



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA  
INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS



# Mini-Curso de Propulsão

## Parte I

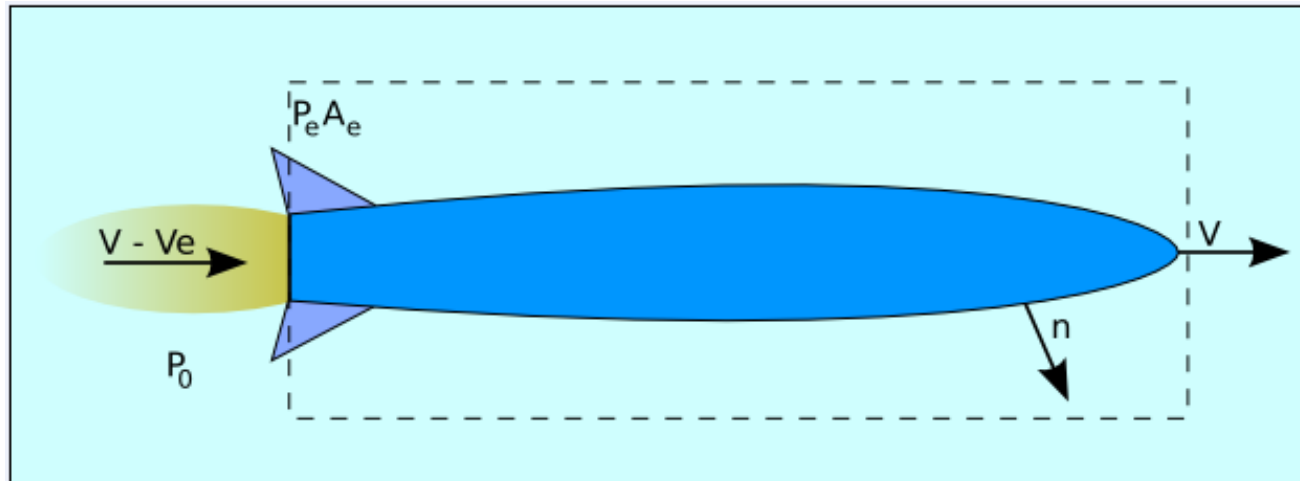
**Demétrio Bastos Netto**

**AEB, Brasília, DF, 26-28 de Outubro de 2005**

# Mini-Curso de Propulsão

## Equação do Empuxo:

Considerando o volume de controle da Figura:



onde  $\mathbf{V}$  é a velocidade do veículo,  $\mathbf{V}_e$  é a velocidade de ejeção dos gases relativa ao veículo,  $\mathbf{p}_e$  é a pressão no plano de saída da tubeira cuja área é  $\mathbf{A}_e$  e  $\mathbf{p}_0$  é a pressão do ambiente, então a equação da conservação da quantidade de movimento pode ser escrita como:



# Mini-Curso de Propulsão

## Equação do Empuxo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall} \rho \vec{V} d\forall + \int_A \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \Sigma F$$

$$\frac{\partial}{\partial t} MV + \dot{m}(V - V_e) = A_e (p_e - p_0)$$

$$M \frac{dV}{dt} + V \frac{dM}{dt} + \dot{m}V - \dot{m}V_e = A_e (p_e - p_0)$$

$$M \frac{dV}{dt} = \dot{m}V_e + A_e (p_e - p_0)$$

Fazendo **F = empuxo estático**, então a **Equação do Empuxo** fica:

$$F = \dot{m} V_e + A_e (p_e - p_0)$$



# Mini-Curso de Propulsão

## Parâmetros de Desempenho:

Definem-se  $c$ , a velocidade efetiva de descarga,  $c_F$  o coeficiente de Empuxo,  $c^*$ , a velocidade característica e  $I_{SP}$ , a impulsão específica como:

$$c = \frac{F}{\dot{m}} \quad , \quad c_F = \frac{F}{p_C A_T} \quad , \quad c^* = \frac{p_C A_T}{\dot{m}}$$

$$I_{SP} = \frac{\text{Impulsão}}{\text{peso ejetado}} = \frac{F \Delta t}{W} = \frac{F \Delta t}{g_0 \dot{m} \Delta t} \text{ [sec]} \quad \text{assim, } c = g_0 I_{SP}$$

$$\text{e mais, } c = c^* c_F$$

Vale notar que, embora muito popular, a Impulsão Específica, deixa muito a desejar como parâmetro de desempenho.



# Mini-Curso de Propulsão

## Parâmetros de Desempenho:

Fazendo-se  $M_0$  - a Massa total do veículo em  $t = 0$ ,  $M_L$  - a Massa da carga útil,  $M_e$  - a Massa da estrutura e  $M_p$  - Massa total do Propelente, então:  $M_e = M_0 - M_p - M_L$

Assim sendo,

$$M \frac{dV}{dt} = \dot{m} V_e + A_e (p_e - p_o) \quad \text{ou} \quad M \frac{dV}{dt} = \dot{m} c; \quad \text{daí} \quad M \frac{dV}{dt} = - \frac{dM}{dt} c$$

$$\text{ou seja, } dV = - \frac{dM}{M} c \quad \text{que integrada, } \int_{V_0}^{V_B} dV = - g_o I_{sp} \int_{M_0}^{M_0 - M_p} \frac{dM}{M} \text{ dará}$$

$$\Delta V = g_o I_{sp} \ln \frac{M_0}{M_0 - M_p} \quad \text{ou} \quad \Delta V = g_o I_{sp} \ln \frac{M_0}{M_e + M_L} \quad \text{s/grav. nem arrasto}$$

# Mini-Curso de Propulsão

## Parâmetros de Desempenho:

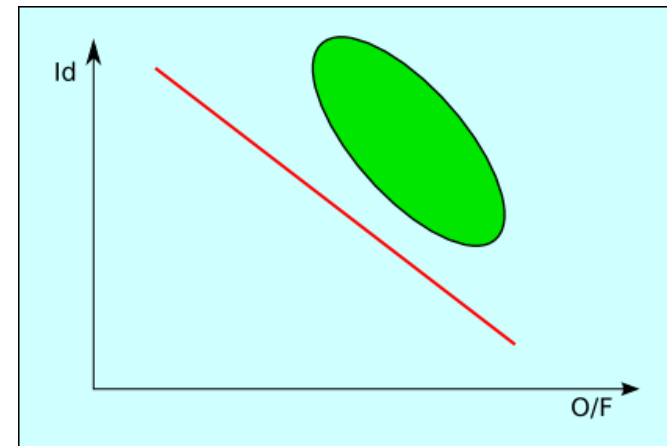
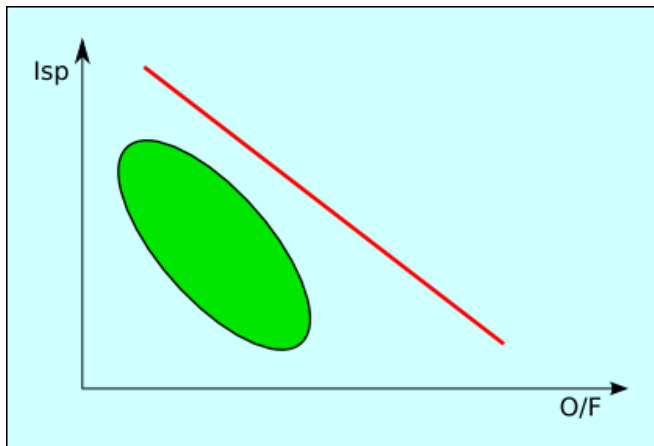
Outro parâmetro de desempenho é a impulsão em densidade,  $I_d$  (density impulse), definido como  $I_d = \rho I_{sp}$

Compare por exemplo **Lox – Gasol** vs **Lox – H<sub>2</sub>**

$$I_{sp} = 250 \text{ sec} \qquad I_{sp} = 330 \text{ sec}$$

$$\rho_{H_2} = \frac{1}{12} \rho_{\text{gasol}}$$

De um modo geral,  $130 < c < 4000 \text{ m/s}$  e  $180 < I_s < 500 \text{ sec}$





# Mini-Curso de Propulsão

## Parâmetros de Desempenho:

Impulsão Disponível,  $I_a$  :

Por definição,  $I_a = g_0 M_0 v I_{SP}$ , onde  $v = M_p / M_0$

Daí,  $I_a = g_0 M_p I_{SP} = c M_p$

Outro parâmetro é a Impulsão útil,  $I_u$  :  $I_u = M_L V_r$

Lembrando que:  $V_r = c \ln \frac{M_0}{M_e + M_L} = -c \ln \frac{M_e + M_L}{M_0}$

como  $I_a = c M_p$  e,  $I_u = M_L V_r$ , então:  $I_u = -I_a \frac{M_L}{M_p} \ln \frac{M_e + M_L}{M_0}$



# Mini-Curso de Propulsão

## Parâmetros de Desempenho:

Definindo  $\underline{\lambda}$  como a fração de carga útil e  $\underline{\varepsilon}$  como a fração estrutural do veículo, ou seja:

$$\frac{M_L}{M_o} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{M_e}{M_e + M_p} = \varepsilon$$

Então a equação anterior fica:  $I_u = -I_a \frac{M_L}{M_p} \ln [\varepsilon + \lambda (1 - \varepsilon)]$

Ou seja,  $\varepsilon$  é uma perda. Lembrando que:  $V_r = -c \ln[\varepsilon + \lambda (1 - \varepsilon)]$

Vemos que:  $(V_r)_{\text{ideal}} \rightarrow \varepsilon = 0$

e que:  $(V_r)_{\text{ideal}} = -c \ln \lambda$

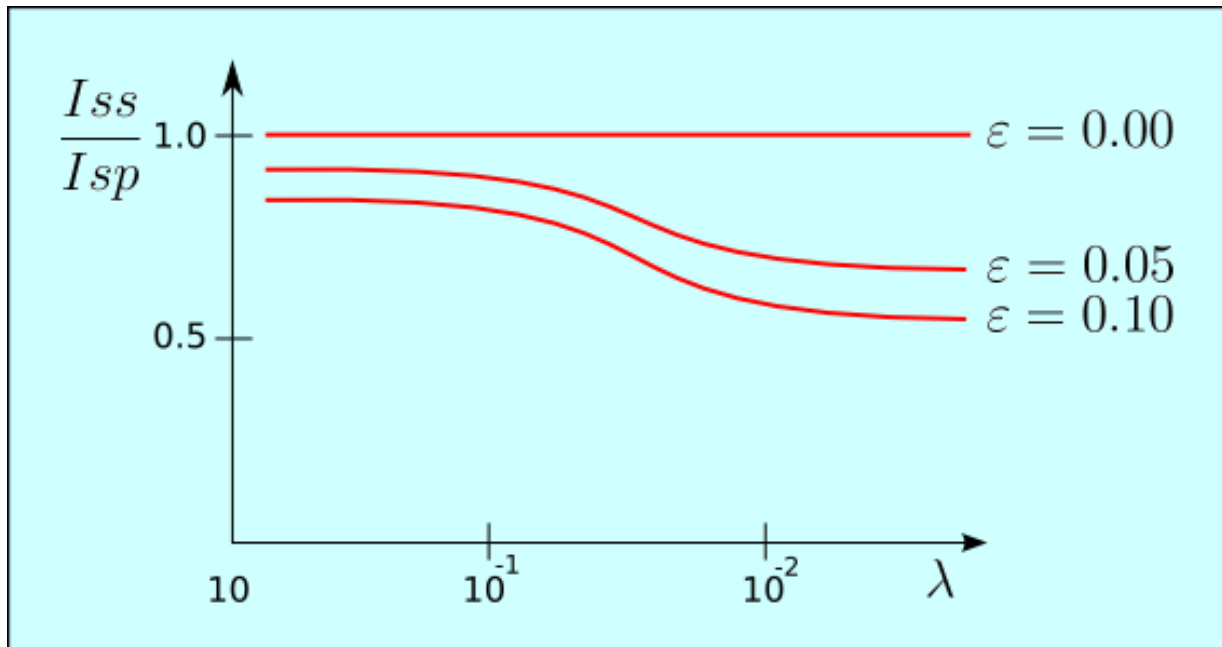


# Mini-Curso de Propulsão

## Parâmetros de Desempenho:

Outro parâmetro de desempenho que também é uma definição arbitrária é o  **$I_{SS}$**  ("Space System Specific Impulse"):

$$\frac{I_{SS}}{I_{sp}} = \frac{V_r}{(V_r)_{ideal}} \quad \text{ou seja,} \quad \frac{I_{SS}}{I_{sp}} = \frac{\ln[\varepsilon + \lambda(1 - \varepsilon)]}{\ln\lambda}$$





# Mini-Curso de Propulsão

## Parâmetros de Desempenho:

### $I_{sp}$ ÓTIMO PARA UMA DADA MISSÃO:

Consideremos uma missão  $\mathbf{I} = \mathbf{F} \mathbf{t}_p$  na qual  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{t}_p$  são constantes,

Lembrando que:  $M_0 = M_e + M_L + M_p$  onde:  $c_1 = \frac{F t_p}{g_0}$

$$\text{e onde: } M_p = \dot{m} t_p = \frac{F}{g_0 I_{sp}} t_p = \frac{c_1}{I_{sp}}$$

$M_2 = M_L + \text{fração da } M_e \text{ independente de } I_{sp}$

$M_3 = \text{fração de } M_e \text{ que é dependente de } I_{sp}$

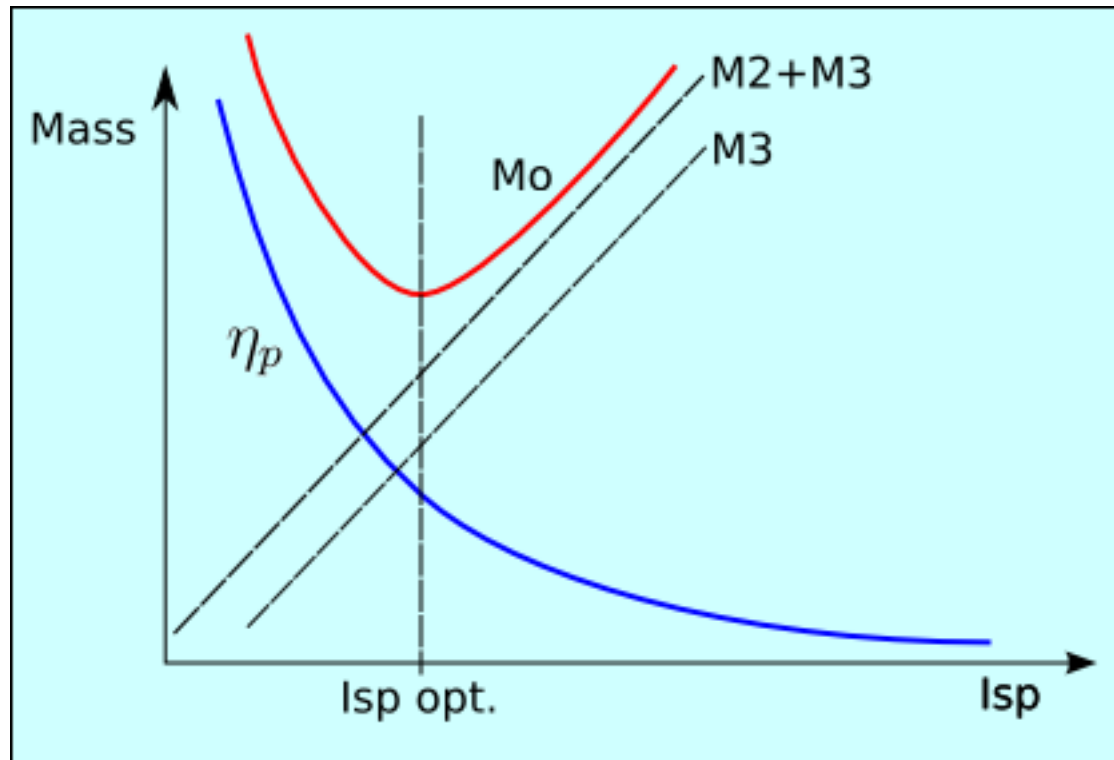
Escolhendo então  $M_3 = c_3 I_{sp}$ , teremos:

# Mini-Curso de Propulsão

## Parâmetros de Desempenho:

$$M_0 = \frac{C_1}{I_{sp}} + M_2 + C_2 I_{sp} \quad \frac{dM_0}{dI_{sp}} = 0 = \frac{-C_1}{I_{sp}^2} + C_2 \Rightarrow (I_{sp})_{opt} = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$$

Então:



# Mini-Curso de Propulsão

## Eficiência Propulsiva:

$$\eta_p = \frac{P_u}{P_T} = \frac{P_u}{P_u + P_L}$$

onde:  **$P_L$**  - Perdas por atrito, swirl no jato e por KE (a maior delas)

Se só forem por: KE  $\rightarrow P_{KE}$  Já a potência útil,  **$P_u$**  é:  **$P_u = FV$**

$$\text{Daí, } \eta_p = \frac{FV}{FV + P_{KE}} = \frac{\dot{m} cV}{\dot{m} cV + \frac{1}{2} \dot{m} (V - V_e)^2}$$

Se  **$p_e = p_0$**  (i.e.,  **$V_e = c$** ),  
 temos:

$$\text{Fazendo } v = \frac{V}{c} \text{ podemos escrever: } \eta_p = \frac{2v}{2v + v^2 - 2v + 1} = \frac{2v}{1 + v^2}$$

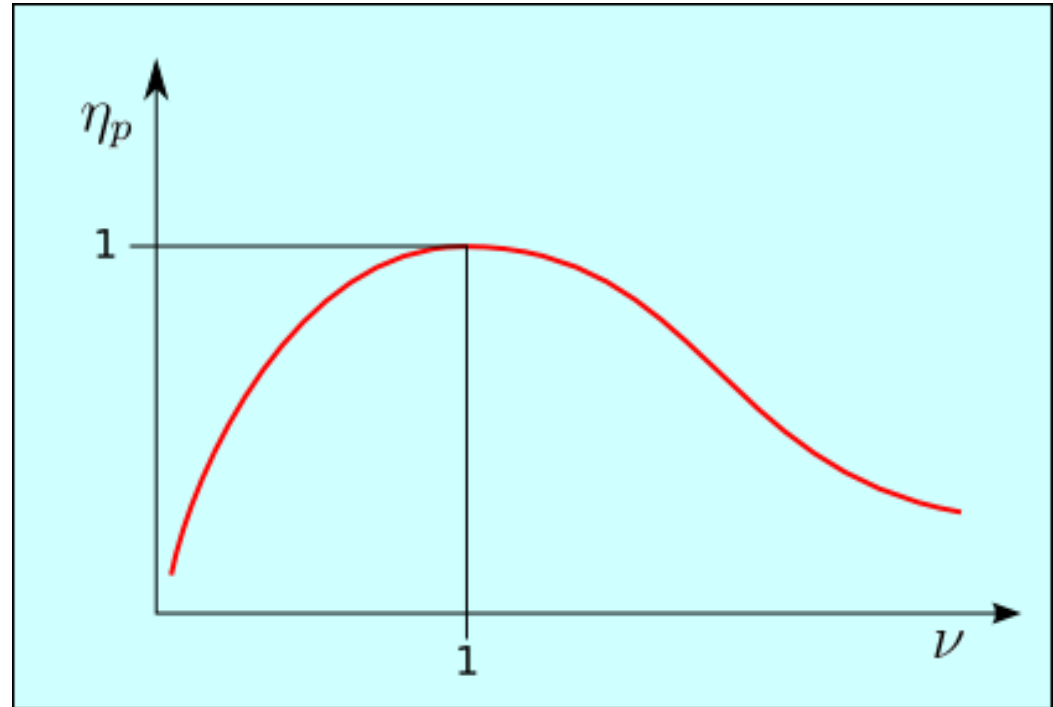
$$\text{Daí: } \frac{d\eta_p}{dv} = 0 = \frac{2(1 + v^2) - 2v \cdot 2v}{(1 + v^2)^2} = \frac{2 + 2v^2 - 4v^2}{(1 + v^2)^2} = \frac{2(1 - v^2)}{(1 + v^2)^2}$$

# Mini-Curso de Propulsão

## Eficiência Propulsiva:

ou seja,  $v = \pm 1$

Q é o Heating Value



**Assim,**

$$\eta_{th} = \frac{P_T}{\text{Potência total suprida}} = \frac{P_T}{\dot{m} \left[ Q + \frac{V^2}{2} \right]} \quad \eta_0 = \eta_{th} \eta_p = \frac{P_u}{\dot{m} \left[ Q + \frac{V^2}{2} \right]}$$



# Mini-Curso de Propulsão

## Máx. e Mín. de Funções de Diversas Variáveis (Uma Revisão):

**$f(x,y)$  em  $R$  tem um Máx (Mín) relativo em  $P(a, b)$**

**se:**

$$\Delta f = f(a + h, b + k) - f(a, b)$$

$$\leq 0 (\geq 0) \text{ para todos } (h,k) \text{ na nbhd de } (a,b)$$

**Condição necessária:  $F(x_1, \dots, x_n)$  tem um máx. ou um mín., apenas para os  $x_i$  tais que  $f_{x_i}, f_{x_n} = 0$  simultaneamente ou deixam de existir. Isto é, para extremo, numa função diferenciável,  $df = 0$  nos pontos de máx. e min.**



# Mini-Curso de Propulsão

## Máx. e Mín. de Funções de Diversas Variáveis (Uma Revisão):

Se  $f(x,y)$  é função com derivadas parciais 2as. contínuas  
e se  $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ ,

então  $f(a,b)$  é máx. se:  $D \equiv f_{xy}^2(a,b) - f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) < 0$   
e  $f_{xx}(a,b) < 0$  e  $f_{yy}(a,b) < 0$ ;

$f(a,b)$  é mín. se:  $D < 0$  e  $f_{xx}(a,b) > 0$  e  $f_{yy}(a,b) > 0$ ;

não é nem Máx. e nem Mín. se  $D > 0$  (sela) e não dá informação se  
 $D = 0$ .



# Mini-Curso de Propulsão

## Técnica dos Multiplicadores de LAGRANGE:

Para determinação dos extremos de  $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  cujas variáveis estão sujeitas aos  $m$  vínculos  $\mathbf{y}_i(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{0}$ ,  $i = 1 \dots m$

Forme a função:  $F = f + \sum_{i=1}^m \lambda_i y_i$

e determine os parâmetros  $\lambda_i$  e os valores  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n$  a partir das  $n$  equações:


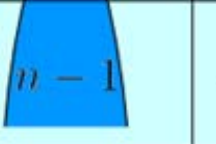
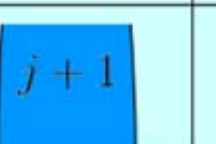
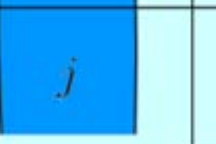

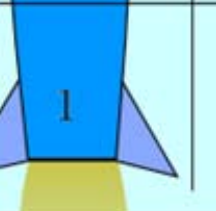
$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, 3 \dots n$$

e das  $m$  equações:  $\mathbf{y}_i = \mathbf{0}$



# Mini-Curso de Propulsão

## Foguetes de Múltiplos Estágios:

$m_n$		$M_n$	$\frac{m_n - M_L}{M_n - M_L}$	$M_L/M_N$
$m_{n-1}$		$M_{n-1}$		
$m_{j+1}$		$M_{j+1}$	$\frac{m_{j+1}}{M_{j+1}}$	$\frac{\sum_{j+2}^n M_j}{\sum_{j+1}^n M_j}$
$m_j$		$M_j$	$\frac{m_j}{M_j}$	$\frac{\sum_{j+1}^n M_j}{\sum_j^n M_j}$
$m_2$		$M_2$	$\frac{m_2}{M_2}$	$\frac{M_3 + M_4 + \dots + M_n}{M_2 + M_3 + \dots + M_n}$
$m_1$		$M_1$	$\frac{m_1}{M_1}$	$\frac{M_2 + M_3 + \dots + M_n}{M_1 + M_2 + \dots + M_n}$



# Mini-Curso de Propulsão

## Foguetes de Múltiplos Estágios:

$m_j$  = Massa do estágio  $j$  vazio (isto é  $m_j = M_j - M_{p_j}$ ) e a razão de carregamento de propelente do estágio  $j$ ,  $\Lambda_j$ .

$$\Lambda_j = \frac{M_{p_j}}{M_j}$$

$\varepsilon_j$  fator estrutural do estágio  $j$  = massa do estágio  $j$  menos propelente do estágio  $j$  / massa do estágio incluindo o propelente, fica:

$$\varepsilon_j = \frac{m_j}{M_j} = 1 - \frac{M_{p_j}}{M_j} = 1 - \Lambda_j$$

e, para o  $n$ ésimo estágio,  $\varepsilon_n = \frac{m_n - M_L}{M_n - M_L}$



# Mini-Curso de Propulsão

## Foguetes de Múltiplos Estágios:

$\lambda$  = razão de carga útil = massa da carga a ser propulsada pelo estágio / massa total do estágio no instante de sua de ignição.

Assim,

$$\lambda_j = \frac{M_j}{\sum_{j+1}^n M_j} \quad \lambda_n = \frac{M_L}{M_n}$$

Num foguete de **1 estágio**,  $\Delta V = c \ln \frac{M_0}{M_0 - M_p} - g_0 t_p$

ou, se **g** varia,

$$\Delta V = c \ln \frac{M_0}{M_0 - M_p} - \bar{g} t_p, \quad \bar{g} = \frac{1}{t_p} \int_0^{t_p} g dt, \text{ isto é, } \Delta V = c \ln \ell - \bar{g} t_p$$

# Mini-Curso de Propulsão

## Foguetes de Múltiplos Estágios:

Já para um veículo de **múltiplo estágios** temos:

$$V_n = \sum_{j=1}^n (\Delta V)_j = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots$$

Admitindo que o estágio **j + 1** inicia a queima logo após o apagamento do estágio **j** (isto é **zero coasting**).

Seja  $l_j$  a razão entre a massa total quando o estágio **j** é aceso pela massa total no seu apagamento, i.e.,

como: 
$$l_j = \frac{M_j + M_{j+1} + \dots M_n}{m_j + M_{j+1} + \dots M_n}$$
 isto é 
$$l_j = \frac{\sum_j M_j}{m_j + \sum_{j+1}^n M_j}$$

Então: 
$$\Delta V_j = c_j \ln l_j - \bar{g}_j t_{pj}$$
 
$$V_n = \sum_{j=1}^n \Delta V_j = \sum_{j=1}^n \{ c_j \ln l_j - \bar{g}_j t_{pj} \}$$



# Mini-Curso de Propulsão

## Análise Simplificada de um Foguetes de Múltiplos Estágios:

Admita que cada estágio tem os mesmos (i.e., são idênticos):  $\varepsilon, \lambda, c, t_p$

Admita também que:  $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 = \mathbf{const}$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ , Vôo Vertical e zero coasting entre estágios.

Então: 
$$\Delta V_j = -c_j \ln \frac{1}{l_j} - g_0 \frac{\tau_p}{n}$$

$\tau_p$  é o total **power-on** time de todos os estágios, isto é,  $\tau_p = n t_{p_j}$

$$l_j = \frac{\sum_j^n M_j}{m_j + \sum_{j+1}^n M_j} = \frac{1}{\frac{m_j}{\sum_j^n M_j} + \frac{\sum_{j+1}^n M_j}{\sum_j^n M_j}}$$



# Mini-Curso de Propulsão

## Análise Simplificada de um Foguetes de Múltiplos Estágios:

$$\text{Assim, } \frac{m_j}{\sum_j M_j} = \frac{m_j}{M_j} \frac{M_j}{\sum_j M_j} = \varepsilon_j \frac{\sum_j M_j - \sum_{j+1}^n M_j}{\sum_j M_j} = \varepsilon_j (1 - \lambda_j)$$

$$\text{Daí, } \ell_j = \frac{1}{\varepsilon_j (1 - \lambda_j) + \lambda_j}$$

$$\text{Neste caso, } \ell_j = \ell = \frac{1}{\varepsilon (1 - \lambda) + \lambda}$$

Então,

$$\Delta V_j = -c \ln[\varepsilon(1 - \lambda) + \lambda] - g_o \frac{\tau_p}{n} \quad \text{e} \quad V_n = n \Delta V_j = -nc \ln[\varepsilon(1 - \lambda) + \lambda] - g_o \tau_p$$



# Mini-Curso de Propulsão

## Algumas Características de Foguetes de Múltiplos Estágios, Similares:

Seja  $G = \frac{\text{Massa total inicial}}{\text{Massa da Payload}} = \frac{\sum_j^n M_j}{M_L} = \frac{M_o}{M_L}$

Como:  $G = \frac{1}{\lambda_1} \frac{1}{\lambda_2} \frac{1}{\lambda_3} \dots \frac{1}{\lambda_n}$

Pois,  $\left( \lambda_j = \frac{\sum_{j+1}^n M_j}{\sum_j^n M_j} \right)$

Então:  $G = \prod_{j=1}^n \left( \frac{1}{\lambda_j} \right) = \left( \frac{1}{\lambda} \right)^n = \lambda^{-n}$

i.e., **G** é um parâmetro de desempenho (**sempre >1**)  $G = \lambda^{-n}$



# Mini-Curso de Propulsão

## Algumas Características de Foguetes de Múltiplos Estágios, Similares:

Definindo  $\mathbf{S}$ , o requisito da missão,

$$S = \frac{\Delta V + g_0 \tau_p}{c} = -n \ln[\varepsilon(1 - \lambda) + \lambda] \quad S = -n \ln[\varepsilon(1 - \lambda) + \lambda]$$

Em geral deseja-se a variação de  $\mathbf{G}$  com  $\mathbf{n}$  (número de estágios) para um dado  $\mathbf{S}$  e para um  $\varepsilon$  razoável. Eliminando  $\lambda$  nas equações. Para  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{S}$  obtemos:

$$\varepsilon(1 - \lambda) + \lambda = e^{-S/n} \quad \therefore -\lambda = \left( e^{-S/n} - \varepsilon \right) \frac{1}{1 - \varepsilon}$$

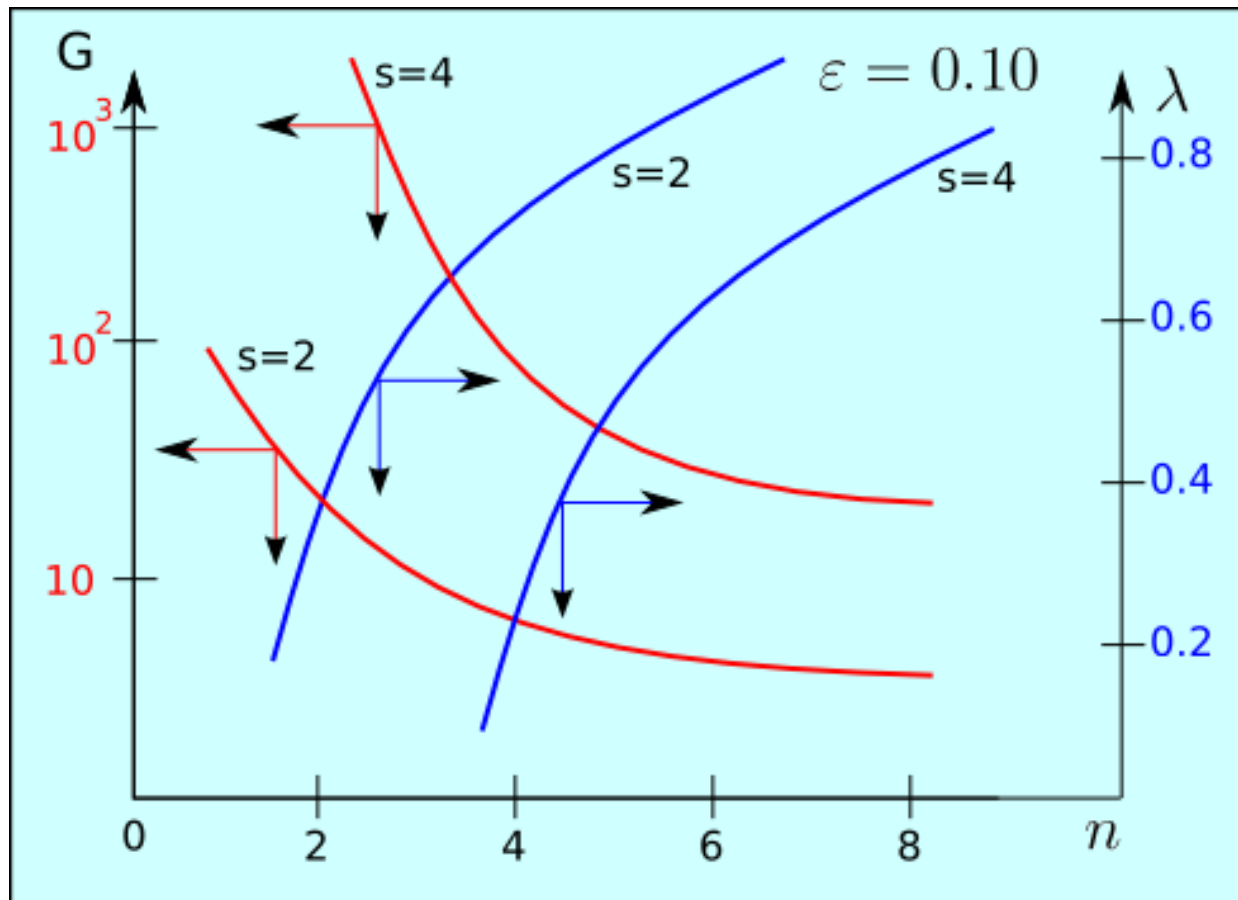
$$\Rightarrow G = \left[ \frac{1 - \varepsilon}{e^{-S/n} - \varepsilon} \right]^n$$

Esta relação pode ser plotada:



# Mini-Curso de Propulsão

## Algumas Características de Foguetes de Múltiplos Estágios, Similares:



# Mini-Curso de Propulsão

## Algumas Características de Foguetes de Múltiplos Estágios, Similares:

$$\Rightarrow G = \left[ \frac{1 - \varepsilon}{e^{-S/n} - \varepsilon} \right]^n \quad \text{se } e^{-S/n} \rightarrow \varepsilon \quad \text{então } G \rightarrow \infty$$

Como  $G > 0$ , então:  $e^{-S/n} > \varepsilon$

daí,  $\therefore -S/n > \ln \varepsilon \quad \therefore S/n < -\ln \varepsilon \quad \frac{S}{n} < \ln \frac{1}{\varepsilon}$

$\therefore n > \frac{S}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$  i.e., se **S** aumenta, **n** aumenta, se  $\varepsilon$  diminui, **n** diminui

Por exemplo, com  $\varepsilon = 0.1$ , então para **S** = 1 , 2 , 3, 4 tem-se:

**n** > **0.44, 0.87, 1.3, 1.7**

1 estágio

2 estágios

# Mini-Curso de Propulsão

## Algumas Características de Foguetes de Múltiplos Estágios, Similares:

Caso para  $n \rightarrow \infty$  Então,  $\lim_{n \rightarrow \infty} G = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1 - \varepsilon}{e^{-S/n} - \varepsilon} \right]^n \rightarrow 1^\infty$  (indet.)

Tomando o Logarítmo:

$$\log G = n \log \left[ \frac{1 - \varepsilon}{e^{-S/n} - \varepsilon} \right] = \frac{\log \left[ \frac{1 - \varepsilon}{e^{-S/n} - \varepsilon} \right]}{1/n}$$

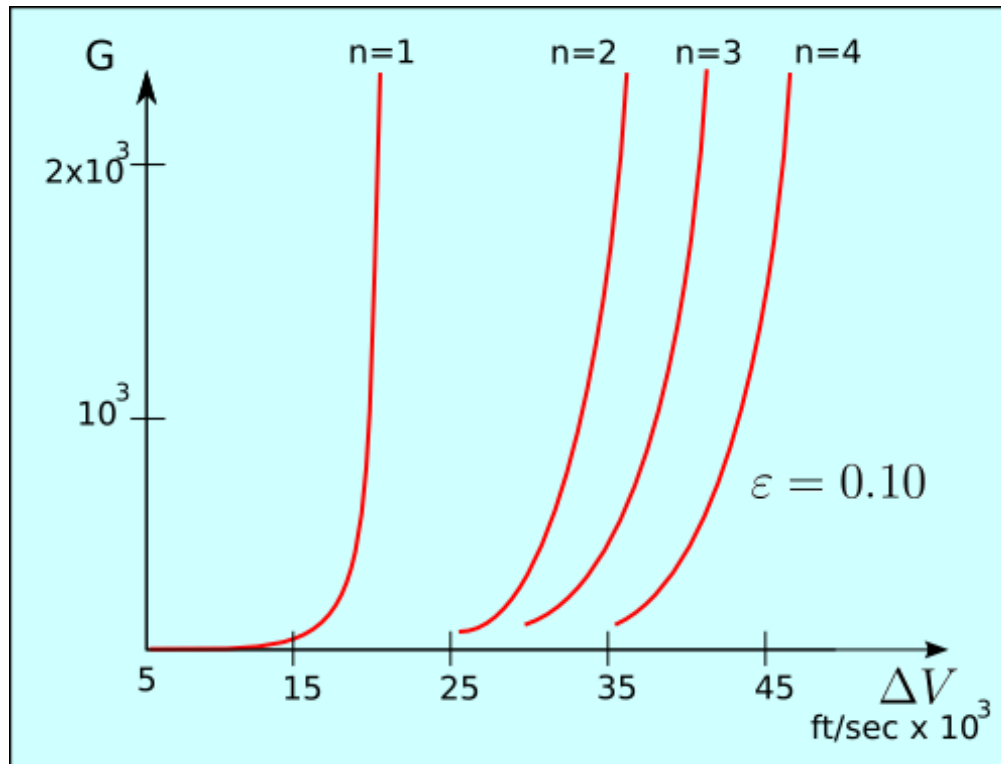
Tomando o limite do log, e usando L'Hôpital:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln G = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dn} \ln \left( \frac{1 - \varepsilon}{e^{-S/n} - \varepsilon} \right)}{\frac{d}{dn} \left( \frac{1}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-S}{n^2} \frac{e^{-S/n}}{e^{-S/n} - \varepsilon}}{-\frac{1}{n^2}} = \frac{S}{1 - \varepsilon}$$

# Mini-Curso de Propulsão

## Algumas Características de Foguetes de Múltiplos Estágios, Similares:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \log G = \frac{S}{1 - \varepsilon} \quad \therefore \quad \lim_{n \rightarrow \infty} G = e^{\frac{S}{1 - \varepsilon}}$ 
 Ou seja, não vai para zero, i.e., não adianta aumentar muito **n**.





# Mini-Curso de Propulsão

## Motor de Foguete Ideal à Propelente Líquido :

Admitindo que:

**(1)  $T_c$ ,  $p_c$ ,  $MW_c$** , são essencialmente @ velocidade zero (isto é, condições de estagnação)

**(2)** No Heat Loss, isto é escoamento adiabático.

**(3)** No friction (2) + (3) isentrópico

**(4)** Gás perfeito, composição congelada.

**(5)** Caloricamente perfeito, i.e.,  **$c_p$  e  $c_v$  consts.**

**(6)  $\mathbf{1 - D}$** , permanente.

Assim:

$$\therefore \gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}, \quad R = \frac{R_u}{MW}, \quad c_p - c_v = R, \quad p = \rho RT, \quad c_v = \frac{R}{\gamma - 1}$$

# Mini-Curso de Propulsão

## Motor de Foguete Ideal à Propelente Líquido :

Daí:

$$T = T(x), \quad p = p(x), \quad V = V(x), \quad M = \frac{V}{a} = \frac{V}{\sqrt{\gamma RT}}, \quad \frac{A}{A_x} = \frac{1}{M} \left[ \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

$$\frac{T}{T_c} = \left( \frac{p}{p_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\varphi}} = \left( \frac{p}{p_e} \right)^{\gamma-1}, \quad \text{, na garganta, } M^* = 1 \text{ e } v = a. \text{ Como sabemos,}$$

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[ \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2}{\frac{\gamma+1}{2}} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

E mais,

$$\frac{p_c}{p} = \left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{\gamma/\gamma-1}, \quad \frac{T_c}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2, \quad \frac{\rho_c}{\rho} = \left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{1/\gamma-1}$$

na garganta,  $M = 1$ ,  $a^* = V_*$ ,  $A = A^*$ ,  $a_* = \sqrt{\gamma RT^*}$

$$\frac{T_c}{T_*} = \frac{\lambda + 1}{2}, \quad \frac{p_c}{p_*} = \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\gamma/\gamma-1} \quad \text{como}$$

$$\dot{m} = p_c A \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{1}{RT_c} \right) \left( \frac{p}{p_c} \right)^{2/\gamma} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_c} \right)^{\gamma-1/\gamma} \right]^{1/2} \right\}$$

E no plano de saída da tubeira,  $A = Ae$ ,  $V=Ve$ ,  $p=pe$ , tem-se:

$$\frac{A_e}{A^*} = \varepsilon = \frac{\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}{\left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{1/\gamma} \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]^{1/2}}$$

Como  $c_p T_c = c_p T_e + \frac{V_e^2}{2}$  Então:

$$V_e = \left\{2c_p(T - T_e)\right\}^{1/2} = \left\{\frac{2\gamma R T_c}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_c}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]\right\}^{1/2}$$





# Mini-Curso de Propulsão

## Motor de Foguete Ideal à Propelente Líquido :

Empuxo e Coeficiente de Empuxo

$$F = \dot{m} V_e + A_E (P_e - p_o)$$

$$F = p_c A_* \left\{ \frac{2\gamma^2}{\gamma-1} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left[ 1 - \left( \frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} + A_e (p_e - p_o) \quad \text{Como CF}$$

$$c_F = \frac{F}{A_* p_c} \quad \text{Daí} \quad c_F = \left\{ \frac{2\gamma^2}{\gamma-1} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left[ -1 \left( \frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} + \epsilon \left( \frac{p_e}{p_c} - \frac{p_o}{p_c} \right)$$



# Mini-Curso de Propulsão

## Motor de Foguete Ideal à Propelente Líquido :

$$c_F = c_F \left( \gamma, \quad \varepsilon, \quad \frac{p_o}{p_c}, \quad \frac{p_e}{p_c} \right)$$

$p_e = p_o$  expansor  
 perfeitamente expandido  
 $p_e > p_o$  under expanded  
 $p_e < p_o$  over expanded

$$c_{Fmax} = \left\{ \frac{2\gamma^2}{\gamma-1} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \left[ -1 \left( \frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

CF max qdo.  $Pe=p0$

$$(c_F)_{ult.} = \left[ \frac{2\gamma^2}{\gamma-1} \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$Pe = p0 = 0$



# Mini-Curso de Propulsão

## Motor de Foguete Ideal à Propelente Líquido :

Velocidade Característica,  $c^*$

$$c^* = \frac{p_c A^*}{\dot{m}} \quad \text{Daí:}$$

$$c^* = \frac{p_c A^* a^*}{\gamma A^* p^*} = \left[ \frac{1}{\gamma} \left( \frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \frac{\bar{R} T_c}{MW} \right]^{1/2}$$

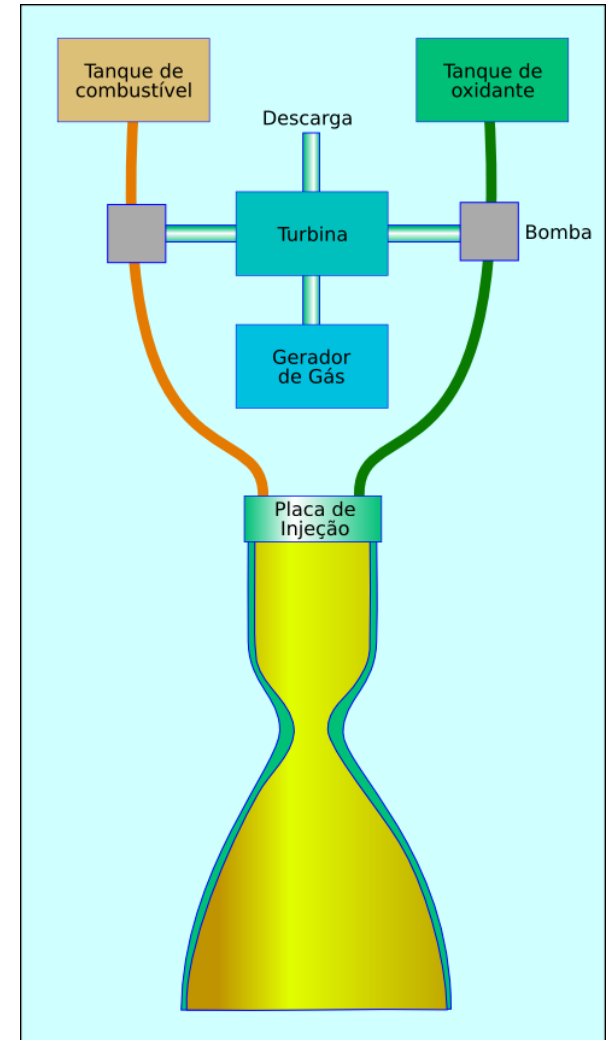
Velocidade Efetiva de Descarga,  $c$

$$c = \frac{F}{\dot{m}} = \frac{F}{p_c A^*} \frac{p_c A^*}{\dot{m}} = c_F c^*; \quad c = \frac{g_0 F}{\dot{w}} = g_0 I_{sp} \quad \text{Então:}$$

# Mini-Curso de Propulsão

## Motor de Foguete Ideal à Propelente Líquido :

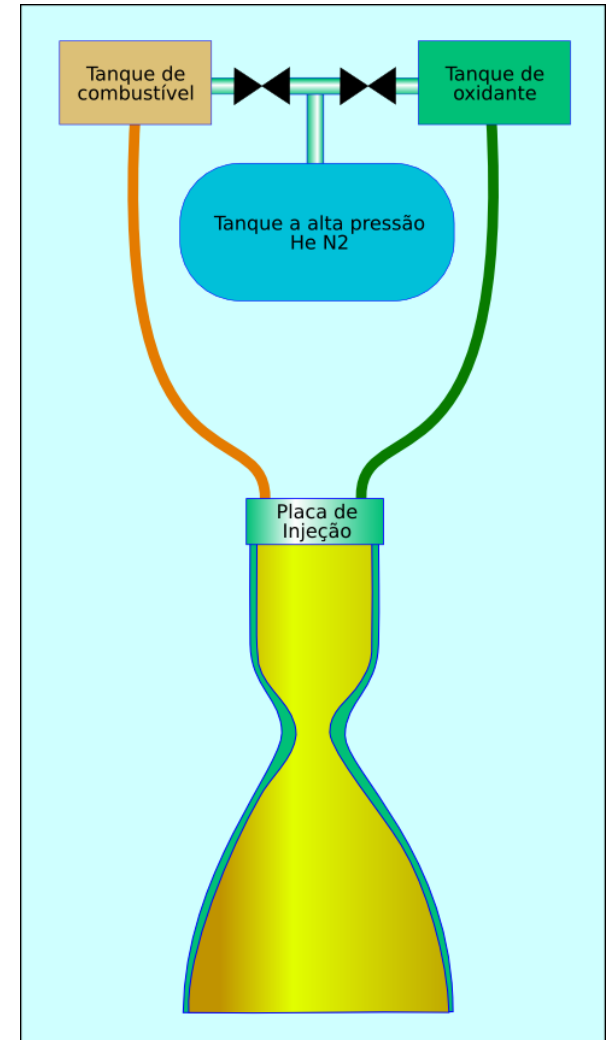
$$c = \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma - 1} (RT_c) \left[ 1 - \left( \frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{(p_e - p_o)A_e}{p_e A_e \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{1}{RT_c} \left( \frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[ 1 - \left( \frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}}$$



# Mini-Curso de Propulsão

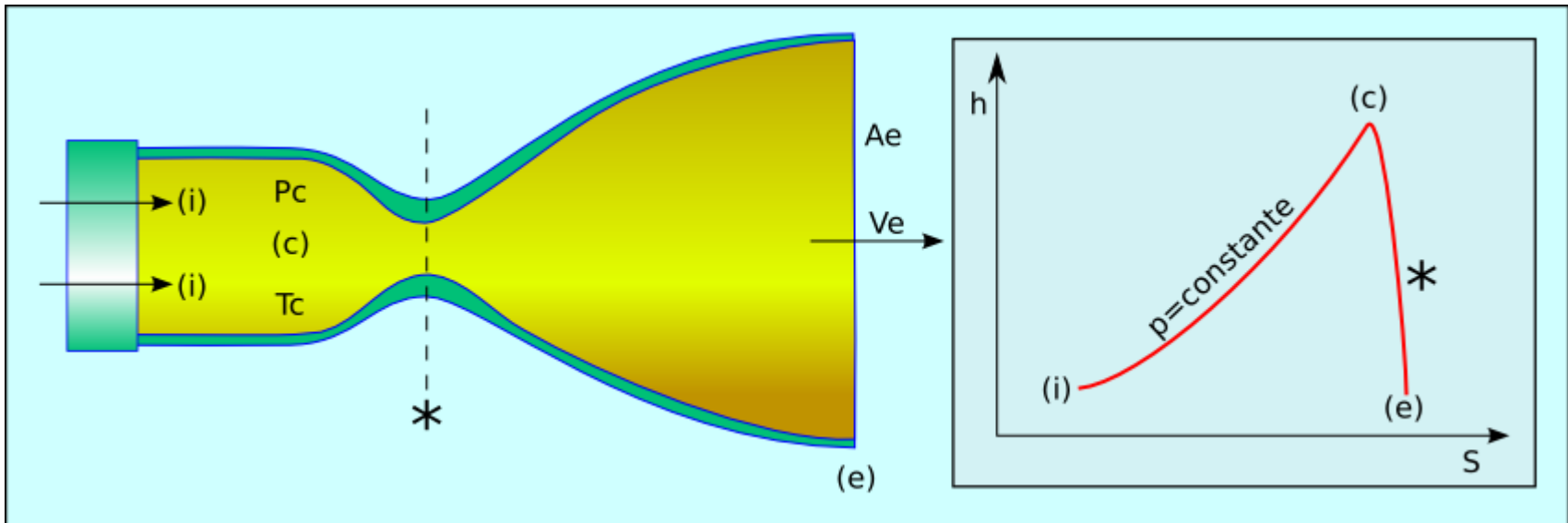
## Motor de Foguete Ideal à Propelente Líquido :

$$c = \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma-1} (RT_c) \left[ 1 - \left( \frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} + \frac{(p_e - p_o)A_e}{p_e A_e \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{RT_c} \left( \frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[ 1 - \left( \frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}}$$



# Mini-Curso de Propulsão

## Motor de Foguete Ideal à Propelente Líquido :





# Mini-Curso de Propulsão

## Considerações Extras Sobre Parâmetros de Desempenho:

Admitindo-se que os escoamentos nas tuberias sejam:

- 1 - Sem atrito nas paredes da tuberia e portanto sem BL,
- 2 - Sem transferência de calor através as paredes da tuberia,
- 3 - Escoamento permanente e constante,
- 4 - Todos os gases deixam o motor axialmente,
- 5 - A velocidade do gás é uniforme em qq. seção perpendicular ao eixo da Tuberia.

Então a impulsão específica **I<sub>sp</sub>** pode também ser escrita como:

$$I_{SP} = \sqrt{\frac{2kRT_c}{k-1} \left[ 1 - \left( \frac{p_e}{p_c} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right]}$$



# Mini-Curso de Propulsão

## Considerações Extras Sobre Parâmetros de Desempenho:

A relação anterior mostra **Isp** como uma propriedade termodinâmica do propelente, i.e., para uma dada razão de expansão ela é independente do projeto do motor, e é proporcional à raiz de **Tc/M**.

A Tabela abaixo compara valores teóricos de Isp, C\* e outros parâmetros no equilíbrio local [shifting] para UMA RAZÃO DE EXPANSÃO  $A_e/A_t = 30$ :

Oxidante	Combustível	MR	Tc, F	C*, fps	Isp, s	M	k
Flúor	Hidrazina	2.30	7930	7280	422	19.4	1.33
Flúor	Hidrogênio	7.60	6505	8355	470	11.8	1.33
N <sub>2</sub> O <sub>4</sub>	Hidrazina	1.00	5450	5830	336	18.9	1.26
N <sub>2</sub> O <sub>4</sub>	MMH	2.19	5640	5710	336	21.5	1.24
N <sub>2</sub> O <sub>4</sub>	UDMH	2.60	5685	5650	333	21.0	1.25
Oxigênio	Hidrogênio	4.00	5935	7985	451	10.0	1.26
Oxigênio	UDMH	1.67	6045	6115	363	21.3	1.25
Oxigênio	RP-1	2.55	6145	5915	353	23.3	1.24
Monoprop.	Hidrazina	-	1750	4280	237	13.0	1.27



# Mini-Curso de Propulsão

## Considerações Extras Sobre Parâmetros de Desempenho:

A figura abaixo compara os valores teóricos de  $I_{sp}$  no escoamento congelado e em equilíbrio local (shifting) para diversas combinações de propelentes:

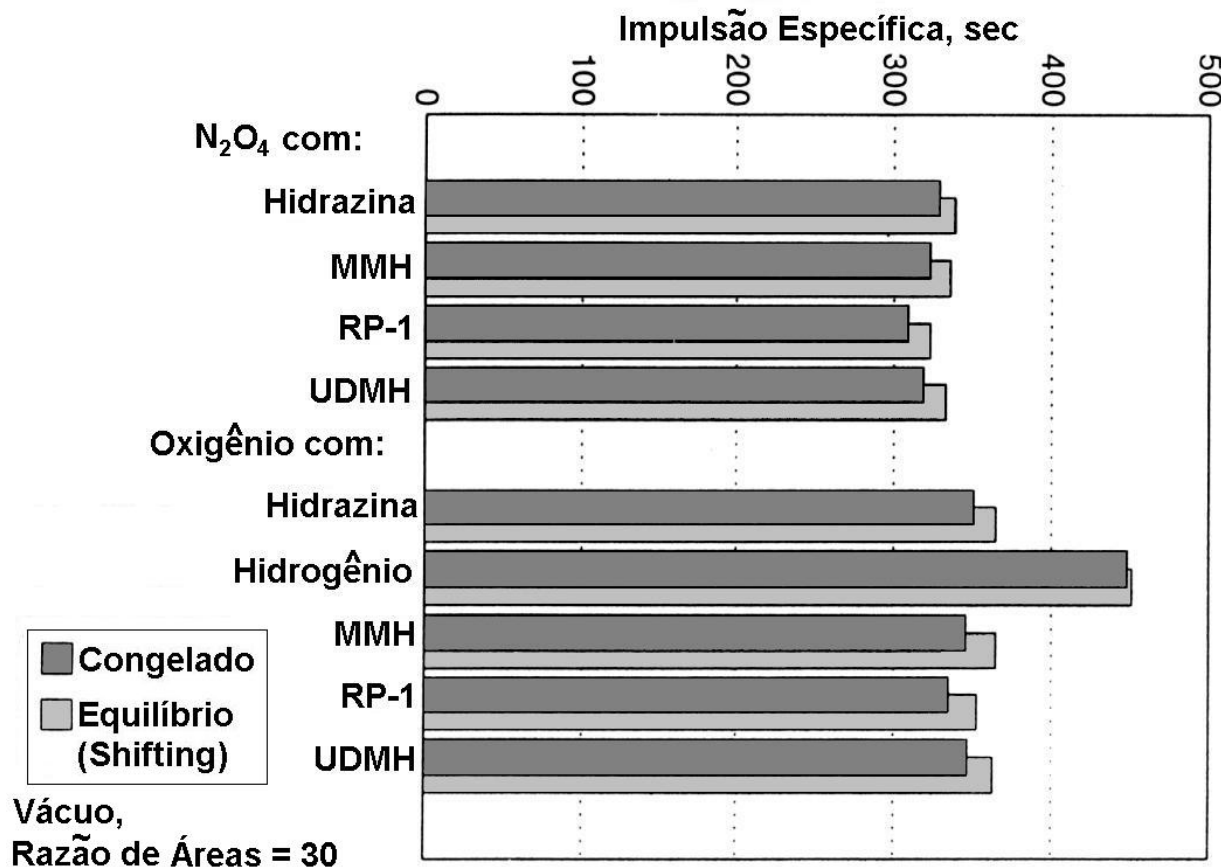


figura -  $I_{sp}$  teórico congelado e no equilíbrio



# Propulsão de Satélites e Veículos Espaciais

Modos: Gás Frio, Monopropelentes, Bi propelentes, Propulsão Exótica

Projeto da Missão: Eqn. De Tsiolkovski e seus corolários:

$$\Delta V = g_o I_{sp} \ln \frac{W_i}{W_f} \quad \text{sem gravidade nem arrasto}$$

$$W_P = W_i \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\Delta V}{g_c I_{sp}}\right) \right] \quad W_P = W_f \left[ \exp\left(\frac{\Delta V}{g_c I_{sp}}\right) - 1 \right]$$

$W_P$  – Peso de prop. para produzir  $\Delta V$ ,  $W_i$  – Peso inicial,  $W_f$  -  
Peso final,  $g_c$  – const grav., 32.1740 ft/s<sup>2</sup> ou 9,806 m/s<sup>2</sup>



Mudanças de órbita: Coplanares, não-coplanares, Transferência de Hohmann, manobras combinadas, reposicionamento de órbita, manobras de atitude, precessão do eixo de spin, modo de ciclos limites (com torque externo\* e sem torque externo), Ciclos limites forçados, descarga de rodas de reação, etc.

\* - Gradiente de gravidade, pressão solar, campo magnético, aerodinâmico.

Como exemplo vamos olhar apenas a Transferência de Hohmann:



# Mini-Curso de Propulsão

## Transferência de HOHMANN:

A transferência entre duas órbitas que não se interceptam pode ser efetuada utilizando uma órbita elíptica de transferência concebida por Walter Hohmann em 1925. Ela, quando pode ser usada se trata de uma transferência em energia ótima, ela é mostrada na figura abaixo e envolve a colocação do raio de periapsis da elipse de transferência igual ao raio da órbita inicial o raio do apoapsis igual ao raio da órbita final, ou seja,

$$r_{PT} = r_i$$

$$r_{AT} = r_f$$

Com esses dois raios ajustados, a elipse de transferência está definida. Dois incrementos de velocidade são necessários para obter a transferência: um para mudar a velocidade inicial do veículo sobre a elipse de transferência e outra para mudar a velocidade sobre a elipse de transferência para a velocidade para a órbita final:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{PT} - \mathbf{V}_i$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{AT} - \mathbf{V}_f$$

Onde:

$\mathbf{V}_{PT}$  - Velocidade de periapse sobre a elipse de transferência

$\mathbf{V}_{AT}$  - Velocidade de apoapse sobre a elipse de transferência

$\mathbf{V}_i$  - Velocidade do veículo na órbita inicial

$\mathbf{V}_f$  - Velocidade do veículo na órbita final

# Mini-Curso de Propulsão

## Transferência de HOHMANN:

Embora a transferência mostrada na figura abaixo e no exemplo seja feita entre duas órbitas circulares, ela poderia também ter sido feita entre órbitas elípticas. Também a transferência poderia ter sido feita órbita alta pra a baixa.

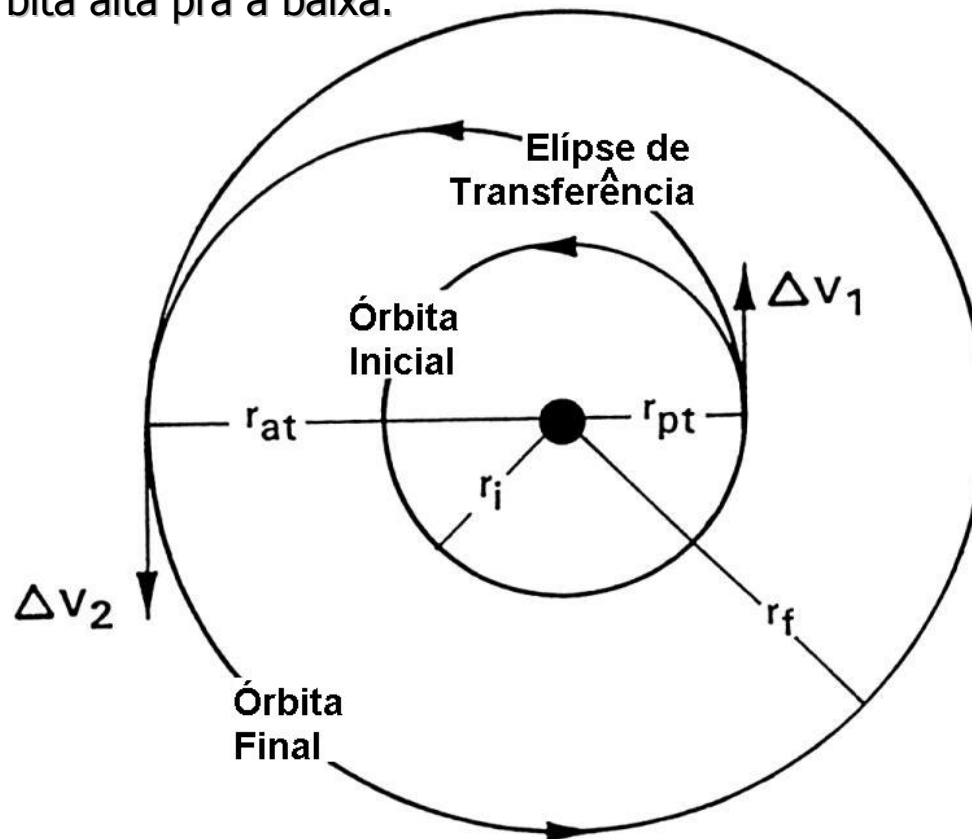


Figura - Transferência de Hohmann.



# Mini-Curso de Propulsão

## Transferência de HOHMANN:

**Exemplo:** Projete uma transferência de Hohmann de uma órbita circular terrestre de raio de 8000 km para uma órbita circular terrestre de raio de 15000 km.

A velocidade sobre a órbita inicial é de:

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \sqrt{\frac{398600}{8000}} = 7.059 \text{ km/s}$$

Semelhantemente a velocidade sobre a órbita final é de:

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \sqrt{\frac{398600}{15000}} = 5.155 \text{ km/s}$$

O semi eixo maior da elipse de transferência é:

$$a = \frac{8000 + 15000}{2} = 11500 \text{ km}$$



# Mini-Curso de Propulsão

## Transferência de HOHMANN:

A velocidade no periapse da elipse de transferência é:

$$V_P = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}} = \sqrt{\frac{2[398600]}{8000} - \frac{398600}{11500}} = 8.062 \text{ km/s}$$

Semelhantemente a velocidade no apoapse será:

$$V_a = \sqrt{\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}} = \sqrt{\frac{2[398600]}{15000} - \frac{398600}{11500}} = 4.300 \text{ km/s}$$

Este resultado também poderia ser obtido de  $r_p V_P = r_a V_a$

$$V_a = \frac{8000 [8.062]}{15000} = 4.300 \text{ km}$$



# Mini-Curso de Propulsão

## Transferência de HOHMANN:

E a velocidade necessária para entrar na órbita de transferência é de:

$$V_1 = 8.062 - 7.059 = 1.003 \text{ km/s}$$

Semelhantemente a variação de velocidade para circularizar a órbita é 0.855 km/s e a variação total de velocidade para a transferência é de 1.858 km/s.

A eficiência da transferência de Hohmann vem do fato de que as duas variações de velocidades são feitas nos pontos de tangência entre as trajetórias.





# Mini-Curso de Propulsão

## Manobras de Atitude:

Alguns, senão todos propulsores num veículo espacial são dedicados ao controle de atitude. Como esses motores devem dar repetidas partidas somente motores a fluidos são candidatos (ou seja a gás frio, a monopropelente e a bi-propelente são aceitáveis).

A Figura que virá a seguir mostrará uma instalação de propulsores para uma instalação típica de um veículo espacial em rotação. Num veículo espacial estabilizado por spin as manobras de atitude consistem de translações para manutenção em estação [station keeping] e reposicionamento, re-orientação do eixo de spin e ajuste da velocidade de Spin.

# Mini-Curso de Propulsão

## Manobras de Atitude:

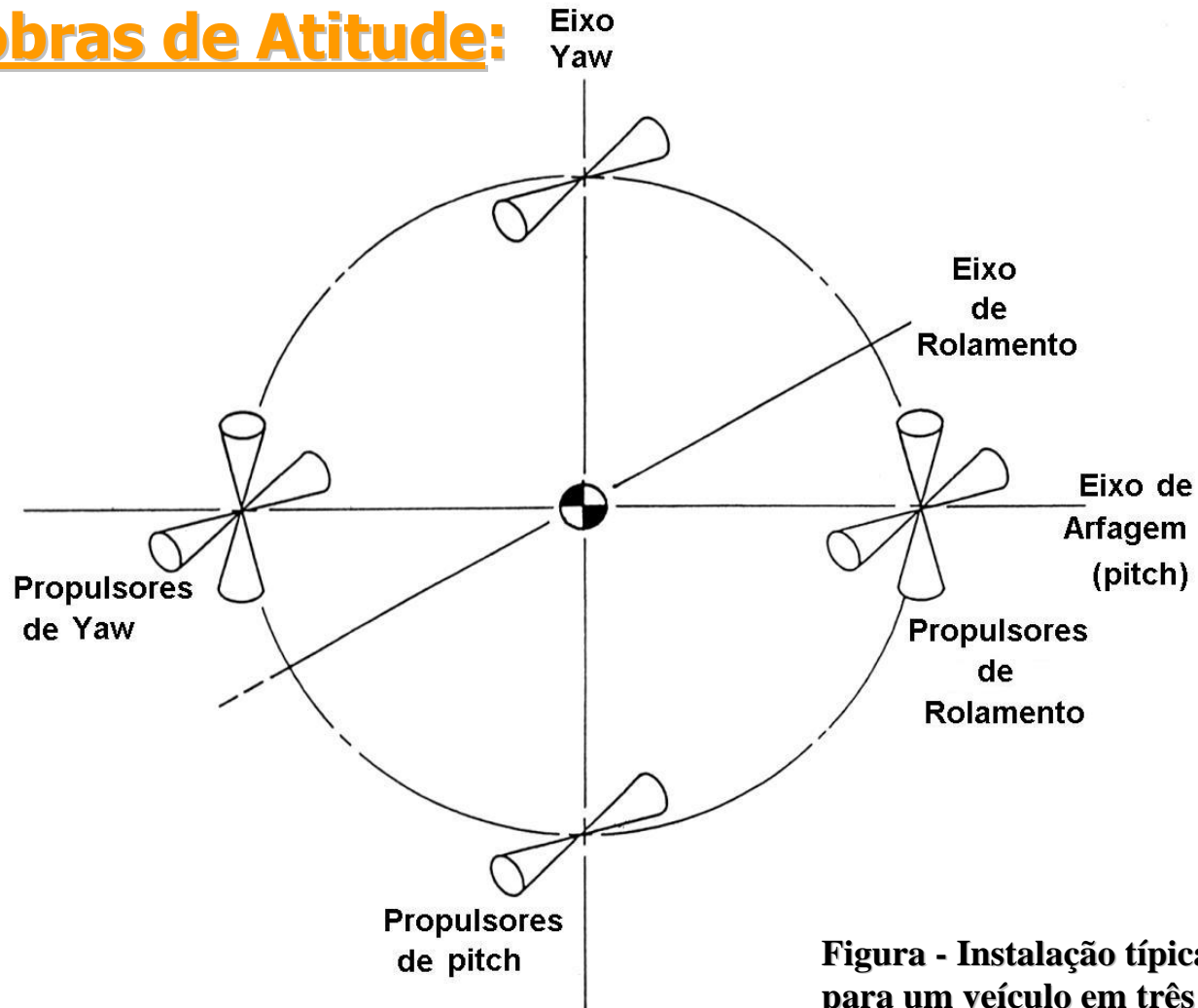


Figura - Instalação típica de propulsores para um veículo em três eixos.

# Mini-Curso de Propulsão

## Manobras de Atitude:

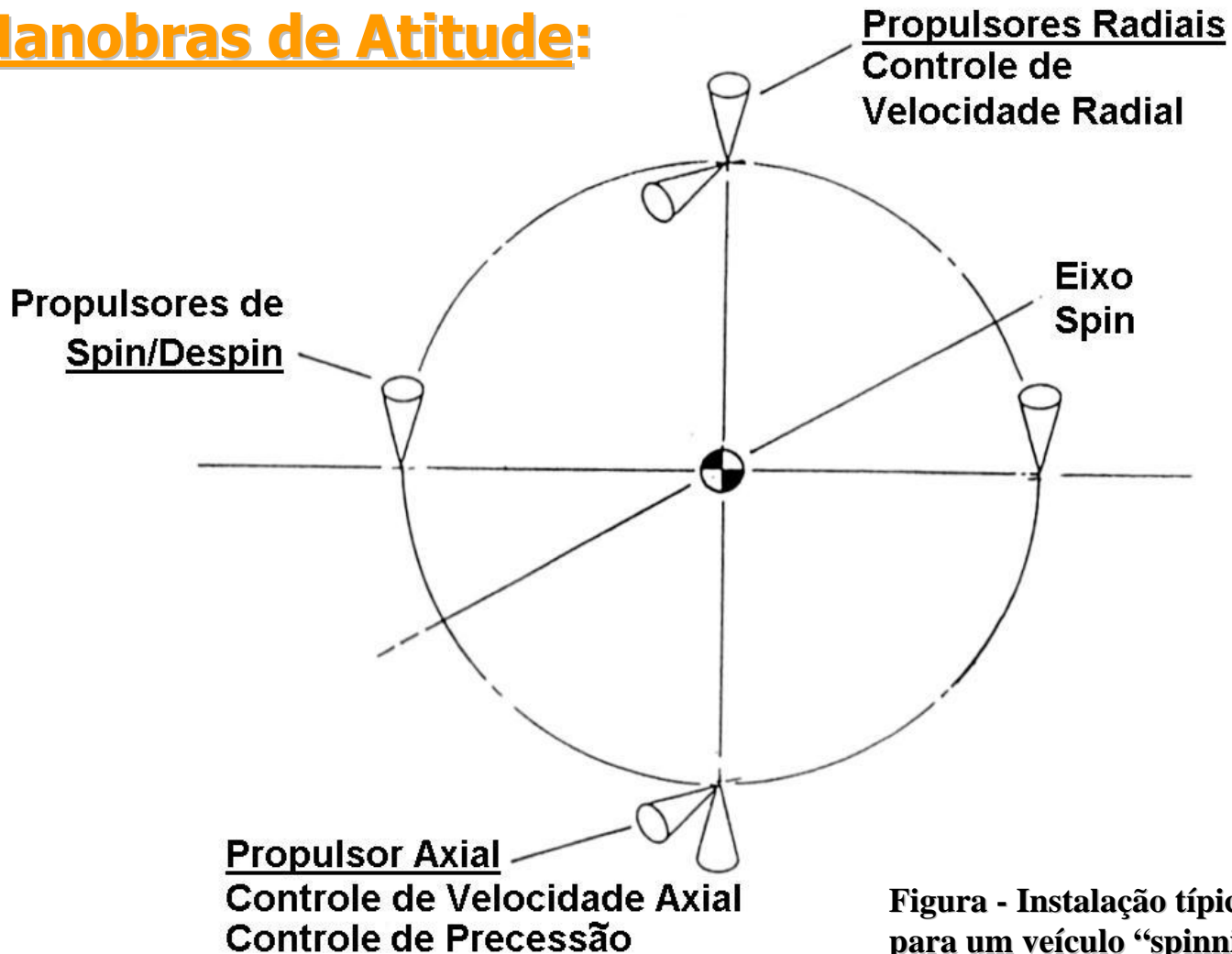
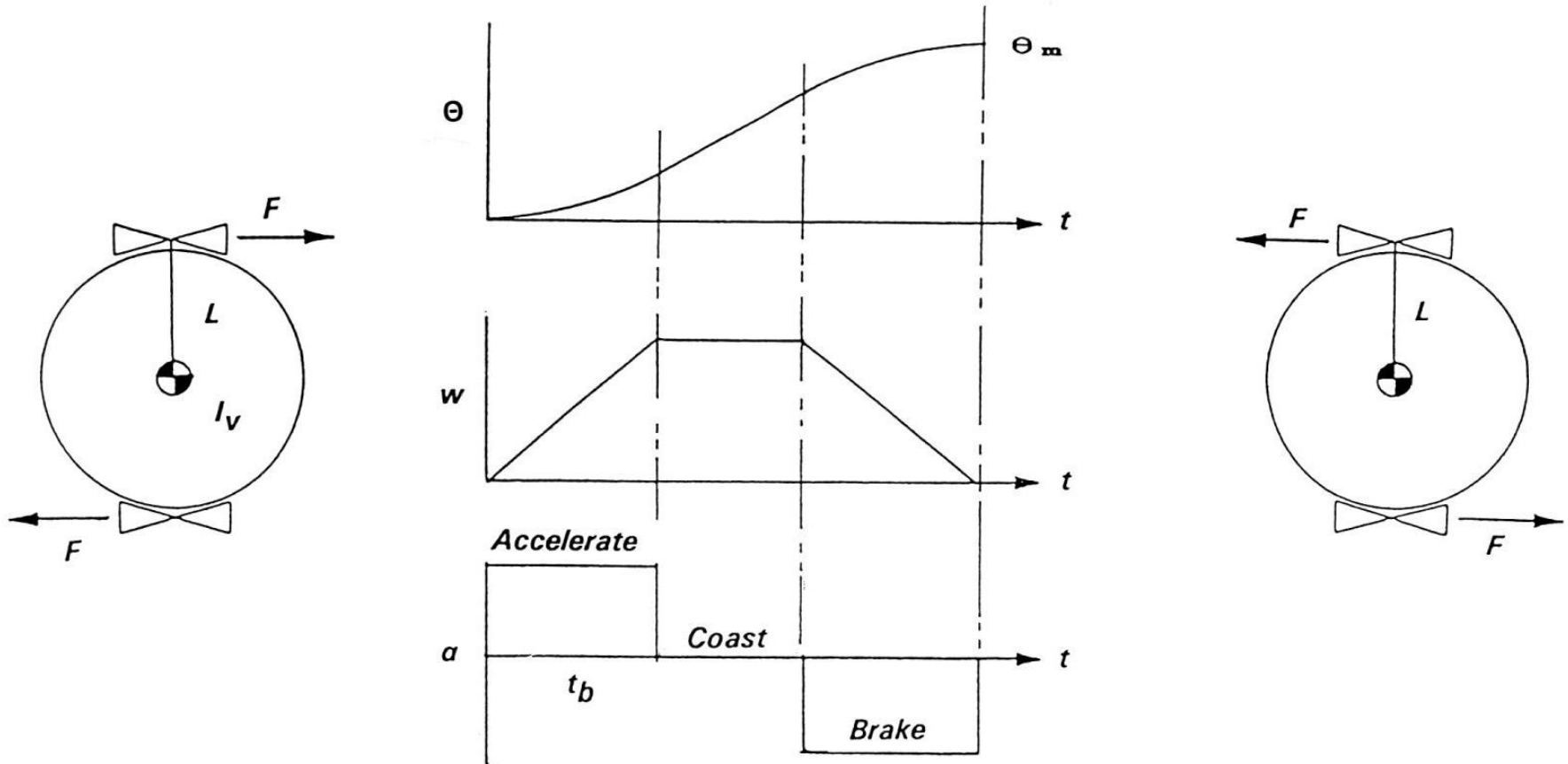


Figura - Instalação típica de propulsores para um veículo "spinning".

# Mini-Curso de Propulsão

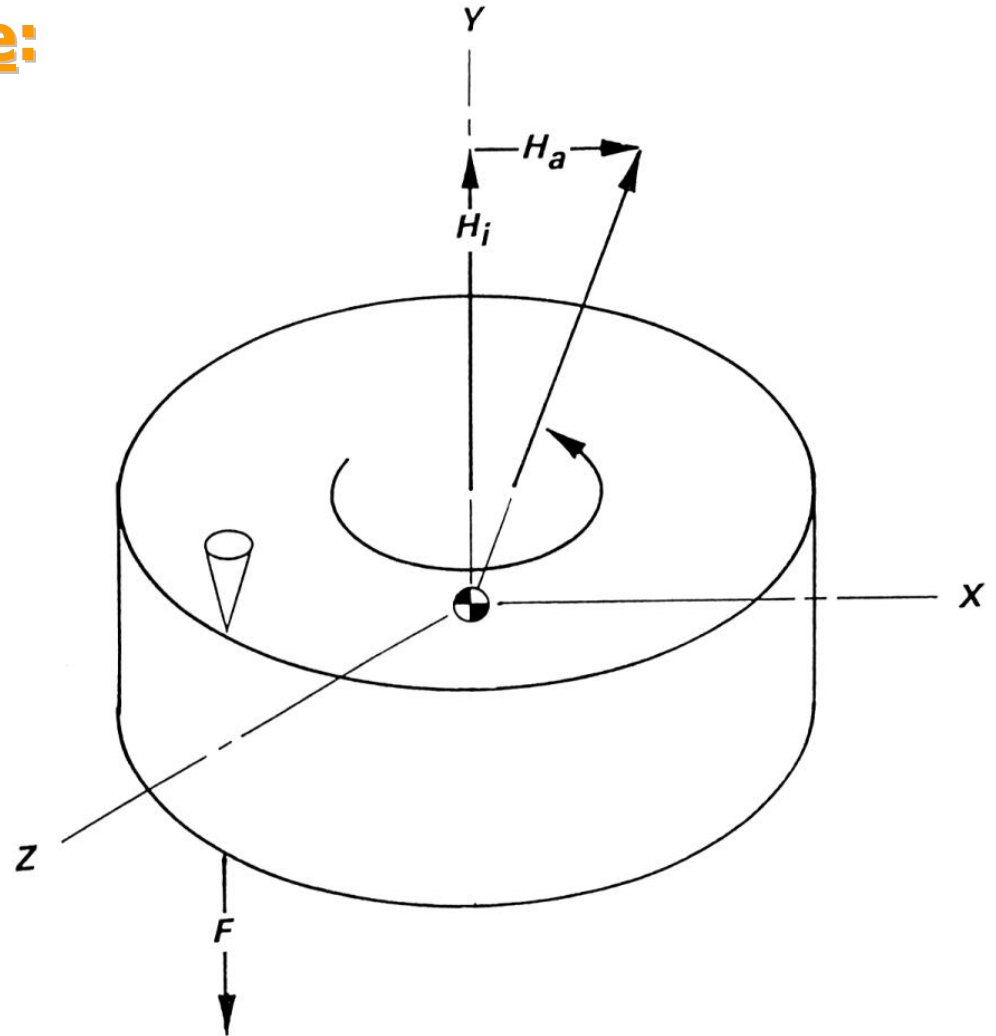
## Manobras de Atitude:



# Mini-Curso de Propulsão

## Manobras de Atitude:

Precessão do eixo de spin

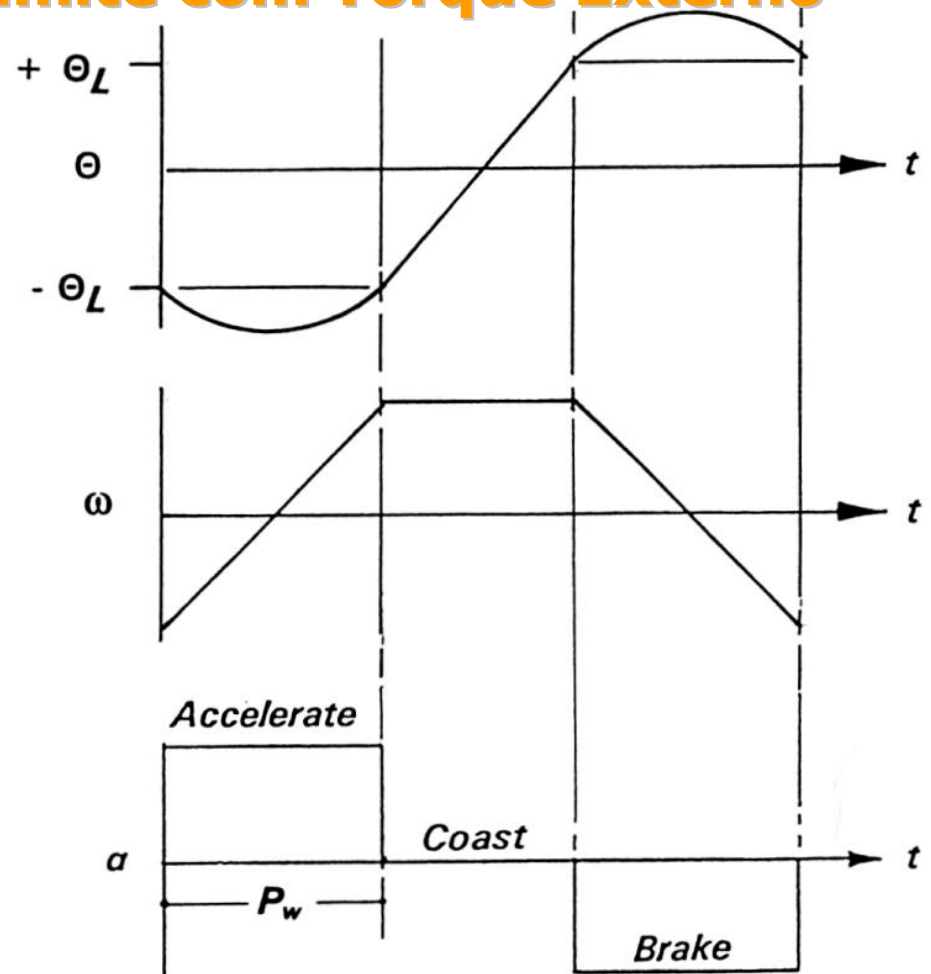


# Mini-Curso de Propulsão

## Título: Mov. do Ciclo Limite com Torque Externo

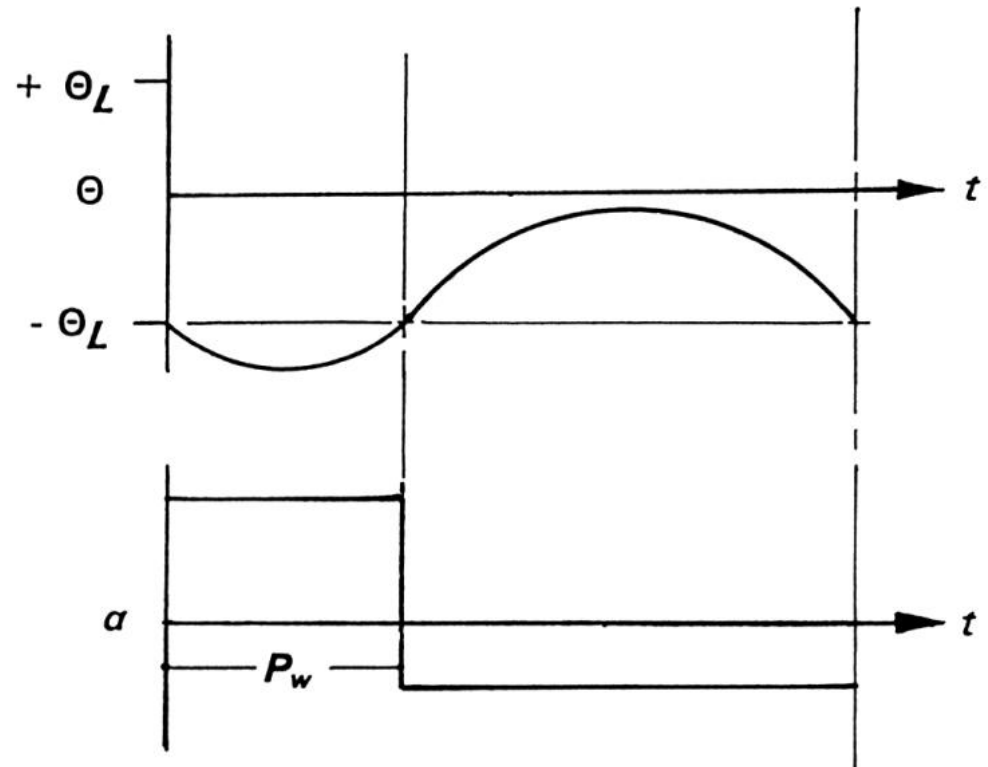
$\theta$  - ângulo de Rotação,  
 rad.,

$\omega$  - Velocidade angular  
 do veículo, rad/s



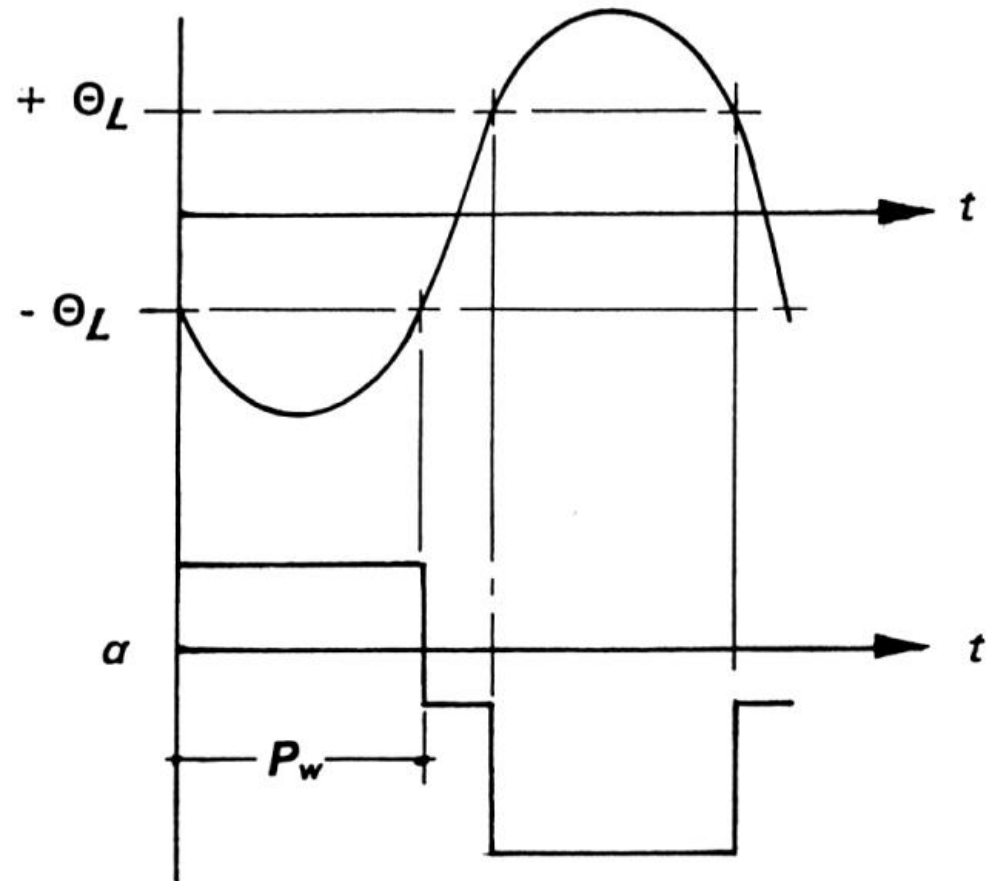
# Mini-Curso de Propulsão

## Título: Ciclo Limite com Torque Externo



# Mini-Curso de Propulsão

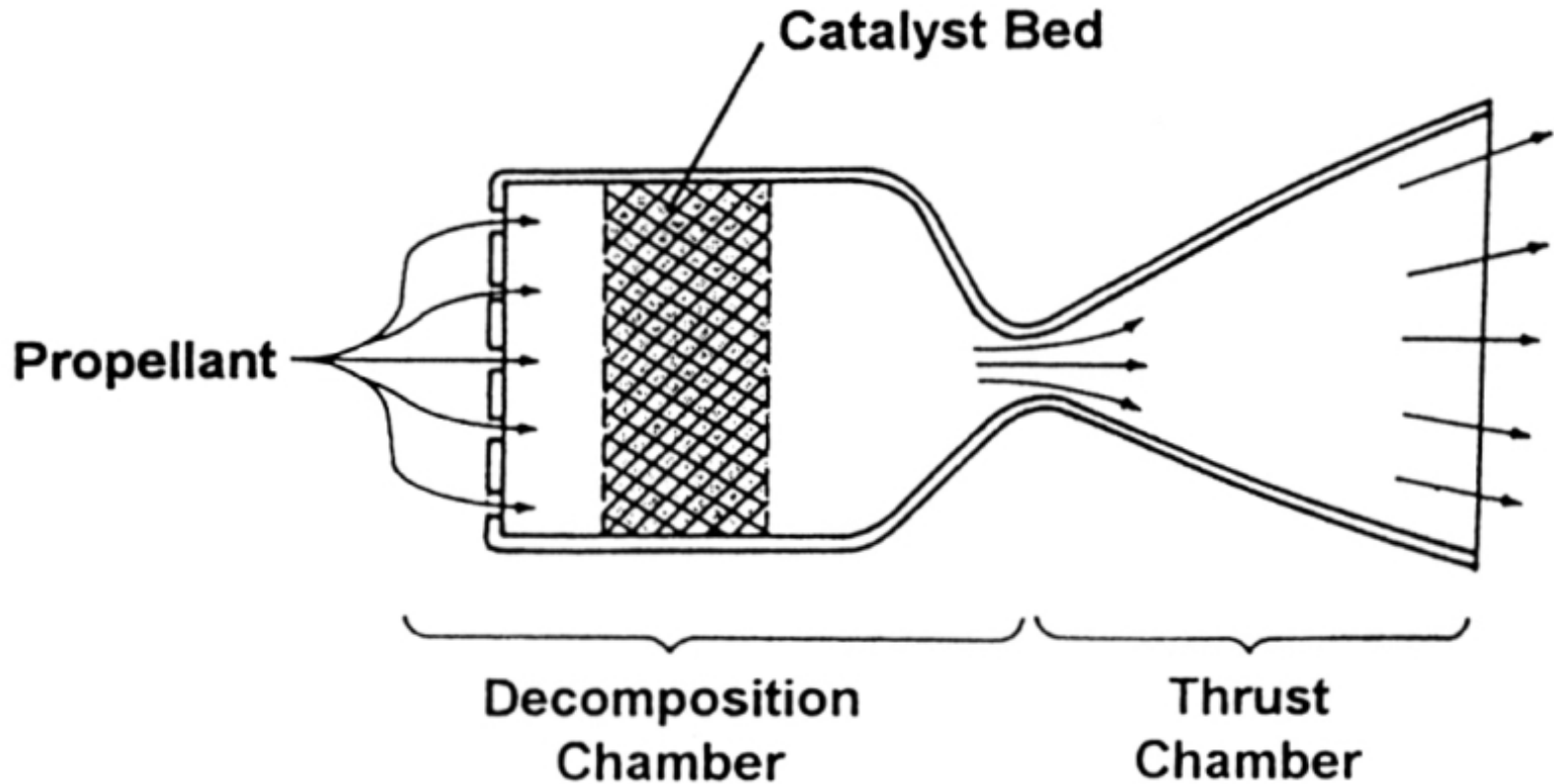
## Título: Ciclo Limite Forçado





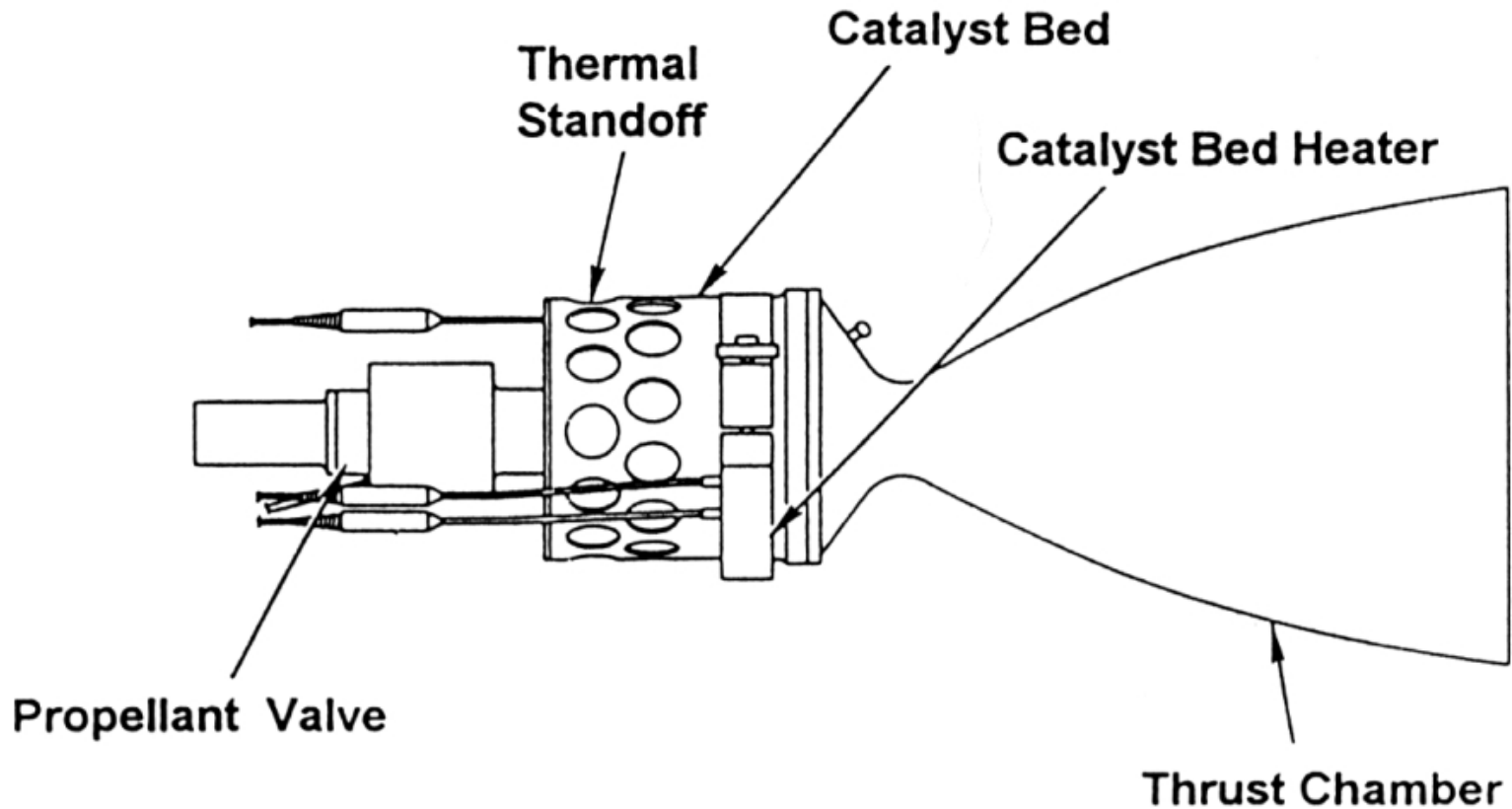
# Mini-Curso de Propulsão

## Título: Motor monopropelante



# Mini-Curso de Propulsão

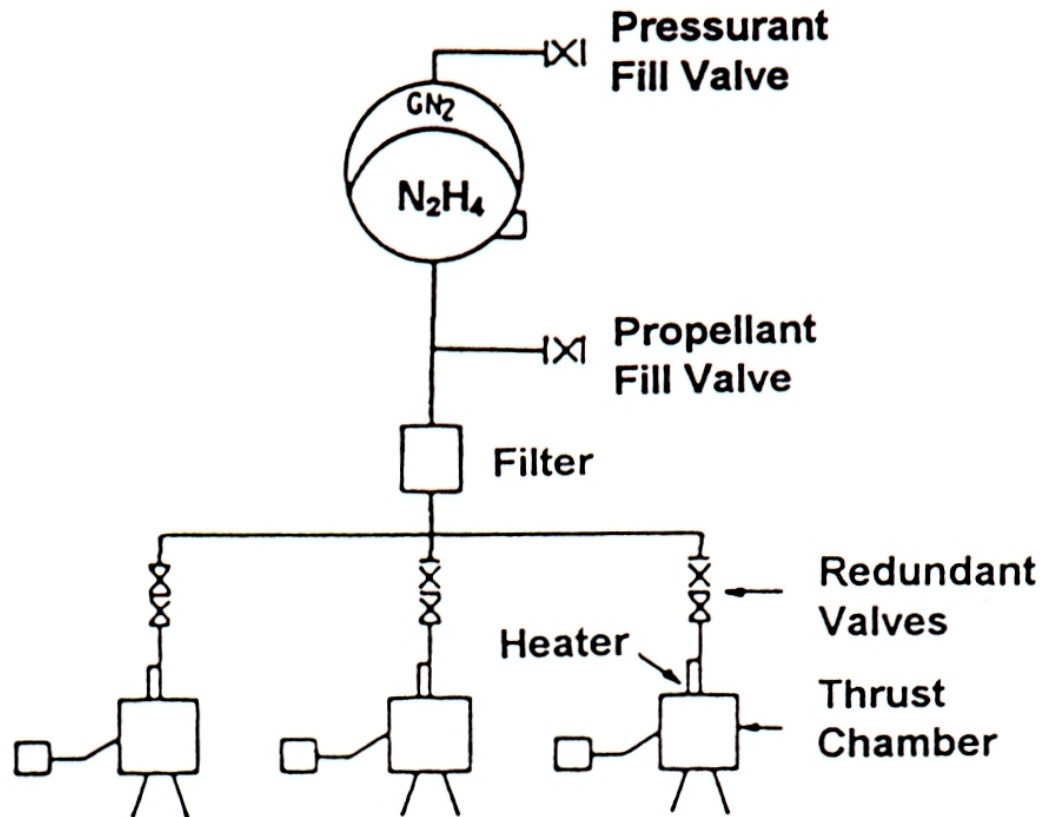
## Título: Motor Monopropelente



# Mini-Curso de Propulsão

## Título: Loop de Propulsão a monopropelente

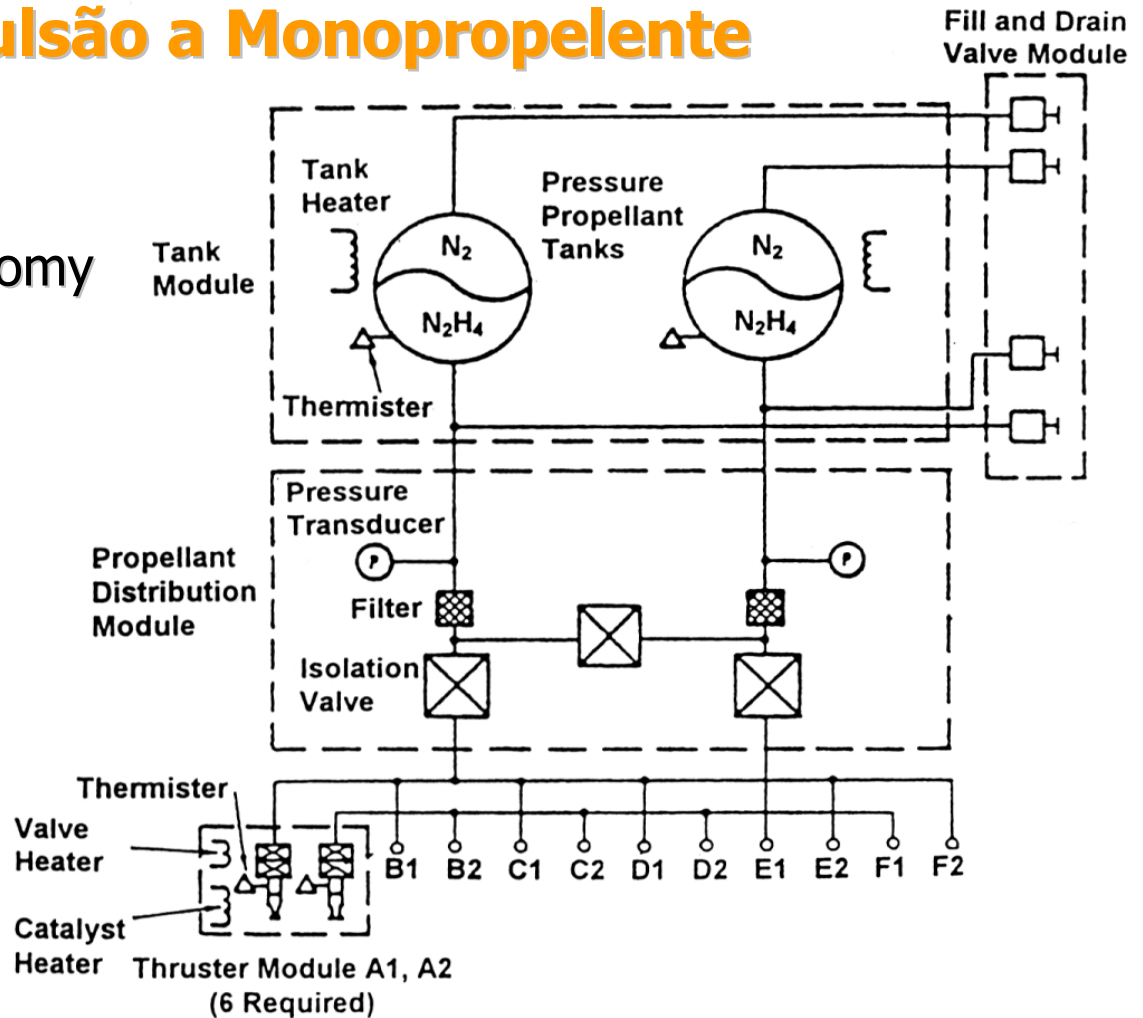
LANDSAT 3



# Mini-Curso de Propulsão

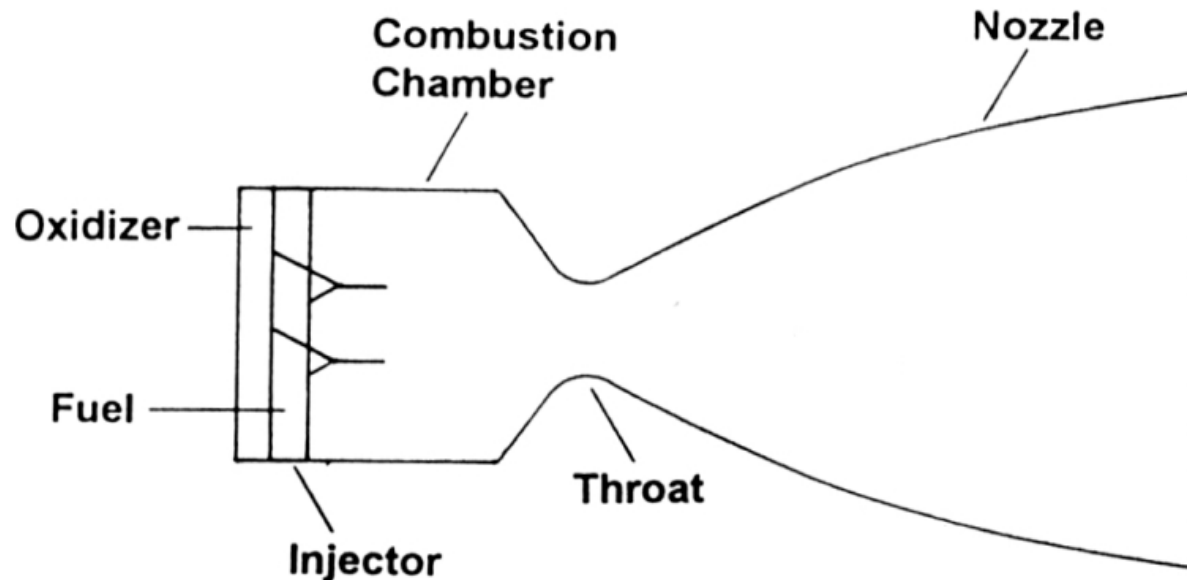
## Título: Loop de Propulsão a Monopropelente

HEAO - High Energy Astronomy  
 Observatory System



# Mini-Curso de Propulsão

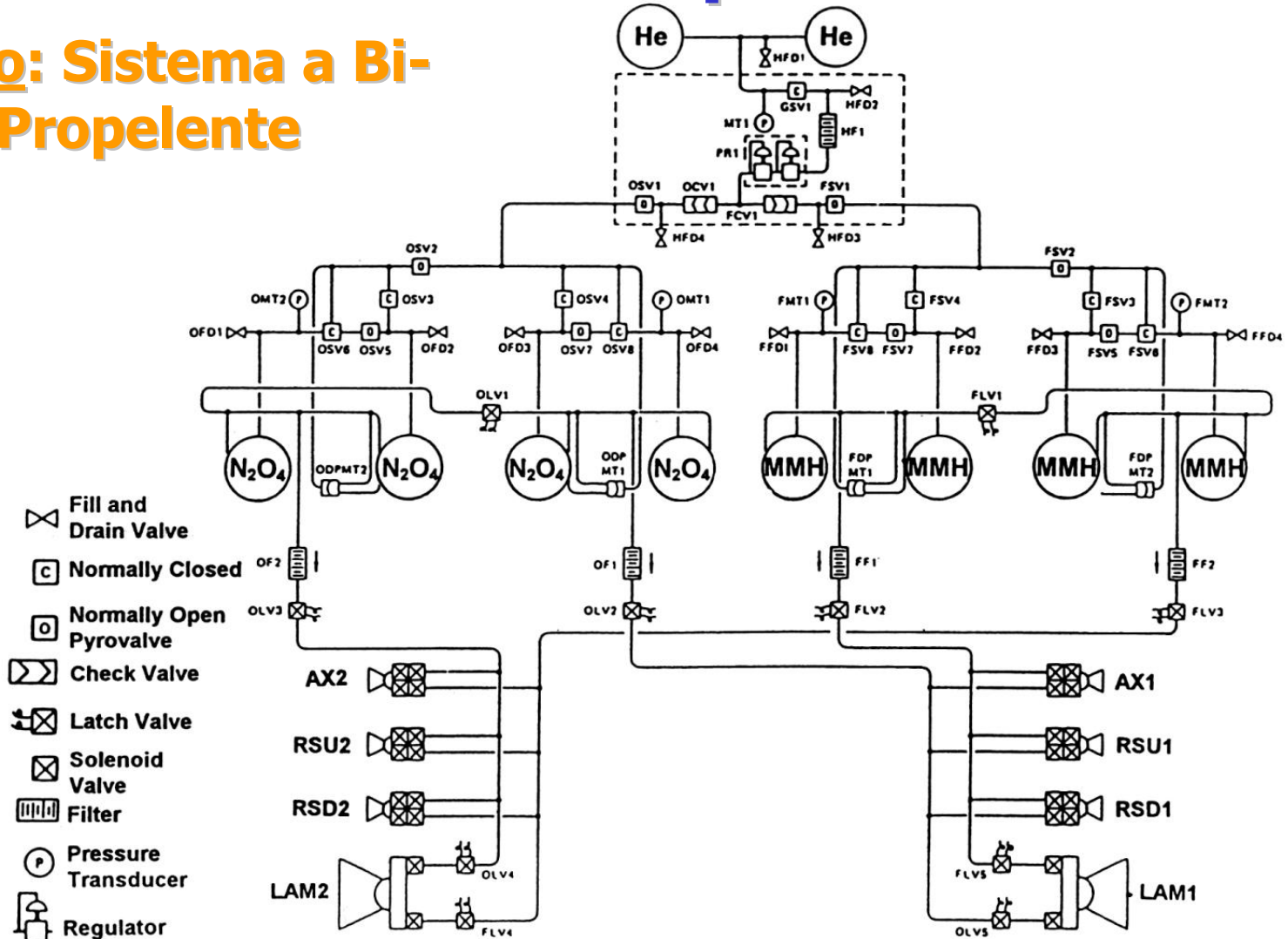
## Título: Sistema a Bi-Propelente



# Mini-Curso de Propulsão

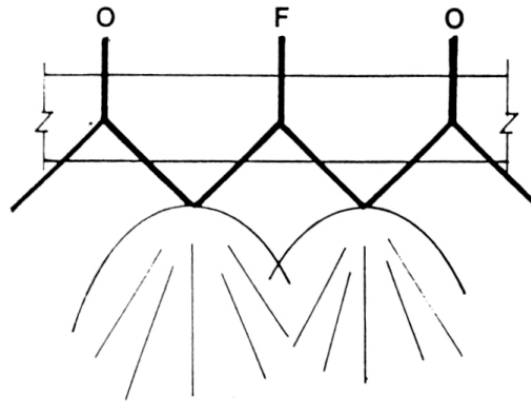
## Título: Sistema a Bi-Propelente

Intelsat VI

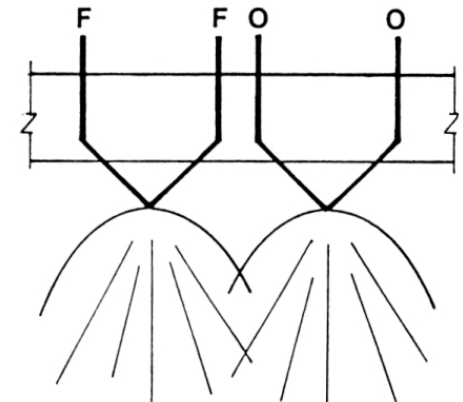


# Mini-Curso de Propulsão

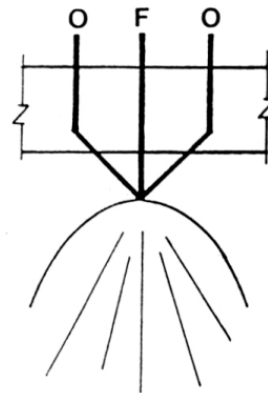
## Título: Sistema a Bi-Propelente



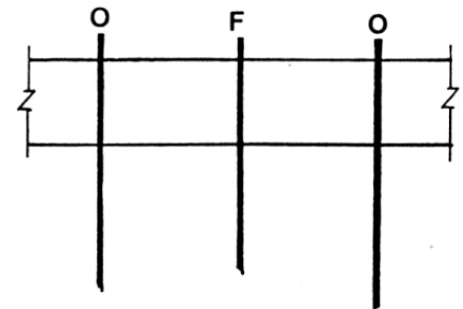
Doublet



Self Impinging



Triplet

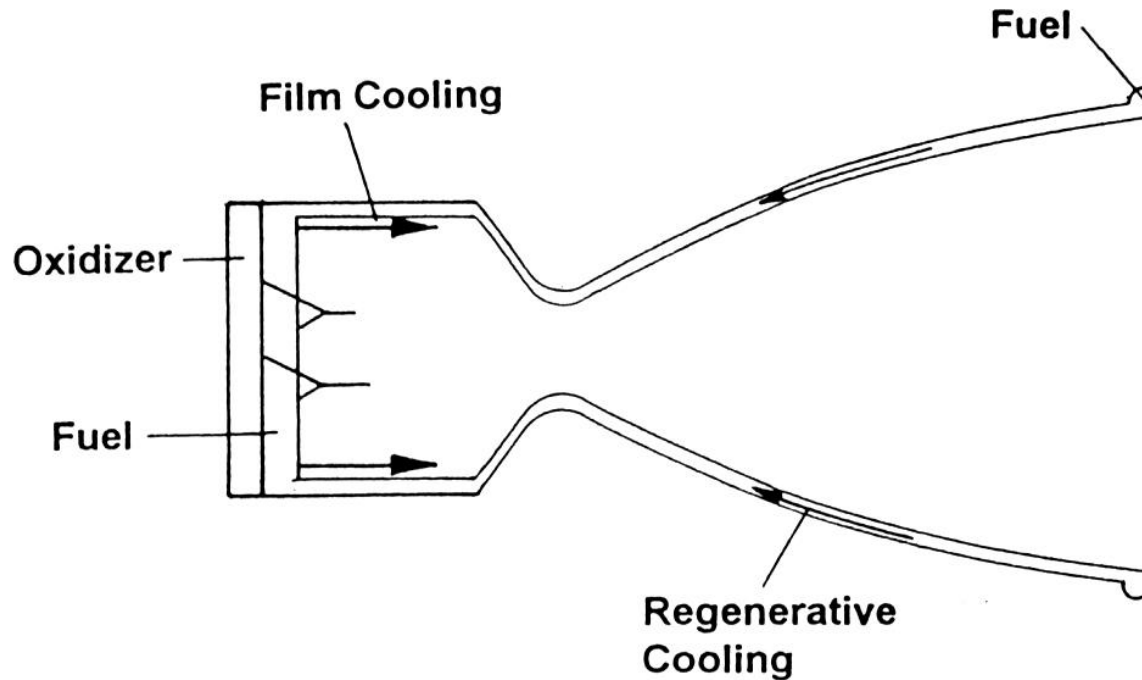


Shower Head

O = Oxidizer  
F = Fuel

# Mini-Curso de Propulsão

## Título: Sistema a Bi-Propelente

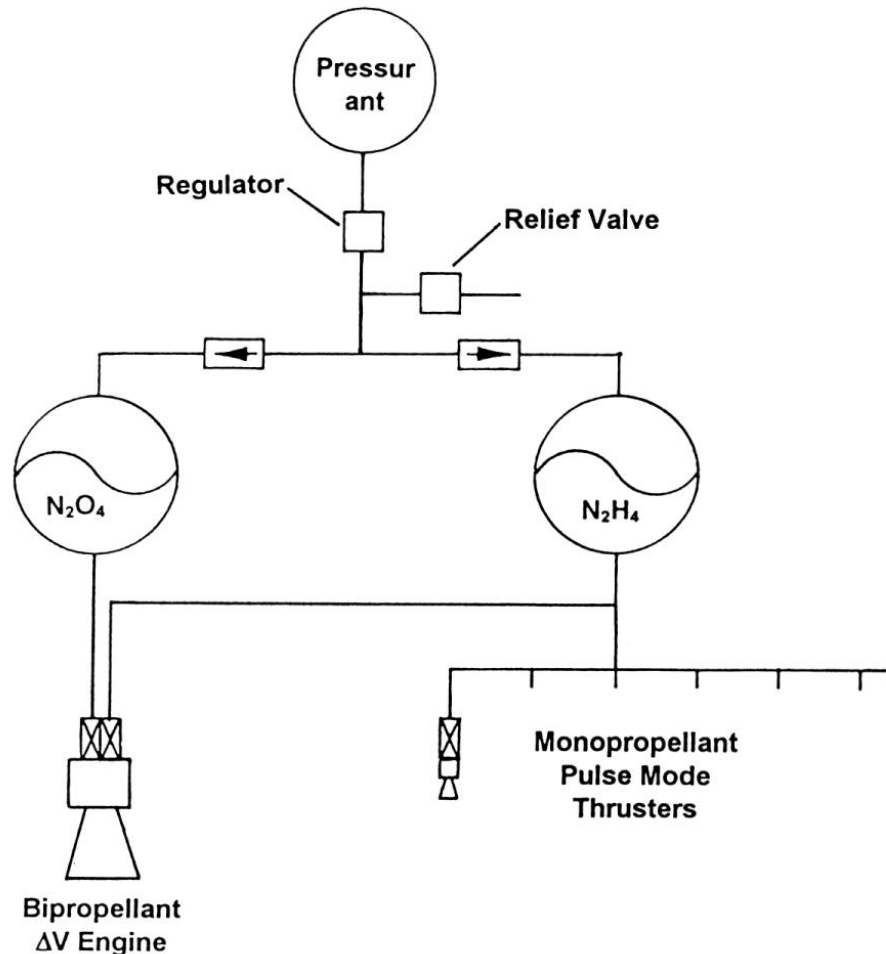


Escoamento com Resfriamento Regenerativo



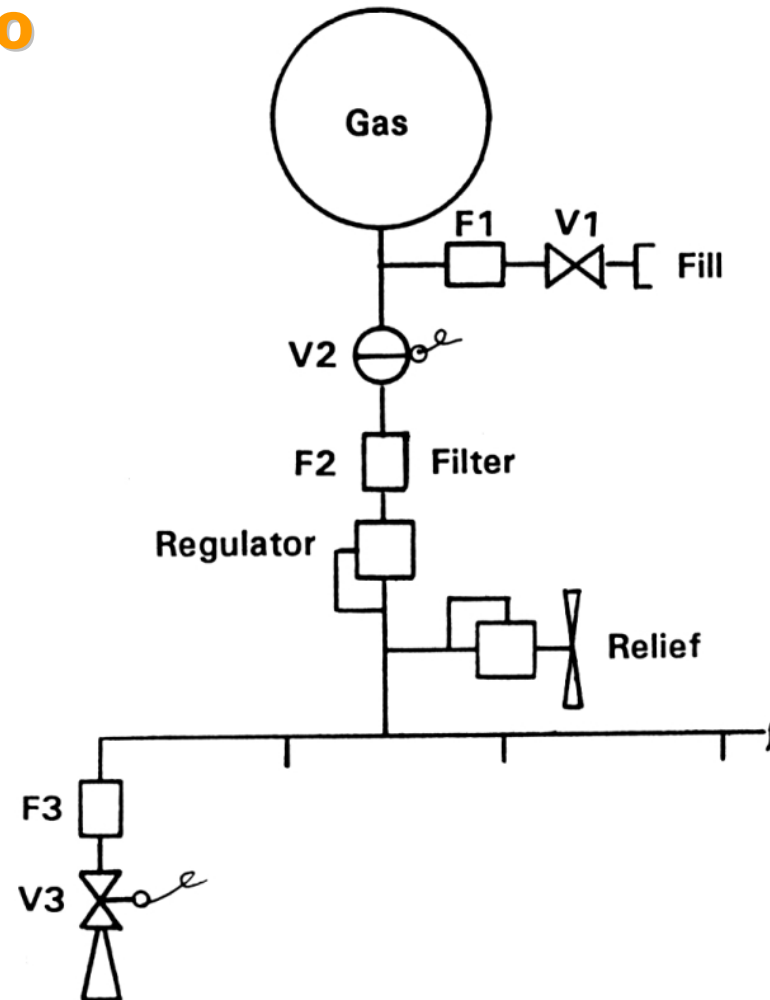
# Mini-Curso de Propulsão

## Título: Sistema de Propulsão "Dual mode"



# Mini-Curso de Propulsão

## Título: Sistema a Gás Frio





# Mini-Curso de Propulsão

## Título: Considerações sobre o PRO (AIAA Propulsion Design Software - I)

Este Programa, residente no DOS, permite a seleção das seguintes Funções:

- 1- Propulsion Requirements - Calcula os requisitos propulsivos para efetuar diversas manobras orbitais e de controle de atitude;
- 2 - Rocket Engine Design - permite estimar os parâmetros de Desempenho, tamanho e peso de propelente, de motores a monopropelente, bi-propelente, gás frio e propelente sólido;
- 3 - Pulsating Engine Performance - Estima o desempenho espado de um motor dadas as características do "pulsing duty cycle"



# Mini-Curso de Propulsão

## Título: Considerações sobre o PRO (AIAA Propulsion Design Software -II)

- 4 - Blowdown System Performance - calcula o desempenho contínuo ou pulsado de um sistema propulsivo tipo blowdown, com a queda de pressão do tanque;
- 5 - System weight Statement - "spreadsheet" para tabelar o peso do sistema;
- 6 - Utilities - Cálculos de projeto do desempenho teórico, equação de estado, projeto de tanque e equipamento de controle de propelente e conversões de unidades;
- 7 - Sai do PRO e volta para o DOS



# Mini-Curso de Propulsão

## Sistemas a Monopropelente:

Produto Químico	Densidade	Temp. da Chama, °F	C*, fps	I <sub>sp</sub> , s	Sensitividade
Nitrometano	1,13	4002	5026	244	Sim
Nitroglicerina	1,60	5496	4942	244	Sim
Nitrato de Etilal	1,10	3039	4659	244	Sim
Hidrazina	1,01	2050	3952	230	Não
Tetranitrometano	1,65	3446	3702	180	Sim
Peróxido de Hidrogênio	1,45	1839	3418	165	Não
Óxido de Etileno	0,87	1760	3980	189	Não
Nitrato de n-propil	1,06	2587	4265	201	Sim



## Mini-Curso de Propulsão

### **Título: Discussão sobre o Techworks – Software que trata da determinação das características físico-químicas de sistemas complexos- I**

Este Programa, residente no DOS, permite a seleção das seguintes Funções:

- 1 – Monta um Problema [9 opções – ver \*]
- 2 – Prepara um Arquivo de Dados Termodinâmicos
- 3 – Encontra as Condições no Equilíbrio
- 4 – Obtém dados Termodinâmicos para um Composto



## Mini-Curso de Propulsão

### Título: Discussão sobre o Techworks –I I

- 5 – Escreve os Dados Termodinâmicos
- 6 – Lista os Dados Termodinâmicos
- 7 – Escolhe o conjunto de Unidades
- 8 – Mostra um Arquivo
- 9 – Converte uma Saída num arquivo .PRN
- X – Sai



## Mini-Curso de Propulsão

### Título: Discussão sobre o Techworks –I I I

- O Techworks resolve os seguintes problemas:
- - T e p dados
- - h e p dados
- - s e p dados
- - T e dens. dadas
- energia interna e densidade dadas
- - entropia e densidade dadas
- - Problema de foguete
- - Problema de detonação
- - Problema de choque





C:\thermo - Tábuas do JANNAF

C:\termo – Arquia dados [.DAT], retira do arquivo thermo e guarda em [.the] e a saída em [.OUT]

Usa a técnica dos Multiplicadores de Lagrange na busca do Mínimo das funções de GIBBS [ H – TS, Diesel, Rocket], HELMHOLTZ [E – TS, OTTO, Cartucho] ou o máximo de Entropia [ S, Detonação ] com os vínculos do balanço de Energia e da conservação de espécies