

Efeito da equação da energia sobre o coeficiente de arrasto frontal no escoamento hipersônico de ar ($M_\infty = 8$) sobre um cone de semiângulo 10° .

Guilherme Bertoldo

1 de setembro de 2015

1 Introdução

No intuito de investigar a diferença entre o coeficiente de arrasto obtido pelo código Mach2D com base nas equações de Euler e a solução de Taylor-Maccoll, as equações de Euler foram simplificadas considerando-se a simetria axial e a hipótese de que a solução independe da coordenada radial em um sistema coordenado esférico. Estas simplificações conduzem a um sistema de equações diferenciais dependentes da coordenada polar θ e do tempo t , denominado modelo de Euler 1D (ver o Apêndice A). Tal sistema representa a conservação da massa, quantidade de movimento e energia. As equações para o transporte de massa e quantidade de movimento usadas no modelo de Taylor-Maccoll são idênticas às do Mach2D, porém existe uma diferença quanto à equação da energia. No modelo usado no código Mach2D, que segue a Ref. [1], a equação da energia é dada por

$$c_p \left[\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} T) \right] = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla p, \quad (1)$$

enquanto no modelo de Taylor-Maccoll, que segue a Ref. [2], a equação da energia é dada por

$$\frac{\partial(\rho H)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} H) = \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (2)$$

onde H representa a entalpia total, isto é,

$$H = h + \frac{V^2}{2} = c_p T + \frac{V^2}{2}. \quad (3)$$

É possível mostrar que as Eqs. (1) e (2) são equivalentes (ver o Apêndice B). Apesar da equivalência, o modelo matemático para a equação da energia conjugado ao modelo numérico produz resultados numéricos diferentes, mesmo com o refino da malha. A seguir esta diferença será mostrada comparando-se os resultados obtidos em diversas malhas para o código Mach2D e para os modelos de Euler 1D em que a temperatura T é a variável principal e o modelo de Euler 1D em que a entalpia total H é a variável principal.

2 Mach2D

Os resultados obtidos com o código Mach2D (conjunto de simulações S0316) são apresentados na Tab. 1. Os parâmetros numéricos de entrada são dados no Apêndice C.

Tabela 1: Coeficiente de arrasto frontal: solução numérica, estimativa convergente e múltiplas extrapolações de Richardson - Mach2D

Grid	$C_{Df}^p(p_L = 1)$	Estimador convergente				
		p_U	$\phi(p_L)$	$\phi(p_U)$	ϕ_C	U_C
60	0.066 922 466					
120	0.067 538 071		0.068 153 677			
240	0.067 879 965	0.848 459 958	0.068 221 858	0.068 307 023	0.068 26	0.000 04
480	0.068 060 472	0.921 490 840	0.068 240 979	0.068 262 365	0.068 252	0.000 011
960	0.068 153 265	0.959 968 042	0.068 246 058	0.068 251 431	0.068 248 7	0.000 002 7
MER - ϕ						
Grid	$C_{Df}^p(p_L = 1)$	$\phi_{Ri}(p_L = 1)$	$\phi_{Ri}(p_L = 2)$	$\phi_{Ri}(p_L = 3)$	$\phi_{Ri}(p_L = 4)$	
60	0.066 922 465 59					
120	0.067 538 071 32	0.068 153 677 05				
240	0.067 879 964 75	0.068 221 858 18	0.068 244 585 23			
480	0.068 060 471 89	0.068 240 979 02	0.068 247 352 64	0.068 247 747 98		
960	0.068 153 264 88	0.068 246 057 88	0.068 247 750 83	0.068 247 807 72	0.068 247 811 70	
MER - U						
Grid	$C_{Df}^p(p_L = 1)$	$U_{Ri}(p_L = 1)$	$U_{Ri}(p_L = 2)$	$U_{Ri}(p_L = 3)$	$U_{Ri}(p_L = 4)$	
60	0.066 922 465 59					
120	0.067 538 071 32	0.000 615 605 73				
240	0.067 879 964 75	0.000 341 893 43	0.000 091 237 43			
480	0.068 060 471 89	0.000 180 507 14	0.000 053 795 43	0.000 005 348 86		
960	0.068 153 264 88	0.000 092 793 00	0.000 029 238 05	0.000 003 508 20	0.000 000 122 71	
MER - p_U						
Grid	$C_{Df}^p(p_L = 1)$	$p_U(p_L = 1)$	$p_U(p_L = 2)$	$p_U(p_L = 3)$	$p_U(p_L = 4)$	
60	0.066 922 465 59					
120	0.067 538 071 32					
240	0.067 879 964 75	0.848				
480	0.068 060 471 89	0.921	1.83			
960	0.068 153 264 88	0.960	1.91	2.80		

3 Euler 1D - equação para T

Os resultados obtidos com o modelo de Euler simplificado (1D), no qual a variável principal na equação da energia é a temperatura, são apresentados na Tab. 2. Os parâmetros numéricos de entrada são dados no Apêndice D.

Tabela 2: Coeficiente de arrasto frontal: solução numérica, estimativa convergente e múltiplas extrapolações de Richardson - Euler 1D - equação para T

Grid	$C_{Df}^p(p_L = 1)$	Estimador convergente				
		p_U	$\phi(p_L)$	$\phi(p_U)$	ϕ_C	U_C
60	0.067 562 687					
120	0.067 884 129		0.068 205 570			
240	0.068 055 255	0.909 498 961	0.068 226 381	0.068 250 072	0.068 24	0.000 01
480	0.068 143 810	0.950 411 461	0.068 232 365	0.068 238 783	0.068 236	0.000 003
960	0.068 188 895	0.973 917 019	0.068 233 980	0.068 235 656	0.068 234 8	0.000 000 8
1920	0.068 211 648	0.986 598 991	0.068 234 401	0.068 234 830	0.068 234 6	0.000 000 2
MER - ϕ						
Grid	$C_{Df}^p(p_L = 1)$	$\phi_{Ri}(p_L = 1)$	$\phi_{Ri}(p_L = 2)$	$\phi_{Ri}(p_L = 3)$	$\phi_{Ri}(p_L = 4)$	
60	0.067 562 687 00					
120	0.067 884 128 70	0.068 205 570 40				
240	0.068 055 254 60	0.068 226 380 50	0.068 233 317 21			
480	0.068 143 809 67	0.068 232 364 73	0.068 234 359 47	0.068 234 508 36		
960	0.068 188 894 98	0.068 233 980 30	0.068 234 518 83	0.068 234 541 60	0.068 234 543 81	
1920	0.068 211 648 02	0.068 234 401 05	0.068 234 541 30	0.068 234 544 50	0.068 234 544 70	0.068 234 544 73
MER - U						
Grid	$C_{Df}^p(p_L = 1)$	$U_{Ri}(p_L = 1)$	$U_{Ri}(p_L = 2)$	$U_{Ri}(p_L = 3)$	$U_{Ri}(p_L = 4)$	
60	0.067 562 687 00					
120	0.067 884 128 70	0.000 321 441 70				
240	0.068 055 254 60	0.000 171 125 90	0.000 050 105 27			
480	0.068 143 809 67	0.000 088 555 06	0.000 027 523 61	0.000 003 225 95		
960	0.068 188 894 98	0.000 045 085 32	0.000 014 489 91	0.000 001 861 96	0.000 000 090 93	
1920	0.068 211 648 02	0.000 022 753 03	0.000 007 444 10	0.000 001 006 55	0.000 000 057 03	0.000 000 001 09
MER - p_U						
Grid	$C_{Df}^p(p_L = 1)$	$p_U(p_L = 1)$	$p_U(p_L = 2)$	$p_U(p_L = 3)$	$p_U(p_L = 4)$	
60	0.067 562 687 00					
120	0.067 884 128 70					
240	0.068 055 254 60	0.909				
480	0.068 143 809 67	0.950	1.80			
960	0.068 188 894 98	0.974	1.89	2.71		
1920	0.068 211 648 02	0.987	1.94	2.83	3.51	

4 Euler 1D - equação para H

Os resultados obtidos com o modelo de Euler simplificado (1D), no qual a variável principal na equação da energia é a entalpia total, são apresentados na Tab. 3. Os parâmetros numéricos de entrada são dados no Apêndice D.

Tabela 3: Coeficiente de arrasto frontal: solução numérica, estimativa convergente e múltiplas extrapolações de Richardson - Euler 1D - equação para H

Grid	$C_{Df}^p(p_L = 1)$	Estimador convergente				
		p_U	$\phi(p_L)$	$\phi(p_U)$	ϕ_C	U_C
60	0.067 913 835					
120	0.068 178 840		0.068 443 846			
240	0.068 322 300	0.885 370 245	0.068 465 761	0.068 491 627	0.068 48	0.000 01
480	0.068 397 178	0.938 042 859	0.068 472 056	0.068 478 929	0.068 475	0.000 003
960	0.068 435 467	0.967 624 857	0.068 473 755	0.068 475 533	0.068 474 6	0.000 000 9
1920	0.068 454 832	0.983 423 881	0.068 474 198	0.068 474 650	0.068 474 4	0.000 000 2
MER - ϕ						
Grid	$C_{Df}^p(p_L = 1)$	$\phi_{Ri}(p_L = 1)$	$\phi_{Ri}(p_L = 2)$	$\phi_{Ri}(p_L = 3)$	$\phi_{Ri}(p_L = 4)$	
60	0.067 913 834 69					
120	0.068 178 840 12	0.068 443 845 54				
240	0.068 322 300 42	0.068 465 760 73	0.068 473 065 80			
480	0.068 397 178 16	0.068 472 055 90	0.068 474 154 29	0.068 474 309 79		
960	0.068 435 466 69	0.068 473 755 21	0.068 474 321 65	0.068 474 345 55	0.068 474 347 94	
1920	0.068 454 832 18	0.068 474 197 67	0.068 474 345 16	0.068 474 348 52	0.068 474 348 71	0.068 474 348 74
MER - U						
Grid	$C_{Df}^p(p_L = 1)$	$U_{Ri}(p_L = 1)$	$U_{Ri}(p_L = 2)$	$U_{Ri}(p_L = 3)$	$U_{Ri}(p_L = 4)$	
60	0.067 913 834 69					
120	0.068 178 840 12	0.000 265 005 42				
240	0.068 322 300 42	0.000 143 460 31	0.000 040 515 04			
480	0.068 397 178 16	0.000 074 877 74	0.000 022 860 86	0.000 002 522 03		
960	0.068 435 466 69	0.000 038 288 52	0.000 012 196 41	0.000 001 523 49	0.000 000 066 57	
1920	0.068 454 832 18	0.000 019 365 49	0.000 006 307 68	0.000 000 841 25	0.000 000 045 48	0.000 000 000 68
MER - p_U						
Grid	$C_{Df}^p(p_L = 1)$	$p_U(p_L = 1)$	$p_U(p_L = 2)$	$p_U(p_L = 3)$	$p_U(p_L = 4)$	
60	0.067 913 834 69					
120	0.068 178 840 12					
240	0.068 322 300 42	0.885				
480	0.068 397 178 16	0.938	1.80			
960	0.068 435 466 69	0.968	1.89	2.70		
1920	0.068 454 832 18	0.983	1.94	2.83	3.59	

5 Comparações

A Tab. 4 compara as soluções extrapoladas e suas estimativas de erro obtidas a partir do código Mach2D, dos modelos de Euler 1D para T e para H com o resultado esperado a partir da solução da equação de Taylor-Maccoll. Como se pode perceber, a diferença relativa entre as soluções do Mach2D e do Euler 1D-T é de 0.02%, mas a solução do Mach2D, considerando-se a estimativa do erro numérico, está em desacordo com a solução do Euler 1D-T. Tal diferença nos resultados pode ser explicada por diferenças no valor de γ e nas condições de contorno empregadas. De todo modo, é visível que o resultado do Mach2D está muito mais próximo do modelo Euler 1D - T do que do modelo Euler 1D - H. Este, por sua vez, produz resultados totalmente coerentes com a solução de Taylor-Maccoll. Mas o que explica esta diferença se as equações para a energia dos modelos Euler 1D - T e Euler 1D - H são equivalentes? A razão é que o modelo numérico empregado na equação da energia para T , Eq. (1), não conserva a entalpia total na passagem pela onda de choque, o que não ocorre para a equação da energia para H , Eq. (2). Este fato é evidente na Fig. 1, que apresenta a distribuição da razão de entalpia total pela entalpia total da corrente livre (H_0/H_∞) obtida pelos dois modelos na malha mais fina (1920 volumes). Como se pode perceber, o modelo para T conserva a entalpia total antes e depois do choque, mas não conserva na transição das duas regiões.

Tabela 4: Coeficiente de arrasto frontal: comparação dos modelos matemáticos

Modelo	ϕ_C	ϕ_{MER}
Mach2D	0.068 249(3)	0.068 247 8(1)
Euler 1D - T	0.068 234 6(2)	0.068 234 545(1)
Euler 1D - H	0.068 474 4(2)	0.068 474 348 7(7)
TM	0.068 474 348 752	0.068 474 348 752

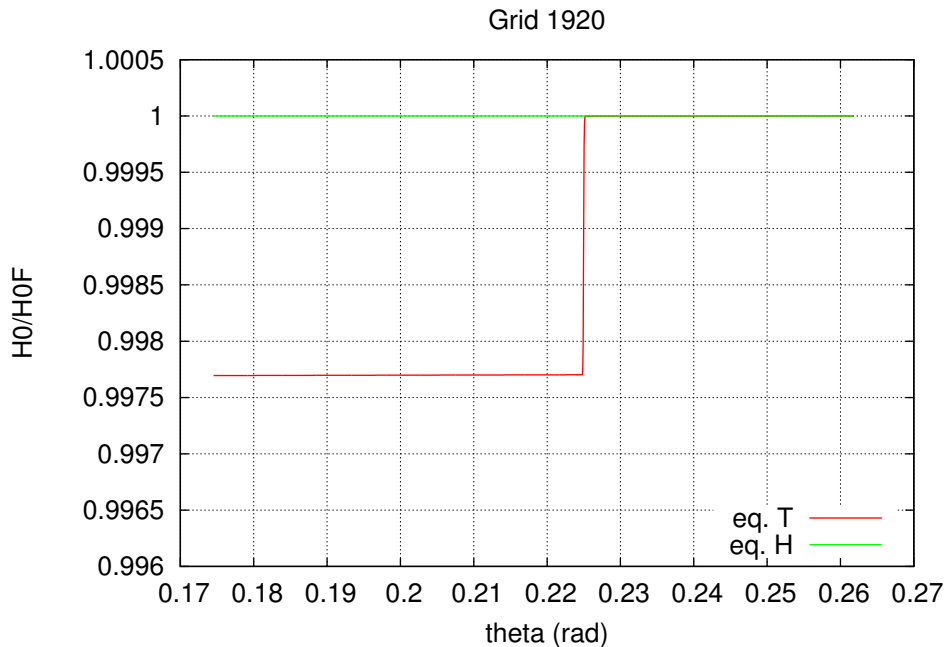


Figura 1: Distribuição da entalpia total.

As Figuras 2 e 3 mostram a distribuição da razão de temperaturas T/T_∞ com o refino da malha para os modelos Euler 1D-T e Euler 1D-H, respectivamente. Como se pode observar, apenas a distribuição de temperatura do modelo Euler 1D-H converge para a distribuição de temperatura do modelo de Taylor-Maccoll.

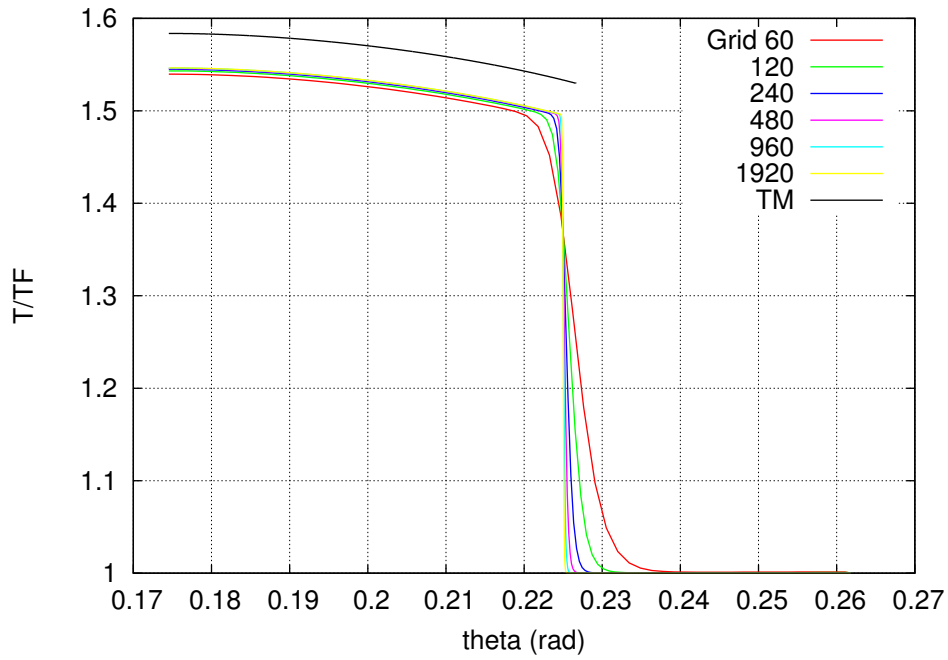


Figura 2: Distribuição da temperatura em função da malha. Modelo Euler 1D - equação para T .

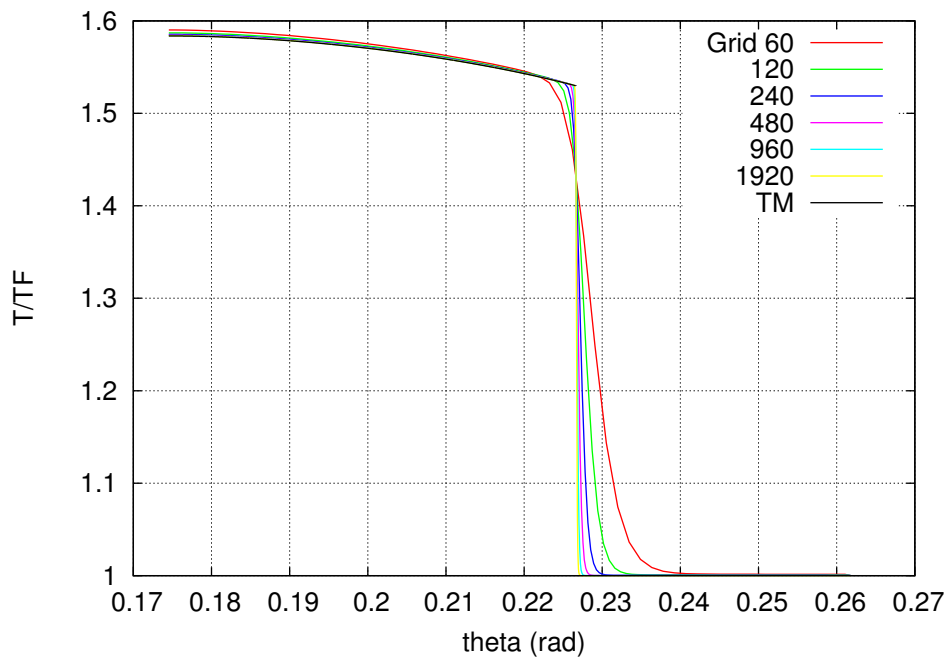


Figura 3: Distribuição da temperatura em função da malha. Modelo Euler 1D - equação para H .

Por fim, as Figuras 4, 5 e 6 apresentam as distribuições do número de Mach, razão de pressão p/p_∞ e razão de temperatura T/T_∞ , respectivamente, obtidos pelos modelos Euler 1D-T (malha 1920), Euler 1D-H (malha 1920) e Taylor-Maccoll. Em todos os casos, a não conservação da entalpia total implica em diferenças nas grandezas apresentadas e na posição da onda de choque.

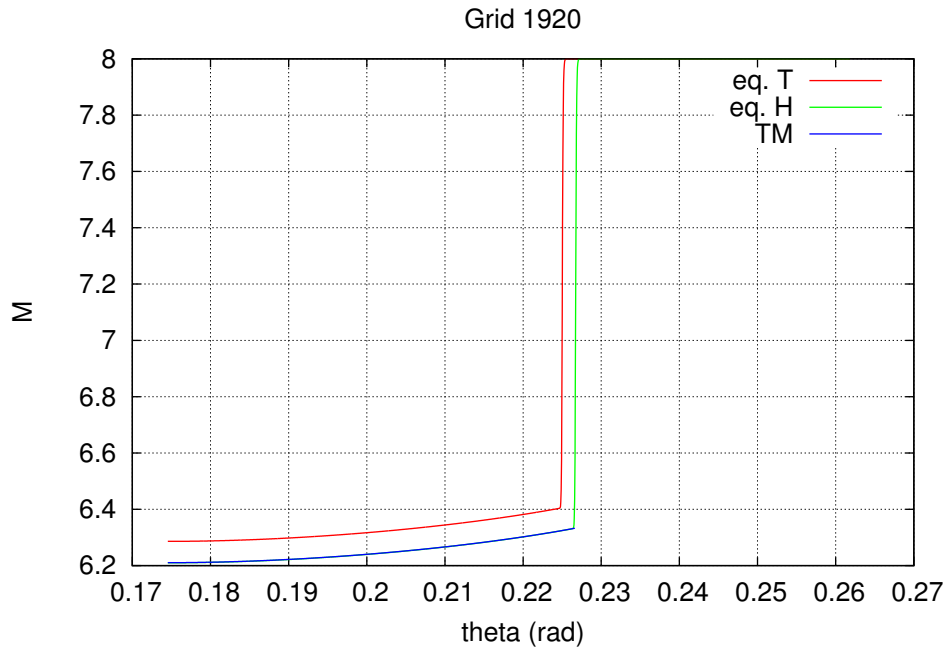


Figura 4: Distribuição do número de Mach.

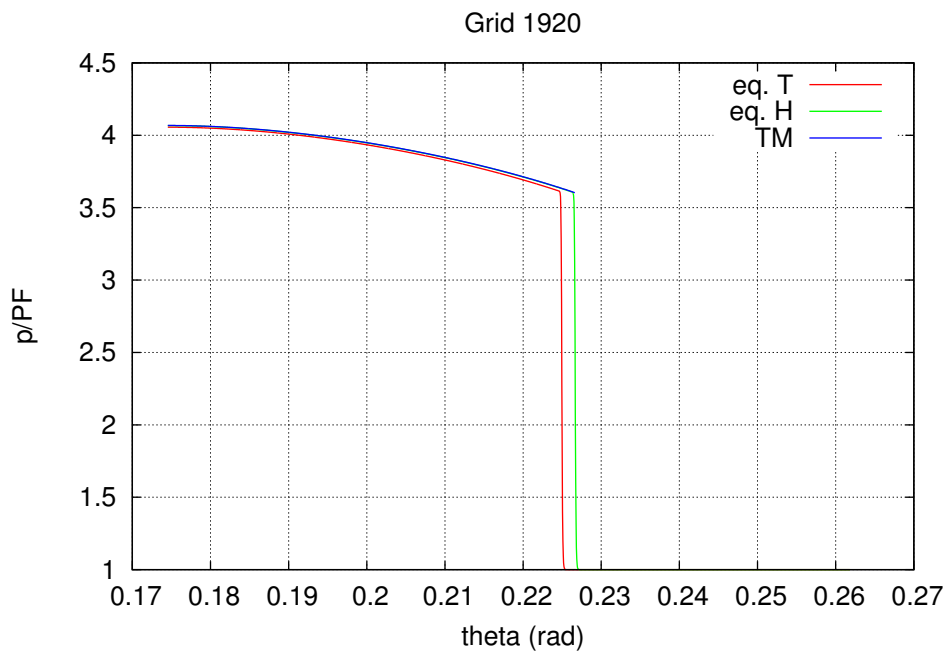


Figura 5: Distribuição da pressão.

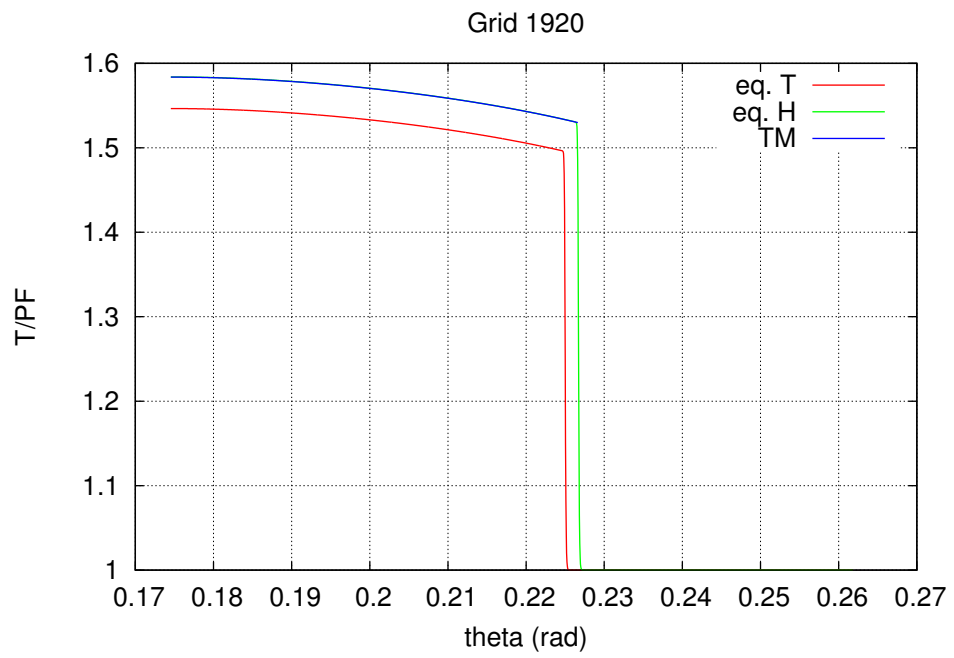


Figura 6: Distribuição da temperatura.

6 Conclusão

O motivo para as diferenças no coeficiente de arrasto obtido com o código Mach2D e o resultado de Taylor-Maccoll é o emprego de um modelo matemático/numérico que não conserva a entalpia total na transição da onda de choque. A Equação 2 deve ser utilizada em problemas que envolvam ondas de choque.

Referências

- [1] R B Bird, W E Stewart, and E N Lightfoot. *Transport phenomena*. John Wiley & Sons, 2 edition, 2002.
- [2] J D Anderson, Jr. *Modern compressible flow: with historical perspective*. McGraw-Hill, New York, 3 edition, 2003.

A Equações de Euler 1D

Escoamento sobre cone

Equação da continuidade

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho r^2 \sin \theta) + 2r \rho r \sin \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho r^2 \sin \theta) = 0$$

Equação do momento em r

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho r^2 \sin \theta u) + 2r \rho u \sin \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho r^2 \sin \theta u) = \rho r \sin \theta \sigma^{-2}$$

Equação do momento em \theta

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho r^2 \sin \theta v) + 2r \rho v \sin \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho r^2 \sin \theta v) = - \frac{\partial p}{\partial \theta} r \sin \theta - \rho u v r \sin \theta$$

Equação da energia

$$C_p \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho r^2 \sin \theta T) + 2r \rho v \sin \theta T + \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho r^2 \sin \theta T) \right] = r \sin \theta \left[\kappa \frac{\partial T}{\partial r} + v \frac{\partial T}{\partial \theta} \right]$$

Introduzindo $\zeta = z/\lambda$, temos

Continuidade

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} (\rho \underline{u} \cos \theta) + 2 \rho u \underline{u} \cos \theta + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\rho v \sin \theta) = 0$$

Momentum x

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} (\rho \underline{u} \cos \theta u) + 2 \rho u^2 \underline{u} \cos \theta + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\rho v \sin \theta u) = \rho \underline{u} \cos \theta \sigma^2$$

Momentum θ

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} (\rho \underline{u} \cos \theta v) + 2 \rho u v \underline{u} \cos \theta + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\rho v \sin \theta v) = - \frac{\partial \gamma}{\partial \zeta} \underline{u} \cos \theta - \rho u v \underline{u} \cos \theta$$

Energia

$$\rho_p \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} (\rho \underline{u} \cos \theta T) + 2 \rho u \underline{u} \cos \theta T + \frac{\partial}{\partial \zeta} (\rho v \sin \theta T) \right] = \underline{u} \cos \theta \left[\frac{\partial \gamma}{\partial \zeta} + v \frac{\partial \rho}{\partial \zeta} \right]$$

Dividindo todas as eqs. por $\underline{u} \cos \theta$, temos.

Centrimidiale

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 2\rho u + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v \sin\theta) = 0$$

Momentum r

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + 2\rho u u + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v \sin\theta u) = \rho v^2$$

Momentum \theta

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + 2\rho u v + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v \sin\theta v) = -\frac{\partial \rho}{\partial \theta} - \rho u v$$

Energie

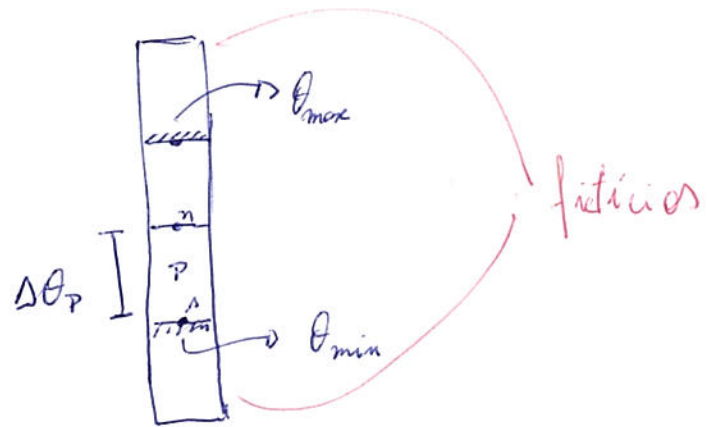
$$C_T \left[\frac{\partial (\rho T)}{\partial t} + 2\rho u T + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v \sin\theta T) \right] = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial \theta}$$

Resumo

$$C^\psi \left[\frac{\partial (\rho \psi)}{\partial t} + 2\rho u \psi + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v \sin\theta \psi) \right] = P^\psi + S^\psi, \quad \psi \in \{1, u, v, T\}$$

ψ	C^ψ	P^ψ	S^ψ
1	0	0	0
u	0	0	ρv^2
v	0	$-\frac{\partial \rho}{\partial \theta}$	$-\rho u v$
T	1	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial \theta}$	0

geração da malha



Integração

$$C_p^\psi \left[\frac{\rho_p \psi_p - \rho_p^o \psi_p^o}{\Delta \epsilon_0} + 2 \rho_p \mu_p \psi_p + \frac{1}{\text{sen} \theta_p} \frac{M_n \psi_n - M_s \psi_s}{\Delta \theta_p} \right] = P_p^\psi + S_p^\psi$$

$$M_n = (\rho v \text{sen} \theta)_n$$

$$M_s = (\rho v \text{sen} \theta)_s$$

$$\sigma_p = P_p^\sigma = \frac{p_s - p_n}{\Delta \theta_p}$$

$$P_p^\tau = \frac{p_p - p_p^o}{\Delta \epsilon_0} + \sigma_p \frac{p_n - p_s}{\Delta \theta_p}$$

$$S_p^\mu = \rho_p v_p^2$$

$$S_p^\sigma = -\rho_p \mu_p \sigma_p$$

Interpolação nos polos

$$\psi_n = a_p^n \psi_p + a_N^n \psi_N + b_p^n$$

$$\psi_s = a_p^s \psi_p + a_s^s \psi_s + b_p^s$$

$$A_p^\psi \psi_p + A_s^\psi \psi_s + A_N^\psi \psi_N = b_p^\psi$$

$$A_p^\psi = C_p^\psi \left[\frac{f_p}{\Delta t} + 2f_p u_p + \frac{\dot{M}_n a_p^n - \dot{M}_s a_p^s}{\text{sen} \theta_p \Delta \theta_p} \right]$$

$$A_N^\psi = C_p^\psi \left[\frac{\dot{M}_n a_N^n}{\text{sen} \theta_p \Delta \theta_p} \right]$$

$$A_s^\psi = -C_p^\psi \left[\frac{\dot{M}_s a_s^s}{\text{sen} \theta_p \Delta \theta_p} \right]$$

$$b_p^\psi = P_p^\psi + S_p^\psi - C_p^\psi \left[-\frac{f_p \psi_p}{\Delta t} + \frac{1}{\text{sen} \theta_p} \frac{\dot{M}_n b_p^n - \dot{M}_s b_p^s}{\Delta \theta_p} \right]$$

C.C. Norte

$$\gamma = \gamma_0$$

$$T = T_0$$

$$u = U_\infty \cos \theta$$

$$v = -U_\infty \text{sen} \theta$$

Sul

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \Rightarrow \psi_s = \psi_p$$

$$v = 0 \rightarrow v_s = 0$$

Eq. de continuidade

$$\frac{\rho_P - \rho_P^0}{\Delta t} + 2 \rho_P \mu_P + \frac{\dot{M}_n - \dot{M}_s}{\text{sen} \theta_P \cdot \Delta \theta_P} = 0$$

$$\dot{M}_n = \rho_n (v \text{sen} \theta)_n$$

$$\dot{M}_s = \rho_s (v \text{sen} \theta)_s$$

$$\text{A} \text{P} \text{P} \text{ } \text{A}_P^P \rho_P + \text{A}_S^P \rho_S + \text{A}_N^P \rho_N = b_P^P$$

$$\text{A}_P^P = \frac{1}{\Delta t} + 2 \mu_P + \frac{(v \text{sen} \theta)_n a_P^n - (v \text{sen} \theta)_s a_P^s}{\text{sen} \theta_P \cdot \Delta \theta_P}$$

$$\text{A}_N^P = \frac{(v \text{sen} \theta)_n \cdot a_N^n}{\text{sen} \theta_P \cdot \Delta \theta_P}$$

$$\text{A}_S^P = - \frac{(v \text{sen} \theta)_s a_S^s}{\text{sen} \theta_P \cdot \Delta \theta_P}$$

$$b_P^P = \frac{\rho_P^0}{\Delta t} - \frac{(v \text{sen} \theta)_n b_P^n - (v \text{sen} \theta)_s b_P^s}{\text{sen} \theta_P \cdot \Delta \theta_P}$$

Equações de energia e entalpia total

$$\rho \frac{D}{Dt} (e + v^2/2) = -\nabla \cdot (\gamma \vec{v})$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (e + v^2/2) + \rho \vec{v} \cdot \nabla (e + v^2/2) = -\nabla \cdot (\gamma \vec{v})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho (e + v^2/2)] + \nabla \cdot [\rho \vec{v} (e + \frac{v^2}{2})]$$

$$- (e + v^2/2) \frac{\partial \rho}{\partial t} - [e + \frac{v^2}{2}] \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = -\nabla \cdot (\gamma \vec{v})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho (e + v^2/2)] + \nabla \cdot [\rho \vec{v} (e + \frac{\gamma}{\rho} + \frac{v^2}{2})] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho (e + \frac{\gamma}{\rho} + \frac{v^2}{2})] + \nabla \cdot [\rho \vec{v} (e + \frac{\gamma}{\rho} + \frac{v^2}{2})] = \frac{\partial \gamma}{\partial t}$$

$$h = e + \frac{\gamma}{\rho}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho (h + \frac{v^2}{2})] + \nabla \cdot [\rho \vec{v} (h + \frac{v^2}{2})] = \frac{\partial \gamma}{\partial t}$$

$$H = h + \frac{v^2}{2} = c_p T + \frac{v^2}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho H) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} H) = \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho H) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 u H) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v \sin \theta H) = \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho H) + \frac{\partial \rho u H}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v \sin \theta H) = \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\tau = t/r$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\rho H) + \frac{\partial \rho u H}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v \sin \theta H) = \frac{\partial p}{\partial \tau}$$

C.C.

nocte

sol

$$H_n = c_p T_\infty + \frac{U_\infty^2}{2}$$

$$H_s = c_p T_s + \frac{u_s^2 + v_s^2}{2}$$

B Equivalência entre as equações da energia para T e para H

Equação de energia

Find:

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = - \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln T} \right)_p \frac{Dp}{Dt}$$

$$p = \rho R_g T$$

$$\ln p = \ln \rho + \ln R_g + \ln T$$

$$\frac{\partial \ln p}{\partial \ln T} = -1$$

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt}$$

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt}$$

ou

$$\rho C_p dT = dp$$

$$C_p dT = \frac{dp}{\rho}$$

$$dh = C_p dT$$

Equações de energia

Anderson:

$$\rho \frac{D}{Dt} (e + v^2/2) = -\nabla \cdot (\gamma \vec{V}) \quad (1)$$

Equações do movimento

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla \gamma \quad (2)$$

$$\rho \vec{V} \cdot \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{V} \cdot \nabla \gamma \quad (3)$$

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{V} \cdot \vec{V}}{2} \right) = -\nabla \cdot (\gamma \vec{V}) + \gamma \nabla \cdot \vec{V} \quad (4)$$

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\nabla \cdot (\gamma \vec{V}) + \gamma \nabla \cdot \vec{V} \quad (5)$$

Substituindo (5) de (1), temos

$$\rho \frac{D}{Dt} (e) = -\gamma \nabla \cdot \vec{V} \quad (6)$$

$$e = h - \frac{\gamma}{\rho} \quad (7)$$

$$\frac{De}{Dt} = \frac{Dh}{Dt} - \frac{D}{Dt} \left(\frac{\gamma}{\rho} \right) \quad (8)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\gamma}{\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\gamma}{\rho} \right) + \vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{\gamma}{\rho} \right) \quad (9)$$

$$= \frac{\partial \gamma}{\partial t} \frac{1}{\rho} + \gamma \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \vec{v} \cdot \nabla \frac{\gamma}{\rho} + \gamma \frac{\vec{v} \cdot \nabla}{\rho^2} \gamma \quad (10)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\gamma}{\rho} \right) = \frac{\partial \gamma}{\partial t} - \frac{\gamma}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right] \frac{1}{\rho} \quad (11)$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = \rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \gamma \left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right] \frac{\gamma}{\rho} = - \gamma \vec{v} \cdot \nabla \frac{\gamma}{\rho} \quad (12)$$

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} - \underbrace{\gamma \left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right] \frac{\gamma}{\rho}}_{=0} \quad (13)$$

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial \gamma}{\partial t}$$

que é a mesma eq. de Bind.

C Parâmetros numéricos para o modelo Mach2D

1	kgb	Kind of geometry of the body
3.10E+00	la	length of the elliptical x semi-axis (m)
1.50E+00	lb	length of the elliptical y semi-axis (m)
2.83564090980885E+00	lr	length of the body (m)
5.00E-01	rb	base radius of the body (m)
1.00E+00	lbd	Exponent of the power law body
2.00E+00	akn	Exponent of the power law for the north boundary
2.00E+00	aks	Exponent of the power law for the south boundary
S06	sim_id	Simulation identification (up to 100 characters)
60	nxi-2	Number of real volumes in the csi direction of the coarsest grid
60	nyi-2	Number of real volumes in the eta direction of the coarsest grid
5	nmf	Number of the finest mesh (1<=nmf)
1	nmd	Number of the desired mesh (1<=nmd<=nmf)
'./mach2d_input/geo_par06.txt'	fgeom	File of the geometric parameters
2	kg	Kind of grid (1=uniform, 2=geometric progression, 3=power law, 4=gp modified, 5=hyperbolic)
1.00E+000	avi	Initial value of the artificial viscosity (only for kg=5)
1.00E+003	avf	Final value of the artificial viscosity (only for kg=5)
3.00E-001	awf	Area weighting factor (only for kg=5)
1	kcm	Kind of centroid mean (1=simple mean, 2=weighted mean)
1	coord	Kind of coord. system (1=cylindrical, 0 = cartesian)
5.00E-002	cbl	The width of the vol. closer to the wall is 'cbl' times the width of the b. layer
80000	itmax	Maximum number of interactions for time cycle
1	itmmax	Maximum number of interactions for mass cycle
20	itpmax	Maximum number of interactions for pressure cycle
5	itemax	Maximum number of interactions for extrapolation to fictitious
5	nitm_u	Maximum number of interactions for solving the linear systems for u, v and T
20	nitm_p	Maximum number of interactions for solving the linear system for p
1.00E-002	tol_u	Tolerance in the MSI for solving the linear systems for u, v and T
1.00E-002	tol_p	Tolerance in the MSI for solving the linear system for p
1.00E-002	tolm	Tolerance for the mass cycle
1.00E-010	tol_t	Tolerance for the time evolution cycle
1	wlf	Frequency of printing in the listing file
1	sem_a	1 = do not open result files, 0 = open
1	sem_g	0 = visualize the plot, 1 = do not visualize
1	w_g	Frequency of writing data for graphics
0	w_cam	1 = write the fields, 0 = do not
1	wppd	Write post processed data (0=no, 1=yes, 2=yes-simplified)
0.00E+000	beta	UDS/CDS mixing constant (0=UDS, 1=CDS)
1.00E-008	dt1	initial time step (s)
2.00E-005	dt2	final time step (s)
100	it1	number of interactions up to which dt = dt1
600	it2	number of interactions from which dt = dt2
1.00E-002	h0	Amplitude of h in the TSI11 model
6.00E-001	mincc	Minimum allowed value of the convergence coefficient
9.00E-001	maxcc	Maximum allowed value of the convergence coefficient
0	modvis	Viscosity model (0=Euler, 1=NS)
0	ktm	Kind of thermophysical model (0 = constant, 1 = T dependent)
0	kfc	Kind of foredrag calculation (0 = over the whole forebody; 1 = over the ogive only)
-6.17E+002	Tsbc	Temperature on the south boundary (K) (if negative, adiabatic bc is applied)
3.00E+002	PF	Far field pressure (Pa)
3.00E+002	TF	Far field temperature (K)
8.00E+000	MF	Mach number of the free stream
0	base	0 = molar; 1 = massic
0.010000000E0	Ar	Argon
0.000000000E0	CO	Carbon monoxide
0.000000000E0	CO2	Carbon dioxide
0.780000000E0	N2	Molecular nitrogen
0.210000000E0	O2	Molecular oxygen
0.000000000E0	END	

D Parâmetros numéricos para os modelos Euler 1D-T e H

S01 = SIMID : Simulation ID
60 = Nt : Number of volumes in the tht direction (real volumes)
4 = Nmass : Number of iterations for mass correction
100000 = Ntime : Number of iterations for time step
1E-10 = tol_cd : Tolerance for relative difference of cdfp
0.6E0 = mincc : Minimum value of the convergence coefficient (if negative, non-adaptive method is used)
0.9E0 = maxcc : Maximum value of the convergence coefficient
0.01E0 = h0 : Parameter for time step increment
1.0E-9 = dt1 : First time step (s)
1.0E-5 = dt2 : Latest time step (s)
10 = ndt1 : Number of iterations for dt1
50 = ndt2 : Number of iterations between dt1 and dt2
1.74532925199433E-01 = thtmin : Minimum value of tht (radians)
2.61799387799149E-01 = thtmax : Maximum value of tht (radians)
8.0E0 = MF : Free-stream Mach number
4.0E2 = PF : Free-stream pressure (Pa)
3.0E2 = TF : Free-stream temperature (K)
1.4E0 = GF : Free-stream specific heat ratio
287.E0 = Rg : Gas constant (J/kg.K)