

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE ATIVIDADES EDUCATIVAS ESPACIAIS

DETERMINAÇÃO DO FLUXO DE MASSA DE
GRÃOS-PROPELENTE CILÍNDRICOS E TUBULARES

CARLOS HENRIQUE MARCHI

Florianópolis, abril de 1987

SIMBOLOGIA

- i = instante de análise (adimensional)
- n = número de pontos ou instantes de análise (adimensional)
- d = diâmetro interno do grão (m)
- D = diâmetro externo do grão (m)
- L = comprimento do grão (m)
- r = raio de queima (m)
- A = área de queima (m²)
- V = volume (m³)
- m = massa (Kg)
- m_e = massa estrutural (Kg)
- m_p = massa do propelente (Kg)
- m_{pl} = massa da carga útil (Kg)
- t = tempo (s)
- t_q = tempo de queima (s)
- V = velocidade de queima (m/s)
- \dot{m} = fluxo de massa (Kg/s)
- ρ = massa específica (Kg/m³)

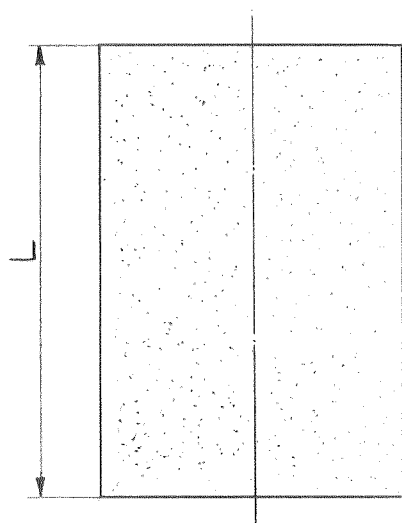
1 - INTRODUÇÃO

Neste trabalho são deduzidas equações numéricas para o fluxo de massa de grãos-propelente cilíndricos e tubulares. A solução não é geral e sim específica para cada tipo de geometria.

O tratamento utilizado é apenas matemático, não sendo feitas considerações quanto a variação de propriedades físicas durante a queima.

A determinação do fluxo de massa é necessário no cálculo de trajetórias, pois tem-se que conhecer a massa do foguete ou mini-foguete em instantes específicos.

2 - GRÃO CILÍNDRICO



2.1 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O objetivo é obter uma expressão para o fluxo de massa de grãos-propelente cilíndricos. A geometria em estudo é vista na fig. 1.

2.2 - HIPÓTESES SIMPLIFICATIVAS

Adotaremos as seguintes hipóteses simplificativas:

- a) a massa específica e a velocidade de queima do propelente são constantes;
- b) a queima é axial;
- c) A combustão do propelente tem início no mesmo instante em toda sua área de queima;

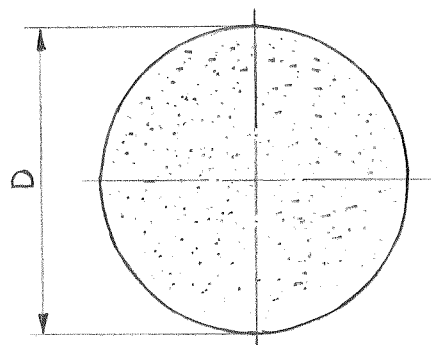
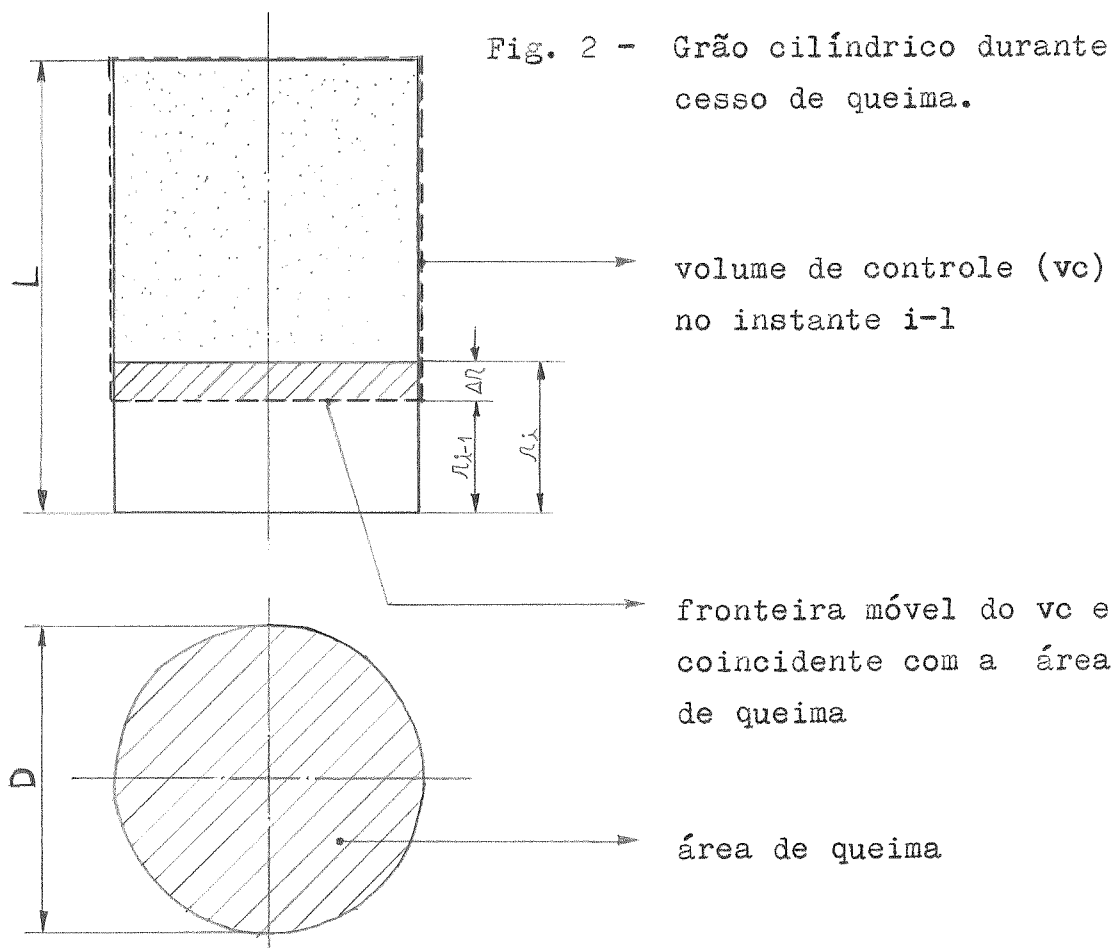


Fig. 1 - Geometria do grão cilíndrico.

- d) a pressão na câmara de combustão é constante;
 e) o intervalo de tempo de análise, entre dois instantes quaisquer, é o mesmo.



2.3 - SOLUÇÃO

A massa do grão propelente é dada por:

$$m = \int_{vc} \rho dV \quad (1)$$

mas como estamos interessados na variação de massa no tempo, ou seja, qual a quantidade de massa que é consumida num intervalo de tempo, temos:

$$\dot{m} = \frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho dV \quad (2)$$

com a hipótese (a) a eq. (2) fica sendo:

$$\dot{m} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} dV \quad (3)$$

A integral do elemento de volume dV no volume de controle é igual ao volume do grão, ou seja:

$$\int_{vc} dV = V_{\text{grão}} \quad (4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} \approx \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (5)$$

$$\Delta V = V_i - V_{i-1} = -A \Delta r \quad (6)$$

$$\Delta r = V \Delta t \quad (7)$$

Na eq. (5) aproximamos a variação do volume no tempo. A eq. (6) representa a variação de volume do grão entre dois instantes de tempo (i-1) e (i). Deve-se notar que a eq. (6) é válida porque a área de queima (A) é constante. O sinal negativo representa a diminuição do volume do grão no tempo. A expressão (7) nos dá a variação do raio de queima do grão e da fronteira móvel do vc. Outra observação é quanto ao Δt , ele está sendo considerado constante durante todo o processo de combustão.

Substituindo a eq. (7) em (6):

$$\Delta V = -AV \Delta t \quad (8)$$

e (8), (5) em (3):

$$\dot{m}_i = -\rho AV \quad (9)$$

A área de queima é dada por:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \quad (10)$$

Substituindo finalmente a eq. (10) em (9), obtemos a eq. do fluxo de massa para grãos-propelente cilíndricos. O sinal negativo nos diz que a massa do grão diminui com o tempo.

$$\dot{m}_i = -\pi \rho \frac{VD^2}{4} \quad (11)$$

2.4 - APLICACÃO

A aplicação imediata da eq. (11) é a determinação da massa de um foguete ou mini-foguete em cada instante durante a fase propulsada. No instante inicial ($i-1$) e a massa do veículo é dada por:

$$m_1 = m_e + m_{pl} + m_p \quad (12)$$

Substituindo a eq. (11) na (2) e integrando entre os instantes de tempo ($i-1$) e (i), temos:

$$\int_{i-1}^i dm = \dot{m}_i \int_{i-1}^i dt$$

$$m_i - m_{i-1} = \dot{m}_i (t_i - t_{i-1})$$

$$m_i = m_{i-1} + \dot{m}_i \Delta t \quad (13)$$

ou seja, a massa do veículo a cada instante será igual a massa que ele possuía no instante anterior mais a variação de massa entre es ses dois instantes de tempo.

O termo do fluxo de massa vezes o intervalo de tempo, na eq. (13), representa a variação de massa ocorrida durante Δt .

$$\Delta m_i = \dot{m}_i \Delta t \quad (14)$$

Assim como o fluxo de massa é constante a variação de massa entre dois instantes quaisquer, também o será, conforme a eq. (14).

Substituindo (11) em (13), obtemos:

$$m_i = m_{i-1} - \pi \rho \frac{VD^2}{4} \Delta t \quad (15)$$

Agora devemos determinar a variação de (i), isto é, qual o número de instantes que calcularemos a massa do engenho em função de um intervalo de tempo ($\Delta t'$) inicialmente especificado.

O tempo de queima do propelente é dado na eq. (16) e o número de instantes na eq. (17).

$$t_q = \frac{L}{V} \quad (16)$$

$$n = 1 + \frac{t_q}{\Delta t} \quad (17)$$

Substituindo a eq.(16) em (17):

$$n = 1 + \frac{L}{V\Delta t} \quad (18)$$

$$n' = 1 + \frac{L}{V\Delta t'} \quad (18a)$$

$$\Delta t = \frac{L}{V(n-1)} \quad (19)$$

O procedimento para obtenção de (n) é o seguinte:

- a) calcule n' através da eq.(18a) com o $\Delta t'$ especificado;
- b) se n' for um nº real aproxime-o para um inteiro, caso contrário $n = n'$, isto deve-se ao fato de que queremos calcular a massa do veículo para determinados instantes e não entre estes, ou seja, a nossa análise é discreta e não contínua, se n não for inteiro o procedimento acima para determinação da massa do foguete não é válido;
- c) calcule o intervalo de tempo Δt com a eq.(19), este é o intervalo de tempo que deverá ser utilizado na eq.(15).

No último instante de análise $i = n$ e temos:

$$m_n = m_e + m_{pl} \quad (20)$$

isto é, a massa do engenho será igual a sua massa estrutural mais a carga útil.

Para o caso em que a m_{pl} é composta de mais um estágio, está pode ser novamente escrita na forma da eq.(12) e a mesma rotina de cálculo se aplica ao 2º estágio ou a k estágios.

2.5 ≈ ALGORITMO PARA O CÁLCULO DA MASSA DE UM VEÍCULO DURANTE A FASE PROPULSADA / GRÃO CILÍNDRICO

Os passos abaixo devem ser seguidos na elaboração de um programa computacional:

- a) entre com os seguintes dados: $L, D, V, \rho, m_e, m_{pl}, m_p, \Delta t'$;
- b) calcule n e Δt utilizando o procedimento descrito no item 2.4;
- c) calcule Δm com a eq.(14);
- d) faça $m_1 = m_e + m_{pl} + m_p$ eq.(12);
- e) calcule m_i para i variando de 2 a n, através da eq.(13).

2.6 - EXEMPLO NUMÉRICO

Calcular o fluxo de massa do mini-foguete experimental X-1 (IAE/CTA) e plotar num gráfico a massa deste veículo em função do tempo. Na ref./1/ podemos encontrar os seguintes dados:

$$L = 0,272 \text{ m}$$

$$D = 0,0325 \text{ m}$$

$$V = 3,40 \text{ m/s}$$

$$\rho = 2,66 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$$

$$m_e = 1,060 \text{ Kg}$$

$$m_p = 0,600 \text{ Kg}$$

$$m_{pl} = 0$$

O intervalo de tempo especificado $\Delta t' = 0,008 \text{ s}$.

Substituindo-se os dados na eq.(11) temos:

$$\dot{m}_i = - 7,5 \text{ Kg/s}$$

Utilizando-se o algoritmo descrito no item 2.5, obtem-se:

$$n = 11$$

$$\Delta t = 0,008 \text{ s}$$

$$\Delta m = - 0,060 \text{ Kg}$$

TABELA 1

i	t_q (s)	m_p (Kg)	m_i (Kg)
1	0,000	0,600	1,660
2	0,008	0,540	1,600
3	0,016	0,480	1,540
4	0,024	0,420	1,480
5	0,032	0,360	1,420
6	0,040	0,300	1,360
7	0,048	0,240	1,300
8	0,056	0,180	1,240
9	0,064	0,120	1,180
10	0,072	0,060	1,120
11	0,080	0,000	1,060

Pode-se observar que $m_{i-11} = m_n = m_e + m_{pl}$.

Plotando-se os pontos da massa versus tempo, temos:

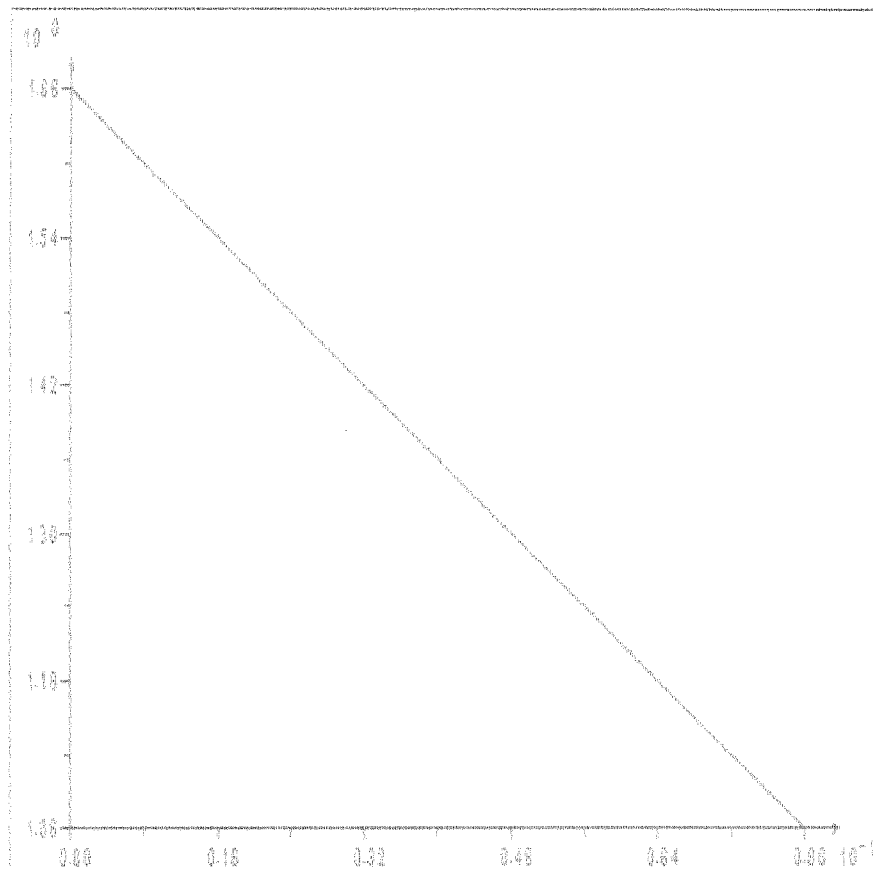


Fig. 3 - Massa do mini-foguete experimental X-1 em função do tempo, durante a fase propulsada.

3 - GRÃO TUBULAR

3.1 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O objetivo é obter-se uma expressão para o fluxo de massa de grãos-propelente tubulares, cuja geometria é mostrada na fig. 4.

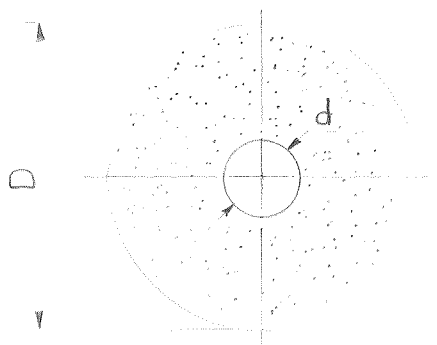
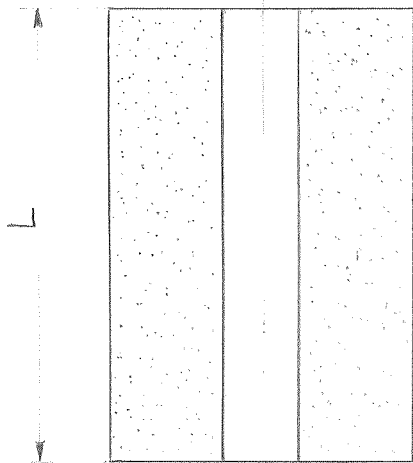


Fig. 4 - Grão tubular e seus parâmetros geométricos.

3.2 - HIPÓTESES SIMPLIFICATIVAS

- As hipóteses adotadas na solução deste problema são:
- a) a massa específica e a velocidade de queima do propelente são constantes;
 - b) a queima é radial;
 - c) a queima inicia-se ao mesmo instante em toda área interna do grão;
 - d) a pressão na câmara de combustão é constante;
 - e) o intervalo de tempo de análise, entre dois instantes quaisquer é o mesmo.

3.3 - SOLUÇÃO

As mesmas considerações, equações e aproximações utilizados no item 2.3 são válidos até a eq.(5).

Conforme pode-se observar na fig. 5, a área de queima não é constante no tempo.

O volume de um cilindro é dado por:

$$V = \pi L r^2 \quad (21)$$

então:

$$\Delta V = V_i - V_{i-1} = - (\pi L r_i^2 - \pi L r_{i-1}^2) = - \pi L (r_i^2 - r_{i-1}^2) \quad (22)$$

Substituindo-se as eqs.(22) e (5) em (3):

$$\dot{m}_i = - \pi \rho \frac{L}{\Delta t} (r_i^2 - r_{i-1}^2) \quad (23)$$

Como a variação do raio de queima é constante, vide eq.(7), deduz-se que:

$$r_i = \frac{d}{2} + (i - 1)\Delta r \quad (24)$$

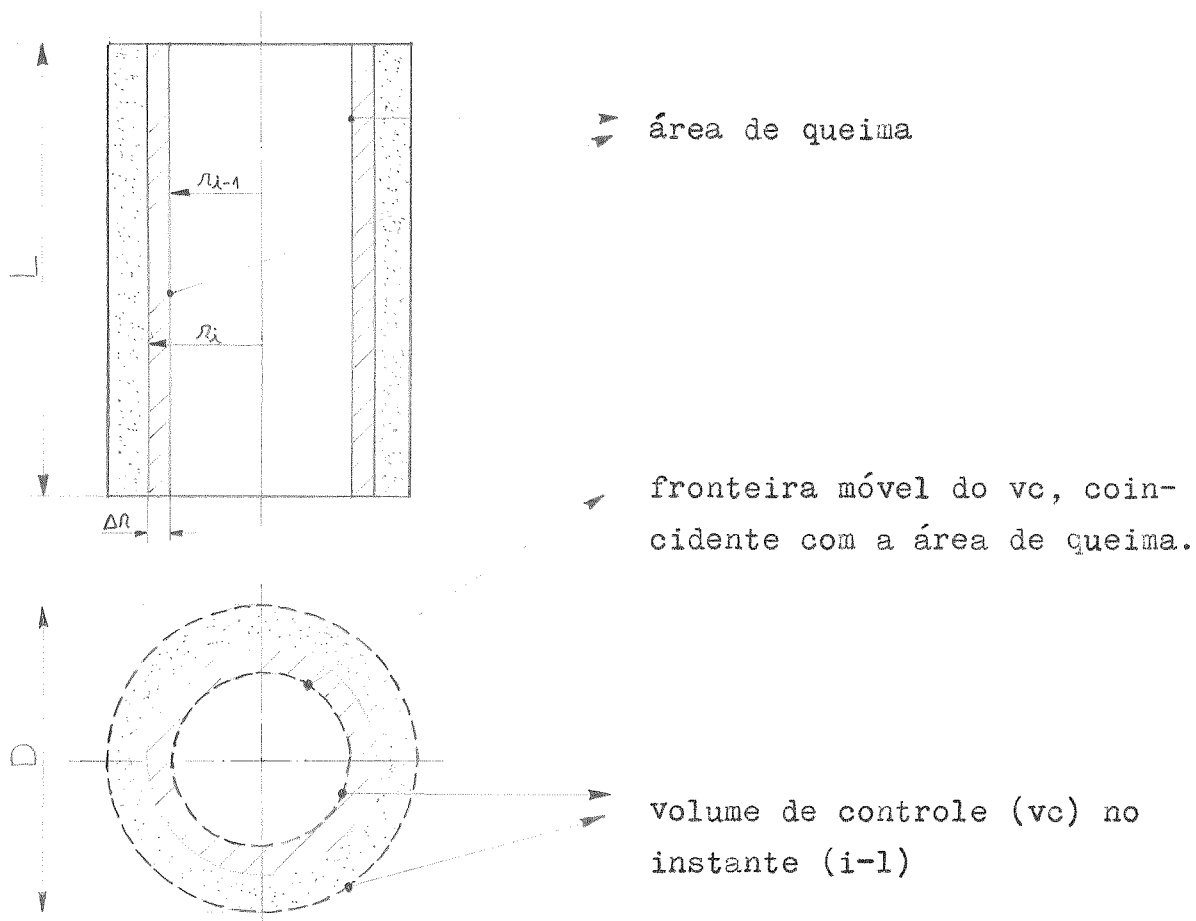


Fig. 5 - Grão tubular durante o processo de queima.

Da fig. 5 podemos tirar que:

$$r_{i-1} = r_i - \Delta r \quad (25)$$

Substituindo as eqs. (25), (24) e (7) em (23), obtemos finalmente:

$$\dot{m}_i = -\pi\rho LV [d + V\Delta t(2i - 3)] \quad (26)$$

Com a eq.(26) obtemos o fluxo de massa para grãos-propelente tubulares em determinados instantes.

3.4 - APLICAÇÃO

Semelhantemente ao item 2.4, desejamos calcular a massa de um foguete em determinados instantes no decorrer da fase propulsada, o que é conseguido substituindo-se a eq.(26) em (13), assim:

$$m_i = m_{i-1} - \pi\rho LV [d + V\Delta t(2i-3)] \Delta t \quad (27)$$

O mesmo procedimento para determinação de n adotado no item 2.4, aplica-se aqui, com a única ressalva que o tempo de queima será dado por:

$$t_q = \frac{D - d}{2V} \quad (28)$$

e as eqs. (18), (18a) e (19) ficam respectivamente:

$$n = 1 + \frac{D - d}{2V\Delta t} \quad (29)$$

$$n' = 1 + \frac{D - d}{2V\Delta t'} \quad (29a)$$

$$\Delta t = \frac{D - d}{2V(n-1)} \quad (30)$$

As eqs. (12), (14), (17) e (20) também são válidas para este item. Deve-se notar que caso se queira entrar com o n nos dados, somente teremos que calcular o Δt através da eq. (30) ou (19).

3.5 - ALGORITMO PARA O CÁLCULO DA MASSA DE UM FOGUETE DURANTE A FASE PROPULSADA / GRÃO TUBULAR

Os seguintes passos deverão ser seguidos na confecção de um programa computacional:

- a) entre com os seguintes dados: L , D , d , V , ρ , m_e , m_{p1} , m_p e $\Delta t'$;
- b) calcule n e Δt ;
- c) faça $m_1 = m_e + m_{p1} + m_p$ eq.(12);
- d) calcule m_i para i variando de 2 a n , através da eq.(27).

3.6 - EXEMPLO NUMÉRICO

Calcular o fluxo de massa do mini-foguete experimental Netuno (LAE-CEFEC) e plotar num gráfico a massa deste veículo em função do tempo.

Na ref./2/ podemos obter os seguintes dados:

$$L = 0,4575 \text{ m}$$

$$D = 0,0381 \text{ m}$$

$$d = 0,0253 \text{ m}$$

$$V = 0,01276 \text{ m/s}$$

$$\rho = 1200 \text{ Kg/m}^3$$

$$m_e = 0,990 \text{ Kg}$$

$$m_{pl} = 0,300 \text{ Kg}$$

$$m_p = 0,350 \text{ Kg}$$

Especificaremos para este exemplo o n.

$$n = 11$$

Calculando Δt através da eq.(30), temos que:

$$\Delta t = 0,050 \text{ s}$$

Na tabela 2 são apresentados para cada instante de análise, o tempo de queima decorrido, o fluxo de massa, a variação de massa, a massa de propelente e a massa do mini-foguete. Os cálculos foram efetuados utilizando-se as eqs. (26), (14) e (13).

TABELA 2

i	t_q (s)	\dot{m} (Kg/s)	Δm (Kg)	m_p (Kg)	m_i (Kg)
1	0,00	0,000	0,000	0,350	1,640
2	0,05	0,571	0,029	0,321	1,611
3	0,10	0,599	0,030	0,291	1,581
4	0,15	0,627	0,031	0,260	1,550
5	0,20	0,655	0,033	0,227	1,517
6	0,25	0,684	0,034	0,193	1,483
7	0,30	0,712	0,036	0,157	1,447
8	0,35	0,740	0,037	0,120	1,410
9	0,40	0,768	0,039	0,081	1,371
10	0,45	0,796	0,040	0,041	1,331
11	0,50	0,824	0,041	0,000	1,290

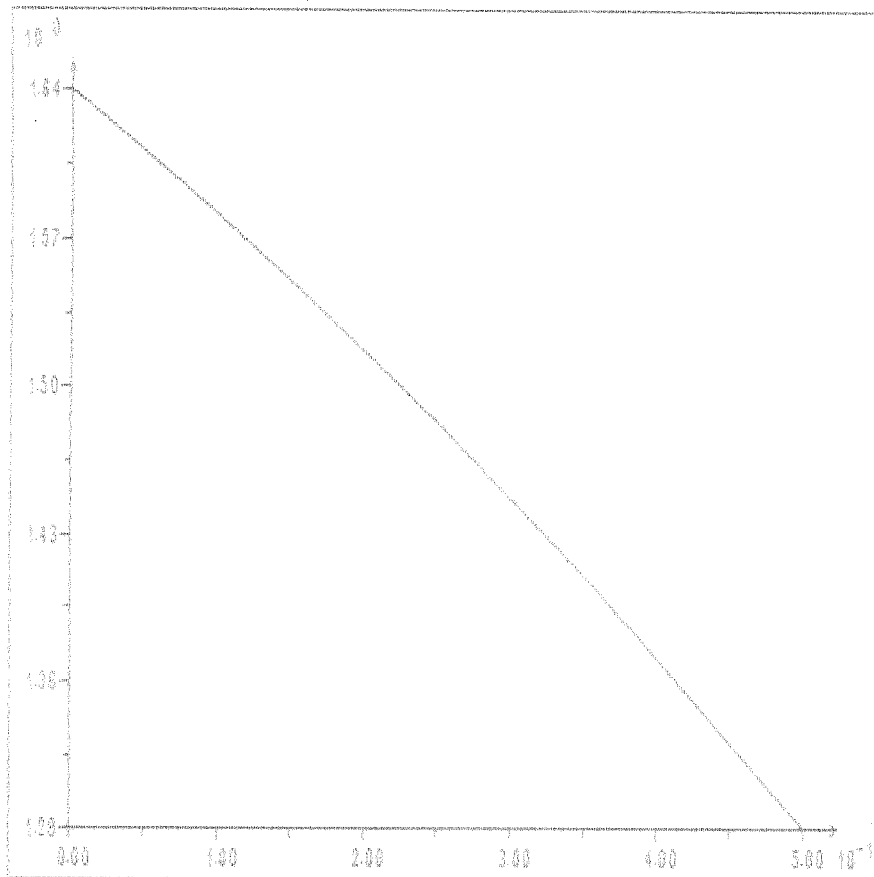


Fig. 6 - Massa do mini-foguete experimental Netuno em função do tempo, durante a fase propulsada.

4 - CONCLUSÃO

• Da equação (11) podemos concluir que o fluxo de massa para grãos cilíndricos em cada instante é constante, pois nenhum de seus parâmetros variam no tempo. Desta forma a variação da massa de um mini-foguete no tempo é linear, conforme fig. 3.

• Já para os grãos tubulares, de acordo com a eq.(26), o fluxo de massa não será constante e sim aumentará com o avanço da queima, provocando uma variação não linear da massa do grão no tempo, o que é visto na fig. 6. Este aumento do fluxo de massa que ocorre entre os instantes de $i = 2$ e $i = n$, é dado pela razão dos diâmetros do grão, pois:

substituindo a eq.(30) na (26), temos:

$$\dot{m}_i = -\pi \rho LV \left[d + \frac{(D-d)(2i-3)}{2(n-1)} \right] \quad (31)$$

Se fizermos $n \rightarrow \infty$, obteremos:

$$\dot{m}_2 = -\pi \rho LVd \quad (32)$$

$$\dot{m}_n = -\pi \rho LVD \quad (33)$$

Assim:

$$\frac{\dot{m}_n}{\dot{m}_2} = \frac{-\pi \rho LVD}{-\pi \rho LVd} = \frac{D}{d} \quad (34)$$

* No momento encontram-se em desenvolvimento as soluções do fluxo de massa para grãos-propelente tubulares-estrelados e cilíndrico-tubulares.

REFERÊNCIAS

- /1/ - CENTRO TÉCNICO AEROESPACIAL, Instituto de Atividades Espaciais. II Reunião nacional de clubes espaciais. São José dos Campos. 1976. 80 p.
- /2/ - MARCHI, C.H. LABORATÓRIO DE ATIVIDADES ESPACIAIS. Mini-foguete Netuno. Florianópolis. 1985. 63 p.