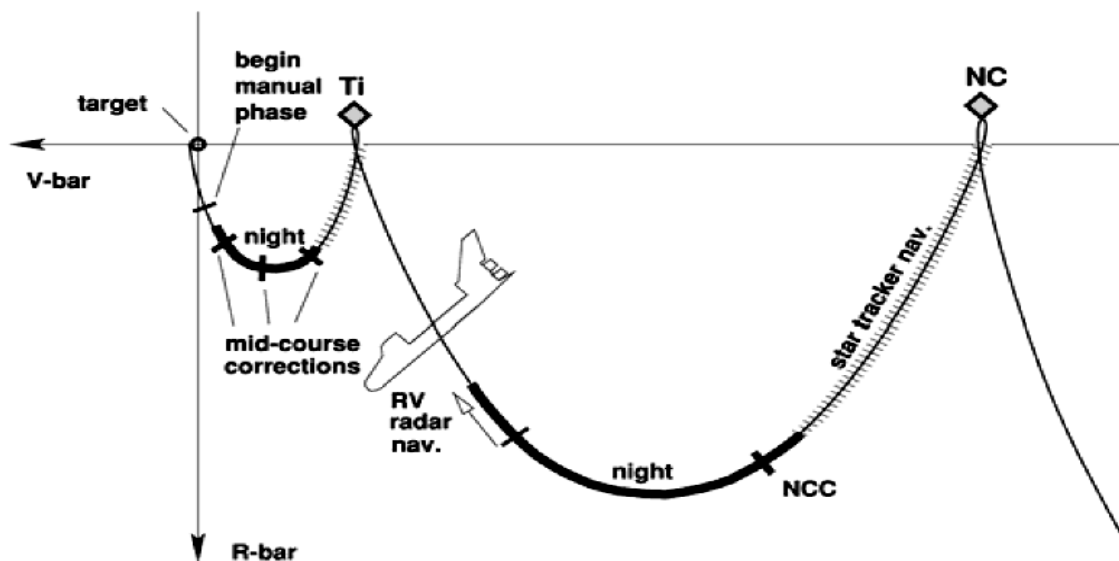


Figura 3.7 Perfil típico de aproximação de longa distância para o caso e RendezVous&Docking do Space Shuttle
Fonte: FEHSE (2003)

As manobras subsequentes ilustradas na figura 3.7 são realizadas autonomamente pelo sistema GNC embarcado.

Na figura 3.7:

NCC → é a primeira manobra realizada pelo sistema de bordo.

Ti → manobra de iniciação da fase terminal. A manobra TI é executada a partir de um ponto fixado em 14,8km de distância e 355m acima do alvo.

MC → manobra de correção no meio curso (arco), para corrigir dispersões causadas por incremento de velocidade na manobra de Ti, erros de medições, componentes residuais fora do plano da órbita, etc.

Como mostrado acima, a complexidade para executar uma missão espacial, requer várias manobras orbitais programadas, ou não, isto porque a espaçonave perseguidora em sua trajetória para o encontro com o alvo interage com o ambiente espacial envolvendo fatores de difícil avaliação. Cita-se como exemplo de fator de difícil avaliação, a perda da espaçonave russa

não tripulada Progress, usada durante mais de 35 anos. Até então a espaçonave só havia tido um acidente, ocorrido em 2011 devido a uma falha no lançador. Recentemente um novo problema ocorreu em 08/05/2015, devido ao problema de telemetria com perdas de dados, impossibilitando a separação da nave de seu veículo lançador. Quando os dados foram recuperados, a janela de separação já havia passado, e com isso o acoplamento à ISS foi descartado por apresentar riscos. Com 2,5 toneladas de suprimentos, a nave deveria chegar à plataforma internacional seis horas depois de sua decolagem. Ela carregava combustível, oxigênio, alimentos, equipamentos científicos para os astronautas. A perda causou um prejuízo estimado de US\$ 90 milhões. Sua destruição foi planejada. A nave espacial Progress M-27M foi destruída às 5h04 de Moscou em 8 de maio de 2015. Sua entrada na atmosfera foi realizada sobre o Oceano Pacífico Central, de acordo com a agência russa Roscosmos (<http://g1.globo.com/ciencia-e-saude/noticia/2015/05/nave-russa-progress-se-desintegra-ao-reentrar-na-atmosfera-da-terra.html>, acesso em maio de 2015).

3.5 Sistemas de referência utilizados no estudo do RVD/B

Para o Centro de Controle, ou mesmo, para que as espaçonaves se comuniquem entre si, é necessário conhecer as posições e velocidades relativas entre elas. Mais especificamente, conhecer as trajetórias absoluta e relativa, e os movimentos de atitude. Para expressar os movimentos das espaçonaves, utilizam-se sistemas de referências. Nessa tese são utilizados os sistemas de referências: equatorial centrado na Terra, do plano da órbita e, orbital local da espaçonave.

3.5.1 Sistema de referência equatorial centrado na Terra

Para que possa mostrar a posição relativa à Terra, utiliza-se o sistema de referência com um dos eixos alinhados com o eixo de rotação da Terra, mas com as direções fixas inercialmente e centrado no centro da Terra. Os pontos que esse eixo cruza na superfície da Terra são os polos norte e sul.

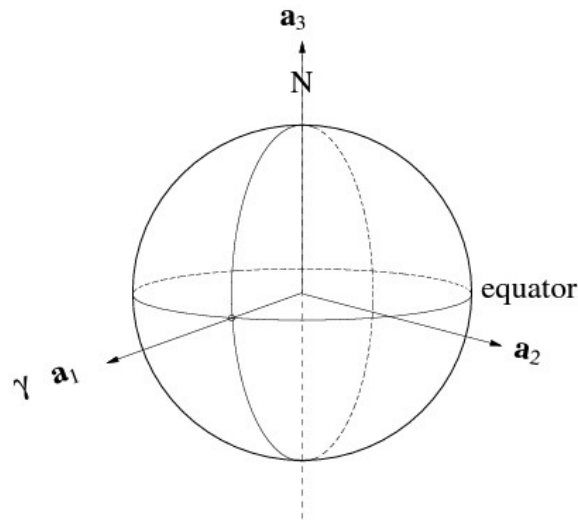


Figura 3.8 Sistema equatorial centrado na Terra (F_{eq}).

Fonte: FEHSE (2003)

origem 0_{eq} : centro da Terra

eixo $\vec{a}_1 = \vec{x}_{eq}$ no plano equatorial, na direção do equinócio vernal (γ)

eixo $\vec{a}_2 = \vec{y}_{eq}$ no plano equatorial, tal que $\vec{a}_3 = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$

eixo $\vec{a}_3 = \vec{z}_{eq}$ normal ao plano equatorial e apontado para o Norte

A Terra é assumida esférica e homogênea. Então, o grande círculo entre os polos, sobre a superfície da Terra é o equador terrestre. Esse sistema de eixos se mostra muito útil para o Centro de Controle baseado na superfície da Terra.

3.5.2 Sistema de referência do plano da órbita

Durante a transferência de órbita do perseguidor para a órbita do alvo, erros de inclinação na injeção do lançamento e da ascensão reta do nodo ascendente são sucessivamente corrigidos. Essas correções, via de regra, são controladas a partir do solo. Para essas operações corretivas é importante um sistema de eixos que descreva o movimento sobre o plano de órbita.

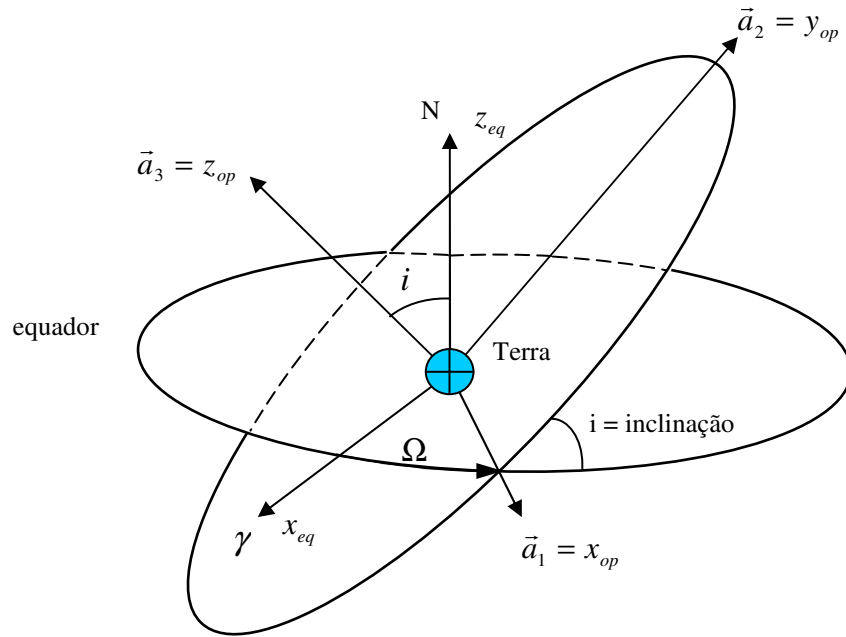


Figura 3.9 – Sistema do plano da órbita (F_{op})

Fonte: adaptado de CLOHESSY WILTSHIRE (1960)

origem 0_{op} : centro da Terra

eixo $\vec{a}_1 = \vec{x}_{op}$ no plano da órbita, apontado para o nodo ascendente

eixo $\vec{a}_2 = \vec{y}_{op}$ no plano da órbita, tal que $\vec{a}_3 = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$

eixo $\vec{a}_3 = \vec{z}_{op}$ normal ao plano da órbita

A transformação de coordenadas do sistema de referência equatorial centrado na Terra para o sistema de referência do plano da órbita é obtido pela rotação em torno do eixo z_{eq} de um ângulo Ω (nodo ascendente da ascensão reta) e por rotação em torno do eixo dos nodos de um ângulo de inclinação i :

$$\begin{bmatrix} x_{op} \\ y_{op} \\ z_{op} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Através desta transformação de coordenadas obtém-se a descrição do movimento orbital no sistema equatorial.

3.5.3 Sistema de referência orbital local da espaçonave

A análise dinâmica das operações de RVD/B inclui a dinâmica do movimento relativo entre as naves. Portanto a partir desse ponto é mais conveniente analisar o movimento do perseguidor em relação ao movimento do alvo, utilizando-se do sistema de referência orbital local sugerida por CLOHESSY WILTSHIRE (1960).

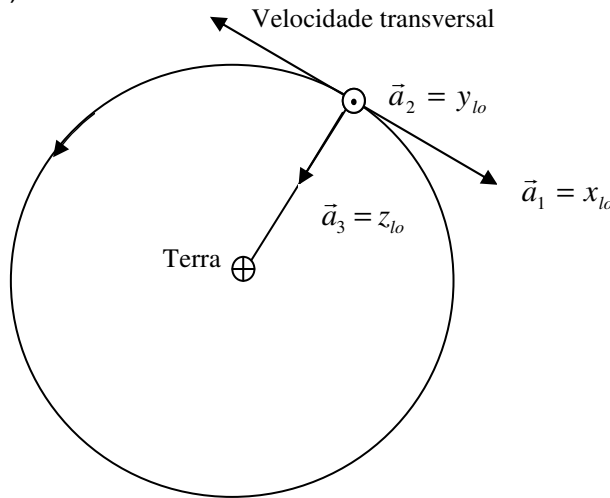


Figura 3.10 – Sistema orbital local da espaçonave (F_{lo})

Fonte: Adaptado de CLOHESSY WILTSHIRE (1960)

origem 0_{lo} : centro de massa da espaçonave

eixo $\vec{a}_1$: $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 \times \vec{a}_3$ ($\vec{a}_1$ é na direção do vetor velocidade transversal, porém com sentido contrário). Na literatura sobre *rendezvous* esta coordenada é também chamada V-bar;

eixo $\vec{a}_2$: na direção oposta do vetor quantidade de movimento angular da órbita. Na literatura sobre *rendezvous* esta coordenada é também chamada H-bar;

eixo $\vec{a}_3$: direção radial do centro de massa da espaçonave ao centro da Terra. Na literatura sobre *rendezvous* esta coordenada é também chamada R-bar.

O eixo $\vec{a}_1 = \vec{x}_{lo}$ tem sentido contrário para facilitar o entendimento durante a aproximação do perseguidor no sentido positivo de $\vec{a}_1$. Essa forma de

aproximação denominada “aproximação pela V-bar” é bastante utilizada para missões espaciais devido ao fato de que, quando a espaçonave se aproxima do alvo pela “frente”, ou seja, na direção do vetor velocidade do alvo (V-bar), ela realiza “saltos” sucessivos na direção do alvo por meio do seu levantamento orbital. Sendo assim, quando sua altitude aumenta, seu período orbital aumenta, diminuindo assim a sua velocidade relativa em relação ao alvo. Isso faz com que o perseguidor se aproxime do alvo sucessivamente com baixas velocidades relativas, exigindo um consumo menor de combustível.

O eixo $\vec{a}_2 = \vec{y}_{lo}$ é orientado perpendicularmente ao plano da órbita.

O eixo $\vec{a}_3 = \vec{z}_{lo}$ é orientado na direção do raio da Terra, perpendicular ao plano do horizonte e no sentido positivo do zênite. Essa abordagem pode também ser útil se a aproximação do alvo for através da R-bar.

As trajetórias de aproximação do perseguidor são referenciadas sobre o sistema de referência orbital local do alvo.

A transformação de coordenadas do sistema de referência do plano orbital para o sistema de referência orbital local da espaçonave é obtido pela equação:

$$\begin{bmatrix} x_{lo} \\ y_{lo} \\ z_{lo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{op} \\ y_{op} \\ z_{op} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Para órbita circular, $\dot{\phi} = n = \text{constante} \Rightarrow \phi = nt$; ϕ é ângulo de fase orbital FEHSE (2003). Observa-se que na definição dos três sistemas de referência, "eixo 1 = eixo x ; eixo 2 = eixo y ; eixo 3 = eixo z ". Neste trabalho, doravante será utilizado "eixo X ; eixo Y ; eixo Z ", e para as coordenadas (x , y , z).

4 ANÁLISE E MODELAGEM DO PROBLEMA

4.1 Movimento orbital em torno de um corpo central

As equações de movimento orbital em torno de um corpo central são deduzidas através das Leis de Kepler e Newton, válidas para um campo gravitacional esférico não perturbado. As órbitas circulares são as de especial interesse para as trajetórias de encontro. Considerando que o corpo é rígido, o seu movimento no espaço consiste do movimento de translação do seu centro de massa e do movimento rotacional em torno do seu centro de massa; então um corpo rígido no espaço pode ser considerado um sistema dinâmico com seis graus de liberdade (três translacionais e três rotacionais).

4.1.1 Movimento de translação do centro de massa (FEHSE, 2003).

Assumindo-se que:

- o corpo esteja sujeito aos efeitos de um campo gravitacional central esférico e às forças propulsivas dos motores e/ou das perturbações; e
- as espaçonaves sejam consideradas massas pontuais para o estudo do movimento translacional.

a equação geral do movimento sob a influência de uma força central é a Lei de Gravitação de Newton. Então pode-se escrever:

$$\vec{F}_g(\vec{r}) = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\mu \frac{m}{r^3} \vec{r} \quad (4.1)$$

onde: $\vec{F}_g$ é a força gravitacional

G é a constante da gravitação universal

M é a massa do corpo central

m é a massa da espaçonave

$\vec{r}$ é o raio vetor, ($r = |\vec{r}|$)

$\mu = GM$

Dividindo ambos os lados pela massa " m ", a equação 4.1 normalizada fica sendo

$$\vec{f}_g(\vec{r}) = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (4.2)$$

Utilizando-se a equação 4.1 combinada com a 2ª Lei de Newton, o movimento da espaçonave alvo (target), é

$$\vec{F}_g(\vec{r}_t) = m_t \ddot{\vec{r}}_t = -\mu \frac{m_t}{r_t^3} \vec{r}_t \quad (4.3)$$

cuja equação normalizada utilizando-se o conceito da equação 4.2 fica sendo

$$\vec{f}_g(\vec{r}_t) = \ddot{\vec{r}}_t = -\mu \frac{\vec{r}_t}{r_t^3} \quad (4.4)$$

O movimento da espaçonave perseguidora (chaser), utilizando-se a equação 4.1 combinada com a 2ª Lei de Newton e considerando-se a força não-gravitacional ($\vec{F}_{ng}$) passa a ser

$$m_c \ddot{\vec{r}}_c = \vec{F}_g(\vec{r}_c) + \vec{F}_{ng} = -\mu \frac{m_c}{r_c^3} \vec{r}_c + \vec{F}_{ng} \quad (4.5)$$

que na forma normalizada fica sendo

$$\ddot{\vec{r}}_c = \vec{f}_g(\vec{r}_c) + \frac{\vec{F}_{ng}}{m_c} \quad (4.6)$$

O movimento relativo $\vec{s}$ é dado pela derivada de segunda ordem do vetor de posição $\vec{s}$ como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \vec{r}_c - \vec{r}_t \\ \ddot{\vec{s}} &= \ddot{\vec{r}}_c - \ddot{\vec{r}}_t \end{aligned} \quad (4.7)$$

Inserindo as equações 4.4 e 4.6 na equação 4.7, obtém-se

$$\ddot{\vec{s}} = \vec{f}_g(\vec{r}_c) - \vec{f}_g(\vec{r}_t) + \frac{\vec{F}_{ng}}{m_c} \quad (4.8)$$

Linearizando $\vec{f}_g(\vec{r}_c)$ em torno do vetor $\vec{r}_t$ por meio da expansão em série de Taylor para a primeira ordem, tem-se

$$\vec{f}_g(\vec{r}_c) = \vec{f}_g(\vec{r}_t) + \left. \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{f}_g(\vec{r}) \right|_{\vec{r}=\vec{r}_t} (\vec{r}_c - \vec{r}_t) \quad (4.9)$$

Como $\vec{f}_g(\vec{r})$ é função de um vetor $\vec{r}$, que por sua vez é função de t , então

$$\frac{d}{dt} \vec{f}_g = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \vec{f}_g(\vec{r}) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \quad (4.10)$$

onde $\partial \vec{f}_g(\vec{r}) / \partial \vec{r}$ é uma matriz composta de ij elementos de $\partial f_{gi} / \partial r_j$, isto é,

$$\frac{\partial \vec{f}_g(\vec{r})}{\partial \vec{r}} \equiv \left[\frac{\partial f_{gi}}{\partial r_j} \right] \equiv \nabla f(r) \quad (4.11)$$

a equação 4.11 é a Matriz Jacobiana.

Então a equação 4.10 passa a ser escrita como sendo

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_{gx} \\ \dot{f}_{gy} \\ \dot{f}_{gz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_{gx} / \partial r_x & \partial f_{gx} / \partial r_y & \partial f_{gx} / \partial r_z \\ \partial f_{gy} / \partial r_x & \partial f_{gy} / \partial r_y & \partial f_{gy} / \partial r_z \\ \partial f_{gz} / \partial r_x & \partial f_{gz} / \partial r_y & \partial f_{gz} / \partial r_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \\ \dot{r}_z \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

4.1.1.1 Cálculo da Matriz Jacobiana

Considerando-se que a linearização foi realizada em torno do vetor $\vec{r}_t$ tem-se

$$\vec{f}_g(\vec{r}_t) = [f_{gx} \quad f_{gy} \quad f_{gz}]^T \quad (4.13a)$$

$$\vec{r}_t = [r_{tx} \quad r_{ty} \quad r_{tz}]^T \equiv [r_x \quad r_y \quad r_z]^T \quad (4.13b)$$

$$r_t = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} = |\vec{r}_t| \quad (4.13c)$$

Utilizando-se a equação (4.4) obtém-se

$$\vec{f}_g(\vec{r}_t) = \ddot{\vec{r}}_t = -\mu \begin{bmatrix} (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)^{-3/2} r_x \\ (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)^{-3/2} r_y \\ (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)^{-3/2} r_z \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Cálculo dos elementos da Matriz Jacobiana

$$\text{elemento (1,1): } \frac{\partial f_{gx}}{\partial r_x} = \frac{\partial}{\partial r_x} \left[-\mu (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)^{\frac{3}{2}} \cdot r_x \right] = -\frac{\mu}{r_t^3} \left[1 - \frac{3r_x^2}{r_t^2} \right] \quad (4.15a)$$

$$\text{elemento (1,2): } \frac{\partial f_{gx}}{\partial r_y} = \frac{\partial}{\partial r_y} \left[-\mu (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)^{\frac{3}{2}} \cdot r_x \right] = -\frac{\mu}{r_t^3} \left[3 \frac{r_x r_y}{r_t^2} \right] \quad (4.15b)$$

$$\text{elemento (1,3): } \frac{\partial f_{gx}}{\partial r_z} = \frac{\partial}{\partial r_z} \left[-\mu (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)^{\frac{3}{2}} \cdot r_x \right] = -\frac{\mu}{r_t^3} \left[3 \frac{r_x r_z}{r_t^2} \right] \quad (4.15c)$$

$$\text{elemento (2,1): } \frac{\partial f_{gy}}{\partial r_x} = \frac{\partial}{\partial r_x} \left[-\mu (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)^{\frac{3}{2}} \cdot r_y \right] = -\frac{\mu}{r_t^3} \left[3 \frac{r_y r_x}{r_t^2} \right] \quad (4.15d)$$

$$\text{elemento (2,2): } \frac{\partial f_{gy}}{\partial r_y} = \frac{\partial}{\partial r_y} \left[-\mu (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)^{\frac{3}{2}} \cdot r_y \right] = -\frac{\mu}{r_t^3} \left[1 - 3 \frac{r_y^2}{r_t^2} \right] \quad (4.15e)$$

$$\text{elemento (2,3): } \frac{\partial f_{gy}}{\partial r_z} = \frac{\partial}{\partial r_z} \left[-\mu (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)^{\frac{3}{2}} \cdot r_y \right] = -\frac{\mu}{r_t^3} \left[3 \frac{r_y r_z}{r_t^2} \right] \quad (4.15f)$$

$$\text{elemento (3,1): } \frac{\partial f_{gz}}{\partial r_x} = \frac{\partial}{\partial r_x} \left[-\mu (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)^{\frac{3}{2}} \cdot r_z \right] = -\frac{\mu}{r_t^3} \left[3 \frac{r_z r_x}{r_t^2} \right] \quad (4.15g)$$

$$\text{elemento (3,2): } \frac{\partial f_{gz}}{\partial r_y} = \frac{\partial}{\partial r_y} \left[-\mu (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)^{\frac{3}{2}} \cdot r_z \right] = -\frac{\mu}{r_t^3} \left[3 \frac{r_z r_y}{r_t^2} \right] \quad (4.15h)$$

$$\text{elemento (3,3): } \frac{\partial f_{gz}}{\partial r_z} = \frac{\partial}{\partial r_z} \left[-\mu (r_x^2 + r_y^2 + r_z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot r_z \right] = -\frac{\mu}{r_t^3} \left[1 - 3 \frac{r_z^2}{r_t^2} \right] \quad (4.15i)$$

portanto, a Matriz Jacobiana passa a ser escrita na forma que se segue

$$\nabla f(r_t) = -\frac{\mu}{r_t^3} \cdot \begin{bmatrix} 1 - \frac{3r_x^2}{r_t^2} & 3 \frac{r_x r_y}{r_t^2} & 3 \frac{r_x r_z}{r_t^2} \\ 3 \frac{r_y r_x}{r_t^2} & 1 - 3 \frac{r_y^2}{r_t^2} & 3 \frac{r_y r_z}{r_t^2} \\ 3 \frac{r_z r_x}{r_t^2} & 3 \frac{r_z r_y}{r_t^2} & 1 - 3 \frac{r_z^2}{r_t^2} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Substituindo a equação 4.11 na equação 4.9 obtém-se

$$\vec{f}_g(\vec{r}_c) - \vec{f}_g(\vec{r}_t) = \nabla f(r_t) \cdot \vec{s} \quad (4.17)$$

Considerando-se somente a força de controle devido à propulsão do perseguidor, isto é,

$$\frac{\vec{F}_{ng}}{m_c} = \vec{f}_{ng} \quad (4.18)$$

e inserindo a equação (4.17) na equação (4.8), tem-se

$$\ddot{\vec{s}} = \nabla f(r_t) \cdot \vec{s} + \vec{f}_{ng} \quad (4.19)$$

Pode-se obter a aceleração da espaçonave perseguidora no sistema de eixos fixo no centro de massa F_{lo_t} da espaçonave alvo, o qual gira em torno da Terra com velocidade $\vec{n}$ em relação ao sistema de eixos do Sistema Equatorial (F_{eq}), aplicando-se as Leis de Newton modificadas, válidas para os sistemas não-inerciais (CORNELISSE, 1979).

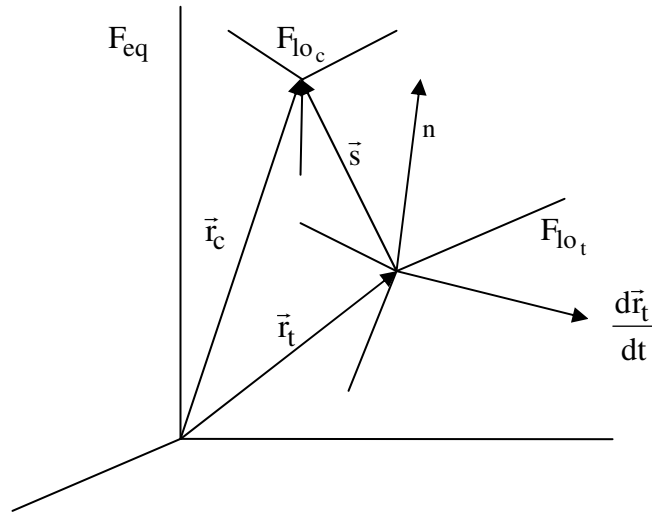


Figura 4.1. Vetores posição das espaçonaves perseguidora e alvo em relação aos sistemas inercial F_{eq} e móvel F_{lo} .

Fonte: adaptado de Cornelisse, et al. (1979).

$$\frac{d^2\vec{r}_t}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} + \frac{d\vec{n}}{dt} \times \vec{s} + \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{s}) + 2\vec{n} \times \frac{\delta\vec{s}}{\delta t} + \frac{\delta^2\vec{s}}{\delta t^2} \quad (4.20)$$

onde: $\frac{d^2\vec{r}_t}{dt^2} \rightarrow$ aceleração absoluta da origem do sistema do alvo F_{lo_t}

$\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} \rightarrow$ aceleração absoluta da origem do sistema do perseguidor F_{lo_c}

$\frac{d\vec{n}}{dt} \times \vec{s} \rightarrow$ aceleração tangencial devido a variação da velocidade de rotação

$\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{s}) \rightarrow$ aceleração devido a rotação do sistema F_{lo} , representa a aceleração centrípeta

$2\vec{n} \times \frac{\delta\vec{s}}{\delta t} \rightarrow$ aceleração de Coriolis

$\frac{\delta^2\vec{s}}{\delta t^2} \rightarrow$ aceleração relativa

Considerando-se que a distância relativa $|\vec{s}| < 500m$ e que o raio vetor $|\vec{r}| \cong 6300 Km$, então

$$\frac{d^2\vec{r}_t}{dt^2} \cong \frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} \quad (4.21)$$

Inserindo a equação 4.21 na equação 4.20 obtém-se

$$\frac{d\vec{n}}{dt} \times \vec{s} + \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{s}) + 2\vec{n} \times \frac{\delta\vec{s}}{\delta t} + \frac{\delta^2\vec{s}}{\delta t^2} = 0 \quad (4.22)$$

Do sistema de eixos do alvo, tem-se que

$$\vec{s} = (x, y, z), \quad \vec{r}_t = [0 \quad 0 \quad -r_t]^T \quad \text{e} \quad \vec{n} = [0 \quad -n \quad 0]^T \quad (4.23)$$

que inseridos para calcular os termos da equação 4.22 tem-se

$$\vec{n} \times \vec{s} = [-nz \quad 0 \quad nx]^T \Rightarrow \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{s}) = [-n^2x \quad 0 \quad -n^2z]^T \quad (4.24a)$$

$$2\vec{n} \times \frac{d\vec{s}}{dt} = [-2n\dot{z} \quad 0 \quad -2n\dot{x}]^T \quad (4.24b)$$

$$\frac{d\vec{n}}{dt} \times \vec{s} = [-\dot{n}z \quad 0 \quad -\dot{n}x]^T \quad (4.24c)$$

$$\frac{\delta^2\vec{s}}{\delta t^2} = \ddot{\vec{s}} = \nabla f(r_t) \cdot \vec{s} = \frac{\mu}{r_t^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{\mu}{r_t^3} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -2z \end{bmatrix} \quad (4.24d)$$

Como a quantidade de movimento angular é constante para órbitas circulares, a velocidade angular também é constante, e pode ser expressa por

$$n^2 = \frac{\mu}{r_t^3} \quad (4.25)$$

em consequência, $(d\vec{n}/dt) = 0$.

Inserindo a equação 4.25 e os termos calculados em 4.24 na equação 4.22 obtém-se a equação linear geral para o movimento relativo, que são também

conhecidas como as equações de Hill-Clohessy-Wiltshire. Essas equações são adequadas para realizar a fase final de aproximação (short range), mas não o são para realizar transferência de órbita e redução de fase orbital (long range).

$$\begin{aligned} f_x &= \ddot{x} - 2n\dot{z} \\ f_y &= \ddot{y} + n^2y \\ f_z &= \ddot{z} + 2n\dot{x} - 3n^2z \end{aligned} \quad (4.26)$$

Analisando-se as equações 4.26 pode-se notar que a componente y está desacoplada e tem a forma de um oscilador, a qual tem uma solução analítica trivial. Cabe reforçar que essas equações do movimento são válidas somente se a órbita da espaçonave alvo é circular e a distância relativa $\vec{s}$ é pequena comparada com o raio vetor da órbita $\vec{r}_t$.

4.1.2 Movimento de rotação em torno do seu centro de massa.

Para o estudo do acoplamento, visando uma melhor compreensão do equacionamento desenvolvido para estudar a rotação dos corpos envolvidos no evento do acoplamento, as equações da cinemática e da dinâmica serão deduzidas distintamente.

4.1.2.1 Cinemática de rotação

Para descrever o movimento rotacional dessas espaçonaves, faz-se uso da transformação de coordenadas ou matrizes de transformação de coordenadas.

O enunciado do Teorema de Euler (1707-1783) em 1776 a partir de conceitos de trigonometria esférica estabelece que: “o deslocamento mais geral de um corpo rígido com um ponto fixo é uma rotação em torno do eixo que passe por esse ponto” (Hughes, 2004). Com base nesse teorema, foram definidos os quatro parâmetros de Euler, que representam a amplitude da rotação e os ângulos que caracterizam a direção do vetor de rotação. Cayley e Klein introduziram, nos meados do século XIX, um conceito equivalente utilizando notação matricial e números complexos. Os assim chamados “parâmetros de Cayley-Klein” apresentam uma perfeita identificação com os parâmetros

definidos por Euler. Em 1843, Hamilton apresentou uma formulação vetorial de quatro parâmetros denominado por quatérnio, que estabelecia igualmente relações entre esses parâmetros e os parâmetros introduzidos por Cayley, Klein e Euler (EUDY, 1995).

Com o aparecimento dos computadores, o método de quatérnio demonstrou apresentar igual ou maior vantagem, sobre os parâmetros de Euler e sobre os parâmetros de Cayley-Klein, para a solucionar o problema de transformação entre sistemas de coordenadas e propagação de atitude. Justifica-se o uso de quatérnio porque é possível equacionar o movimento de rotação através dos quatérnios, além do que, ele possui um grau a mais de liberdade para descrever o movimento de rotação (ARANTES JUNIOR, 2011).

Contudo, antes das parametrizações mencionadas, faz-se necessário a obtenção da matriz de transformação que relaciona o movimento rotacional do corpo descrito em diferentes sistemas de coordenadas, ou seja, obter a matriz R_{BA} em termos dos ângulos de Euler que permite descrever o movimento do corpo nos sistemas de referências B e A e vice-versa em termos de variáveis angulares.

4.1.2.1.1 Ângulos de EULER

Sejam dois sistemas de coordenadas (triedos) A e B , cujos eixos não estão alinhados, ou seja, o eixo X_A não coincide com o eixo X_B , o eixo Y_A não coincide com o eixo Y_B e o eixo Z_A não coincide com o eixo Z_B . Euler descobriu que sempre é possível, mediante três rotações, fazer coincidir o sistema A sobre o sistema B , em direção e sentido.

Desta maneira, a rotação do sistema de referência A para o sistema de referência B é dada pela equação

$$\vec{v}_B = R_{BA} \vec{v}_A \quad (4.27)$$

onde

$\vec{v}_A \rightarrow$ vetor projetado sobre os eixos do sistema de referência A

$\vec{v}_B \rightarrow$ é o mesmo vetor, porém projetado no sistema de referência B

$R_{BA} \rightarrow$ matriz dos cossenos diretores que leva o sistema A para o B

A matriz dos cossenos diretores em termos dos ângulos de Euler é obtida por meio de uma rotação em torno do 3º eixo de A , seguido de outra rotação em torno do 2º eixo de A , e uma terceira rotação em torno do 1º eixo de A . Realizado estas rotações obtém-se:

$$R_{BA}(\theta) = R_x(\theta_x) R_y(\theta_y) R_z(\theta_z) \quad (4.28)$$

$$R_{BA}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x \\ 0 & -\sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & -\sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_z & \sin\theta_z & 0 \\ -\sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$R_{BA}(\theta) = \begin{bmatrix} c(\theta_z)c(\theta_y) & c(\theta_y)s(\theta_z) & -s(\theta_y) \\ s(\theta_x)s(\theta_y)c(\theta_z) - c(\theta_x)s(\theta_z) & s(\theta_x)s(\theta_y)s(\theta_z) + c(\theta_x)c(\theta_z) & s(\theta_x)c(\theta_y) \\ c(\theta_x)s(\theta_y)c(\theta_z) + s(\theta_x)s(\theta_z) & c(\theta_x)s(\theta_y)s(\theta_z) & c(\theta_x)c(\theta_y) \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

onde $c(\theta_i) = \cos(\theta_i)$ e $s(\theta_i) = \sin(\theta_i)$ e onde $\theta = [\theta_x, \theta_y, \theta_z]^T$ é o ângulo de rotação em torno do respectivo eixo. Observar que a sequência de rotação adotada foi $\theta_z, \theta_y, \theta_x$ (teta z , teta y , teta x), pois muitas das fórmulas que serão deduzidas a seguir serão válidas apenas para esta sequência de Euler (EUDY, 1995).

Da matriz $[R_{BA}(\theta)] = [R_{ij}]_{3 \times 3}$ podem-se extrair os valores dos ângulos de Euler

$$\begin{aligned} \theta_x &= \arctg(R_{23} / R_{33}) \\ \theta_y &= -\arcsen(R_{13}) \\ \theta_z &= \arctg(R_{12} / R_{11}) \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde

$$-\pi \leq \theta_3 \leq \pi \quad -\pi/2 \leq \theta_2 \leq \pi/2 \quad -\pi \leq \theta_1 \leq \pi$$

Se o sistema B estiver girando em relação ao sistema A , a matriz R_{BA} estará variando, pois a cada instante têm-se novos valores para $\theta_z \theta_y \theta_x$, ou seja, a variação da rotação em relação ao tempo é a velocidade angular $d\theta/dt$. Admitindo a primeira rotação em torno do eixo $\vec{Z}_A$, a segunda rotação em torno do eixo $\vec{Y}_A$ e a terceira rotação em torno do eixo $\vec{X}_A$, no intervalo infinitesimal de tempo Δt , ou seja, a rotação na sequência 3-2-1, tem-se

$$\vec{\omega}_{BA} = \vec{\omega}_{BA''} + \vec{\omega}_{A''A'} + \vec{\omega}_{A'A} \quad (4.32)$$

onde

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_{A'A} &= \dot{\theta}_z \vec{Z}_A = \dot{\theta}_z \vec{Z}_{A'} = [\vec{X}_{A'} \quad \vec{Y}_{A'} \quad \vec{Z}_{A'}] [0 \quad 0 \quad \dot{\theta}_z]^T \\ \vec{\omega}_{A''A'} &= \dot{\theta}_y \vec{Y}_{A'} = \dot{\theta}_y \vec{Y}_{A''} = [\vec{X}_{A''} \quad \vec{Y}_{A''} \quad \vec{Z}_{A''}] [0 \quad \dot{\theta}_y \quad 0]^T \\ \vec{\omega}_{BA''} &= \dot{\theta}_x \vec{X}_{A''} = \dot{\theta}_x \vec{b}_x = [\vec{X}_B \quad \vec{Y}_B \quad \vec{Z}_B] [\dot{\theta}_x \quad 0 \quad 0]^T \end{aligned} \quad (4.33)$$

Pode-se observar nas equações (4.33) que cada velocidade angular $\vec{\omega}$ está representada em um sistema de referência distinto. Portanto, é necessário que elas sejam representadas num único sistema de referência. Em consequência, o sistema de referência B será o escolhido. Logo, é necessário conhecer as matrizes de rotação para transformar os vetores $\vec{\omega}_{A''A'}$ e $\vec{\omega}_{A'A}$ para a base B , ou seja, é necessário calcular

$$\begin{aligned} [\vec{X}_{A''} \quad \vec{Y}_{A''} \quad \vec{Z}_{A''}] &= [\vec{X}_B \quad \vec{Y}_B \quad \vec{Z}_B] R_x(\theta_x) \\ [\vec{X}_{A'} \quad \vec{Y}_{A'} \quad \vec{Z}_{A'}] &= [\vec{X}_B \quad \vec{Y}_B \quad \vec{Z}_B] R_x(\theta_x) R_y(\theta_y) \end{aligned} \quad (4.34)$$

portanto

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_x(\theta_x) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta}_y \\ 0 \end{bmatrix} + R_x(\theta_x) R_y(\theta_y) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta_y \\ 0 & c\theta_x & s\theta_x c\theta_y \\ 0 & -s\theta_x & c\theta_x c\theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_z \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Pelo fato dos vetores $(\vec{X}_B; \vec{Y}_{A''}; \vec{Z}_{A'})$ não constituírem um conjunto de versores ortogonais, a inversa da matriz não tem solução trivial, precisando ser calculada. A inversa é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ \dot{\theta}_z \end{bmatrix} = \frac{1}{c\theta_y} \begin{bmatrix} c\theta_y & s\theta_x s\theta_y & c\theta_x s\theta_y \\ 0 & c\theta_x c\theta_y & -s\theta_x c\theta_y \\ 0 & s\theta_x & c\theta_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Essas equações constituem as equações diferenciais da cinemática rotacional para a sequência $R_z(\theta_z) \rightarrow R_y(\theta_y) \rightarrow R_x(\theta_x)$.

Entretanto se, em algum determinado instante, $\theta_y = \pi/2$, será impossível acompanhar as variações de atitude de B em relação a A , a partir deste ponto, pois terá sido criada uma indeterminação (singularidade) em $1/\cos\theta_y$. Para contornar esse problema o método do quatérnio pode ser utilizado. Neste método, que não apresenta indeterminações, a propagação da atitude se dá através de multiplicações, divisões, somas e subtrações, operações do ponto de vista computacional, muito mais rápidas do que aquelas descritas em termos de funções trigonométricas (EUDY, 1995).

Contudo, antes de se chegar à parametrização do quatérnio (quatro-parâmetros), outros métodos antecederam e deram-lhe suporte. Os principais são a seguir abordados.

4.1.2.1.2 Parâmetros de Euler

Na figura 4.2, abaixo, o triedo A realiza uma rotação para se coincidir com o triedo B . O eixo de rotação faz ângulos $\alpha\beta\gamma$ com os eixos $X_A Y_A Z_A$. O sistema A é girado de um ângulo μ em torno do eixo de rotação. Pode-se observar que à medida que A gira em torno do eixo de rotação, seus eixos continuam fazendo os mesmos ângulos $\alpha\beta\gamma$ com esse eixo. E, ao completar a rotação, de tal maneira que A coincida com B , os eixos de B também fazem os mesmos ângulos $\alpha\beta\gamma$ com o eixo de rotação.

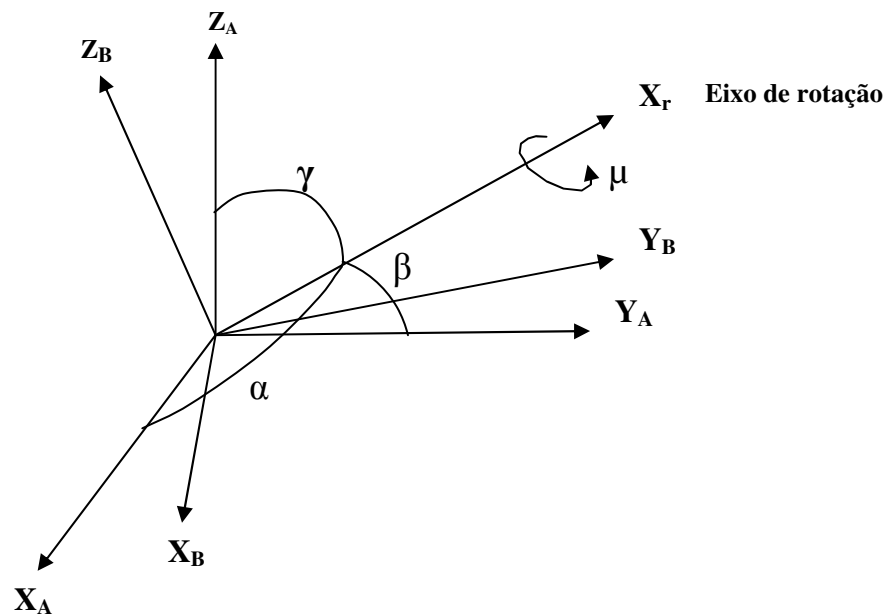


Figura 4.2. Visualização do Teorema de Euler.
Fonte: EUDY (1995)

Para deduzir a matriz de rotação dessa passagem de A para B , recorre-se a um sistema auxiliar R . Esse triêdro R tem o seu eixo X_R na mesma direção do eixo de rotação, o eixo Y_R está no plano $X_A Y_A$ e é perpendicular ao eixo X_R , e, o eixo Z_R completa o triêdro ortogonal.

Para coincidir A com B , realizam-se três rotações:

1. a primeira para coincidir A com R , definindo-se o sistema A' ;
2. após gira-se A' em torno do eixo $X_{A''}$ (coincidente com o eixo de rotação) de um ângulo μ , definindo um novo sistema A'' ; e
3. por último, gira-se A'' para coincidir com B .

Realizada essas rotações será obtida a matriz de transformação

$$C_{BA} = C_{BA''} C_{A''A'} C_{A'A}$$

ou seja,

$$C_{BA} = \begin{bmatrix} 1 - 2s^2 \frac{\mu}{2} s^2 \alpha & 2 \left(s^2 \frac{\mu}{2} c \alpha c \beta + s \frac{\mu}{2} c \frac{\mu}{2} c \gamma \right) & 2 \left(s^2 \frac{\mu}{2} c \alpha c \gamma - s \frac{\mu}{2} c \frac{\mu}{2} c \beta \right) \\ 2 \left(s^2 \frac{\mu}{2} c \alpha c \beta - s \frac{\mu}{2} c \frac{\mu}{2} c \gamma \right) & 1 - 2s^2 \frac{\mu}{2} s^2 \beta & 2 \left(s^2 \frac{\mu}{2} c \beta c \gamma + s \frac{\mu}{2} c \frac{\mu}{2} c \alpha \right) \\ 2 \left(s^2 \frac{\mu}{2} c \alpha c \gamma + s \frac{\mu}{2} c \frac{\mu}{2} c \beta \right) & 2 \left(s^2 \frac{\mu}{2} c \beta c \gamma - s \frac{\mu}{2} c \frac{\mu}{2} c \alpha \right) & 1 - 2s^2 \frac{\mu}{2} s^2 \gamma \end{bmatrix}$$

onde: $\alpha, \beta, \gamma = \theta$; $s^2 \theta \equiv \text{sen}^2 \theta$; $s \theta \equiv \text{sen} \theta$; $c \theta \equiv \cos \theta$; $C_{BA} \equiv \text{equação (4.37)}$

Recorrendo-se as expressões

$$\text{sen}^2 \frac{\mu}{2} = \frac{1 - \cos \mu}{2}; \quad \cos^2 \frac{\mu}{2} = \frac{1 + \cos \mu}{2} \quad (4.38)$$

e definindo-se os parâmetros (χ, ζ, η, ξ) , têm-se

$$\chi \equiv \sqrt{\frac{1 - \text{traço} C_{BA}}{4}} \Rightarrow \chi = \cos \frac{\mu}{2} \quad (4.39a)$$

$$\zeta \equiv \frac{C_{23} - C_{32}}{4 \cos(\mu/2)} \Rightarrow \zeta = \text{sen} \frac{\mu}{2} \cos \alpha \quad (4.39b)$$

$$\eta \equiv \frac{C_{31} - C_{13}}{4 \cos(\mu/2)} \Rightarrow \eta = \text{sen} \frac{\mu}{2} \cos \beta \quad (4.39c)$$

$$\xi \equiv \frac{C_{12} - C_{21}}{4 \cos(\mu/2)} \Rightarrow \xi = \text{sen} \frac{\mu}{2} \cos \gamma \quad (4.39d)$$

os chamados parâmetros de Euler, que substituídos na equação 4.37 resulta na matriz de transformação C_{BA} em termos dos parâmetros de Euler.

$$C_{BA} = \begin{bmatrix} \chi^2 + \zeta^2 - \eta^2 - \xi^2 & 2(\chi\xi + \zeta\eta) & 2(\zeta\xi - \chi\eta) \\ 2(\zeta\eta - \chi\xi) & \chi^2 - \zeta^2 + \eta^2 - \xi^2 & 2(\chi\zeta + \eta\xi) \\ 2(\chi\eta + \zeta\xi) & 2(\eta\xi - \chi\zeta) & \chi^2 - \zeta^2 - \eta^2 + \xi^2 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

com a propriedade

$$\chi^2 + \zeta^2 + \eta^2 + \xi^2 = 1 \quad (4.41)$$

4.1.2.1.3 Parâmetros de Cayley-Klein

Para especificar a orientação de um corpo rígido são necessárias apenas três quantidades independentes. No entanto, há ocasiões em que é desejável a utilização de conjuntos de variáveis que contenham mais do que o número mínimo de quantidades para descrever uma rotação. Assim, Felix Klein (1849-1925) introduziu o conjunto de quatro parâmetros para facilitar a integração dos complicados problemas giroscópicos. Os ângulos de Euler são difíceis de serem usados em simulação numérica, devido ao grande número de funções trigonométricas envolvidas. Os quatro parâmetros sugeridos por Klein adaptam-se melhor, quando processadas em computadores. Além disso, o conjunto dos quatro parâmetros é de grande interesse teórico (inclusão dos efeitos do spin dos átomos na mecânica quântica), onde rotações ou simetria rotacional estão envolvidas. Portanto, vale a pena descrever brevemente estes parâmetros. (Goldstein, 2002)

Nas seções anteriores recorreu-se a um espaço bidimensional real para demonstrar as propriedades das transformações ortogonais. Para introduzir os quatro parâmetros de Klein, considera-se um espaço bidimensional com eixos complexos representados por u e v . Uma transformação linear geral em tal espaço aparece como

$$\begin{aligned} u' &= \alpha u + \beta v \\ v' &= \gamma u + \delta v \end{aligned} \tag{4.42}$$

Com a correspondente matriz de transformação

$$Q = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \tag{4.43}$$

cujo determinante seja igual a +1. Portanto,

$$Q^T Q = \mathbb{1} = Q Q^T \tag{4.44}$$

A condição para que o determinante seja +1 é

$$\alpha\delta - \beta\gamma = +1 \quad (4.45)$$

A matriz de transformação Q tem oito quantidades a serem especificadas, uma vez que cada um dos quatro elementos é complexo. No entanto, as condições impostas reduzem para quatro o número dessas quantidades independentes. Expandida a condição unitária da equação 4.44, tem-se as equações

$$\begin{aligned} \alpha^*\alpha + \beta^*\beta &= 1 \\ \gamma^*\gamma + \delta^*\delta &= 1 \\ \alpha^*\gamma + \beta^*\delta &= 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

onde os elementos com asterisco são os elementos conjugados.

Da última equação de 4.46 pode-se extrair

$$\frac{\delta}{\gamma} = -\frac{\alpha^*}{\beta^*} \quad (4.47)$$

a qual quando substituída na condição do determinante 4.45 resulta

$$\alpha \frac{\delta}{\gamma} - \beta = \frac{1}{\gamma} \rightarrow -\alpha \frac{\alpha^*}{\beta^*} - \beta = \frac{1}{\gamma} \rightarrow (\alpha\alpha^* + \beta\beta^*) \frac{\gamma}{\beta^*} = -1 \quad (4.48)$$

como $(\alpha\alpha^* + \beta\beta^*) = 1$, então

$$\gamma = -\beta^* \quad \text{e} \quad \delta = +\alpha^* \quad (4.49)$$

que substituídos em 4.43 tem-se

$$Q = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

com a condição de um remanescente da equação 4.46

$$\alpha^*\alpha + \beta^*\beta = 1$$

Os parâmetros $\alpha, \beta, \alpha^*, \beta^*$ são chamados parâmetros de Cayley-Klein e são números complexos.

Sejam os parâmetros de Cayley-Klein definidos por

$$\begin{aligned} \alpha &= e_0 + ie_1 \\ \beta &= e_2 + ie_3 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha^* &= e_0 - ie_1 \\ \beta^* &= e_2 - ie_3 \end{aligned} \quad (4.51)$$

Então a equação 4.50 pode ser escrita como sendo

$$Q = \begin{bmatrix} +e_0 + ie_1 & e_2 + ie_3 \\ -e_2 + ie_3 & e_0 - ie_1 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

cuja equação inversa é dada por

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} e_0 - ie_1 & -e_2 - ie_3 \\ e_2 - ie_3 & +e_0 + ie_1 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Seja um vetor $\vec{v}$ com componentes reais x, y, z representado por

$$P = \begin{bmatrix} iz & y + ix \\ -y + ix & -iz \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Matematicamente x, y, z podem ser considerados somente como três quantidades reais; fisicamente, eles podem ser interpretados como as coordenadas de um ponto no espaço.

Suponha que a matriz $[P]$ seja transformada pela matriz $[Q]$ da seguinte maneira:

$$P' = QPQ^* \quad (4.55)$$

onde, $[Q^*]$ é a matriz adjunta de $[Q]$. Como $[Q]$ é unitária

$$Q^* = Q^{-1} \quad (4.56)$$

Portanto,

$$P' = QPQ^{-1} \quad (4.57)$$

Essa é uma transformação de similaridade e portanto o determinante da matriz é invariante pela transformação. A soma dos elementos da diagonal principal da matriz também é invariante sob a transformação de similaridade e portanto

$$P' = \begin{bmatrix} iz' & y' + ix' \\ -y' + ix' & -iz' \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

onde x', y', z' são os componentes do vetor $\vec{v}'$, resultante da transformação, representado pela forma matricial P' . A invariância dos determinantes implica que

$$|P| = x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = |P'| \quad (4.59)$$

ou, seja, o módulo do vetor permanece constante.

Substituindo as equações 4.52, 4.54 e 4.53, respectivamente, na equação 4.57 obtém-se

$$P' = \begin{bmatrix} +e_0 + ie_1 & e_2 + ie_3 \\ -e_2 + ie_3 & e_0 - ie_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} iz & y + ix \\ -y + ix & -iz \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_0 - ie_1 & -e_2 - ie_3 \\ e_2 - ie_3 & +e_0 + ie_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p'_{11} & p'_{12} \\ p'_{21} & p'_{22} \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

$$\text{onde: } p'_{11} = 2i(e_3e_1 + e_2e_0)x + 2i(e_2e_1 - e_3e_0)y + i(-e_3^2 - e_2^2 + e_1^2 + e_0^2)z \quad (4.60a)$$

$$p'_{12} = 2(e_3e_2 - e_1e_0)x + i(+e_3^2 - e_2^2 - e_1^2 + e_0^2)x + (-e_3^2 + e_2^2 - e_1^2 + e_0^2)y + \\ + 2i(e_3e_2 + e_1e_0)y + 2(e_2e_1 + e_3e_0)z + 2i(e_3e_1 - e_2e_0)z \quad (4.60b)$$

$$p'_{21} = 2(e_1e_0 - e_3e_2)x + i(+e_3^2 - e_2^2 - e_1^2 + e_0^2)x + (+e_3^2 - e_2^2 + e_1^2 - e_0^2)y + \\ + 2i(e_3e_2 + e_1e_0)y + 2(-e_2e_1 - e_3e_0)z + 2i(e_3e_1 - e_2e_0)z \quad (4.60c)$$

$$p'_{22} = 2i(-e_3e_1 - e_2e_0)x + 2i(-e_2e_1 + e_3e_0)y + i(+e_3^2 + e_2^2 - e_1^2 - e_0^2)z \quad (4.60d)$$

Comparando-se a equação 4.58 com a equação 4.60 pode-se extrair

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e_3^2 - e_2^2 - e_1^2 + e_0^2 & 2(e_3e_2 + e_1e_0) & 2(e_3e_1 - e_2e_0) \\ 2(e_3e_2 - e_1e_0) & -e_3^2 + e_2^2 - e_1^2 + e_0^2 & 2(e_2e_1 + e_3e_0) \\ 2(e_3e_1 + e_2e_0) & 2(e_2e_1 - e_3e_0) & -e_3^2 - e_2^2 + e_1^2 + e_0^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (4.61)$$

com a propriedade:
$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1 \quad (4.62a)$$

$$e_0^2 = \frac{1 + \text{traço}C_{P'P}}{4}; \quad e_1 = \frac{C_{12} - C_{21}}{4e_0}; \quad e_2 = \frac{C_{31} - C_{13}}{4e_0}; \quad e_3 = \frac{C_{31} - C_{13}}{4e_0} \quad (4.62b)$$

Comparando-se os Parâmetros de Euler com os Parâmetros de Cayley-Klein, pode-se extrair a identificação abaixo

$$\chi = e_0 \quad \zeta = e_1 \quad \eta = e_2 \quad \xi = e_3 \quad (4.63)$$

4.1.2.1.4 Parâmetros do quatérnio (Hamilton)

Em 1843, Hamilton (1805-1865) sabia que os números complexos podiam ser vistos como pontos em um plano e que eles poderiam ser somados e multiplicados em conjunto, utilizando determinadas operações geométricas. Hamilton procurou encontrar uma maneira de fazer o mesmo para pontos no espaço. Os pontos no espaço podiam ser representados pelas suas coordenadas, que são triplos e têm uma adição óbvia, mas ele não sabia como multiplicá-los. Em 16 de outubro de 1843, Hamilton passeava com sua esposa ao longo do Canal Real, em Dublin. Enquanto eles atravessavam Brougham Bridge (agora Broom Bridge), uma solução de repente lhe ocorreu: se ele não podia "multiplicar triplos", porque não fazê-lo com quádruplos. Usando três dos números no quádruplo como pontos de uma coordenada no espaço, Hamilton poderia representar pontos no espaço. À esse quádruplo, ele chamou de quatérnio (en.wikipedia.org/wiki/Quaternion).

Um quatérnio é definido como um número hiper-complexo quadri-dimensional

$$q = q_0 + q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k} = (q_0, q_1, q_2, q_3) = (q_0, \vec{q}) \quad (4.64)$$

onde (q_0, q_1, q_2, q_3) são números reais e os versores $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ satisfazem

$$\hat{i}^2 = \hat{j}^2 = \hat{k}^2 = \hat{i}\hat{j}\hat{k} = -1 \quad (4.65a)$$

$$\hat{i}\hat{j} = -\hat{j}\hat{i} = \hat{k}; \quad \hat{j}\hat{k} = -\hat{k}\hat{j} = \hat{i}; \quad \hat{k}\hat{i} = -\hat{i}\hat{k} = \hat{j} \quad (4.65b)$$

O parâmetro (q_0) é a parte real do quatérnio e $(q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k})$ é a parte vetorial. Se $(q_0 = 0)$, então tem-se um quaternion puro (KUIPERS, 1999).

O conjugado de um quatérnio é definido por

$$q^* = q_0 - q_1\hat{i} - q_2\hat{j} - q_3\hat{k} \quad (4.66)$$

A norma ou módulo de um quatérnio é

$$q q^* = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \quad (4.67)$$

Um quatérnio é nulo quando

$$q = 0 + 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = [0] \quad (4.68)$$

Se (q) não for nulo, então a inversa de (q) é definido por (q^{-1}) tal que

$$q q^{-1} = 1 \quad (4.69)$$

Observa-se que se um quatérnio tiver norma $N(q)$ unitária, então

$$q q^* = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \quad (4.70)$$

em consequência, vale a relação

$$q^{-1} = q^* \quad (4.71)$$

Qualquer quatérnio unitário pode ser escrito como

$$q = q_0 + \vec{q} = \cos \theta + \vec{u} \sin \theta \quad (4.72)$$

onde:
$$\vec{u} = \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}, \quad \tan \theta = \frac{|\vec{q}|}{q_0} \quad (4.73)$$

O quatérnio como operador rotacional transforma:

$$w = q v q^* = (q_0^2 - |\vec{q}|^2) \vec{v} + 2(\vec{q} \cdot \vec{v}) \vec{q} + 2q_0(\vec{q} \times \vec{v}) \quad (4.74)$$

onde $\vec{v}$ pode ser interpretado geometricamente como uma rotação de um ângulo 2θ (o quatérnio unitário q é aplicado duas vezes) realizada pelo vetor $\vec{v}$ em torno do eixo de rotação $\vec{q}$. Portanto, calculando-se

$$[R] = q_{y,\beta}^* q_{z,\alpha}^* [E] q_{z,\alpha} q_{y,\beta} = p^* [E] p \quad (4.75)$$

onde:
$$q_{z,\alpha} = \cos \frac{\alpha}{2} + \hat{k} \sin \frac{\alpha}{2} \quad (4.75a)$$

$$q_{y,\beta} = \cos \frac{\beta}{2} + \hat{j} \sin \frac{\beta}{2} \quad (4.75b)$$

$$[E] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \end{bmatrix} = \mathbb{R}^3 \text{ base formada por quatérnio puro} \quad (4.75c)$$

prova-se que os quatérnios definidos em 4.75a a 4.75c aplicados em 4.75 fornecem os elementos da primeira coluna da matriz de transformação

$$p^* \hat{i} p = [\cos \alpha \cos \beta \quad -\sin \alpha \cos \beta \cos \alpha \cos \beta]^T \quad (4.76)$$

os quais são os mesmos da primeira coluna se calculados pela forma matricial

$$\begin{aligned} [R] &= R_\beta^y R_\alpha^z [I] = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [I] = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha \cos \beta & -\sin \beta \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} [I] \end{aligned} \quad (4.77)$$

o que demonstra que:

- a multiplicação de quatérnios pode ser usada como operador rotacional
- se justifica o uso dos ângulos metade na matriz de transformação.

Deduções mais completas são encontradas em (KUIPERS, 1999).

Uma analogia pode se destacar quando se compara quatérnio e os parâmetros de Euler. A parte vetorial do quatérnio pode ser interpretada como a direção do

eixo de rotação e a parte real seria a magnitude de rotação em torno desse eixo.

Seja um vetor $\vec{v}$ de componentes (x, y, z) tais que

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (4.78)$$

A transformação

$$\vec{v}' = q^* \vec{v} q \quad (4.79)$$

tem a forma

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_0q_3 + q_1q_2) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_0q_1 + q_2q_3) \\ 2(q_0q_2 + q_1q_3) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (4.80)$$

Novamente comparando os parâmetros do quatérnio com os parâmetros de Euler e os de Cayley-Klein resulta,

$$\chi = e_0 = q_0 \quad \zeta = e_1 = q_1 \quad \eta = e_2 = q_2 \quad \xi = e_3 = q_3 \quad (4.81)$$

Se os quatérnios forem normalizados, em que $(q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1)$, pode-se reescrever os termos da diagonal principal da matriz de rotação $[R_{v'v}]$ em (4.80) como sendo

$$R_{v'v} = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_0q_3 + q_1q_2) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_0q_1 + q_2q_3) \\ 2(q_0q_2 + q_1q_3) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

$$R_{v'v} = (q_0^2 - \vec{q}^T \vec{q})\mathbb{1} + 2\vec{q}\vec{q}^T - 2q_0q^x \quad (4.83)$$

$$\text{onde:} \quad \mathbb{1} \rightarrow \text{matriz identidade} \quad (4.83a)$$

$$\vec{q} = q_1\hat{i} + q_2\hat{j} + q_3\hat{k} \quad (4.83b)$$

$$q^x = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.83c)$$

Da matriz $R_{v'v}$ acima é possível extrair

$$q_0^2 = \frac{1 + \text{traço}(R_{v'v})}{4}; \quad q_1 = \frac{R_{23} - R_{32}}{4q_0}; \quad q_2 = \frac{R_{13} - R_{31}}{4q_0}; \quad q_3 = \frac{R_{12} - R_{21}}{4q_0} \quad (4.84)$$

As relações 4.84 permitem verificar se os elementos, bem como os sinais dos elementos da matriz, estão corretos. Deve-se observar também que os elementos da matriz obtida por quatérnio são numericamente iguais aos elementos da matriz de transformação obtida por Euler na sequência (α, β, γ) . Por exemplo, utilizando-se a matriz de transformação $[C_{BA}]$ calculada em 4.37 e as definições de 4.84, tem-se:

$$q_0 = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\mu}{2}} \Rightarrow q_0 = \cos \frac{\mu}{2} \quad (4.85a)$$

$$q_1 = \frac{4 \cos(\mu/2) \sin(\mu/2) \cos \alpha}{4 \cos(\mu/2)} \Rightarrow q_1 = \sin \frac{\mu}{2} \cos \alpha \quad (4.85b)$$

$$q_2 = \frac{4 \cos(\mu/2) \sin(\mu/2) \cos \beta}{4 \cos(\mu/2)} \Rightarrow q_2 = \sin \frac{\mu}{2} \cos \beta \quad (4.85c)$$

$$q_3 = \frac{4 \cos(\mu/2) \sin(\mu/2) \cos \gamma}{4 \cos(\mu/2)} \Rightarrow q_3 = \sin \frac{\mu}{2} \cos \gamma \quad (4.85d)$$

Para a inicialização dos quatérnios recorre-se as equações abaixo

$$\begin{aligned} q_x &= \cos(\alpha/2) + \sin(\alpha/2)i \\ q_y &= \cos(\beta/2) + \sin(\beta/2)j \\ q_z &= \cos(\gamma/2) + \sin(\gamma/2)k \end{aligned} \quad (4.86)$$

Procedendo-se a multiplicação das equações 4.86 na sequência (α, β, γ) , e igualando-se à equação 4.64 obtém-se a inicialização do quatérnio:

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos(\alpha/2)\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2) - \sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2) \\ q_1 &= \sin(\alpha/2)\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2) + \cos(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2) \\ q_2 &= \cos(\alpha/2)\sin(\beta/2)\cos(\gamma/2) - \sin(\alpha/2)\cos(\beta/2)\sin(\gamma/2) \\ q_3 &= \sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\cos(\gamma/2) + \cos(\alpha/2)\cos(\beta/2)\sin(\gamma/2) \end{aligned} \quad (4.87)$$

A matriz de rotação $R_{v'v}$ pode ser inicializada a partir das equações 4.87. Essas relações são válidas somente para $R_{v'v}(\alpha\beta\gamma) = R_{v'y''}R_{y''y'}R_{y'v}$. Em outra sequência dos ângulos de Euler, essas relações não são válidas.

4.1.2.1.5 Propagação do quatérnio

Considerando que o sistema B está girando em relação ao sistema A com velocidade de rotação $\vec{\omega}$ e que as componentes $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ são conhecidas no sistema B . Num determinado instante t tem-se uma matriz C_{BA} que leva de A para B . Durante um intervalo de tempo Δt o sistema B gira em relação a A , assumindo uma nova atitude. Será nomeado de sistema B' o sistema B após transcorrido o intervalo Δt , ou seja, após uma rotação infinitesimal devido a $\vec{\omega}$. Em consequência, no instante $t + \Delta t$ tem-se uma nova matriz C_{BA} que leva de A para B' .

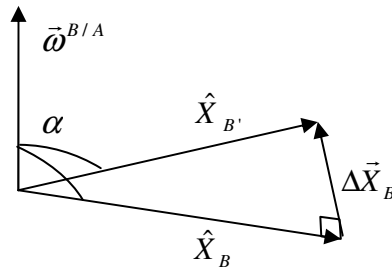


Figura 4.3 Movimento de $\vec{X}_B$ no intervalo de tempo Δt .

Fonte (Eudy, 1995)

A figura 4.3 retrata a situação do eixo $\vec{X}_B$ num instante de tempo t e no instante $t + \Delta t$ após o sistema B girar em relação ao sistema A , devido a $\vec{\omega}$. O versor $\hat{X}_B$ representa o vetor unitário na direção do eixo $\vec{X}_B$ e, analogamente, $\hat{X}_{B'}$ representa o versor do eixo $\vec{X}_{B'}$. Na mesma figura, $\Delta \vec{X}_B$ representa a variação do versor $\hat{X}_B$. Observe que $\Delta \vec{X}_B$ é perpendicular a $\hat{X}_{B'}$. Mais que isso, $\Delta \vec{X}_B$ é perpendicular ao plano formado por $\vec{\omega}$ e por $\hat{X}_B$, pela própria rotação em torno de $\vec{\omega}$. Sendo assim, pode-se assumir que a direção de $\Delta \vec{X}_B$,

expressa em B é dada por $(\vec{\omega} \times \hat{X}_B)/|\vec{\omega}||\hat{X}_B|\text{sen } \alpha$. Como o módulo de $\hat{X}_B$ é igual a um, então a direção de $\Delta\vec{X}_B$ é $(\vec{\omega} \times \hat{X}_B)/|\vec{\omega}|\text{sen } \alpha$. Com relação ao módulo de $\Delta\vec{X}_B$, há que se considerar que $\Delta\vec{X}_B$ é consequência de uma rotação durante Δt . O eixo de rotação é dado por $\vec{\omega}$, cujo raio de rotação mede $\hat{X}_B \text{ sen } \alpha$. Como o módulo de $\hat{X}_B$ é igual a um, pode-se afirmar que o módulo de $\Delta\vec{X}_B$ é $\Delta t \omega \text{ sen } \alpha$.

Finalmente, obtendo-se o módulo e a direção de $\Delta\vec{X}_B$ pode-se dizer que

$$\Delta\vec{X}_B = \Delta t \vec{\omega} \times \hat{X}_B \quad (4.88a)$$

Analogamente, aplicando-se o mesmo raciocínio, pode-se obter

$$\Delta\vec{Y}_B = \Delta t \vec{\omega} \times \hat{Y}_B \quad (4.88b)$$

$$\Delta\vec{Z}_B = \Delta t \vec{\omega} \times \hat{Z}_B \quad (4.88c)$$

Como

$$\begin{aligned} \hat{X}_{B'} &= \Delta\vec{X}_B + \hat{X}_B \\ \hat{Y}_{B'} &= \Delta\vec{Y}_B + \hat{Y}_B \\ \hat{Z}_{B'} &= \Delta\vec{Z}_B + \hat{Z}_B \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \hat{X}_{B'} &= \Delta t \vec{\omega} \times \hat{X}_B + \hat{X}_B \\ \hat{Y}_{B'} &= \Delta t \vec{\omega} \times \hat{Y}_B + \hat{Y}_B \\ \hat{Z}_{B'} &= \Delta t \vec{\omega} \times \hat{Z}_B + \hat{Z}_B \end{aligned} \quad (4.89)$$

que na forma matricial passa a ser escrita como sendo

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_{B'} \\ \hat{Y}_{B'} \\ \hat{Z}_{B'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \omega_z \Delta t & -\omega_y \Delta t \\ -\omega_z \Delta t & 1 & \omega_x \Delta t \\ \omega_y \Delta t & -\omega_x \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_B \\ \hat{Y}_B \\ \hat{Z}_B \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B' = C_{B'B} B \quad (4.90)$$

Pode-se destacar que a matriz $C_{B'B}$ expressa o acontecimento dos eixos do sistema B após a rotação infinitesimal durante Δt devido à $\vec{\omega}$. Analogamente, pode-se deduzir que para o instante $t + \Delta t$, pode-se: para ir de A a B utilizar C_{BA} ; para ir de B a B' utilizar $C_{B'B}$ e, para se ir de A a B' utilizar

$$C_{B'A} = C_{B'B} \cdot C_{BA} \quad (4.91)$$

Como as matrizes de transformação $C_{B'B}$ e C_{BA} são dadas por

$$C_{B'B} = \begin{bmatrix} 1 & +\omega_z \Delta t & -\omega_y \Delta t \\ -\omega_z \Delta t & 1 & +\omega_x \Delta t \\ +\omega_y \Delta t & -\omega_x \Delta t & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C_{BA} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

então

$$C_{B'A} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & +\omega_z \Delta t & -\omega_y \Delta t \\ -\omega_z \Delta t & 0 & +\omega_x \Delta t \\ +\omega_y \Delta t & -\omega_x \Delta t & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} = C_{BA} + \Delta C_{BA} \quad (4.92)$$

Na expressão acima ΔC_{BA} indica o quanto a matriz C_{BA} varia no intervalo de tempo Δt . Dividindo-se ΔC_{BA} por Δt e aplicando-se o limite para $\Delta t \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta C_{BA}}{\Delta t} = \frac{dC_{BA}}{dt} = \dot{C}_{BA} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

Da expressão acima é possível extrair as seguintes relações

$$\dot{C}_{11} = +\omega_z C_{21} - \omega_y C_{31} \quad (4.94a)$$

$$\dot{C}_{22} = -\omega_z C_{12} + \omega_x C_{32} \quad (4.94b)$$

$$\dot{C}_{33} = +\omega_y C_{13} - \omega_x C_{23} \quad (4.94c)$$

Uma vez deduzida a variação da matriz $\dot{C}_{BA}$, é possível utilizando-se do mesmo raciocínio, deduzir a variação da matriz $\dot{q}_{BA}$ em função da matriz q_{BA} no instante anterior.

Para se deduzir a variação temporal de $\dot{q}_{BA}$ em função de q_{BA} supõe-se que seja imprimido a velocidade $\vec{\omega}$ de rotação.

Sendo q_{BA} o quatérnio que transforma A em B , das equações 4.84 pode-se extrair as seguintes relações

$$q_0^2 = \frac{1 + \text{traço}(C_{BA})}{4} \quad \Rightarrow \quad 4q_0^2 = 1 + C_{11} + C_{22} + C_{33} \quad (4.95a)$$

$$q_1 = \frac{C_{23} - C_{32}}{4q_0} \quad \Rightarrow \quad 4q_1^2 = 1 + C_{11} - C_{22} - C_{33} \quad (4.95b)$$

$$q_2 = \frac{C_{13} - C_{31}}{4q_0} \quad \Rightarrow \quad 4q_2^2 = 1 - C_{11} + C_{22} - C_{33} \quad (4.95c)$$

$$q_3 = \frac{C_{12} - C_{21}}{4q_0} \quad \Rightarrow \quad 4q_3^2 = 1 - C_{11} - C_{22} + C_{33} \quad (4.95d)$$

Derivando-se ambos os lados das equações 4.95 em relação ao tempo

$$8q_0\dot{q}_0 = \dot{C}_{11} + \dot{C}_{22} + \dot{C}_{33} \quad (4.96a)$$

$$8q_1\dot{q}_1 = \dot{C}_{11} - \dot{C}_{22} - \dot{C}_{33} \quad (4.96b)$$

$$8q_2\dot{q}_2 = \dot{C}_{22} - \dot{C}_{11} - \dot{C}_{33} \quad (4.96c)$$

$$8q_3\dot{q}_3 = \dot{C}_{33} - \dot{C}_{11} - \dot{C}_{22} \quad (4.96d)$$

Substituindo as equações 4.94 nas expressões 4.96 tem-se

$$8q_0\dot{q}_0 = \omega_x(C_{32} - C_{23}) + \omega_y(C_{13} - C_{31}) + \omega_z(C_{21} - C_{12}) \quad (4.97a)$$

$$8q_1\dot{q}_1 = \omega_x(C_{23} - C_{32}) - \omega_y(C_{13} + C_{31}) + \omega_z(C_{12} + C_{21}) \quad (4.97b)$$

$$8q_2\dot{q}_2 = \omega_x(C_{23} + C_{32}) + \omega_y(C_{31} - C_{13}) - \omega_z(C_{12} + C_{21}) \quad (4.97c)$$

$$8q_3\dot{q}_3 = \omega_x(-C_{23} - C_{32}) + \omega_y(C_{13} + C_{31}) + \omega_z(C_{12} - C_{21}) \quad (4.97d)$$

Calculando as expressões acima a partir dos elementos da matriz de transformação $R_{v'v}$ dada em 4.82 obtém-se

$$2\dot{q}_0 = -\omega_x q_1 - \omega_y q_2 - \omega_z q_3 \quad (4.98a)$$

$$2\dot{q}_1 = \omega_x q_0 + \omega_z q_2 - \omega_y q_3 \quad (4.98b)$$

$$2\dot{q}_2 = \omega_y q_0 - \omega_z q_1 + \omega_x q_3 \quad (4.98c)$$

$$2\dot{q}_3 = \omega_z q_0 + \omega_y q_1 - \omega_x q_2 \quad (4.98d)$$

Portanto

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & +\omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & +\omega_x \\ \omega_z & +\omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{q} = \frac{1}{2} \omega^x q \quad (4.99)$$

A equação 4.99 é válida para o movimento rotacional de um corpo rígido.

Considerando a derivada temporal do quatérnio em função da velocidade angular relativa $\omega_\alpha (\alpha = 1,2,3)$ dada por (MAYO, 1979), onde $\omega_\alpha = \omega_l C_{x'x}$ e $\omega_l (l = x, y, z)$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_x - 2n(q_0 q_3 + q_1 q_2) \\ \omega_2 &= \omega_y + 2n(q_1^2 + q_3^2) - n \\ \omega_3 &= \omega_z - 2n(q_2 q_3 - q_0 q_1) \end{aligned} \quad (4.100)$$

Substituindo as equações 4.100 nas equações 4.98 obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{q}_0 &= 0,5\{[-\omega_x + 2n(q_0 q_3 + q_1 q_2)]q_1 + [-\omega_y - 2n(q_1^2 + q_3^2) + n]q_2 + \\ &\quad [-\omega_z + 2n(q_2 q_3 - q_0 q_1)]q_3\} \end{aligned} \quad (4.101a)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= 0,5\{[+\omega_x - 2n(q_0 q_3 + q_1 q_2)]q_0 + [+ \omega_z - 2n(q_2 q_3 - q_0 q_1)]q_2 + \\ &\quad [-\omega_y - 2n(q_1^2 + q_3^2) + n]q_3\} \end{aligned} \quad (4.101b)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_2 &= 0,5\{[+\omega_y + 2n(q_1^2 + q_3^2) - n]q_0 + [-\omega_z + 2n(q_2 q_3 - q_0 q_1)]q_1 + \\ &\quad [+ \omega_x - 2n(q_0 q_3 + q_1 q_2)]q_3\} \end{aligned} \quad (4.101c)$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_3 &= 0,5\{[+\omega_z - 2n(q_2 q_3 - q_0 q_1)]q_0 + [+ \omega_y + 2n(q_1^2 + q_3^2) - n]q_1 + \\ &\quad [-\omega_x + 2n(q_0 q_3 + q_1 q_2)]q_2\} \end{aligned} \quad (4.101d)$$

4.1.2.1.6 Modelo da cinemática para atitude relativa

Com a base teórica anteriormente desenvolvida é possível deduzir as equações cinemáticas para a atitude relativa, utilizando quatérnio unitário.

O modelo da cinemática da atitude relativa entre a espaçonave perseguidora e a espaçonave alvo, denotada por $\vec{q}_r$, é deduzido através do produto de quatérnios. O produto entre os vetores (quatérnios puros) $\vec{q}_c$ e $\vec{q}_t$ é

$$\begin{aligned}\vec{q}_r &= \vec{q}_c \otimes \vec{q}_t^{-1} = (q_{c_0} + q_{c_1}\hat{i} + q_{c_2}\hat{j} + q_{c_3}\hat{k}) \otimes (q_{t_0} - q_{t_1}\hat{i} - q_{t_2}\hat{j} - q_{t_3}\hat{k}) \\ &= (q_{c_0} + \vec{q}_c) \otimes (q_{t_0} - \vec{q}_t) = [q_{r_0} \quad q_{r_1} \quad q_{r_2} \quad q_{r_3}]\end{aligned}\quad (4.102)$$

onde:

$$\begin{aligned}q_{r_0} &= (+q_{c_0}q_{t_0} + q_{c_1}q_{t_1} + q_{c_2}q_{t_2} + q_{c_3}q_{t_3}) \\ q_{r_1} &= (-q_{c_0}q_{t_1} + q_{c_1}q_{t_0} - q_{c_2}q_{t_3} + q_{c_3}q_{t_2})\hat{i} \\ q_{r_2} &= (-q_{c_0}q_{t_2} + q_{c_1}q_{t_3} + q_{c_2}q_{t_0} - q_{c_3}q_{t_1})\hat{j} \\ q_{r_3} &= (-q_{c_0}q_{t_3} - q_{c_1}q_{t_2} + q_{c_2}q_{t_1} + q_{c_3}q_{t_0})\hat{k}\end{aligned}$$

cuja solução pode ser reescrita como sendo

$$\vec{q}_r = q_{c_0}q_{t_0} - \vec{q}_c \cdot \vec{q}_t + q_{c_0} \cdot \vec{q}_t + q_{t_0} \cdot \vec{q}_c + \vec{q}_c \times \vec{q}_t \quad (4.103)$$

Assumindo que o referencial é inercial, a matriz de rotação que descreve a atitude do alvo em relação ao perseguidor é fornecida pela multiplicação de matrizes de rotação

$$R(q_r)_t^c = R(q_c)_i^c R(q_t)_i^t \quad (4.104)$$

onde: $R(q_r)_t^c \rightarrow$ matriz de rotação, função de q_r , que descreve a atitude do alvo em relação ao perseguidor.

$R(q_c)_i^c \rightarrow$ matriz de rotação, função de q_c , que descreve a atitude do inercial em relação ao perseguidor.

$R(q_t)_i^t \rightarrow$ matriz de rotação, função de q_t , que descreve a atitude do inercial em relação ao alvo.

que também pode ser escrito como

$$R(q_r)_t^c = R(q_c)_i^c R^T(q_t)_t^i \quad (4.105)$$

Portanto, a velocidade angular relativa é obtida como se segue

$$\omega_{ct}^c = \omega_{ic}^c - \omega_{it}^c = \omega_{ic}^c - R(q_r)_t^c \omega_{it}^t \quad (4.106)$$

onde: $\omega_{ct}^c \rightarrow$ velocidade angular do sistema de referência do alvo em relação ao sistema do perseguidor, descrito no sistema de referência do perseguidor.

$\omega_{ic}^c \rightarrow$ velocidade angular do sistema de referência do perseguidor em relação ao sistema inercial, descrito no sistema de referência do perseguidor.

$\omega_{it}^c \rightarrow$ velocidade angular do sistema de referência do alvo em relação ao sistema inercial, descrito no sistema de referência do perseguidor.

denotando:

$$\omega_{ct}^c = \omega_r$$

$$\omega_{ic}^c = \omega_c$$

$$\omega_{it}^c = \omega_t$$

reescreve-se a equação 4.106 como sendo

$$\omega_r = \omega_c - \omega_t \quad (4.107)$$

Em conseqüência, a equação 4.99 passa a ser escrita como sendo

$$\dot{q}_r = \frac{1}{2} \omega_r^x q_r \quad (4.108)$$

4.1.2.2 Dinâmica de rotação

Na dinâmica do movimento rotacional das espaçonaves consideradas rígidas, será considerada a influência de torques, quer sejam eles (externos) oriundos do ambiente atmosférico, tais como, torques devido ao gradiente gravitacional, campo magnético terrestre, radiação solar e aerodinâmico, quer sejam eles (internos) produzidos por equipamentos, tais como, jatos de gás, bobinas magnéticas, rodas de reação.

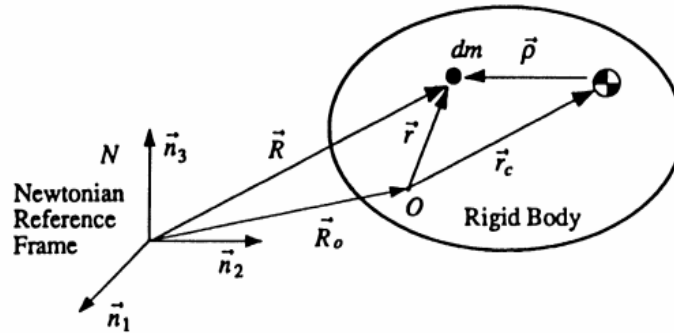


Figura 4.4 Movimento relativo do corpo rígido no referencial Newtoniano.

Fonte: BONG WIE (1998)

A equação do movimento rotacional do corpo rígido em torno de um ponto arbitrário O é dado por

$$\int \vec{r} \times \ddot{\vec{R}} dm = \vec{M}_O \quad (4.109)$$

onde: $\vec{r} \equiv$ vetor posição do elemento de massa infinitesimal dm em relação ao ponto “ O ”

$\vec{R} \equiv$ vetor posição de dm em relação ao referencial inercial F_I

$\ddot{\vec{R}} \equiv$ vetor aceleração inercial de dm

$\vec{M}_O \equiv$ momento (ou torque) externo total em torno do ponto O

Sejam

$\vec{r}_c \equiv$ vetor posição do centro de massa ao ponto O

$\vec{\rho} \equiv$ vetor posição de dm em relação ao centro de massa

então

$$\int \vec{r} dm = m\vec{r}_c \quad (4.110a)$$

$$\int \vec{\rho} dm = 0 \quad (4.110b)$$

onde: $m \equiv$ massa do corpo rígido

Da figura 4.4, $\vec{R} = \vec{R}_o + \vec{r} + \vec{\rho} \quad (4.111)$

então a equação 4.109 pode ser reescrita com sendo

$$\begin{aligned} \int \vec{r} \times (\ddot{\vec{R}}_o + \ddot{\vec{r}}_c + \ddot{\vec{\rho}}) dm &= \int (\vec{r} \times \ddot{\vec{R}}_o) dm + \int (\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}_c) dm + \int (\vec{r} \times \ddot{\vec{\rho}}) dm = \\ &= m\vec{r}_c \times \ddot{\vec{R}}_o + \dot{\vec{h}}_o = \vec{M}_o \end{aligned} \quad (4.112)$$

onde: $\dot{\vec{h}}_o = \int (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}_c) dm$ é a quantidade de movimento angular relativa (4.113)
cuja derivada temporal é em relação ao referencial inercial.

Da mesma maneira que a quantidade de movimento angular relativa do elemento de massa infinitesimal dm foi definido na equação 4.113, a quantidade de movimento angular absoluta em torno do ponto O é definido por

$$\vec{H}_o = \int \vec{r} \times \dot{\vec{R}} dm \quad (4.114)$$

Combinando as equações (4.109) e (4.114) obtém-se

$$\dot{\vec{H}}_o + m\dot{\vec{R}}_o \times \dot{\vec{r}}_c = \vec{M}_o \quad (4.115)$$

Se o ponto O estiver inercialmente fixo, ou se for o centro de massa do corpo rígido, então

$$\dot{\vec{H}}_o = \vec{M}_o \quad \text{ou} \quad \dot{\vec{h}}_o = \vec{M}_o \quad (4.116)$$

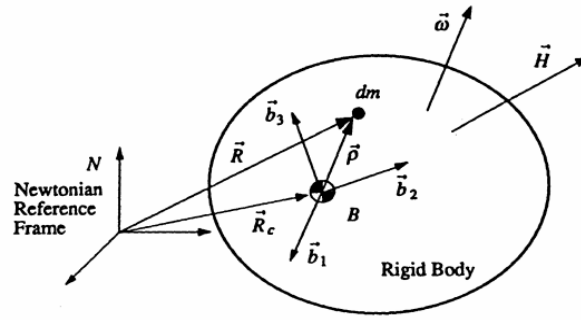


Figura 4.5 Movimento relativo do corpo rígido no referencial fixo no corpo, cuja origem está no centro de massa.

Fonte: BONG WIE (1998)

então

$$\vec{R} = \vec{R}_c + \vec{\rho} \quad , \quad \vec{R} \equiv \text{posição da } dm \text{ em relação à } F_I \text{ da (Fig. 4.5)}$$

Derivando-se em relação ao tempo, obtém-se a velocidade absoluta $\vec{V}$ de dm em relação à F_I , dada por

$$\vec{V} = \vec{V}_c^B + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \frac{d\vec{\rho}}{dt} \quad (4.117)$$

$\vec{V}_c^B \equiv$ vetor velocidade de F_B em relação à F_I

$\vec{\rho} \equiv$ vetor posição de dm em relação à F_B

$\vec{\omega} \equiv$ vetor velocidade angular de F_B em relação a F_I

$\frac{d\vec{\rho}}{dt} \equiv$ vetor velocidade de dm em relação à F_B ; corpo rígido $\Rightarrow \frac{d\vec{\rho}}{dt} = 0$

Momento (torque) da quantidade de movimento ($\vec{H}_c \equiv$ moment of momentum) de um corpo rígido em torno do centro de massa C é definido por

$$\vec{H}_c = \int_m (\vec{\rho} \times \vec{V}) dm \quad (4.118)$$

Substituindo a velocidade dada pela equação (4.112) tem-se

$$\vec{H}_c = \int_m [\vec{\rho} \times (\vec{V}_c^B + \vec{\omega} \times \vec{\rho})] dm = \int_m (\vec{\rho} \times \vec{V}_c^B) dm + \int_m [\vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})] dm \quad (4.119)$$

Obs: $\vec{H}_c \neq \vec{h}_c$ pois $\vec{h}_c = \int_m (\vec{\rho} \times \dot{\vec{\rho}}) dm$ é o momentum (quantidade de movimento) angular

Resolvendo a equação acima por partes

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_m (\vec{\rho} \times \vec{V}_c^B) dm &= \int_m \vec{\rho} dm \times \vec{V}_o^B = \vec{C}_c \times \vec{V}_o^B, \\ \text{se "c" = c.m. } \Rightarrow \vec{C}_c &= \int_m \vec{\rho} dm = 0 \end{aligned} \quad (4.119a)$$

$$\text{b) } \int_m \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm \quad \text{se } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \text{então}$$

$$\begin{aligned} \int_m \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) dm &= \int_m [\vec{\omega}(\vec{\rho} \cdot \vec{\rho}) - \vec{\rho}(\vec{\omega} \cdot \vec{\rho})] dm = \int_m [(\vec{\rho} \cdot \vec{\rho})\vec{\omega} + (\vec{\rho}\vec{\rho}) \cdot \vec{\omega}] dm \\ &= \int_m [(\vec{\rho} \cdot \vec{\rho})\hat{1} \cdot \vec{\omega} + (\vec{\rho}\vec{\rho}) \cdot \vec{\omega}] dm = \\ &= \int_m (\rho^2 \hat{1} - \vec{\rho}\vec{\rho}) dm \cdot \vec{\omega} = \hat{f} \cdot \vec{\omega} \end{aligned} \quad (4.119b)$$

onde: $\hat{1} \cdot \vec{\omega} = \vec{\omega}$; $\hat{1} \equiv$ diádica unitária

$$\hat{f} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}, \quad \hat{f} \equiv \text{matriz de inércia do corpo rígido} \quad (4.120)$$

sendo

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \int_m (\rho_y^2 + \rho_z^2) dm \\ J_{yy} &= \int_m (\rho_x^2 + \rho_z^2) dm \\ J_{zz} &= \int_m (\rho_x^2 + \rho_y^2) dm \\ J_{xy} &= J_{yx} = - \int_m \rho_x \rho_y dm \\ J_{xz} &= J_{zx} = - \int_m \rho_x \rho_z dm \\ J_{yz} &= J_{zy} = - \int_m \rho_y \rho_z dm \end{aligned} \quad (4.121)$$

Portanto

$$\begin{aligned} H_x &= J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z \\ H_y &= J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z \\ H_z &= J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = \hat{J} \cdot \vec{\omega} \quad (4.122)$$

4.1.2.2.1 Equações de Euler para a quantidade de movimento angular

Considerando a equação 4.115

$$\vec{M} = \dot{\vec{H}}$$

onde: $\vec{M}$ é momento externo agindo sobre o corpo em torno do seu centro de massa.

$\dot{\vec{H}}$ é quantidade de movimento angular do corpo rígido

A equação do movimento rotacional de um corpo rígido em torno do seu centro de massa, considerando as equações descritas no sistema de eixos principais de inércia do corpo, podem ser escritas na forma:

$$\vec{M} = \left\{ \frac{d\vec{H}}{dt} \right\}_B + \vec{\omega} \times \vec{H} = \left\{ \frac{d(\hat{J} \cdot \vec{\omega})}{dt} \right\}_B + \vec{\omega} \times (\hat{J} \cdot \vec{\omega}) = \hat{J} \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (\hat{J} \cdot \vec{\omega}) \quad (4.123)$$

Portanto as equações de Euler para o movimento rotacional são

$$M_x = J_x \dot{\omega}_x - (J_y - J_z) \omega_y \omega_z \quad (4.124a)$$

$$M_y = J_y \dot{\omega}_y - (J_z - J_x) \omega_z \omega_x \quad (4.124b)$$

$$M_z = J_z \dot{\omega}_z - (J_x - J_y) \omega_x \omega_y \quad (4.124c)$$

onde: $M_i = \vec{M} \cdot \vec{b}_i$, $\vec{b}_i \equiv$ base de vetores fixado no corpo rígido

$$\omega_i = \vec{\omega} \cdot \vec{b}_i \quad \text{e}$$

J_x, J_y e J_z são os momentos principais de inércia

As equações 4.124 podem ser escritas para simulação como se segue

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x &= \frac{(J_y - J_z)}{J_x} \omega_y \omega_z + \frac{M_x}{J_x} \\ \dot{\omega}_y &= \frac{(J_z - J_x)}{J_y} \omega_z \omega_x + \frac{M_y}{J_y} \\ \dot{\omega}_z &= \frac{(J_x - J_y)}{J_z} \omega_x \omega_y + \frac{M_z}{J_z}\end{aligned}\quad (4.125)$$

As três equações diferenciais ordinárias não lineares estão acopladas nas variáveis de estado ω_x , ω_y e ω_z de um corpo rígido.

Considerando o movimento de ambas as espaçonaves, descritas no sistema inercial na forma matricial, tem-se para o perseguidor (chaser) :

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_{x_c} &= \frac{(J_{y_c} - J_{z_c})}{J_{x_c}} \omega_{y_c} \omega_{z_c} + \frac{M_{x_c}}{J_{x_c}} + \frac{u_{x_c}}{J_{x_c}} \\ \dot{\omega}_{y_c} &= \frac{(J_{z_c} - J_{x_c})}{J_{y_c}} \omega_{z_c} \omega_{x_c} + \frac{M_{y_c}}{J_{y_c}} + \frac{u_{y_c}}{J_{y_c}} \\ \dot{\omega}_{z_c} &= \frac{(J_{x_c} - J_{y_c})}{J_{z_c}} \omega_{x_c} \omega_{y_c} + \frac{M_{z_c}}{J_{z_c}} + \frac{u_{z_c}}{J_{z_c}}\end{aligned}\quad (4.125a)$$

e para a espaçonave alvo (target) o sistema de equações abaixo:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_{x_t} &= \frac{(J_{y_t} - J_{z_t})}{J_{x_t}} \omega_{y_t} \omega_{z_t} + \frac{M_{x_t}}{J_{x_t}} \\ \dot{\omega}_{y_t} &= \frac{(J_{z_t} - J_{x_t})}{J_{y_t}} \omega_{z_t} \omega_{x_t} + \frac{M_{y_t}}{J_{y_t}} \\ \dot{\omega}_{z_t} &= \frac{(J_{x_t} - J_{y_t})}{J_{z_t}} \omega_{x_t} \omega_{y_t} + \frac{M_{z_t}}{J_{z_t}}\end{aligned}\quad (4.125b)$$

Com as equações deduzidas pode-se observar que o movimento translacional é linear e que o movimento rotacional é não-linear. No caso do movimento rotacional a aceleração angular não pode ser considerada desprezível devido a instabilidade natural do alvo que pode rolar ou girar. Note que J no modelo de atitude representa o momento de inércia da espaçonave alvo. Então, assumindo que o movimento de atitude absoluta do perseguidor é estável e que $q_c = (1,0,0,0)^T$, a relação entre o movimento de atitude absoluto do alvo q_t e a atitude relativa observada q_r é dada por (ARANTES JR., 2011).

$$q_t = q_r^{-1} = q_r^* \quad (4.126)$$

O próximo passo no estudo das Equações de Euler que descrevem o movimento de atitude de um corpo rígido é considerar os diferentes tipos de torques que atuam no corpo.

4.1.2.2.2 Torques que atuam nas espaçonaves

Os torques M que aparecem na equação 4.109 podem ser oriundos do ambiente espacial (torques externos), tais como, torques devido ao gradiente de gravidade, campo magnético terrestre, radiação solar, aerodinâmico e torques de controle produzidos por atuadores, tais como, jatos de gás, bobinas magnéticas, rodas de reação, ou pelo movimento da tripulação. Os torques externos atuando sobre as espaçonaves são pequenos, eles podem ser insignificantes, mas dependendo da precisão requerida para atitude, os torques perturbadores podem se tornar importantes.

4.1.2.2.2.1 Torque devido ao gradiente de gravidade

O torque devido ao gradiente de gravidade é fundamental para a dinâmica da atitude de espaçonave, quando ela está em órbita baixa em relação a Terra. Se o campo gravitacional fosse uniforme ao longo de um corpo material, então o centro de massa se tornaria o centro de gravidade, e o torque gravitacional sobre o centro de massa seria zero. No entanto, no espaço, o campo gravitacional não é uniforme, e as conseqüentes variações na força gravitacional específica (tanto em grandeza e direção) ao longo de um corpo material produz, em geral, um binário gravitacional sobre o centro de massa do corpo. Esse efeito foi considerado pela primeira vez, no contexto da mecânica celeste, por d'Alembert e Euler (1749), e Lagrange usou em 1780 para explicar por que a Lua tem sempre a mesma face voltada para a Terra. No início da era espacial, evidenciou-se a importância de torques gravitacionais nas órbitas dos satélites (HUGHES, 2004).

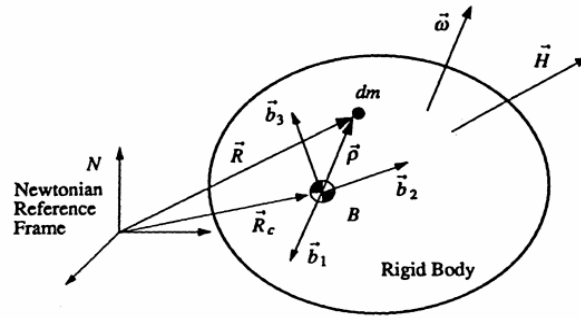


Figura 4.5 Movimento relativo do corpo rígido no referencial fixo no corpo, cuja origem está no centro de massa.

Fonte: BONG WIE (1998)

Assumindo um corpo rígido em órbita, e um elemento de massa dm deste corpo, sujeito a lei de gravitação universal de Newton

$$d\vec{f} = -\frac{GM}{R^2} dm \quad (4.127)$$

onde: $\vec{f} \rightarrow$ força gravitacional total

$G \rightarrow$ constante universal da gravitação ($G = 6,672 \times 10^{-11} N \cdot m^2 / kg^2$)

$M_{\oplus} \rightarrow$ massa da Terra ($M = 5,97 \times 10^{24} kg$)

$R \rightarrow$ vetor posição do elemento de massa dm em relação ao referencial inercial N

$R_{\oplus} \rightarrow$ raio vetor da Terra (6378 Km)

$R_c \rightarrow$ vetor posição do c.m. da espaçonave em relação ao c.m. da Terra

Seja o gradiente de gravidade $\vec{g}_g$ dado por:

$$\vec{g}_g = \int_m \vec{r} \times d\vec{f} = -GM \int_m \frac{\vec{\rho} \times \vec{R}}{R^3} dm = -GM \int_m \frac{\vec{\rho} \times (\vec{R}_c + \vec{\rho})}{R^3} dm \quad (4.128)$$

como $\rho \ll R_c$, expandindo em série de Taylor

$$R^{-3} = R_c^{-3} \left[1 - 3 \frac{(\vec{\rho} \cdot \vec{R}_c)}{R_c^2} + \mathcal{O} \left(\frac{\rho^2}{R_c^2} \right) \right] \quad \text{onde: } \mathcal{O} \left(\frac{\rho^2}{R_c^2} \right) \approx 0 \quad (4.129)$$

Substituindo 4.129 em 4.128 obtém-se

$$\vec{g}_g = -GM \frac{3}{R_c^5} \vec{R}_c \times \int_m \vec{\rho} \vec{\rho} dm \vec{R}_c \quad (4.130)$$

como: $\int_m \vec{\rho} dm = \vec{0}$

$$\mathbf{I} = \int_m (\rho^2 \mathbb{1} - \vec{\rho} \vec{\rho}) dm \quad (4.131)$$

onde: $\mathbf{I} \rightarrow$ matriz dos momentos de inércia

$\mathbb{1} \rightarrow$ matriz identidade

então:

$$\vec{g}_g = -GM \frac{3}{R_c^3} \hat{\mathbf{o}}_z \times \mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{o}}_z \quad (4.132)$$

onde: $\hat{\mathbf{o}}_z \triangleq \frac{\vec{R}_c}{R_c}$ vetor unitário na direção do satélite ao centro da Terra.

Considerando órbita circular

$$\vec{R}_c = \text{constante}$$

Então:

$$\frac{3GM}{R_c^3} \cong 3n^2$$

onde: $n \equiv$ velocidade angular orbital (0.0011 rad/s)

Portanto,

$$\vec{g}_g = 3n^2 \hat{\mathbf{o}}_z \times \mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{o}}_z = 3n^2 \hat{\mathbf{o}}_z^x \mathbf{I} \hat{\mathbf{o}}_z \quad (4.133)$$

Seja o referencial orbital F_o dado por

$$F_o = [\hat{o}_x \quad \hat{o}_y \quad \hat{o}_z] = [0 \quad -n \quad 0] \quad \text{vetor velocidade angular da espaçonave}$$

onde: $\hat{o}_x \rightarrow$ direção da velocidade da espaçonave

$\hat{o}_y \rightarrow$ direção normal a órbita

$\hat{o}_z \rightarrow$ direção Nadir, da espaçonave ao centro da Terra

e seja F_B o referencial do corpo rígido.

Admitindo-se que os dois referenciais F_o e F_B não estejam totalmente alinhados, de tal maneira que os ângulos envolvidos são pequenos, de modo que:

$$\text{sen } \theta \approx \theta \quad \text{e} \quad \cos \theta \approx 1 \quad (4.134)$$

Como a matriz de transformação R_{Bo} entre F_B e F_o na sequência 1-2-3 é

$$R_{Bo} = R_z(\theta_z)R_y(\theta_y)R_x(\theta_x) =$$

$$= \begin{bmatrix} c(\theta_z)c(\theta_y) & c(\theta_z)s(\theta_y)s(\theta_x) + s(\theta_z)c(\theta_x) & -c(\theta_z)s(\theta_y)c(\theta_x) + s(\theta_z)s(\theta_x) \\ -s(\theta_z)c(\theta_y) & -s(\theta_z)s(\theta_y)s(\theta_x) + c(\theta_z)c(\theta_x) & s(\theta_z)s(\theta_y)c(\theta_x) + c(\theta_z)s(\theta_x) \\ s(\theta_y) & -c(\theta_y)s(\theta_x) & c(\theta_y)c(\theta_x) \end{bmatrix}$$

então, considerando 4.134 em R_{Bo} tem-se que

$$R_{Bo} \cong 1 - \theta^x ; \quad \theta = [\theta_x \quad \theta_y \quad \theta_z]^T \quad (4.135)$$

de forma que

$$\hat{\theta}_3 = [-\theta_y \quad \theta_x \quad 1]^T \quad (4.136)$$

substituindo 4.136 em 4.133 tem-se que

$$\vec{g}_g = 3n^2 \hat{o}_z^x I \hat{o}_z = 3n^2 \begin{bmatrix} (I_y - I_x)\theta_x \\ (I_z - I_y)\theta_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.137)$$

Com as equações deduzidas em 4.137 é possível avaliar a influência do torque devido ao gradiente de gravidade, segundo (HUGHES, 2004).

(LARSON&WERTZ, 1992) resumizam os torques ambientais perturbadores, com exemplos de aplicação em um satélite hipotético. Os autores discutem e apresentam a predominância dos torques perturbadores de acordo com as características dos veículos espaciais e suas órbitas.

4.2 Lei de Controle – Regulador Linear Quadrático (LQR)

4.2.1 Introdução

A teoria do controle ótimo e, em particular, a do regulador linear quadrático, supõe a adoção de um índice de desempenho através do qual é possível otimizar grandezas físicas. A separação das condições de contorno e a sofisticação dos índices de desempenho (exprimida como, por exemplo, a minimização de tempo, combustível e energia) contribuem para o aparecimento de dificuldades maiores na determinação da solução do problema, principalmente na forma analítica. Entretanto, em determinados casos, tal solução pode ser obtida e possui a vantagem de poder ser expressa em função do estado. Para explicar sua extensão apresenta-se, a seguir, um resumo da teoria sobre o Regulador Linear Quadrático.

4.2.2 Teoria sobre o LQR

Considerando-se o problema do regulador quadrático ótimo que, dada a equação do sistema: (Ogata, 2003):

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu \quad (4.138)$$

permite determinar a matriz K do vetor de controle ótimo

$$u(t) = -Kx(t)$$

para minimizar o índice de desempenho

$$J = \int_0^{\infty} [x^T Q x + u^T R u] dt \quad (4.139)$$

onde: Q é uma matriz hermitiana definida positiva (ou semidefinida positiva) ou real simétrica. R é uma matriz hermitiana definida positiva ou real simétrica. As matrizes Q e R determinam a importância relativa, do erro e o consumo dessa energia.

Prova-se que a lei de controle que satisfaz a equação 4.138 e minimiza a equação 4.139 é dada por:

$$u = -R^{-1}B^T P x \quad (4.140)$$

onde P é encontrada ao resolver a Equação de Riccati

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (4.141)$$

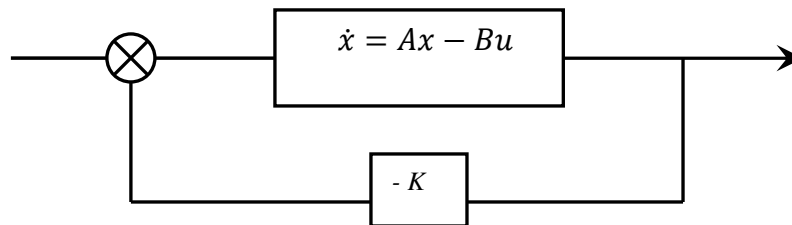


Figura 4.6 Fluxograma do Regulador Linear Quadrático

É conhecido que, por excelência, a Natureza não é linear. Portanto o seu estudo por meio de um modelo linear pode conduzir a uma solução que é apenas uma primeira aproximação da solução real do problema. Logo, à medida que se deseja representar um fenômeno, ou um sistema de forma mais real, o modelo utilizado deve (sempre que necessário e possível) incluir os termos não-lineares envolvidos.

Para os casos que foram estudados nesta tese, as espaçonaves já se encontravam na fase da aproximação final, que é uma trajetória relativa praticamente linear e os ângulos envolvidos são muito pequenos, fato que justificou a utilização do Regulador Linear Quadrático na solução do problema.

5 ESTUDO DO CASO PARA A SOLUÇÃO HOMOGÊNEA: SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS EQUAÇÕES DE CLOHESSY-WILTSHIRE (GENTINA, 2010)

As equações (4.26) de Clohessy-Wiltshire, deduzidas a partir das equações de Hill, têm solução analítica supondo um sistema de equações homogêneo. (CLOHESSY E WILTSHIRE, 1960; KUGA et al., 2005).

Nas equações 4.26 de Clohessy-Wiltshire pode-se observar que os movimentos em x e z estão acoplados, e o movimento em y é desacoplado dos demais. Isso significa que o deslocamento do perseguidor em y ocorre em um plano inclinado que se situa fora do plano xz , plano este onde se encontra o alvo. Dessa forma, sob o sistema de coordenada do alvo, o perseguidor aparenta descrever um movimento harmônico simples na direção y . A solução para esse tipo de equação diferencial é bem conhecida na literatura CLIFF (1998) e se apresenta sob a forma:

$$y(t) = y_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad (5.1)$$

As duas outras equações devem ser analisadas como um sistema acoplado, e este é um dos casos em que a equação característica possui raízes repetidas. (CLIFF, 1998) aponta uma das soluções como sendo:

$$x(t) = x_0 + 6z_0[\omega t - \sin(\omega t)] + \frac{\dot{x}_0}{\omega}[4\sin(\omega t) - 3\omega t] + \frac{2\dot{z}_0}{\omega}[1 - \cos(\omega t)] \quad (5.2)$$

$$z(t) = z_0[4 - 3\cos(\omega t)] + \frac{\dot{z}_0}{\omega}\sin(\omega t) - \frac{2\dot{x}_0}{\omega}[1 - \cos(\omega t)] \quad (5.3)$$

onde: " $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ " são as coordenadas das distâncias e das velocidades iniciais do perseguidor no sistema de referência do alvo.

5.1 Definição da estratégia de controle

Objetivo principal da modelagem do problema do encontro, dentro dessa abordagem, é encontrar as velocidades iniciais $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ do perseguidor e um tempo t apropriadamente escolhido, de tal maneira que, possa ocorrer um encontro com o alvo nas coordenadas ($x = y = z = 0$). Nos instantes finais, são aplicados incrementos de velocidade, a fim de reduzir a velocidade relativa do perseguidor em relação ao alvo.

Ignorando o movimento em y , por enquanto, as equações para determinação das velocidades iniciais são: CLOHESSY WILTSHIRE (1960)

$$\frac{\dot{x}_0}{\omega} = \frac{x_0 \sin(\omega t) + z_0 [6\omega t \sin(\omega t) - 14(1 - \cos(\omega t))]}{3\omega t \sin(\omega t) - 8[1 - \cos(\omega t)]} \quad (5.4)$$

$$\frac{\dot{z}_0}{\omega} = \frac{2x_0 [1 - \cos(\omega t)] + z_0 [4 \sin(\omega t) - 3\omega t \cos(\omega t)]}{3\omega t \sin(\omega t) - 8[1 - \cos(\omega t)]} \quad (5.5)$$

O valor de t é selecionado de forma que, com uma correção razoavelmente pequena em $\dot{y}_0$ (eq. 5.1), y atinja 0 em um tempo menor que t , assim o movimento pode ser estabilizado nessa direção impulsivamente. Outro vínculo para a escolha de t é que a velocidade de aproximação atinja uma média aproximada de 30 m/s. Na escolha de t , uma escolha adicional deve ser levada em conta: o propelente a ser utilizado para o incremento de velocidade total, necessário para efetuar as manobras de correção e desaceleração, deve ser menor que o propelente a bordo. Caso essa condição não possa ser satisfeita, o computador rejeita o valor de t escolhido e seleciona um valor maior de t , que corresponda a uma velocidade de encontro menor, como por exemplo 25m/s, e assim sucessivamente, até que se atinja um valor de t que atenda a condição imposta pelo custo de propelente. Com isso se demonstra a necessidade de um planejamento de manobras a bordo do veículo perseguidor, antes que seja iniciada a sequência do encontro propriamente dita. Os valores

de $\dot{x}_0$ e $\dot{z}_0$ calculados são periodicamente checados com os valores de $\dot{x}$ e $\dot{z}$ CLOHESSY WILTSHIRE (1960).

Derivando-se as equações 5.2 e 5.3 em relação ao tempo, obtém-se: CLIFF (1998)

$$\dot{x}(t) = 6\omega[1 - \cos(\omega t)]z_0 + [4\cos(\omega t) - 3]\dot{x}_0 + 2\sin(\omega t)\dot{z}_0 \quad (5.6)$$

$$\dot{z}(t) = 3\omega \sin(\omega t)z_0 + \cos(\omega t)\dot{z}_0 - 2\sin(\omega t)\dot{x}_0 \quad (5.7)$$

Dessa forma, para se determinar a velocidade de encontro, basta calcular os componentes de velocidades iniciais da trajetória utilizando as equações 5.4 e 5.5 e substituí-las nas equações 5.6 e 5.7 acima.

5.2 Cálculo do incremento de velocidade total (ΔV)

Nesta abordagem está sendo considerada uma manobra de encontro que utiliza dois incrementos de velocidade: um para a injeção do perseguidor na órbita do alvo ΔV_1 e um outro para correção da velocidade de aproximação ΔV_2 . CLOHESSY;WILTSHIRE, 1960; SPARROW; PRICE, 1968).

O primeiro ΔV_1 é constituído pelo vetor diferença entre, a velocidade inicial necessária para atingir a vizinhança do alvo, e a velocidade inicial atual do perseguidor (SPARROW; PRICE, 1968). descreveram uma forma para calcular este incremento de velocidade. Inicialmente, as posições do alvo e do perseguidor são definidas no sistema inercial em coordenadas polares, bem como sua correspondência com o sistema de referência do alvo:

$$\begin{aligned} x &= R(\omega_a - \sigma_c) \\ \dot{x} &= \dot{R}(n - \dot{\sigma}_c) \\ \ddot{x} &= \ddot{R}(\ddot{\sigma}_c) \\ z &= r - R \\ \dot{z} &= \dot{r} \\ \ddot{z} &= \ddot{r} \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde: $\vec{R} \rightarrow$ é o raio vetor do alvo a partir do centro da Terra
 $\omega_a \rightarrow$ é o ângulo entre $\vec{R}$ e o vetor $\vec{X}$ inercial
 $n \rightarrow$ é a velocidade orbital (rd/s); para órbita circular $n = \text{constante}$
 $\sigma_c \rightarrow$ é o ângulo entre $\vec{r}$ e o vetor $\vec{X}$ inercial

Assim, pode-se definir a magnitude do primeiro incremento de velocidade em coordenadas polares

$$\Delta V_1^2 = [\Delta(r_i \dot{\sigma}_{c_i})]^2 + [\Delta(\dot{r}_i)]^2 \quad (5.9)$$

onde: r_i é o raio inicial do veículo perseguidor

σ_{c_i} é o ângulo entre $\vec{r}_i$ e o vetor $\vec{X}$ inercial

$\Delta(r_i \dot{\sigma}_{c_i})$ é a mudança da velocidade circunferencial do perseguidor

$\Delta(\dot{r}_i)$ é a mudança da velocidade radial do perseguidor

ou ainda:

$$\Delta(r_i \dot{\sigma}_{c_i}) = r_i (\dot{\sigma}_{c_i}^* - \dot{\sigma}_{c_i}) \quad (5.10a)$$

$$\Delta(\dot{r}_i) = \dot{r}_i^* - \dot{r}_i \quad (5.10b)$$

onde: $\dot{\sigma}_{c_i}^*$ é a velocidade angular de σ_{c_i} necessária para a manobra inicial

$\dot{\sigma}_{c_i}$ é a velocidade angular no tempo inicial atual do perseguidor

$\dot{r}_i^*$ é a velocidade radial no tempo de r_i necessária para a manobra inicial

$\dot{r}_i$ é a velocidade radial no tempo inicial atual do perseguidor

Substituindo as equações 5.8 em 5.10 obtém-se:

$$\begin{aligned} \Delta(r_i \dot{\sigma}_{c_i}) &= r_i \left[\left(n - \frac{\dot{x}_0^*}{R} \right) - \left(n - \frac{\dot{x}_0}{R} \right) \right] = -\frac{r_i}{R} (\dot{x}_0^* - \dot{x}_0) \\ \Delta(\dot{r}_i) &= \dot{z}_0^* - \dot{z}_0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

onde: $\dot{x}_0^*$ e $\dot{z}_0^*$ são obtidos pelas equações (5.4) e (5.5), respectivamente.

$\dot{x}_0$ e $\dot{z}_0$ são as velocidades iniciais atuais do perseguidor

Dessa forma a equação 5.9 do primeiro incremento de velocidade, substituindo os valores calculados em 5.11, pode ser escrito como sendo:

$$(\Delta V_1)^2 = \left[\left(1 + \frac{z_0}{R} \right) (\dot{x}_0^* - \dot{x}_0) \right]^2 + (\dot{z}_0^* - \dot{z}_0)^2 \quad (5.12)$$

Como a velocidade relativa entre o perseguidor e o alvo deve ser nula ao final do encontro, o segundo incremento de velocidade é simplesmente o vetor diferença entre a velocidade nula desejada e a velocidade de interceptação:

$$(\Delta V_2)^2 = [\dot{x}(t)]^2 + [\dot{z}(t)]^2 \quad (5.13)$$

onde: $\dot{x}(t)$ e $\dot{z}(t)$ são obtidos pelas equações 5.6 e 5.7, respectivamente.

Portanto, o incremento de velocidade total pode ser calculado através da soma das equações 5.12 e 5.13, ou seja,

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 \quad (5.14)$$

5.3 Análise do movimento no eixo y, fora do plano xz

De posse do tempo t calculado para a manobra inicial, é necessário calcular um tempo t^* tal que $t^* < t$, para que o movimento em y se anule. Reescrevendo a equação 5.1 em função de t^* , tem-se:

$$y(t^*) = \cos(nt^*)y_0 + \frac{\sin(nt^*)}{n}\dot{y}_0 \quad (5.15)$$

Igualando a equação 5.15 a zero, encontra-se o incremento de velocidade necessário para cessar o movimento em y .

$$\frac{\dot{y}_0}{\omega} = -\frac{y_0}{\tan(nt^*)} \quad (5.16)$$

Para anular as tendências de movimento sobre o eixo y é necessário também que o perseguidor atinja $y(t^*) = 0$ com velocidade nula. Derivando a equação 5.15 em relação ao tempo, chega-se a:

$$\dot{y}(t^*) = -\sin(nt)y_0 + \cos(nt)\dot{y}_0 \quad (5.17)$$

Dessa forma, para encontrar t^* basta substituir a equação 5.16 na equação 5.17 igualar a zero e resolver a equação resultante.

Sendo assim, a equação 5.12 deve receber mais um termo referente ao incremento de velocidade ΔV_1 necessário para anular o movimento inicial em y .

$$\Delta V_y = \sqrt{(\dot{y}_0^* - \dot{y}_0)^2} \quad (5.18)$$

onde: $\dot{y}_0^*$ é calculado pela equação 5.16

$\dot{y}_0$ é a componente em y da velocidade inicial atual do perseguidor

O deslocamento máximo do perseguidor Y_{max} na direção y é dado por CLOHESSY WILTSHIRE (1960):

$$Y_{max} = \sqrt{(y_0)^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega}\right)^2} \quad (5.19)$$

Este valor deverá estar dentro dos parâmetros para que não haja tendências residuais ou oscilações em (y) . CLOHESSY WILTSHIRE (1960) definem este parâmetro como uma diferença máxima de 2° (dois graus) entre os planos orbitais do perseguidor e do alvo.

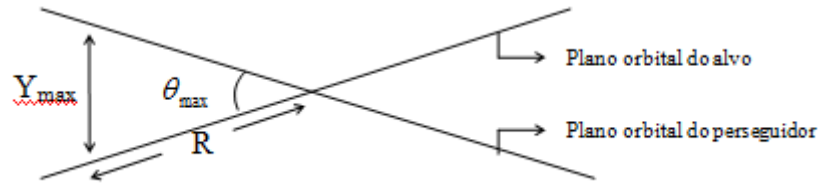


Figura 5.1 Inclinação entre os planos orbitais do perseguidor e do alvo na direção do eixo y .

Fonte: CLOHESSY WILTSHIRE (1960)

A figura 5.1 ilustra os parâmetros envolvidos no deslocamento na direção y entre os dois planos orbitais. Para se fazer a conversão entre o deslocamento linear dado pela equação 5.19 para o deslocamento angular, utiliza-se a equação 5.20 abaixo:

$$\theta_{\max} = \frac{Y_{\max}}{R} \quad (5.20)$$

5.4 Método de cálculo do tempo de voo do perseguidor até o alvo

Nesta seção será explicado um método para se poder encontrar o parâmetro tempo t , descrito nas seções anteriores. Este parâmetro consiste no tempo de voo do perseguidor até o momento em que este intercepta o alvo.

Este método funciona da seguinte forma: dada uma função F em que $y = F(t)$, deve-se encontrar valores de t que satisfaçam um determinado valor de resultado y . Os algoritmos existentes tipicamente atribuem valores para t , avaliam F para encontrar y e vão ajustando t iterativamente até y convergir para o valor desejado.

Existem diversos algoritmos para solucionar este tipo de problema. Um deles é o algoritmo denominado Corretor Diferencial (Analytical Graphics, INC. (AGI), 2009). O Corretor Diferencial (CD) funciona da seguinte forma: dado um conjunto específico de resultados desejados, as condições iniciais e variáveis

intermediárias dos controles são perturbadas para satisfazer estes resultados. Este é um mecanismo bastante robusto utilizado pelo STK/Astrogator para lidar com condições de igualdade. O CD trabalha expressando o problema alvo em termos de uma expressão em pseudo-séries de Taylor dos resultados G em função das variáveis v . O problema em questão pode ser representado pela expressão:

$$G_1(v_1) = \vec{G}(\vec{r}, \vec{v}, t) = G_0 + \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n G}{dv^n} \Big|_{v=v_0} (v_1 - v_0)^n \right] \quad (5.21)$$

onde o termo entre colchetes é a expressão em série de Taylor dos resultados $G(v)$ expandidos em termos de v .

Como não existe uma expressão analítica para a solução de G , uma abordagem alternativa é truncar a expansão em Série de Taylor em um ponto conveniente e avaliar numericamente a equação resultante. Dessa, forma, truncando a equação 5.21 no primeiro derivativo, resta a seguinte equação:

$$G_1(v_1) \cong G_0 + \frac{dG}{dv}(v_1 - v_0) \quad (5.22)$$

A equação 5.22 pode ser re-arranjada para:

$$G'_1 = \frac{dG}{dv} = \frac{G_1 - G_0}{v_1 - v_0} \Rightarrow v_1 \approx v_0 + \frac{G_1 - G_0}{G'_1} \quad (5.23)$$

Para encontrar esta aproximação, é necessário perturbar cada variável em certa quantidade Δv e medir a alteração resultante sobre cada objetivo G .

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$G'_1 = \frac{dG}{dv} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{G(v + \Delta v) - G(v)}{\Delta v} \quad (5.24)$$

Em suma, dado um valor inicial de v , o Corretor Diferencial perturba e o utiliza na equação 5.24 para determinar G'_1 . Depois, G'_1 é utilizado na equação 5.23 para determinar uma nova estimativa da variável v . Este processo é repetido iterativamente até que o valor de $G_1(v_1)$ caia dentro da tolerância de G definida pelo usuário.

5.5 Cálculo do consumo de combustível

Utilizando um modelo de motor com empuxo e impulso específicos constantes, a velocidade de exaustão dos gases que saem desse motor pode ser calculada pela equação abaixo (CORNELISSE, 1979)

$$V_e = Isp \cdot g \quad (5.25)$$

onde: Isp é impulso específico (impulso/unidade de propelente) em segundos

g é a aceleração da gravidade na superfície da Terra

Utilizando a Equação do Foguete 5.26:

$$\Delta V = V_e \ln \left(\frac{m_i}{m_f} \right) \quad (5.26)$$

onde: m_i é a massa inicial total do veículo (incluindo o propelente)

m_f é a massa final do veículo

A equação 5.26 é equivalente a:

$$\frac{m_i}{m_f} = e^{\Delta V/V_e} \quad (5.27)$$

Dado que

$$m_f = m_i - \Delta m \quad (5.28)$$

e resolvendo para Δm , chega-se à expressão da variação de massa do veículo:

$$\Delta m = m_i (1 - e^{-\Delta V/V_e}) \quad (5.29)$$

Dessa forma, dado um valor constante de I_{sp} , proveniente das características de projeto do veículo, e conhecendo sua massa inicial, basta utilizar a equação 5.29 para saber o combustível necessário para executar uma determinada manobra ΔV (SUTTON BIBLARZ, 2001).

Com base nas equações acima, pode-se também determinar ainda a taxa de variação de massa do motor, através da equação:

$$\dot{m} = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{T}{V_e} \quad (5.30)$$

onde: Δm é calculado pela equação 5.29

T é o empuxo constante do propulsor

V_e é a velocidade de exaustão dos gases dada pela equação 5.25

Além disso, a partir da equação 5.30, pode-se ainda calcular o tempo de abertura da válvula do propulsor para a manobra da equação 5.29, ou seja:

$$\Delta t = \frac{\Delta m}{\dot{m}} \quad (5.31)$$

6 ESTUDO DE CASOS PARA SOLUÇÕES NÃO HOMOGÊNEAS

Neste capítulo está inserida a contribuição original desta dissertação. Foram modelados e simulados, via computador, dois diferentes casos considerando controle ativo. No primeiro caso estudou-se o movimento translacional-rotacional relativo entre a nave perseguidora e a nave alvo, na configuração de corpo rígido. No segundo caso foi simulada a operação de captura, a partir da configuração de aproximação de proximidade e atitude sincronizada realizada no primeiro caso. Neste segundo caso foram simulados dois modelos matemáticos de uma mesma nave robótica, um considerando o movimento de abertura sincronizada dos elos do manipulador, porém em direções reversas e, o outro, considerando abertura não sincronizada. O objetivo deste segundo caso foi comparar o esforço de controle das duas configurações, sincronizada e não sincronizada, para manter o sistema estável durante as operações do manipulador robótico. Outro objetivo foi analisar a estabilidade da espaçonave robótica em atitude, durante uma operação de atracação entre as naves perseguidora e alvo. Este estudo representa a maior contribuição desta tese.

6.1 Estudo de caso 1: ancoragem autônoma utilizando a Plataforma Orbital SARA

Ancoragem, como definida nesta tese, se refere à configuração em que as duas espaçonaves em processo de encontro, estão estacionadas com velocidade relativa zero. Nesta configuração as duas naves permanecem estacionadas a uma certa distância relativa, enquanto se deslocam na mesma órbita. O estacionamento se dá a uma distância, tal que a aproximação de proximidade, atenda requisitos de segurança para evitar colisão e respeite o espaço de operação do manipulador robótico (para os casos de atracação), bem como, este estacionamento coloque ambas as naves na configuração de início do acoplamento ou da atracação.

Para a análise dinâmica dessa configuração de ancoragem, foram utilizadas as equações 4.26 de Hill-Clohessy-Wiltshire para o movimento translacional e, as equações 4.108 da cinemática combinadas com as equações 4.125 da

quantidade de movimento angular (Equações de Euler). As equações 4.108 foram escritas em termos do quaternio em função da velocidade angular relativa.

6.1.1 Introdução

O SARA (Satélite de Reentrada Atmosférica) é um satélite suborbital que deve evoluir para se tornar uma plataforma orbital. Na fase suborbital deve levar experimentos para serem realizados em ambiente de microgravidade durante a reentrada. Na configuração de plataforma orbital o SARA continuará sua missão científica com experimentos em órbita, podendo receber uma nave visitante para recolher e receber novos experimentos. A plataforma orbital deverá operar em órbita baixa da Terra, a 300 km de altitude.

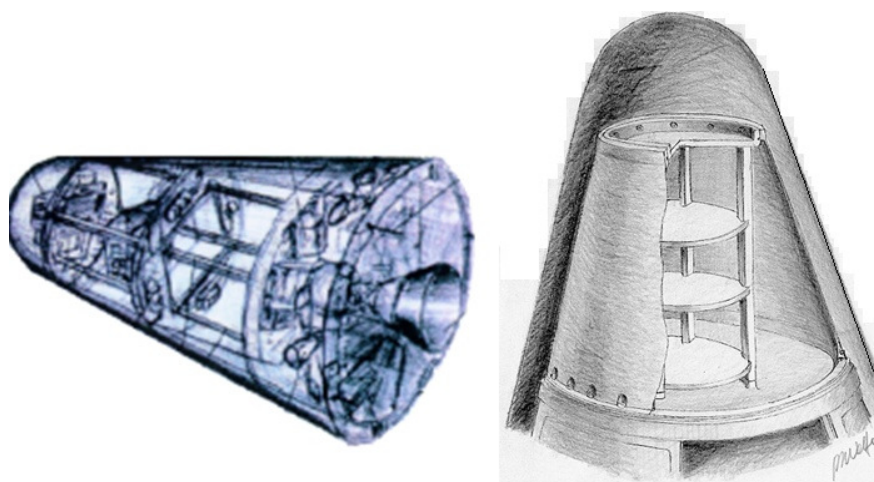


Figura 6.1 Plataforma Orbital Recuperável SARA.

Fonte: ODILON (2008)

Na configuração atual o Sara Suborbital pesa 350 Kg, e será lançado por um veículo de sondagem VS-40 modificado, a partir do Centro de Lançamento de Alcântara, CLA, no estado do Maranhão, com a finalidade de realizar experimentos de microgravidade de curta duração (o tempo de microgravidade é cerca de 8 min). Atualmente, não temos nenhum laboratório terrestre capaz de obter esse tempo de microgravidade. O primeiro lançamento suborbital está previsto para outubro de 2015. (POSL-SARA, 2015).

Um dos objetivos do SARA suborbital, além dos experimentos de microgravidade, é validar seus subsistemas em voo. O Sara Suborbital é uma nave recuperável. Leva um sistema de paraquedas para descer no mar, de onde será recuperada.

A ideia de transformar o SARA em uma miniestação orbital foi considerada durante a fase concepção do projeto, pelo seu idealizador Dr. Paulo Moraes, em conjunto com o orientador deste trabalho, na década passada. A idéia era deixar o SARA em órbita por mais tempo e utilizar uma nave visitante que se acoplaria ao SARA, trocava os experimentos científicos (experimentos realizados por novos experimentos) e retornaria a Terra. Esta concepção foi então incluída no projeto desta tese. Posteriormente o projeto da tese sofreu alterações, mas manteve-se o problema de RVD/B para o SARA como um estudo de caso. A figura 6.2 ilustra a ideia o lançamento de uma nave visitante e seu retorno a Terra com experimentos realizados, após a operação de RVD/Berthing com o SARA orbital.

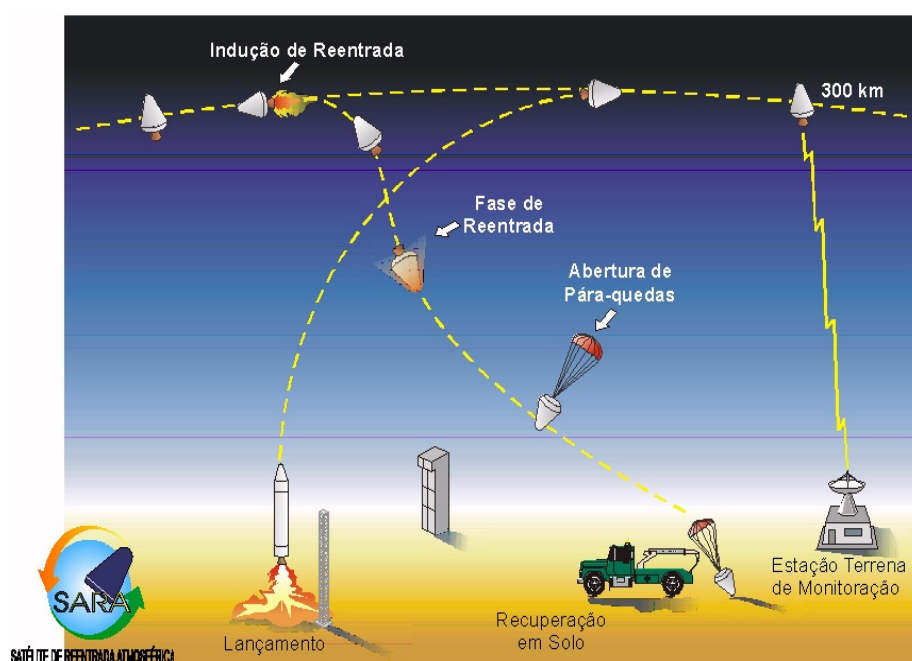


Figura 6.2 Concepção artística do ciclo de lançamento e retorno a Terra de uma nave visitante à plataforma SARA.

Fonte: AMERY (2009)

6.1.2 Modelagem matemática

Os modelos matemáticos, objeto do primeiro estudo de caso, compõem-se dos modelos do movimento translacional e do movimento rotacional.

6.1.2.1 Equações da dinâmica de translação para o movimento relativo

O modelo matemático para a simulação da dinâmica do movimento translacional relativo foi deduzida no capítulo 4 e é reescrita aqui para efeitos didáticos. Trata-se das equações de Hill-Clohessy-Wiltshire, adequadas para realizar o estudo da fase aproximação final (*short range*). A equação 4.26 foi modificada para a inclusão das forças de controle u e é mostrada a seguir. Este é o conjunto de equações do movimento translacional relativo objeto da simulação computacional do primeiro caso.

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= +2n\dot{z} + u_x \\ \ddot{y} &= -n^2y + u_y \\ \ddot{z} &= -2n\dot{x} + 3n^2z + u_z\end{aligned}$$

6.1.2.2 Equações da cinemática de rotação relativa

A análise dinâmica das operações de RVD/B requer as equações do movimento relativo entre as duas naves. As equações do movimento relativo estão escritas no referencial fixo no centro de massa da nave alvo. As equações 4.108 da cinemática relativa, deduzida no capítulo 4, é reproduzida aqui para efeitos didáticos. Observe que a atitude relativa está descrita em quatérnio, a fim de evitar singularidades ocasionadas para determinados valores dos ângulos de Euler.

$$\begin{aligned}\dot{q}_0 &= \frac{1}{2}(-\omega_x q_1 - \omega_y q_2 - \omega_z q_3) \\ \dot{q}_1 &= \frac{1}{2}(+\omega_x q_0 + \omega_z q_2 - \omega_y q_3) \\ \dot{q}_2 &= \frac{1}{2}(+\omega_y q_0 - \omega_z q_1 + \omega_x q_3) \\ \dot{q}_3 &= \frac{1}{2}(+\omega_z q_0 + \omega_y q_1 - \omega_x q_2)\end{aligned}$$

6.1.2.3 Equações da dinâmica de rotação relativa

O conjunto de equações para a atitude relativa, equações 4.125 de Euler para o movimento rotacional, também foi deduzida no capítulo 4 e é reproduzida a seguir

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x &= \frac{(J_y - J_z)}{J_x} \omega_y \omega_z + \frac{M_x}{J_x} \\ \dot{\omega}_y &= \frac{(J_z - J_x)}{J_y} \omega_z \omega_x + \frac{M_y}{J_y} \\ \dot{\omega}_z &= \frac{(J_x - J_y)}{J_z} \omega_x \omega_y + \frac{M_z}{J_z}\end{aligned}$$

As três equações diferenciais ordinárias não lineares estão acopladas nas variáveis de estado ω_x , ω_y e ω_z de um corpo rígido.

Para o estudo deste caso, não foi considerado a ação do torque relativo à gravidade em ambas espaçonaves, entretanto o torque de controle foi considerado para a espaçonave perseguidora.

6.1.2.4 Modelagem do sistema

Para se estudar o movimento relativo das espaçonaves, é necessário a cada instante de tempo, estimar o estado, as posições e as velocidades dos veículos para serem incorporados no sistema dinâmico, que realimentado gera novos parâmetros atualizados. Na modelagem do sistema desta tese, foi incluído o modelo linear de Hill-Clohessy-Wiltshire para o movimento de translação relativa, bem como foram incluídas as equações de atitude relativa não-lineares para o movimento de rotação. Pode-se notar que as equações do movimento de translação e de rotação não estão acopladas durante a fase de aproximação final. Levando em conta que, para as equações deduzidas considerou-se que:

1. não existem forças/torques atuando sobre a espaçonave alvo;
2. não se levou em conta que forças/torques externos, tais como, gradiente de gravidade, arrasto atmosférico, pressão solar, etc; e
3. a órbita da espaçonave alvo é circular.

concluiu-se que a espaçonave alvo realiza uma órbita estável.

Durante a operação de aproximação, os movimentos dinâmicos de translação e atitude estão desacoplados, como resultado, o modelo do sistema é dado por:

- Modelo da posição:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= +2n\dot{z} + u_x \\ \ddot{y} &= -n^2 y + u_y \\ \ddot{z} &= -2n\dot{x} + 3n^2 z + u_z\end{aligned}\quad (4.26)$$

Equações (4.26) podem ser escritas em termos de variáveis de estado:

$$\dot{\vec{S}}_{tra} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2n \\ 0 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3n^2 & -2n & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \quad (4.26a)$$

- Modelo de atitude (cinemática de rotação)

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{q}}_r = \frac{1}{2} \omega_r^x \vec{q}_r \quad (4.108)$$

$$\vec{q}_r = q_{c0} q_{t0} - \vec{q}_c \cdot \vec{q}_t + q_{c0} \cdot \vec{q}_t + q_{t0} \cdot \vec{q}_c + \vec{q}_c \times \vec{q}_t \quad (4.103)$$

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x &= \frac{(J_y - J_z)}{J_x} \omega_y \omega_z + \frac{M_x}{J_x} \\ \dot{\omega}_y &= \frac{(J_z - J_x)}{J_y} \omega_z \omega_x + \frac{M_y}{J_y} \\ \dot{\omega}_z &= \frac{(J_x - J_y)}{J_z} \omega_x \omega_y + \frac{M_z}{J_z}\end{aligned} \quad (4.125)$$

Equações do movimento relativo de rotação (Eqs. 4.108 e 4.125) em termos de variáveis de estado pode ser escrita como sendo:

$$\dot{\vec{S}}_{rot} = \vec{f}_{rot}(\vec{S}_{rot}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \omega_r^x \vec{q}_r \\ \dot{\omega}_r \end{bmatrix}$$

cujas Jacobianas são $\vec{F}_{rot} = \frac{\partial \vec{f}_{rot}}{\partial \vec{s}_{rot}}$

$$\vec{F}_{rot} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5\omega_x & -0.5\omega_y & -0.5\omega_z & -0.5q_2 & -0.5q_3 & -0.5q_0 \\ 0.5\omega_x & 0 & -0.5\omega_z & +0.5\omega_y & +0.5q_1 & +0.5q_0 & -0.5q_3 \\ 0.5\omega_y & +0.5\omega_z & 0 & -0.5\omega_x & -0.5q_0 & +0.5q_1 & +0.5q_2 \\ 0.5\omega_z & -0.5\omega_y & +0.5\omega_x & 0 & +0.5q_3 & -0.5q_2 & +0.5q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(\omega_z J_z - \omega_z J_y)/J_x & -(\omega_y J_z - \omega_y J_y)/J_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\omega_z J_x - \omega_z J_z)/J_y & 0 & -(\omega_x J_z - \omega_x J_z)/J_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(\omega_y J_y - \omega_y J_x)/J_z & -(\omega_y J_z - \omega_x J_x)/J_z & 0 \end{bmatrix}$$

onde J_x, J_y e J_z são os eixos principais de inércia da espaçonave alvo.

6.1.2.5 Lei de controle – Regulador Linear Quadrático (LQR)

A lei de controle a ser utilizado foi deduzida no capítulo 4, das equações 4.138 as equações 4.141., cujo objetivo é calcular o índice de desempenho através do qual é possível otimizar grandezas físicas, tais como, a minimização de tempo, combustível e energia.

6.1.2.6 Vetor de estado e condições iniciais

– Cálculo da trajetória do início da aproximação final até a posição de ancoragem (velocidade relativa nula).

a) Vetor de estado $\{X\}$:

$$\begin{aligned} \{X\} &= \{x \quad y \quad z \quad v_x \quad v_y \quad v_z \quad q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad \omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z\}^T = \\ &= \{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8 \quad x_9 \quad x_{10} \quad x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13}\}^T \end{aligned}$$

onde: $\omega = (\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z)$

$$v_x = \dot{x}$$

$$v_y = \dot{y}$$

$$v_z = \dot{z}$$

b) Condições iniciais da espaçonave perseguidora (chaser):

$$\vec{p}_0 = [10 \quad 0 \quad 0]^T m$$

$$\vec{v}_0 = [-0.7 \quad 0 \quad 0]^T m/s$$

$$\phi_0 = \frac{5\pi}{180} rad$$

$$\theta_0 = \frac{6\pi}{180} rad$$

$$\psi_0 = \frac{4\pi}{180} rad$$

$$\vec{\omega}_0 = [-5 \ 3 \ 3]^T \frac{\pi}{180} rad/s$$

c) Condições finais de referência (target)

$$\vec{p}_f = [1 \ 0 \ 0]^T m$$

$$\vec{v}_f = [0 \ 0 \ 0]^T m/s$$

$$\phi_f = \frac{10\pi}{180} rad$$

$$\theta_f = \frac{12\pi}{180} rad$$

$$\psi_f = 0 rad$$

$$\vec{\omega}_f = [0 \ 0 \ 0]^T \frac{\pi}{180} rad/s$$

d) Entradas para simulação

- Estado inicial $\{X_0\}$:

$$\{X_0\} = \{10 \ 0 \ 0 \ -0.7 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -5 \ 3 \ 3\}$$

- Matriz de Inércia $[J]$:

$$[J] = \begin{bmatrix} 28774895.3900496 & 0 & 0 \\ 0 & 298700083.916279 & 0 \\ 0 & 0 & 298705020.693672 \end{bmatrix}$$

- Matriz de penalização ao controle empregado $[R]$:

$$[R] = \begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

- Matriz de penalização ao estado obtido $[Q]$:

$$[Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

6.1.2.7 Simulações e resultados

As simulações computacionais da dinâmica do movimento relativo foram implementadas utilizando-se o pacote de software MatLab®. Para a integração das equações do movimento recorreu-se ao integrador que se utiliza do método de Runge-Kutta adaptativo de quarta ordem. Foi considerada a atitude da espaçonave alvo como a atitude de referência, ou seja, o sistema de controle busca manter a espaçonave perseguidora com a mesma atitude da atitude de referência. Para o cálculo de ganhos do controlador foi considerado o modelo de realimentação de estados. Os ganhos são calculados a partir da dinâmica linearizada do sistema. A partir da dinâmica linearizada calcula-se a matriz A e B, faz-se a análise de controlabilidade, cálculo do posto da matriz de controlabilidade, com a finalidade de determinar se o sistema é controlável, faz-se o cálculo dos ganhos por meio da função LQR, calculam-se os erros e os controles a partir do vetor de estados e das propriedades do sistema, e reinicia-se o ciclo, até obter os resultados abaixo:

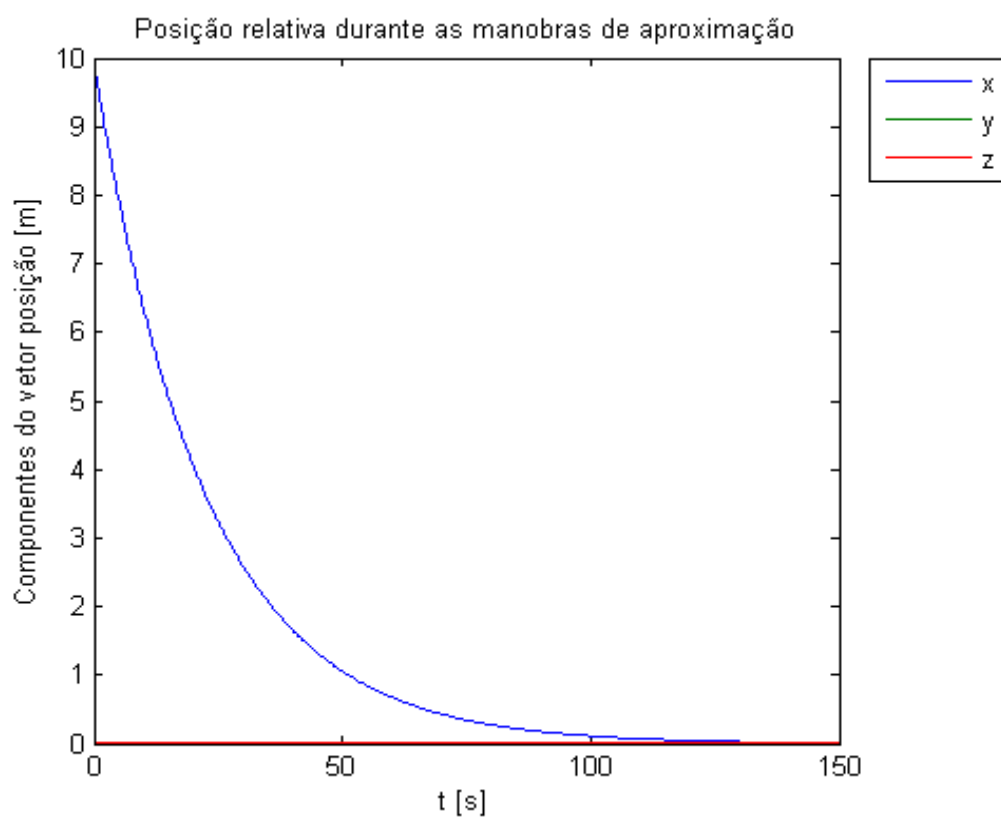


Figura 6.3 Posição relativa das naves em relação ao tempo

- posição inicial: +10m do alvo
- posição final: zero metro do alvo
- tempo de duração da manobra: $\approx 130s$

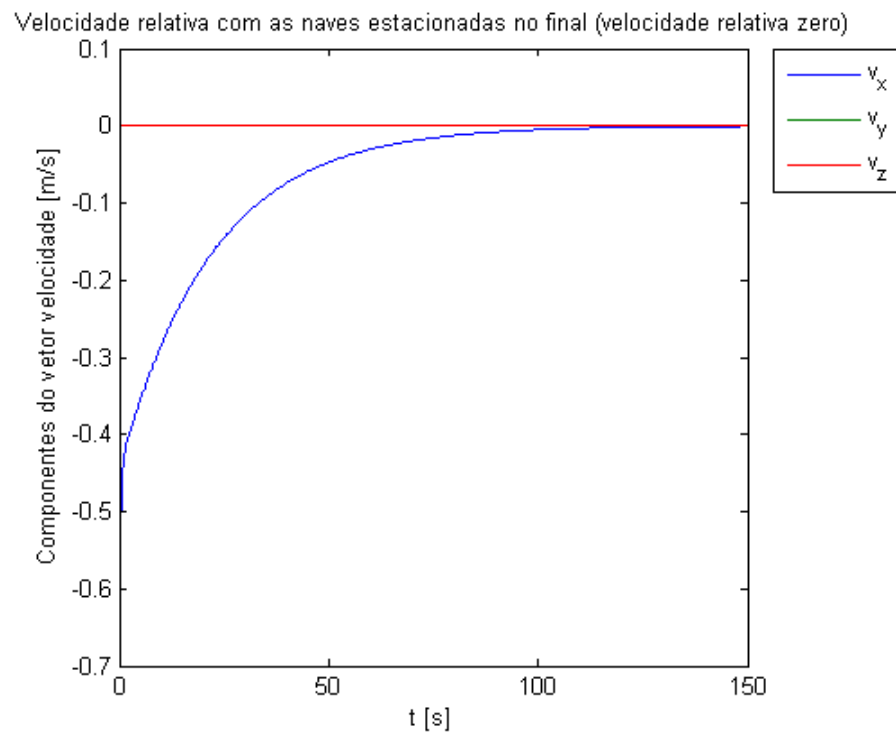


Figura 6.4 Velocidade relativa & tempo

- velocidade relativa inicial: 0.7 m/s
- velocidade relativa final: zero m/s
- tempo de duração da manobra: ≈ 130 s
- obs: a manobra se realiza segundo a direção x.
Em y e z não há componentes de velocidade.

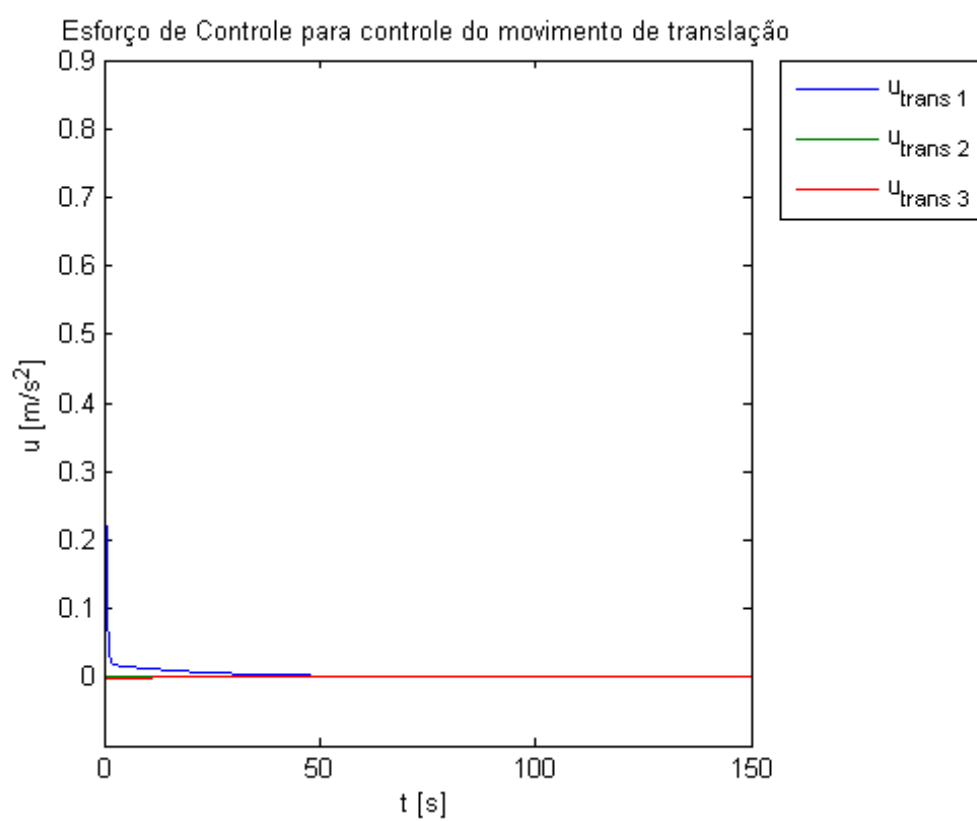


Figura 6.5 Esforço de Controle em translação & tempo

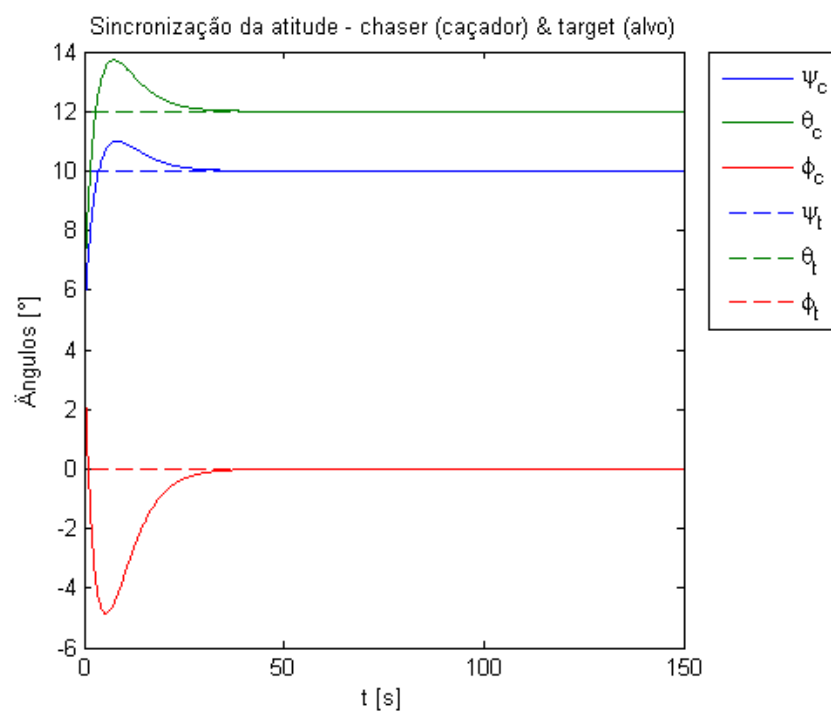


Figura 6.6 Sincronização da atitude & tempo

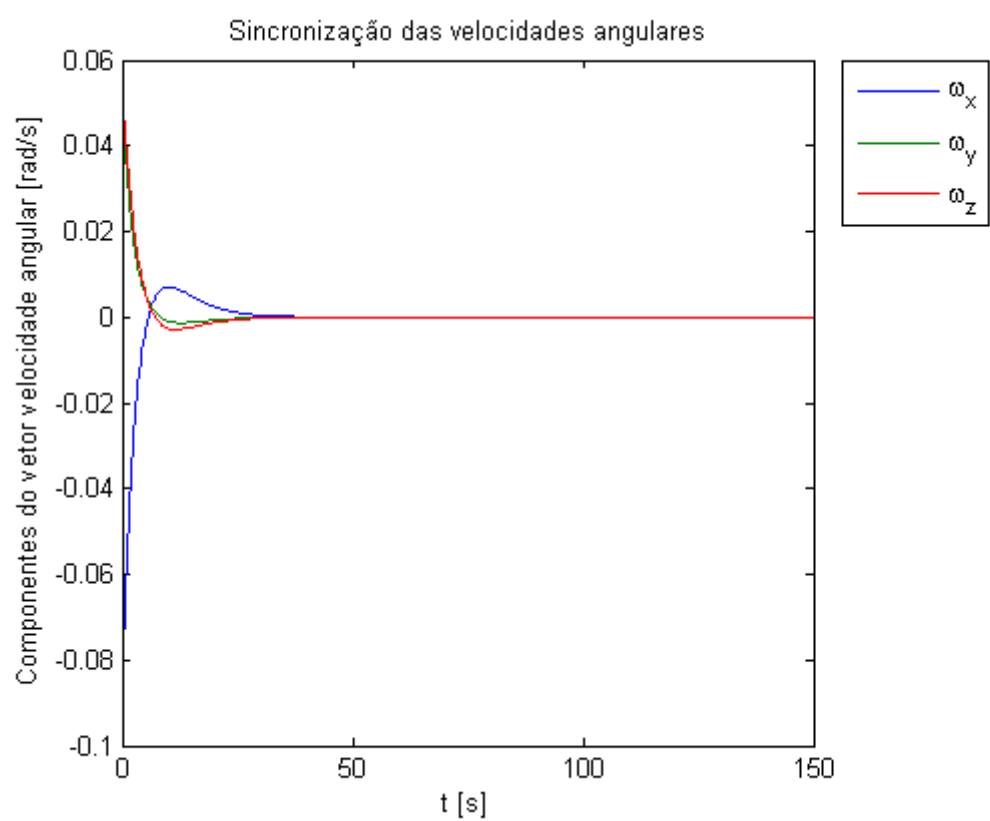


Figura 6.7 Sincronização da velocidade angular de ambas as naves & tempo

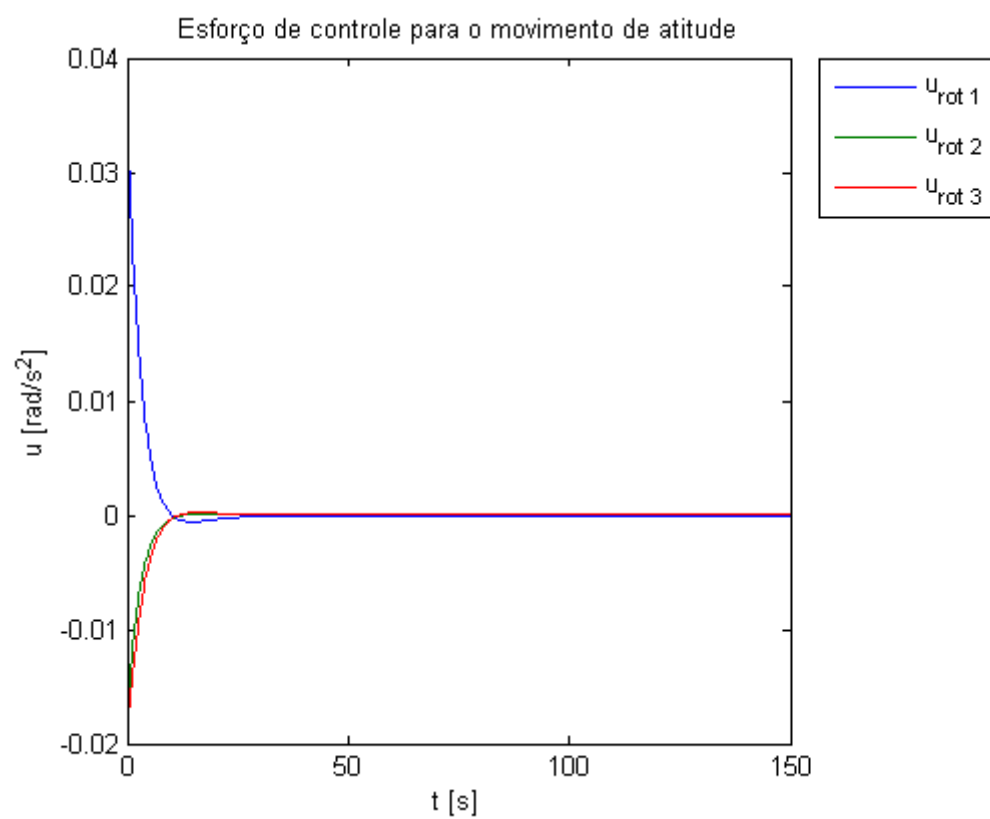


Figura 6.8 Esforço de controle em atitude & tempo

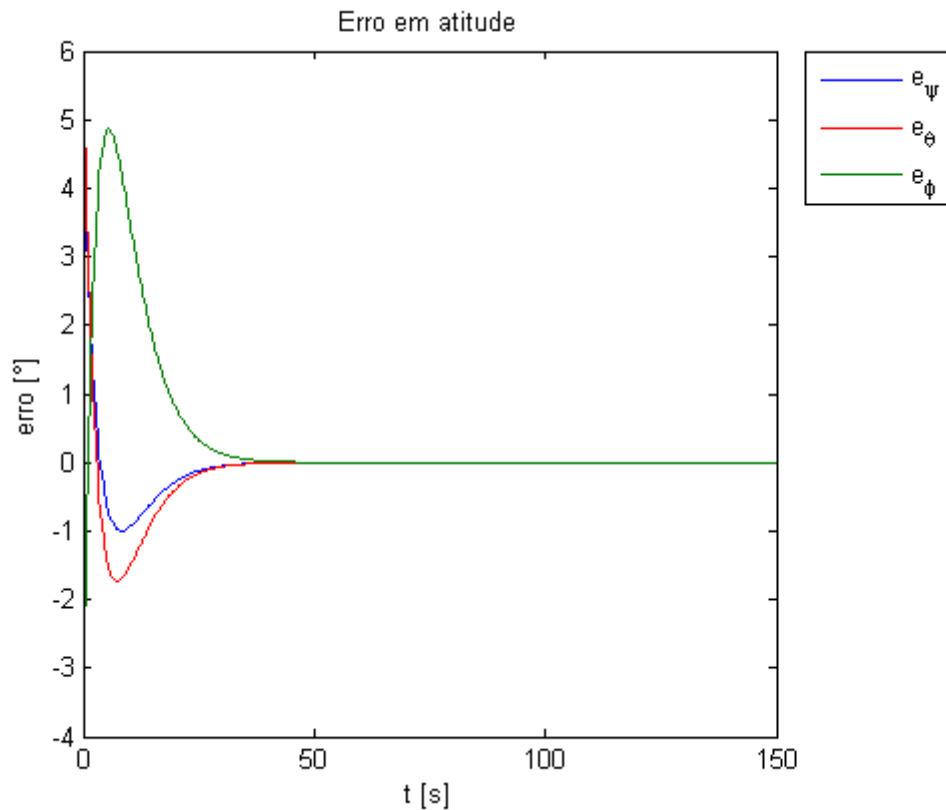


Figura 6.9 Erro em atitude & tempo

Para fazer a ancoragem foi necessário sincronizar os movimentos de atitude, bem como “estacionar” as naves, no sentido de mantê-las com velocidade relativa nula, ou seja, em “repouso” uma em relação à outra. Isto foi feito com a sincronização da atitude e manobras levando a velocidade relativa para zero. As figuras 6.8 e 6.9 mostram a sincronização da atitude e velocidade angular e, a figura 6.6 a velocidade relativa. Foi também importante analisar o esforço de controle para a aquisição dos atuadores. O resultado do esforço de controle em atitude e translação é mostrado nas figuras 6.10 e 6.7, respectivamente. Nestas simulações foi utilizada a técnica LQR (Linear Quadratic Regulator)

6.2 Estudo de caso 2: atracação autônoma com a Plataforma Orbital SARA

6.2.1 Introdução

Nesta subseção são feitas algumas considerações sobre a dinâmica de manipuladores robóticos em órbita da Terra, para melhor compreensão dos modelos matemáticos que estão deduzidos. A operação de manipuladores robóticos em órbita difere daquela realizada em Terra, uma vez que na Terra, o manipulador robótico opera quase sempre sobre uma base fixa ou sobre rodas com atrito significativo, capazes de suportar as reações do movimento dos braços mecânicos. Entretanto no espaço, devido ao ambiente de microgravidade, a base do manipulador robótico não é inercial. Ela se move em resposta aos movimentos do manipulador robótico durante as operações em órbita (SKAAR, 1994). Este movimento é equacionado neste trabalho.

O conhecimento do movimento de base não-inercial, em resposta às operações com manipuladores robóticos no espaço, é muito importante quando se deseja agarrar objetos, ou realizar qualquer operação com manipuladores no espaço, em particular na utilização dos rebocadores espaciais. Este tipo de veículo espacial (SpaceX Dragon Spacecraft) já está sendo usado atualmente para ressuprimento da ISS.

Para o controle do movimento desses manipuladores robóticos no espaço, a técnica de controle mais indicada é feedforward. Nesta técnica a computação das excitações sobre a plataforma do robô, em resposta ao movimento dos braços dos manipuladores, é enviada para frente no sistema de controle, a fim de anular as reações e manter a plataforma estabilizada. Entretanto, se não for possível implementar essa técnica, pode-se utilizar o controle, tipo feedback, com atuadores tipo rodas de reação, por exemplo.

Já nesta tese são estudadas, duas configurações da dinâmica de uma nave contendo um manipulador robótico: uma com o manipulador abrindo seus elos

de forma não sincronizada e com movimento angular na mesma direção, e a segunda, com o manipulador robótico abrindo os elos de forma sincronizada e com movimento angular reverso.

Na primeira configuração, o caso do manipulador com abertura não sincronizada, o sistema de controle tem que compensar os torques de reação provocados pelas operações do manipulador.

Para a segunda configuração, a técnica consiste em construir um robô, cujo elos se movam de forma sincronizada, mas com movimento angular reverso, para anular as reações. Esta configuração não sobrecarrega o controle de atitude quando das operações do manipulador. Pelo conhecimento do autor, essa técnica de sincronização, até o momento, ainda não apareceu na literatura especializada em robótica espacial, fato que caracteriza a originalidade deste trabalho.

6.2.2 Esquema do estudo de duas configurações de nave robótica

O estudo seguiu o seguinte esquema:

1. Dedução da modelagem matemática da nave visitante robótica, para se atracar a Plataforma Orbital SARA.
2. Utilização do modelo matemático e do pacote de software MatLab[®] para a simulação computacional do RVD/B para o SARA.
3. Discussão dos resultados obtidos.

6.2.3 Modelagem matemática

A metodologia utilizada para realizar este trabalho, inclui a modelagem matemática de um satélite como manipulador robótico (Figura 6.10) e, simulações em computador usando o ambiente MatLab[®] para fins de análise dinâmica.

Neste estudo de caso, não foi considerado o movimento relativo de translação. O estudo partiu da configuração em que as naves estão estacionadas com velocidade relativa zero e a uma distância compatível com o espaço de

operação do manipulador robótico. Assumiu-se que a nave alvo estava estabilizada em atitude. Portanto, para realizar a atracação, a nave visitante teria somente que se alinhar em atitude com o alvo. O sistema de controle teve que executar o alinhamento e manter a atitude estabilizada, enquanto o robô operava. A técnica de controle utilizada foi o LQR.

Na modelagem matemática considerou-se duas configurações de nave robótica. Elas se diferenciam na forma de abertura dos elos do manipulador: uma com abertura de forma sincronizada e reversa para eliminar as reações na base do robô, e a outra, não sincronizada (figura 6.10).

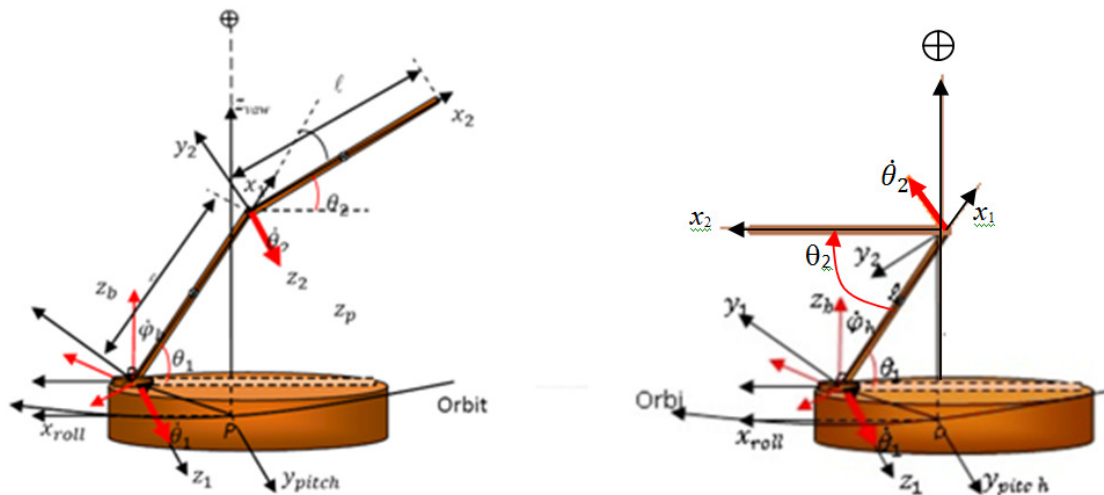


Figura 6.10 Configurações dinâmicas das naves robôs - operações de ancoragem

Na configuração, não sincronizada, o subsistema de controle da nave visitante, tem que manter a sua atitude estabilizada, mesmo quando o robô esteja em operação gerando reações sobre a base robótica. O sistema de controle tem que compensar as reações. O objetivo do estudo de caso é comparar o esforço de controle para ambos os casos simulados. Tem-se a expectativa de que, o braço robótico com movimento sincronizado e reverso dos dois elos, aliviará o esforço de controle, reduzindo custo (gasto menor de energia).

A seguir é apresentado o modelo matemático da nave robô, nas duas versões.

As equações do movimento foram deduzidas utilizando-se a formulação Lagrangiana para quase coordenadas e a formulação Lagrangiana em coordenadas generalizadas.

- Equações do movimento são:

$$\begin{aligned} J_{x_t} \dot{\omega}_x - I_{xz_{12}} \dot{\omega}_z + (J_{z_t} - J_{y_t}) \omega_y (\omega_z + \dot{\varphi}) + [I_{y_1} s(2\theta_1) \dot{\theta}_1 + I_{y_2} s(2\theta_2) \dot{\theta}_2] \omega_x + \\ + \left\{ [2I_{y_2} c(2\theta_2) + I_{z_2}] (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - 2I_{y_1} c(2\theta_1) + I_{z_1} \right\} \dot{\theta}_1 \} (\omega_z + \dot{\varphi}) - I_{xz_{12}} = \\ = \tau_x + \tau_{m_{12}} - u_\varphi \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$J_{y_t} \dot{\omega}_y + (J_{x_t} - J_{z_t}) \omega_x (\omega_z + \dot{\varphi}) + I_{xz_{12}} [(\omega_z + \dot{\varphi})^2 - \omega_x^2] = \tau_y + u_{\theta_1} + u_{\theta_2} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} J_{z_t} \dot{\omega}_z - I_{xz_{12}} \dot{\omega}_x + (J_{y_t} - J_{x_t}) \omega_x \omega_y - [I_{y_1} s(2\theta_1) \dot{\theta}_1 + I_{y_2} s(2\theta_2) \dot{\theta}_2] \omega_x + \\ + \left\{ [2I_{y_2} c(2\theta_2) + I_{z_2}] (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - 2I_{y_1} c(2\theta_1) + I_{z_1} \right\} \dot{\theta}_1 \} (\omega_z + \dot{\varphi}) - I_{xz_{12}} = \\ = \tau_z + \tau_{m_{12}} + u_\varphi \end{aligned} \quad (6.3)$$

- Equações do movimento do primeiro e segundo elo mecânico

$$\begin{aligned} I_{z_{12}} (\ddot{\theta}_1 + \dot{\omega}_y) + I_{z_2} (\ddot{\theta}_2 \pm \ddot{\theta}_1) + [I_{y_1} s(2\theta_1) + I_{y_2} s(2\theta_2)] (\omega_z^2 - \omega_x^2) + 2[I_{y_1} c(2\theta_1) + \\ + I_{y_2} c(2\theta_2)] \omega_x \omega_z = u_{\theta_1} \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$I_{z_2} (\ddot{\theta}_2 \pm \ddot{\theta}_1 + \dot{\omega}_y) + I_{y_2} s(2\theta_2) (\omega_z^2 - \omega_x^2) + 2I_{y_2} c(2\theta_2) \omega_x \omega_z = u_{\theta_2} \quad (6.5)$$

$$I_{z_m} \ddot{\varphi} = \tau_\varphi \quad (6.6)$$

onde:

$\dot{\varphi} \rightarrow$ é a velocidade angular do manipulador robótico em torno do eixo z da plataforma.

$\theta_1 \rightarrow$ é a posição angular temporal do primeiro elo do manipulador robótico.

$\theta_2 \rightarrow$ é a posição angular temporal do segundo elo do manipulador robótico.

$u_\varphi = I_{z_m} \ddot{\varphi} \rightarrow$ torque atuando na primeira articulação do manipulador.

$u_{\theta_1} = I_{x_{z_{12}}} \ddot{\theta}_1 \rightarrow$ torque atuando na segunda articulação do manipulador.

$u_{\theta_2} = I_{z_{12}} \ddot{\theta}_2 \rightarrow$ torque atuando na terceira articulação do manipulador.

$u_\alpha \rightarrow$ é o torque associado ao grau de liberdade rotacional do manipulador robótico, onde $\alpha = \theta_i$ ($i = 1, 2$) e φ .

$\omega_x ; \omega_y ; \omega_z \rightarrow$ são as velocidades angulares do sistema completo (veículo espacial dotado de manipulador robótico) em torno dos eixos xyz da plataforma.

$J_{x_t} ; J_{y_t} ; J_{z_t} \rightarrow$ são os momentos de inércia total (t) do veículo espacial.

$I_{z_1} ; I_{z_2} \rightarrow$ são os momentos de inércia dos elos 1 e 2 do manipulador robótico, respectivamente.

Assumiu-se $I_{x_1} = I_{x_2} = 0$, $I_{y_1} = I_{z_1}$ e $I_{y_2} = I_{z_2}$

O sinal $\pm$ que aparece nas equações (6.4 e 6.5) é para ambos os modelos. No caso dos ângulos não serem reversos, prevalece o sinal (+) e no caso do movimento sincronizado reverso, sinal (-).

6.2.4 Vetor de estado e condições iniciais

Dados de entrada para as simulações das duas configurações:

Tabela 6.1 Dados de entrada para as simulações do movimento rotacional da nave robótica

Parâmetros	Valores Iniciais	Unidades
J_{tx_0}	8.0	Kgm ²

J_{ty_0}	8.0	Kgm^2
J_{tz_0}	12.6956	Kgm^2
J_{txz_0}	0.035	Kgm^2
θ_{1_0}	$0 ; 180$	Graus
θ_{2_0}	$0 ; 180$	Graus
τ_x	$6,01 \times 10^{-7}$	N.m
τ_y	$7,58 \times 10^{-7}$	N.m
τ_z	0	N.m
$\tau_{m_{12}}$	$-0,012$	N.m
Roll	$6,0$	Graus
Pitch	$5,0$	Graus
Yaw	$4,0$	Graus

Dados de entrada para o controlador LQR:

Vetor de estado:

$$\{x\} = \{\varphi \quad \theta \quad \psi \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \dot{\varphi} \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi} \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2\}^T$$

$$= \{x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8 \quad x_9 \quad x_{10}\}^T$$

Matriz de inércia:

$$J = \begin{bmatrix} I_{z_1} & I_{z_2} & 0 & -I_{z_{12}} & 0 \\ 0 & I_{z_2} & 0 & -I_{z_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_x & 0 & 0 \\ -I_{z_{12}} & -I_{z_2} & 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

Os dois primeiros elementos da diagonal são os momentos de inércia dos elos do manipulador robótico, função dos ângulos θ_1 e θ_2 , portanto variam no tempo. Os termos fora da diagonal principal são os produtos de inércia associados à

variação da configuração da nave robótica, quando os elos do manipulador robótico de movem.

Os I_x , I_y e I_z são os momentos principais de inércia da nave.

$$A = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 5} & I_{5 \times 5} \\ -J^{-1}C2 & -J^{-1}C1 \end{bmatrix}$$

onde: $A \rightarrow$ matriz de estado; cada bloco é 5×5

$0_{5 \times 5} \rightarrow$ uma matriz de zeros 5×5

$I_{5 \times 5} \rightarrow$ matriz identidade 5×5

$J \rightarrow$ matriz de inércia total 5×5

$C1, C2 \rightarrow$ torque devido ao gradiente de gravidade

No instante inicial a matriz de inércia é diagonal, ou seja, para $t = t_0$

$$J = \begin{bmatrix} 4.5414 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.6956 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12.6956 \end{bmatrix}$$

As matrizes arbitrárias $[Q]$ e $[R]$ associadas a essa técnica de controle permitem penalizar o estado ou o controle $[Q]$ e $[R]$ têm dimensões 10×10 e 4×4 , respectivamente. Dados de entrada para as simulações são:

$[Q]$ é diagonal, com todos os elementos igual a 1, exceto $Q(4,4)=Q(9,9) = 1E+4$.

$[R]$ é diagonal com elementos igual a 1000, exceto $R(4,4) = 1E-9$

6.2.5 Simulações e resultados

As simulações têm como objetivo o controle ativo da atitude, incluindo análise do esforço de controle para dois casos: um, no qual a abertura dos dois elos, que compõe o manipulador robótico, é realizada de maneira síncrona e reversa, ou seja, os elos têm a mesma velocidade angular de abertura, porém com sentidos opostos; o outro caso é com a abertura dos elos diferente daquela realizada de maneira síncrona e reversa. Do primeiro caso espera-se o cancelamento das reações associadas à plataforma, e em consequência, a abertura dos elos de maneira síncrona não afete a atitude. Deve-se observar que a abertura dos elos se dá no mesmo plano. Caso contrário, o movimento de rotação dos elos afetaria a estabilidade, e deve ser controlada, para que se possa efetivar a atracação.

Os resultados das simulações são mostrados nas figuras a seguir:

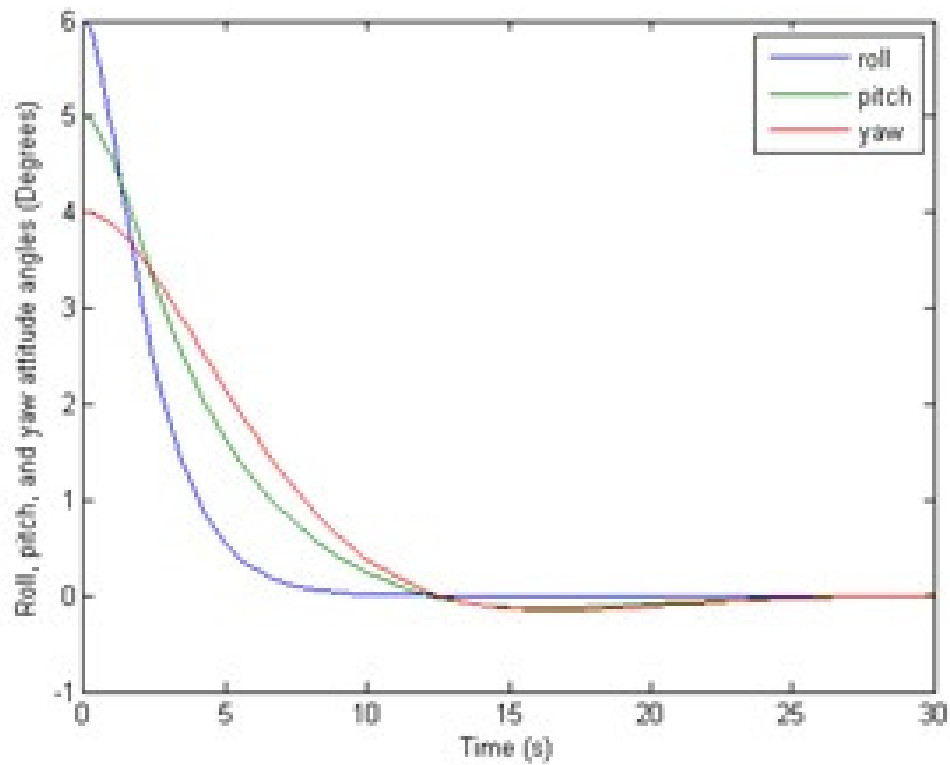


Figura 6.11 Controle de atitude da nave visitante considerando o manipulador robótico fora de serviço

condições iniciais: roll = 6 graus

pitch = 5 graus

yaw = 4 graus

condições finais: atitude relativa zerada

tempo consumido: ~ 27 segundos

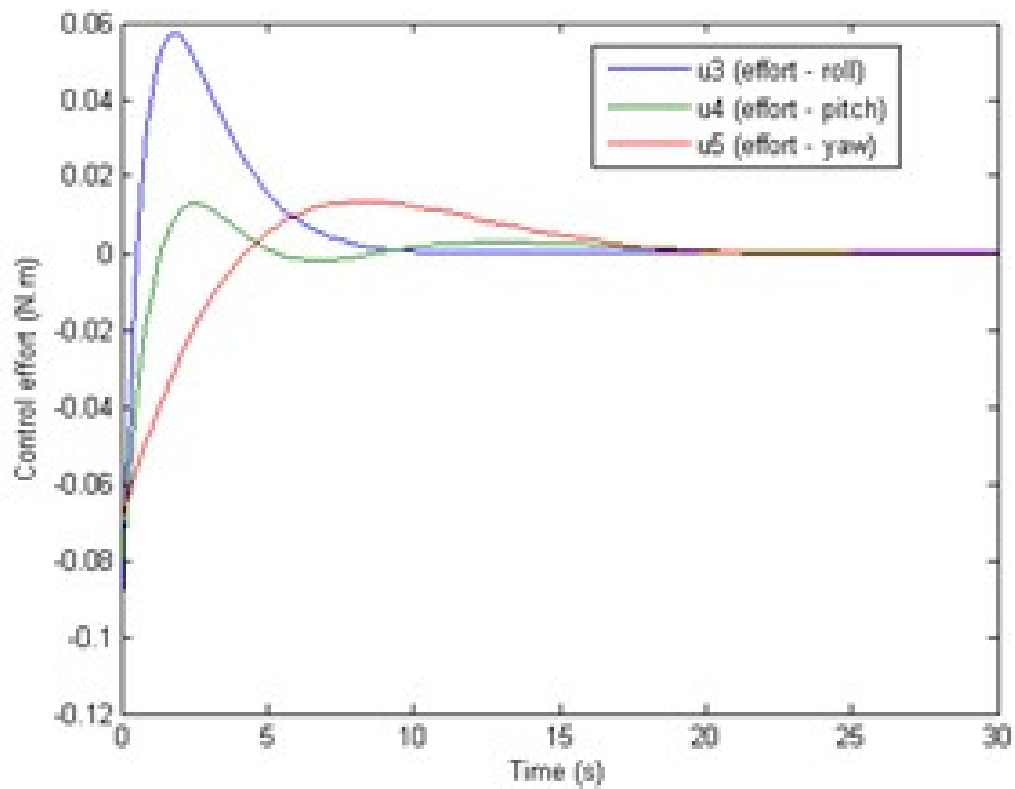


Figura 6.12 Esforço de controle para o caso do manipulador robótico fora de serviço

condições iniciais: effort roll = $6,01 \times 10^{-7}$ N.m

effort pitch = $7,58 \times 10^{-7}$ N.m

effort yaw = $8,21 \times 10^{-7}$ N.m

condições finais: atitude relativa zerada

tempo consumido: ~ 27 segundos

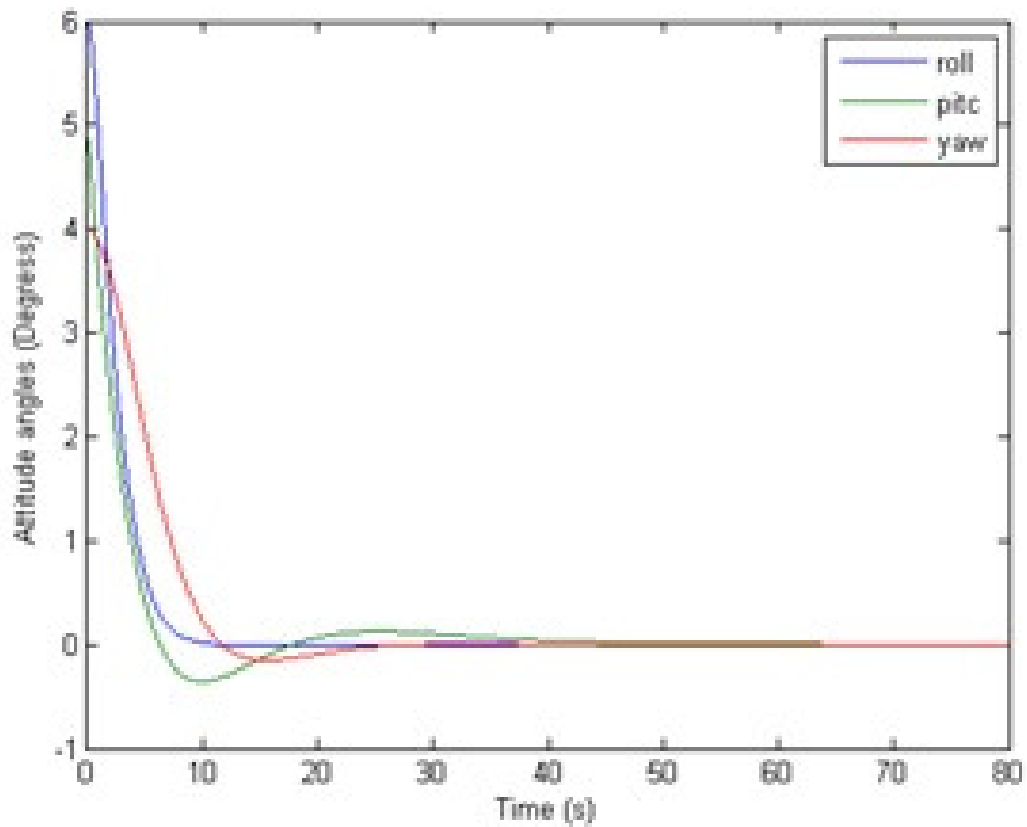


Figura 6.13 Controle de atitude da nave visitante considerando o manipulador robótico em movimento para se acoplar com a nave alvo.

condições iniciais: roll = 6 graus

pitch = 5 graus

yaw = 4 graus

condições finais: atitude relativa zerada

tempo consumido: ~ 40 *segundos*

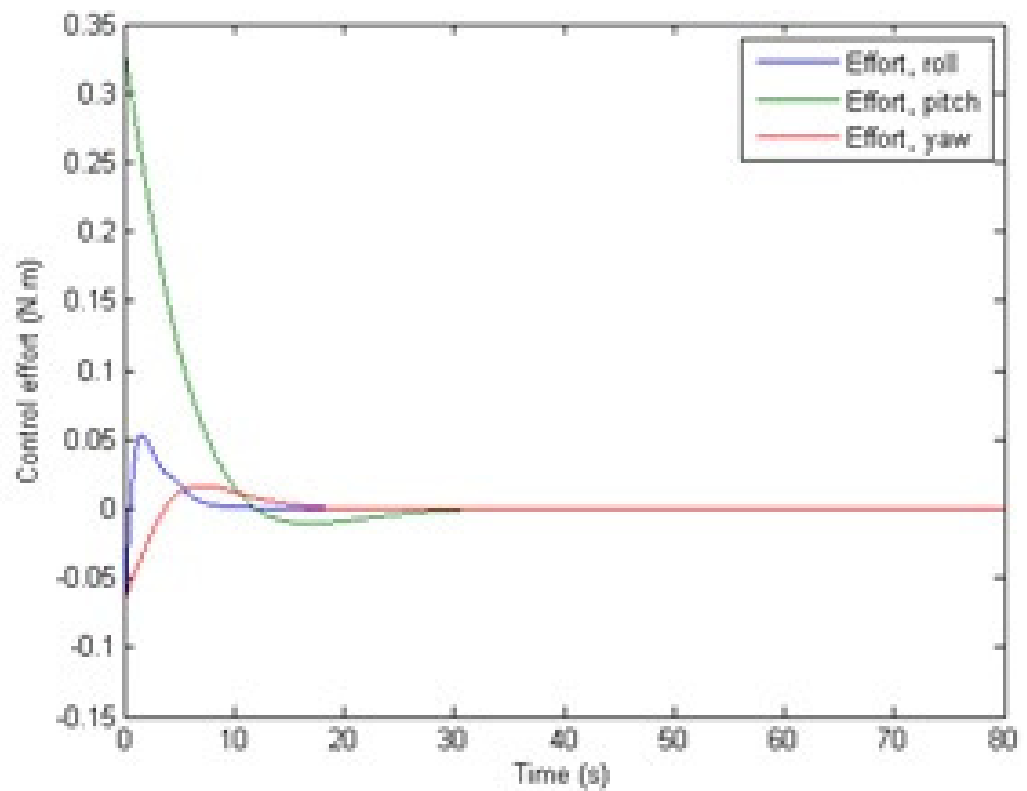


Figura 6.14 Esforço de controle, associado a controle da nave, quando o robô está em operação.

condições iniciais: effort roll = $6,01 \times 10^{-7}$ N.m

effort pitch = $7,58 \times 10^{-7}$ N.m

effort yaw = $8,21 \times 10^{-7}$ N.m

condições finais: atitude relativa zerada

tempo consumido: ~ 40 segundos

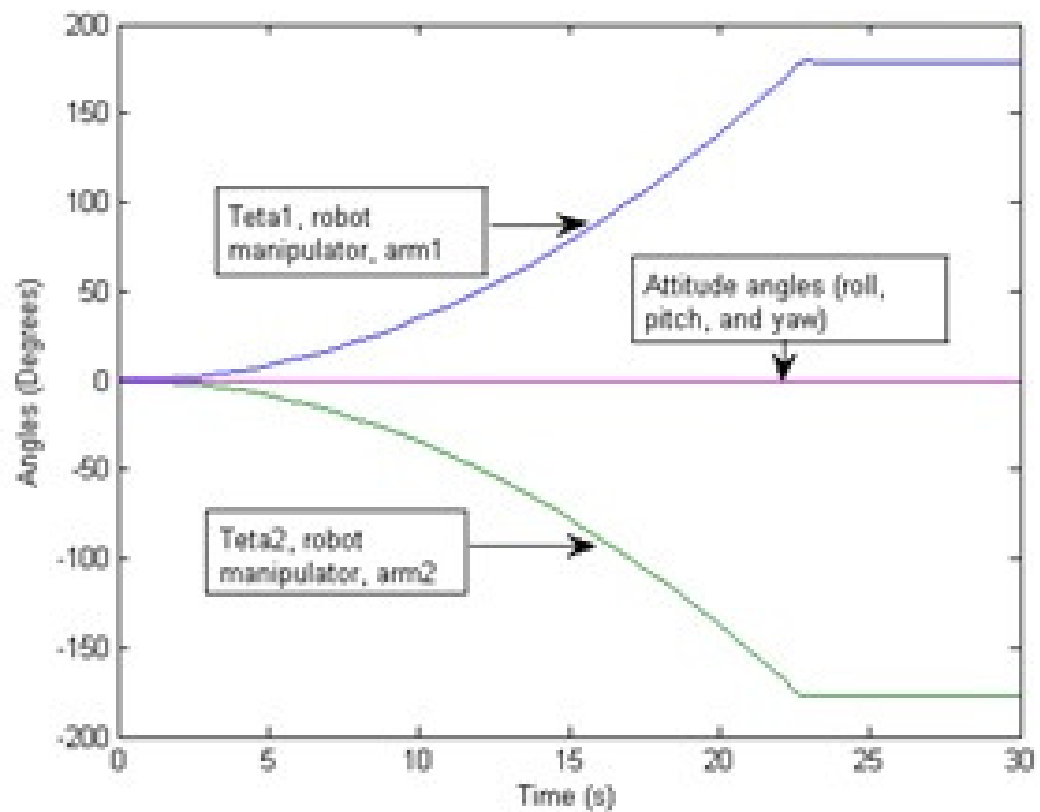


Figura 6.15 Estabilidade em atitude para o caso em que os elos do manipulador se abrem sincronizados e em sentido reverso.

condições iniciais: effort roll = $6,01 \times 10^{-7}$ N.m
 effort pitch = $7,58 \times 10^{-7}$ N.m
 effort yaw = $8,21 \times 10^{-7}$ N.m

condições finais: atitude relativa zerada

tempo consumido: sistema sempre estabilizado

A análise dos resultados demonstra que:

1. o sistema de controle funciona e mantém o sistema estável enquanto o manipulador está em operação para fazer a atracação;
2. o esforço de controle de atitude é muito maior para o caso do manipulador em operação (figura 6.14), do que para o caso do manipulador fora de serviço (figura. 6.12).

A figura 6.11 mostra o resultado onde o manipulador robótico ficou fora de serviço e a atitude foi estabilizada através do esforço de controle dado pela figura 6.12, cujo componente mais solicitado foi em rolamento.

Na figura 6.13 observa-se o controle de atitude atuando, enquanto o manipulador robótico se movimenta para se acoplar com a nave alvo. O esforço de controle requerido para estabilizar esse movimento é mostrado na figura 6.14.

Das duas simulações acima, com as mesmas condições iniciais, constata-se que o esforço de controle mais exigido para o manipulador robótico fora de serviço foi em rolamento, no entanto quando o manipulador é ativado, o esforço de controle maior foi em arfagem.

E, a figura 6.15 mostra a simulação na qual os elos do manipulador robótico se abrem sincronizados e em sentido reverso. Durante a operação do robô, para se atracar no alvo, a atitude permaneceu estabilizada. De fato, os movimentos reversos dos braços provocam reações que se cancelam, e com isso, não foi necessário acionar o controle de atitude, durante o movimento do manipulador robótico na direção do alvo.

7 CONCLUSÃO

A tecnologia desenvolvida para viabilizar o RVD/B apoia-se em base interdisciplinar, e se consolida após comprovação laboratorial ou experimentação em lançamentos espaciais. O problema de RVD/B foi discutido em termos de história, aplicações, importância para o momento atual da exploração espacial e em termos da complexidade matemática e computacional para estudos na área. Foram apresentados e discutidos diversos modelos matemáticos associados ao problema, para o movimento translacional e para o movimento rotacional. A formulação da equação da cinemática foi escrita em termos de quatérnio e apresentada em detalhes. As equações da cinemática do movimento relativo foram apresentadas e usadas para a simulação do movimento relativo das duas naves. Foram feitos dois estudos de caso, para dois tipos de operações orbitais de RVD/B, um para simular operações de ancoragem e um outro para simular operações de atracação. Neste último caso foi modelada uma nave robótica com o manipulador robótico com duas configurações dinâmicas, uma com os elos do manipulador se abrindo no mesmo sentido e sem considerações de movimento sincronizado e, uma outra configuração na qual os elos do manipulador se abrem de forma sincronizada e em sentido reverso, anulando desta forma os torques de reação para o movimento em atitude. Este estudo representa a contribuição mais significativa da tese. O estudo para o caso ancoragem utilizou o modelo matemático do SARA e foram considerados na simulação os movimentos de translação e rotação (relativos). O sistema de controle utilizado mostrou-se eficiente para os dois casos estudados. Um resultado importante foi obtido para o caso na nave robótica com manipulador sincronizado e reverso: o esforço do sistema de controle não foi exigido, uma vez que a configuração de abertura anula os torques de reação, e não sobrecarrega o sistema de controle.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARANTES JUNIOR, G. *Rendezvous with a non-cooperating target*. 2011. Dissertation (Doktor-Ingenieur) - Universität Bremen, Germany.
- BEYER, W.H. *CRC Standard Mathematical Tables*, 28th edition CRC Press, Inc. 1987.
- CHOBOTOV, V.A. (Ed). *Orbital mechanics*. Reston: AIAA, 2002. (AIAA Education Series).
- CORNELISSE, J.W.; SCHÖYER, H.F.R.; WAKKER, K.F. *Rocket propulsion and spaceflight dynamics*. Belfast: Pitman Pub., 1979.
- DA FONSECA, I. M., LOURENÇÃO, P.T.M.; OLIVEIRA, J.R.F. Procedimentos para a estabilização passiva de um satélite sob condições iniciais críticas. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA, 8., 1985, São José dos Campos. *Proceedings...* Rio de Janeiro: ABCM, 1985.
- EUDY, C.C.S. *Conceitos básicos sobre transformação de coordenadas*. São José dos Campos: IEAv/CTA, 1995.
- FEHSE, W. Automated rendezvous and docking of spacecraft. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 495p.
- FITZGIBBON, K.T. *Introdução ao controle de sistemas aeroespaciais*. IEE/ITA/CTA. São José dos Campos, 1989.
- GALABOVA, K.K. *Architecting a family of space tugs based on control transfer mission scenarios*. 2004. Dissertation (Master of Science in Aeronautics and Astronautics) - MIT Massachusetts Institute of Technology, Boston.
- GENTINA, J. *Desenvolvimento e simulação da lógica embarcada para manobras de rendezvous e docking da plataforma orbital recuperável SARA*. 2010. Dissertação (Mestrado em Engenharia e Tecnologia Espaciais / Mecânica Espacial e Controle) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos.
- GUGLIERI, G. et al. A ground facility to test GNC algorithms and sensors for autonomous rendezvous and docking. In: INTERNATIONAL ACADEMY OF ASTRONAUTICS CONFERENCE ON DYNAMICS AND CONTROL OF SPACE SYSTEMS. 2012. Porto *Proceedings...* Paris: IAA-AAS-DyCoSS, 2012.

HALE, F. *Introduction to space flight*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1994 p.48.

HARIGAE, M. et al GPS relative navigation system using carrier phases for rendezvous and docking. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SPACE TECHNOLOGY AND SCIENCE, 1994, [SI.]. *Proceedings...* Tokyo: ISTS, 1994. ISTS-94-c-26.

HUGHES, P.C. *Spacecraft attitude dynamics*. New York: Dover Publications, 2004.

JUNKINS, J.L.; KIM, Y. *Introduction to dynamics and control of flexible structures*. Washington, DC: AIAA, 1993. (AIAA Education Series).

KAILATH, T. *Linear systems*. New York, Prentice-Hall, 1980.

KALMAN, R.E. Contributions to the theory of optimal control. *Boletim da Sociedade de Matemática Mexicana*, 2(5):102-119, 1960.

KAPLAN, M. H. *Modern spacecraft dynamics and control*. New York: John Wiley & Sons, 1976.

KASAI, T.; ODA, M.; SUZUKI, T. Results of the ETS-7 mission – Rendezvous docking and space robotics experiments. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON ARTIFICIAL INTELLIGENCE, ROBOTICS AND AUTOMATION IN SPACE, 5., 1999, Noordwijk. *Proceedings...* Paris: ESA, 1999. (ESA SP-440).

KAWANO, I. et al. In-orbit demonstration of an unmanned automatic rendezvous and docking system by the Japanese engineering test satellite ETS-VII. *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*, v. 1994, n. 3648, p. 950-960, Aug., 1994.

KAWANO, I. et al. Result of autonomous rendezvous docking experiment of engineering test satellite – VII. *Journal of Spacecraft and Rockets*, v. 38, n. 1, p. 105-111, Jan-Feb 2001.

KIRK, D.E. *Optimal control theory*. New Jersey, Prentice-Hall, 1970.

KUIPERS J. B., *Quaternions & Rotation Sequences: A primer with applications to orbits, Aerospace and Virtual Reality*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1999.

KWAKERNAAK, H. & SIVAN, R. *Linear optimal control systems*. New York, John Wiley, 1972.

LARSON, W.L. (Ed). & WERTZ J.R. *Space mission analysis and design*. 2nd. Ed. California: Microcosm, Inc., 1992.

MAYO, R. A. Relative quaternion state transition relation. *Journal of Guidance and Control*, v.2, n.1, p. 44-48, 1979.

MEIROVITCH, L. Introduction to dynamics and control. New York: John Wiley & Sons, 1985.

MEIROVITCH, L. *Methods of analytical dynamics*. New York: McGraw-Hill Book, 1970.

MOKUNO, M. et al. Development of ETS-VII RVD system: preliminary design and EM development phase. In: AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, 1995, Baltimore. *Proceedings...* New York: AIAA, 1995.

ODA, M. et al. ETS-VII a rendezvous docking and space robot technology experiment satellite: result of the engineering model development work. In: SICE Annual Conference, 34., 1995. Sapporo. *Proceedings...* Piscataway: IEEE, 1995.

ODA, M. et al. *On-ground tele-operation and on-board autonomous control for the ETS-VII's rendezvous docking and space robot experiments*. Tokyo: NASDA, 2008.

ODA, M.; DOI, T. Teleoperation system of ETS-VII robot experiment satellite. In: INTELLIGENT ROBOTS AND SYSTEMS, 1997, Grenoble. *Proceedings...* Piscataway: IEEE/IROS, 1997.

OGATA, K. Engenharia de controle moderno; tradução Paulo Alvaro Maya, 4^a Ed., São Paulo, Prentice Hall, 2003.

OHKAMI, Y.; KAWANO, I. Autonomous rendezvous and docking by engineering test satellite VII: a challenge of Japan in guidance, navigation and control – Breakwell memorial lecture. *Acta astronautica*, v.53, p. 1-8, 2003.

PRADO, A.F.B.A. *Trajetórias espaciais e manobras assistidas por gravidade*. São José dos Campos: INPE, 2001.

SEITO, N.; DA FONSECA, I. M.; MORAES JR., P. SARA orbital autonomous rendezvous and docking: a necessary way to run. In: NATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, 5., 2008, Salvador. *Proceedings...* Rio de Janeiro: ABCM, 2008. CON08-0606

SEITO, N.; DA FONSECA, I. M.; MORAES JR., P. SARA orbital autonomous rendezvous and docking: a scientific and technological challenge. In: BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND THEIR

APPLICATIONS, 6., 2007, São José do Rio Preto. *Proceedings...* São José do Rio Preto: UNESP, 2007.

SKAAR, S. B.; RUOFF, C. F. *Teleoperation and robotics in space*. New York: AIAA, 1994. (Progress in Astronautics and Aeronautics, v.61)

SOUZA, C.H.M. Módulo de simulação de Docking do SARA, ASE-MT024-2015, 717-000000/B1020, IAE, 2015

SUTTON, G. P.; BIBLARZ, O. Rocket propulsion elements. 7th. Ed. New York: John Wiley & Sons, 2001. 751p.

YOSHIDA, K. Engineering Test Satellite VII experiments for space robot dynamics and control: theories on laboratory test beds ten years ago, now in orbit. *The International Journal of Robotics Research*, v. 22, n. 5, p. 321-335, May 2003.

WIE, Bong. *Space vehicle dynamics and control*. Reston: AIAA, 1998. (AIAA Education Series).

ASSOCIATED PRESS –

<http://www.estadao.com.br/noticias/internacional,astronautas-entram-em-primeira-espaconave-privada>, em 28 de agosto de 2012.

ESA/ATV-003 – http://www.esa.int/esaMI/Operations/SEMPC1037PG_2.html, em 11 de setembro de 2012.

NASA. APOLLO11.

http://www.nasa.gov/mission_pages/Apollo/missions/apollo11.html, em 11 de setembro de 2012.

NASA/RVGeminiAgena – NSSDC ID: 1966-020A

<http://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/spacecraft/Display.do?id=1966-020A>), em 28 de agosto de 2012.

NASA/RVDAutomated – NSSDC ID: 1967-105A

(<http://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/master/Catalog.do?sc=1967-105A>), em 11 de setembro de 2012. NASA, Press Kit, April 2005 also in C.nasa.gov/news/0600515_dart_mishap_summary.html, 05/19/2007

NASA/ISSPartners –

http://www.nasa.gov/mission_pages/station/cooperation/index.html, em 11 de setembro de 2012.

NASA/HUBBLE – <http://www.nasa.gov/externalflash/photosynth/hubble.html>, em 12 de setembro de 2012.

NASA/MARS – http://www.nasa.gov/mission_pages/mars/main/index.html, em 29 de agosto de 2012.

NASA/SPACEX – http://www.nasa.gov/exploration/commercial/cargo/spacex_index.html, em 12 de setembro de 2012.

NAVE RUSSA PROGRESS - <http://g1.globo.com/ciencia-e-saude/noticia/2015/05/nave-russa-progress-se-desintegra-ao-reentrar-na-atmosfera-da-terra.html>, em 15 de maio de 2015.

POLS-SARA, 2015 – Plano de Operações São Lourenço SARA
WIKI/ATVs – http://en.wikipedia.org/wiki/Automated_Transfer_Vehicle, em 11 de setembro de 2012.

SATVIEW.ORG – http://www.satview.org/br/lista_sat.php?cat=stations, em 23 de agosto de 2012.