

CAPÍTULO 4

CINEMÁTICA DA TURBULÊNCIA HOMOGÊNEA E ISOTRÓPICA

4.1. INTRODUÇÃO

A maioria dos escoamentos são cizalhantes, os quais são anisotrópicos e não homogêneos, como pode ser visualizado na Figura 4.1.

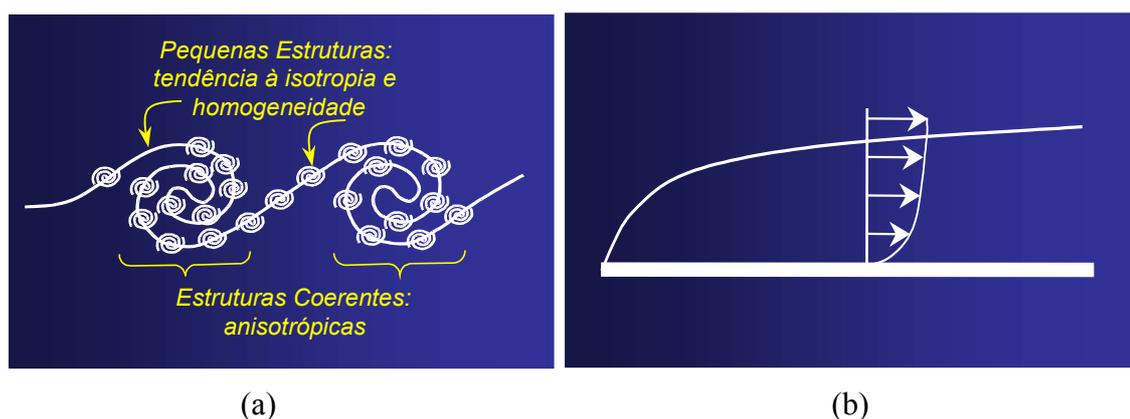


Figura 4.1. Exemplos de escoamentos cizalhantes; (a) camada de mistura – cizalhamento livre e (b) camada limite – cizalhamento parietal.

O cizalhamento é um requisito para formação de instabilidades, como ilustra o esquema abaixo. Isto implica em anisotropia e não homogeneidade. Estruturas coerentes são anisotrópicas e, quanto menores as estruturas turbulentas, maior a tendência ou o grau de isotropia e homogeneidade.

A nível das grandes estruturas, os escoamentos turbulentos ou em transição são anisotrópicos e não homogêneos. No entanto, mesmo nestes escoamentos, a nível das pequenas escalas, pode-se considerar a existência de isotropia e de homogeneidade. Além disto, pode-se encontrar também, escoamentos isotrópicos que podem ser experimentados a nível de laboratório. O escoamento gerado à jusante de uma grelha fina é um exemplo.

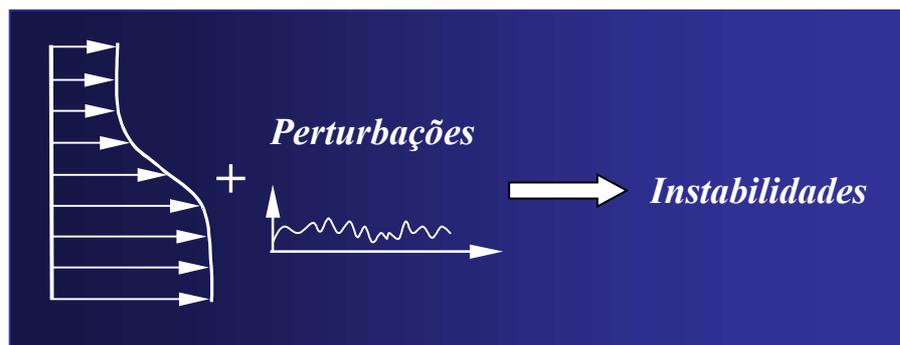


Figura 4.2. Esquema do processo de formação de instabilidades em escoamentos cizalhantes.

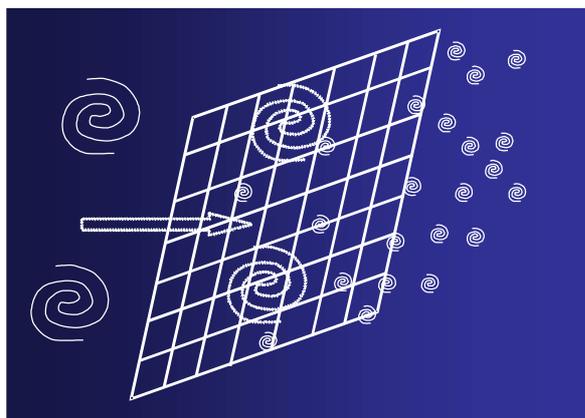


Figura 4.3. Esquema ilustrativo de uma turbulência de grelha: presença de estruturas coerentes à montante e de isotropia à jusante.

Homogeneidade: é a invariância estatística das propriedades dos escoamentos quando se promove uma translação do sistema de eixo.

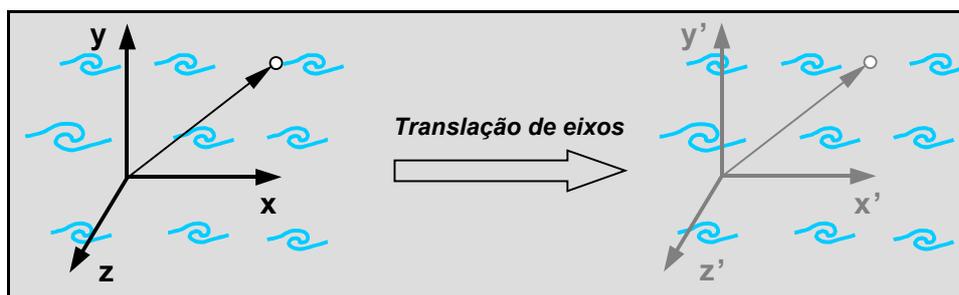


Figura 4.4. Esquema ilustrativo do processo de translação de eixos.

Caso não se observe variações em qualquer propriedade estatística, ou seja,

$$f(\vec{x} + \vec{r}) = f(\vec{x}), \quad (4.1)$$

diz-se que o escoamento apresenta homogeneidade em relação à direção na qual se promoveu a translação. Sendo assim, a homogeneidade é uma propriedade direcional.

Abaixo mostra-se, como exemplo, um escoamento em desenvolvimento e completamente desenvolvido no interior de uma tubulação. Neste caso tem-se duas regiões distintas: a região de entrada, onde não se tem nenhuma direção de homogeneidade e a região de escoamento completamente desenvolvido, onde se tem homogeneidade na direção axial do conduto. A homogeneidade é, portanto, uma propriedade direcional.

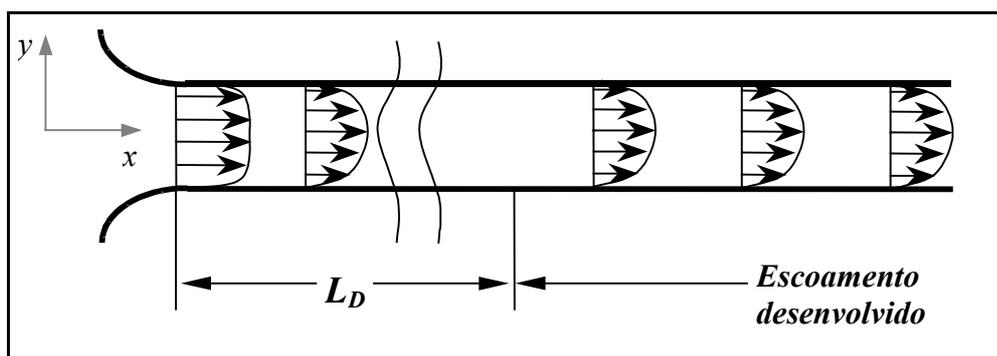


Figura 4.5. Esquema ilustrativo de um escoamento em conduto, com região de não homogeneidade e com região de homogeneidade direcional.

Isotropia: é a invariância estatística das propriedades de um escoamento em relação a uma rotação no sistema de eixo. Compreende-se, então, que isotropia implica em homogeneidade. A recíproca não é verdadeira. A Figura 4.6 ilustra o processo de rotação de um sistema de eixos.

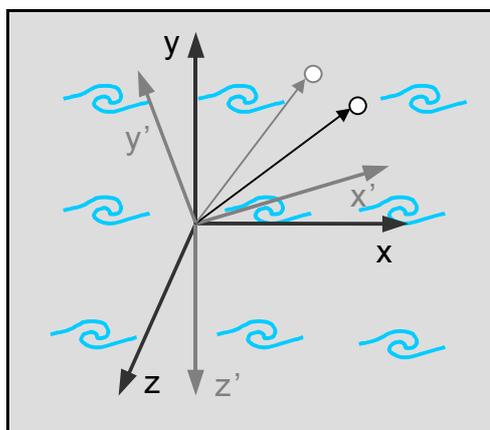


Figura 4.6. Esquema ilustrativo do processo de rotação de eixos.

4.2. CINEMÁTICA DA TURBULÊNCIA ISOTRÓPICA

4.2.1. Formalismo estatístico

Supor um experimento no qual se interessa por uma propriedade genérica $f(\vec{x}, t, \omega)$, onde $\omega \in \Omega$, sendo ω uma amostra no espaço Ω . A propriedade $f(\vec{x}, t, \omega)$ se refere a um escoamento. A Figura 4.7. ilustra um conjunto n de amostras.

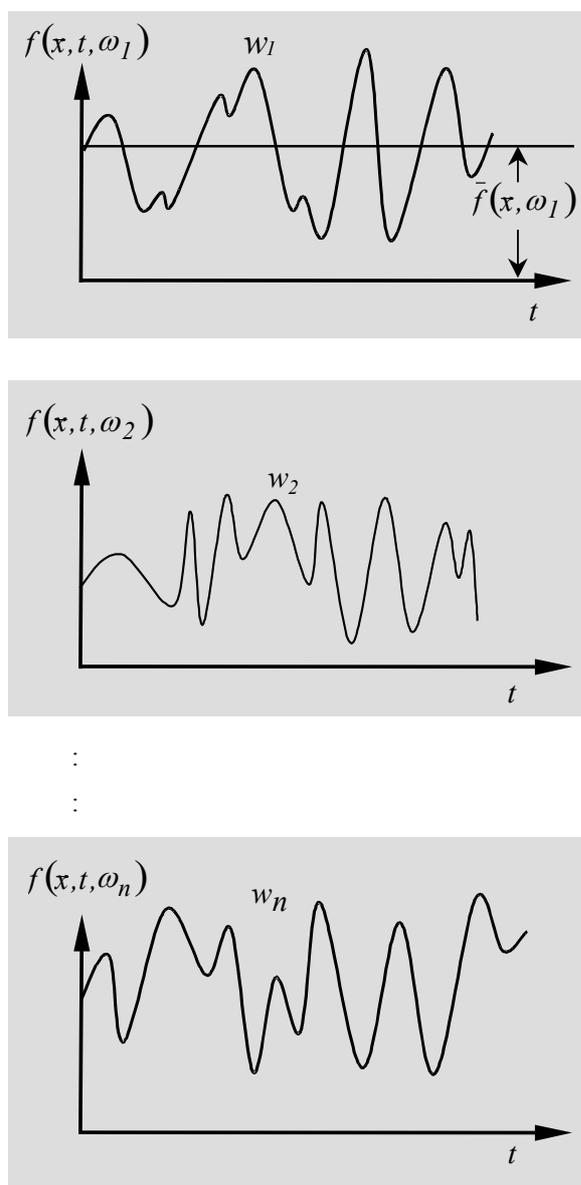


Figura 4.7. Exemplos de amostras w_n .

Dadas as n amostras, pode-se proceder a definições estatísticas, como segue:

- **Média de conjunto**

$$\langle f(\bar{x}, t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\bar{x}, t, w_i), \quad (4.2)$$

onde N é o número de amostras.

- **Média temporal**

$$\bar{f}(\bar{x}, w_i) = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^M f(\bar{x}, t_j, w_i) \Delta t_j, \quad (4.3)$$

onde M é o número de amostras temporais numa mesma amostra w_i .

- **Hipótese de Ergodicidade**

Diz-se que um conjunto de amostras satisfaz a hipótese de ergodicidade quando a média de conjunto pode ser obtida pela média temporal:

$$\langle f(\bar{x}) \rangle = \bar{f}(\bar{x}), \quad (4.4)$$

- **Momentos estatísticos de ordem n**

Seja um conjunto de variáveis, listadas abaixo, ligadas a um dado escoamento:

$$\begin{cases} f^{a_1}(\bar{x}, t, w) & \Rightarrow & \text{velocidade} \\ f^{a_2}(\bar{x}, t, w) & \Rightarrow & \text{pressão} \\ f^{a_3}(\bar{x}, t, w) & \Rightarrow & \text{temperatura} \\ f^{a_n}(\bar{x}, t, w) & \Rightarrow & \dots \end{cases} \quad (4.5)$$

Define-se um momento estatístico de ordem n como sendo:

$$\langle f^{a_1} f^{a_2} \dots f^{a_n} \rangle(\bar{x}, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f^{a_1}(\bar{x}, t, w_i) f^{a_2}(\bar{x}, t, w_i) \dots f^{a_n}(\bar{x}, t, w_i) \quad (4.6)$$

Por exemplo, pode-se fazer $n=2$ e $f^{a_1} = f^{a_2} = u'$, ou seja, a flutuação de uma das componentes da velocidade, obtendo-se a intensidade turbulenta relativa a uma das direções do escoamento:

$$\langle u'u' \rangle = \overline{u'^2}. \quad (4.7)$$

Neste caso, utilizou-se da hipótese de ergodicidade. Obtém-se, assim, um momento de segunda ordem, a variância da flutuação de velocidade, como se ilustra abaixo.

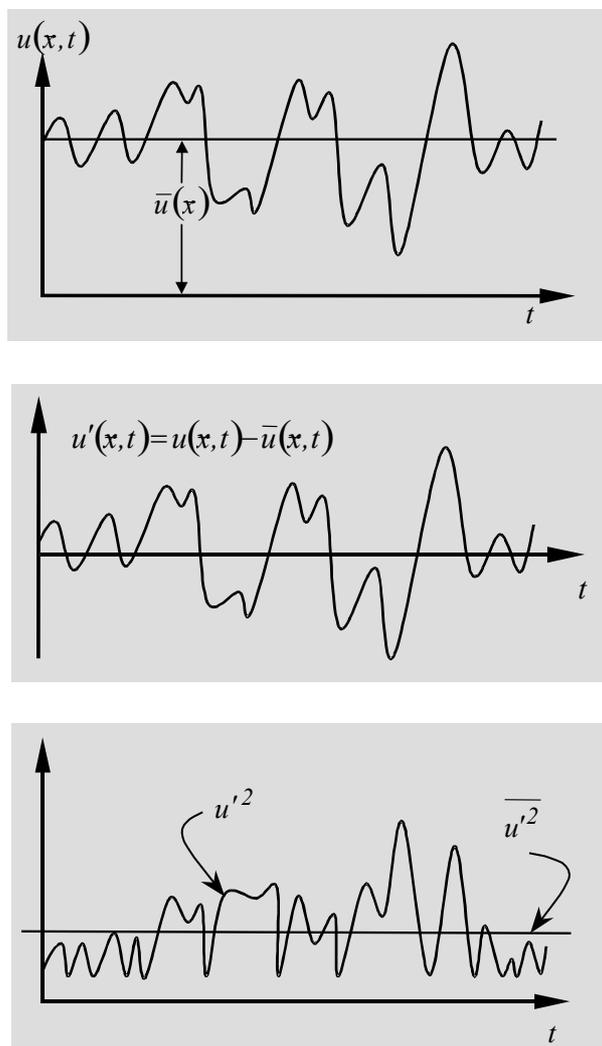


Figura 4.8. Distribuição temporal de uma componente de velocidade, sua média e a sua variância (momento de segunda ordem).

Estendendo este exemplo às três componentes de velocidade, pode-se obter o tensor de Reynolds, composto de seis momentos de segunda ordem, como definido abaixo.

$$\overline{\tau(\vec{x})} = \begin{bmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'^2} \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Observa-se que este tensor é simétrico e pode ser reescrito, em notação tensorial, como segue:

$$\tau_{ij} = \overline{u'_i u'_j}. \quad (4.9)$$

O seu traço fornece a energia cinética turbulenta, através da sua definição:

$$k \equiv \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right). \quad (4.10)$$

Foi utilizada a regra da soma de Einstein para índices repetidos.

4.2.2. Classificação da turbulência

A turbulência pode ser classificada, quanto à homogeneidade e isotropia:

- Turbulência não homogênea e não isotrópica;
- Turbulência homogênea e não isotrópica;
- Turbulência homogênea e isotrópica.

Neste último caso, tem-se:

$$\left\langle f^{a_1} f^{a_2} \dots f^{a_n} \right\rangle(\vec{x}, t) = \left\langle f^{a_1} f^{a_2} \dots f^{a_n} \right\rangle(\vec{x} + \vec{r}, t), \quad (4.11)$$

onde \vec{r} representa uma rotação ou traslação do vetor \vec{x} .

4.3. TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES DO ESPAÇO FÍSICO PARA O ESPAÇO DE FOURIER

Os escoamentos isotrópicos são também periódicos, passíveis de ser tratados no espaço de Fourier. Um exemplo de escoamento periódico, camada de mistura, é ilustrado na Figura 4.9.

4.3.1. Transformada de Fourier

Seja uma função $f(\vec{x}, t)$ periódica qualquer. Define-se a sua transformada de Fourier

como segue:

$$\hat{f}(\vec{k}, t) \equiv \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_V e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} f(\vec{x}, t) d\vec{x}, \quad (4.12)$$

onde $\vec{k} = 2\pi\vec{\ell} / \ell$, é o número de onda, ou frequência espacial e $\vec{\ell}$ é o vetor comprimento de onda ou período espacial, conforme ilustrado na Figura 4.10. O vetor número de onda tem três componentes correspondente às três direções coordenadas: $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$.

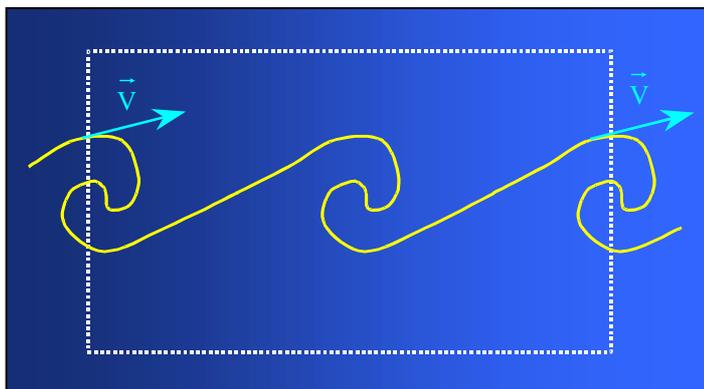


Figura 4.9. Escoamento periódico na direção horizontal.

A transformada inversa se define como:

$$f(\vec{x}, t) \equiv \int_{\hat{V}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \hat{f}(\vec{k}, t) d\vec{k}. \quad (4.13)$$

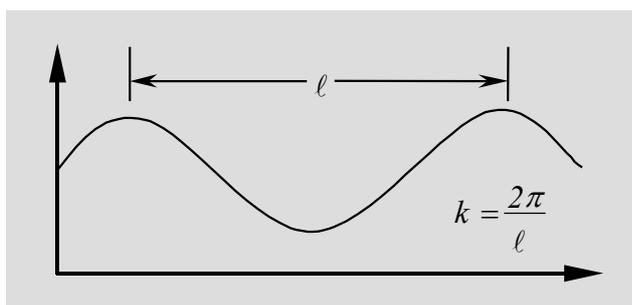


Figura 4.10. Sinal periódico, comprimento de onda ℓ e número de onda k_i .

4.3.2. Operadores de interesse para transformação das equações de Navier-Stokes

Objetiva-se obter as equações de Navier-Stokes no espaço de Fourier. Para tanto, necessita-se conhecer os operadores fundamentais transformados.

- **Transformada da derivada de uma função**

Seja

$$g(\vec{x}, t) = \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial x_\ell} = \frac{\partial}{\partial x_\ell} \left(\int_{\hat{V}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \hat{f}(\vec{k}, t) d\vec{k} \right) = \int_{\hat{V}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} i k_\ell \hat{f}(\vec{k}, t) d\vec{k} = i k_\ell f(\vec{x}, t). \quad (4.14)$$

Logo,

$$\hat{g}(\vec{k}, t) = TF \left[\frac{\partial f}{\partial x_\ell} \right] = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_V e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \frac{\partial f}{\partial x_\ell} d\vec{x} = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 i k_\ell \int_V e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} f(\vec{x}, t) d\vec{x} = i k_\ell \hat{f}(\vec{k}, t). \quad (4.15)$$

- **Transformada do gradiente de f**

$$TF[\vec{\nabla} f] = TF \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right] = i(k_x, k_y, k_z) \hat{f}(\vec{k}, t) = i\vec{k} \hat{f}(\vec{k}, t). \quad (4.16)$$

- **Transformada do divergente de um vetor**

$$TF[\vec{\nabla} \cdot \vec{V}] = i\vec{k} \cdot \hat{\vec{V}}. \quad (4.17)$$

- **Transformada do laplaciano de um vetor**

$$TF[\nabla^2 \vec{V}] = -k^2 \hat{\vec{V}}. \quad (4.18)$$

- **A transformada do produto de dois escalares**

$$TF[f(\vec{x}, t)g(\vec{x}, t)] = [\hat{f} * \hat{g}](\vec{k}, t) = \int_{\vec{p}} \hat{f}(\vec{p}, t) \hat{g}(\vec{k} - \vec{p}, t) d\vec{p}, \quad (4.19)$$

onde $[\hat{f} * \hat{g}]$ denota o produto de convolução das duas funções transformadas. Os parâmetros de transformação de f e g são \vec{p} e \vec{q} , onde $\vec{k} = \vec{p} + \vec{q}$. Esta integral de convolução representa as interações triádicas entre os três números de onda relativos às transformadas das duas funções separadamente e à transformada do produto das duas funções.

4.3.3. Escoamentos Incompressíveis

Considere-se as equações que modelam os escoamentos incompressíveis no espaço físico, com propriedades físicas unitárias:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

4.3.3.1. Transformada da conservação da massa

$$TF \left[\frac{\partial u_\ell}{\partial x_\ell} \right] = ik_\ell \hat{u}_\ell \Rightarrow TF[\vec{\nabla} \cdot \vec{u}] = i\vec{k} \cdot \hat{\vec{u}} = 0. \quad (4.21)$$

Define-se, no espaço de Fourier, um plano π , perpendicular ao vetor número de onda \vec{k} , como esquematizado abaixo:

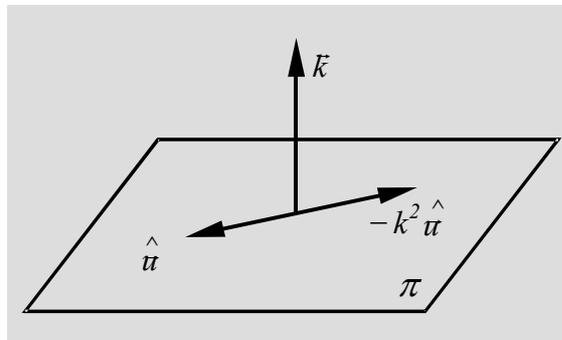


Figura 4.11. Plano de ortogonalidade no espaço de Fourier.

Logo, pela equação (4.21) o vetor número de onda é ortogonal ao vetor velocidade transformado. A Figura 4.11 ilustra este fato.

4.3.3.2. Transformada de Fourier das Equações de Navier-Stokes

Toma-se as equações de Navier-Stokes e busca-se transformar cada termo individualmente.

- Termo da taxa de variação da quantidade de movimento

$$TF\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right] = \frac{\partial \hat{\vec{u}}}{\partial t}. \quad (4.22)$$

Observa-se que, sendo

$$\vec{k} \cdot \hat{\vec{u}} = 0, \quad (4.23)$$

então,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{k} \cdot \hat{\vec{u}} \right) = \vec{k} \cdot \frac{\partial \hat{\vec{u}}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \hat{\vec{u}}}{\partial t} \in \text{ao plano } \pi. \quad (4.24)$$

- Termo da difusão da quantidade de movimento

$$TF\left[\nabla^2 \vec{u}\right] = -k^2 \hat{\vec{u}}. \quad (4.25)$$

Este termo transformado também pertence ao plano π .

- Gradiente da pressão

$$TF\left[\vec{\nabla} p\right] = i\vec{k}\hat{p}. \quad (4.26)$$

Nota-se, então, que a transformada da pressão é colinear com o vetor número de onda, sendo portanto, perpendicular ao plano π .

- Termo não linear

Com os resultados acima, tem-se que:

$$\underbrace{TF\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nabla^2 \vec{u}\right]}_{\in \pi} \stackrel{+}{\Rightarrow} \underbrace{TF\left[\vec{\nabla} \cdot (\vec{u}\vec{u}) + \nabla p\right]}_{\in \pi} = 0. \quad (4.27)$$

O primeiro termo desta soma pertence ao plano π , pelos resultados já apresentados. O segundo termo deve também pertencer, uma vez que a soma dos dois é nula. Para se transformar o termo não linear em conjunto com o gradiente da pressão será definido um tensor projeção $\overline{\wp}$ como segue:

$$\overline{\wp}_{ij}(\vec{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}, \quad (4.28)$$

onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad (4.29)$$

é o delta de Kronecker. Qual a função deste tensor $\overline{\wp}$? Para verificar, toma-se um vetor \vec{a} qualquer, e faz-se a projeção de \vec{a} através de $\overline{\wp}$, obtendo-se o seguinte:

$$\overline{\wp} \cdot \vec{a} = \wp_{ij} a_j = a_j \delta_{ij} - a_j \frac{k_i k_j}{k^2} = a_i - a_j k_j \frac{k_i}{k^2} = a_{pi}. \quad (4.30)$$

Fazendo-se o produto escalar da projeção a_{pi} pelo vetor número de onda \vec{k} , tem-se que:

$$a_{pi} k_i = a_i k_i - a_j k_j \frac{k_i k_i}{k^2} = 0. \quad (4.31)$$

Assim, verifica-se que o tensor $\overline{\wp}$ projeta um vetor \vec{a} qualquer no plano π .

Retornando à transformada do termo não linear, tem-se que

$$TF \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (u_\ell u_j) \right] = ik_j \int_{\vec{p}+\vec{q}=\vec{k}} \hat{u}_\ell \hat{u}_j d\vec{p}. \quad (4.32)$$

Como já tinha sido visto,

$$\hat{\vec{R}} = \left[ik_\ell \hat{p} + ik_j \int_{\vec{p}+\vec{q}=\vec{k}} \hat{u}_\ell \hat{u}_j d\vec{p} \right] \in \pi. \quad (4.33)$$

Esquematizando esta soma sobre o plano π , temos a Figura 4.12. Observando a Figura 4.12 conclui-se que a soma dos vetores transformadas do gradiente da pressão e do termo não linear, ou seja o vetor $\hat{\vec{R}}$, é igual à projeção da transformada do termo não linear sobre o plano π . Assim, a transformada de Navier-Stoks é:

$$\frac{\partial \hat{u}_\ell}{\partial t} + \nu k^2 \hat{u}_\ell = -ik_m \wp_{jm}(\vec{k}) \int_{\vec{p}+\vec{q}=\vec{k}} \hat{u}_\ell(\vec{p}) \hat{u}_j(\vec{q}) d\vec{p}. \quad (4.34)$$

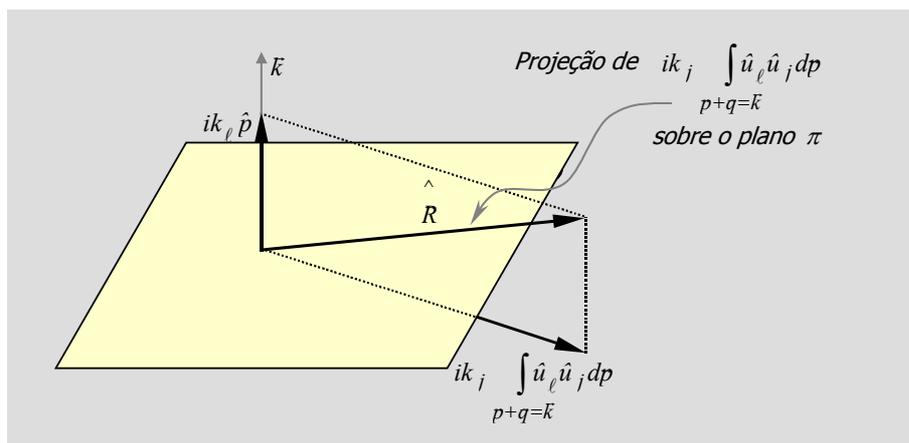


Figura 4.12. Esquema de projeções das transformadas no espaço de Fourier.

Observa-se que Navier-Stokes no espaço de Fourier não depende do conceito de pressão, como acontece no espaço físico.

Cada termo desta equação pode ser interpretado fisicamente, sendo esta interpretação mais rica no espaço de Fourier, como está ilustrado abaixo.

- $\frac{\partial \hat{u}_\ell}{\partial t} \rightarrow$ Taxa de variação da quantidade de movimento;
- $\nu k^2 \hat{u}_\ell \rightarrow$ Fluxo líquido difusivo de quantidade de movimento ou dissipação viscosa. Os dois tipos de fenômenos são representados pelo mesmo termo, sendo que se manifestam em função do número de onda;
- $ik_m \delta_{jm}(\vec{k}) \int_{\vec{p}+\vec{q}=\vec{k}} \hat{u}_\ell(\vec{p}) \hat{u}_j(\vec{q}) d\vec{p} \rightarrow$ Transferência líquida não linear de quantidade de

movimento. Observa-se que este processo é o resultado das interações físicas entre as estruturas turbilhonares que compõem o escoamento. Aqui elas são modeladas pelas interações não lineares triádicas que compõem a integral de convolução.

A solução desta equação passa pela integral de convolução não linear. Este processo é caro computacionalmente. Uma alternativa utilizada são os chamados métodos pseudo-espectrais. Resolve-se o produto das velocidades no espaço físico, transforma-se o produto para o espaço de Fourier. Obtém-se o campo de velocidade transformado. Efetua-se a transformada inversa e determina-se o campo de velocidade no espaço físico. A maior

limitação desta metodologia é o fato de se aplicar apenas a escoamentos periódicos. Como alternativa tem-se utilizado esquemas mistos do tipo diferenças finitas para as direções não periódicas e TF para as direções periódicas dos escoamentos. Outra alternativa é a utilização de outros tipos de transformadas, como aquelas de Legendre e de Lagrange, etc, que não exigem periodicidade.

4.4. TENSOR ESPECTRAL E ESPECTRO DE ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA

Define-se o tensor espectral como sendo a transformada de Fourier do momento de segunda ordem obtido da correlação entre as flutuações de velocidade relativas a duas direções coordenadas.

$$\hat{U}_{ij}(\vec{k}, t) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_V e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} U_{ij}(\vec{r}, t) d\vec{r}, \quad (4.35)$$

onde

$$U_{ij}(\vec{r}, t) = \langle u'_i(\vec{r}, t) u'_j(\vec{r} + \vec{x}, t) \rangle, \quad (4.36)$$

é um momento de Segunda ordem. Observa-se que foi feita a hipótese de homogeneidade e isotropia. Fazendo-se $i=j$ obtém-se o traço do tensor:

$$\hat{U}_{ij}(\vec{k}, t) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_V e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} U_{ii}(\vec{r}, t) d\vec{r}. \quad (4.37)$$

Define-se, a partir do traço do tensor espectral o espectro de energia cinética turbulenta

$$\frac{1}{2} U_{ii}(\vec{r} = 0, t) \equiv \int_0^{\infty} E(k, t) dk. \quad (4.38)$$

$E(k, t)$ é o espectro de energia cinética turbulenta. Utiliza-se nesta definição a regra da soma de Einstein para índices repetidos. Na figura 4.13 visualiza-se a distribuição espectral de energia cinética turbulenta, o que é uma forma poderosa de se entender como a atividade turbulenta de um escoamento se dá em função dos tamanhos das diferentes estruturas

turbilhonares que o caracterizam.

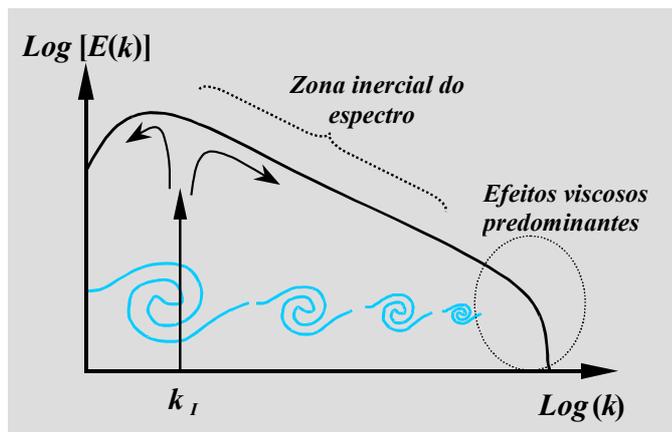


Figura 4.13. Espectro de energia cinética turbulenta; número de onda de injeção de energia; zona inercial; zona de dissipação viscosa; transferência direta e inversa de energia.

Neste espectro tem-se a distribuição de energia sobre as estruturas turbilhonares de diferentes escalas. Como é intuitivo, as maiores estruturas (menores números de onda) são as portadoras de maior quantidade de energia. Quanto maior o número de onda, menor é a estrutura turbilhonar e menor a quantidade de energia transportada por ela.

Observa-se ainda nesta Figura a existência de diferentes zonas características do espectro. A primeira delas é a zona inercial, onde o processo de transferência não linear de energia, entre as diferentes escalas predomina. À medida que o número de onda aumenta, ou seja, o tamanho das estruturas turbulentas diminui, o número de Reynolds local diminui também e o processo de dissipação viscosa começa a predominar sobre os efeitos não lineares.

Observa-se também que cada escoamento tem um número de onda característico de injeção de energia, $k_I = 2\pi / \ell_I$, onde ℓ_I é o tamanho da estrutura turbilhonar associada. Este comprimento é também conhecido como comprimento característico integral do escoamento. Em função do processo físico de injeção de energia no escoamento, ela se divide seguindo dois cursos, ou seja, o curso da transferência direta de energia, das maiores para as menores escalas, e o curso da transferência inversa de energia, ou seja, das menores para as maiores escalas. Na Figura 4.14 ilustra-se o processo de formação do escoamento no interior de uma cavidade retangular. Este exemplo permite entender como a energia é injetada nas estruturas turbulentas e como ela é repartida sobre o espectro de energia.

O escoamento recirculante no interior da cavidade é alimentado pelo escoamento

médio no interior do conduto principal. Verifica-se que o processo de transferência de energia se dá através da camada cizalhante que faz interface entre os dois escoamentos. De fato, os turbilhões de Kelvin-Helmholtz capturam energia do conduto principal e bombeia-a para o interior da cavidade, gerando recirculações de grandes escalas e de baixas números de onda.

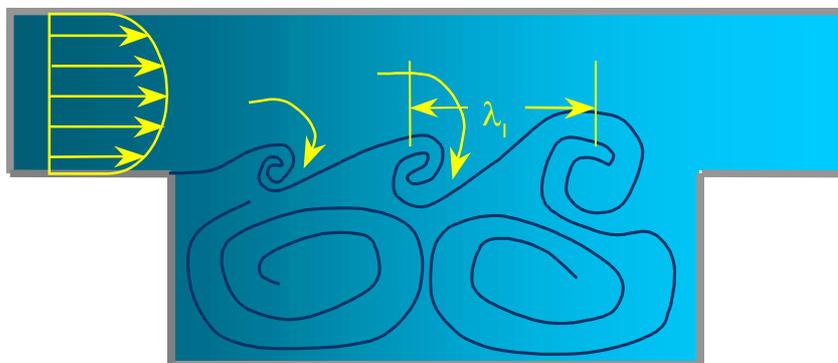


Figura 4.14. Escoamento sobre uma cavidade, ilustrando o processo de transferência de energia do escoamento médio para os turbilhões da camada cizalhante e para o interior da cavidade.

Fazendo-se uma ampliação dos turbilhões de Kelvin-Helmholtz da camada cizalhante, deve-se observar que estes turbilhões são formados de outros turbilhões ainda menores (harmônicos) mas de natureza semelhante aos maiores. Na Figura 4.15 ilustra-se este fato. A energia de formação e manutenção destes turbilhões menores deve ser fornecida pelos turbilhões receptores de energia, pelo processo já explicado. Desta feita explica-se o processo físico da chamada cascata direta de energia, ou seja, o transporte não linear das grandes para as menores estruturas.

No presente exemplo, o escoamento tem natureza transicional, tendo o espectro de energia uma forma diferenciada daquela apresentada na Figura 4.13. Porém os mecanismos físicos de transferência e de formação de um espectro completo, típico de uma turbulência completamente desenvolvida, devem ser semelhantes aos aqui expostos.

Uma equação de conservação da energia cinética turbulenta nos espaço de Fourier pode ser útil para se entender os processo de transferência de energia ao longo do espectro.

4.5. EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA ENERGIA CINÉTICA TURBULENTA

Partindo-se das equações de Navier-Stokes, as quais são também válidas para as

flutuações de velocidade, multiplicando-as por $\hat{u}'_i(k, t)$, fazendo-se a média $\langle \rangle$, manipulando-se algebricamente, obtém-se a equação de transporte para o tensor espectral e conseqüentemente para o seu traço:

$$\frac{\partial \hat{U}_{ij}(k, t)}{\partial t} + 2\nu k^2 \hat{U}_{ij}(k, t) = P_{ijm} \int I \left[\hat{u}'_i(\vec{k}, t) \hat{u}'_j(\vec{p}, t) \hat{u}'_m(\vec{q}, t) \right] d\vec{p} d\vec{q}. \quad (4.39)$$

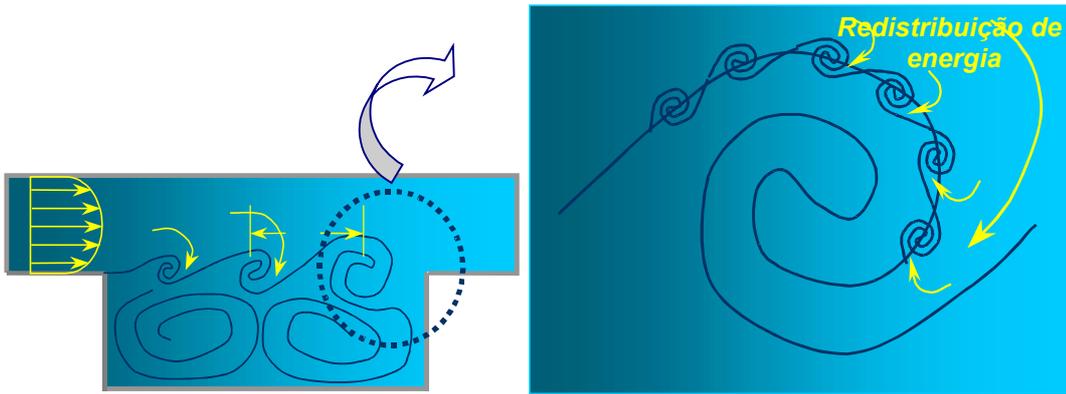


Figura 4.15. Estruturas turbilhonares harmônicas geradas sobre as estruturas primárias.

A função I depende de momentos de terceira ordem. Ela está bem definida em Lesieur (1995). Fazendo-se a soma sobre as três componentes do traço do tensor espectral (U_{11} , U_{22} e U_{33}) e utilizando-se a definição de energia cinética turbulenta, obtém-se a sua equação de transporte:

$$\frac{\partial E(k, t)}{\partial t} + 2\nu k^2 E(k, t) = T(k, t). \quad (4.40)$$

O primeiro termo desta equação representa a taxa de variação da energia cinética turbulenta; o segundo representa a transferência de energia ou a sua dissipação, por efeitos moleculares, dependendo do número de onda em questão. O termo $T(k, t)$ depende da função $I(k, t)$ e do tensor de terceira ordem

$$P_{ijm} = k_m \wp_{ij}(\vec{k}, t) + k_j \wp_{im}(\vec{k}, t). \quad (4.41)$$

Na Figura 4.16 ilustra-se o espectro de energia com o termo $T(k)$ que modela a transferência de energia entre as diferentes estruturas turbilhonares do escoamento.

A Figura 4.17 ilustra o processo transiente de estabelecimento de um espectro de energia cinética turbulenta. Parte-se de uma distribuição inicial de energia, concentrada sobre uma faixa espectral estreita, concentrada sobre o número de onda de injeção de energia. À medida que o tempo passa esta energia se distribui, através dos mecanismos físicos modelados na equação precedente, e estabelece-se o espectro correspondente à uma turbulência tridimensional completamente desenvolvida.

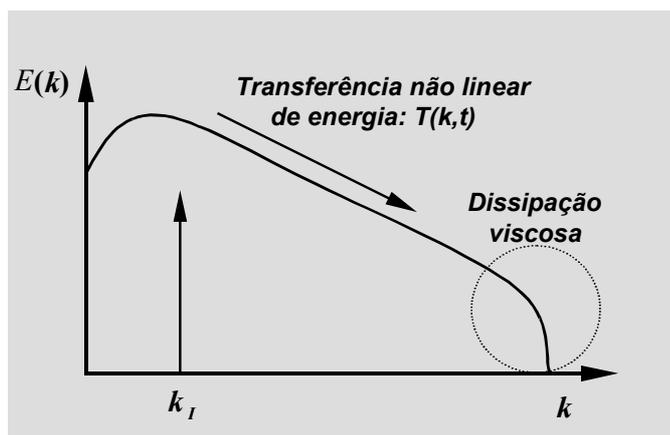


Figura 4.16. Espectro de energia cinética turbulenta: processos da sua transferência não linear e da sua dissipação viscosa.

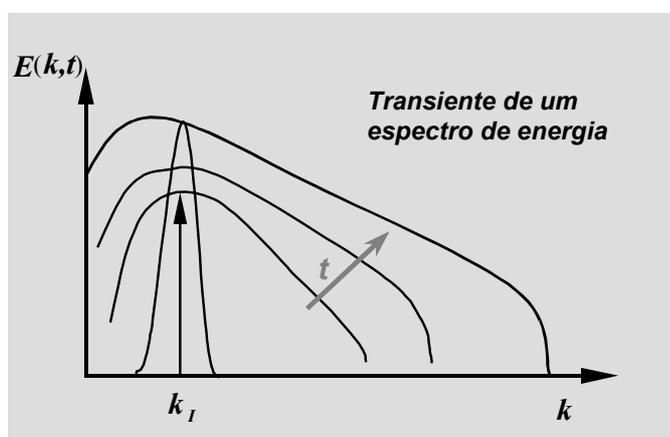


Figura 4.17. Distribuição de energia cinética turbulenta, ilustrando o processo de formação de um espectro.

4.6. TEORIA DE KOLMOGOROV (KOLMOGOROV, 1941)

Esta é a teoria mais famosa sobre a turbulência isotrópica. Sua base é a análise

dimensional. Supor uma dissipação viscosa ε . Para se ter regime permanente, é necessário que toda a energia injetada sobre o número de onda de injeção seja dissipada pelos efeitos viscosos. Esta é a hipótese do equilíbrio. Na teoria de Kolmogorov, assume-se que o espectro de energia, para números de onda maiores que k_I , depende apenas de ε e de k . Fazendo-se uma análise dimensional baseada no teorema dos π 's de Vaschy-Buckingham, Kolmogorov chegou à seguinte expressão

$$E(k) \approx \varepsilon^\alpha k^\beta. \quad (4.42)$$

Determinando-se os valores de α e de β tem-se que:

$$E(k) = C_K \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (4.43)$$

onde $C_K=1,4$ é a constante universal de Kolmogorov, determinada analiticamente. Esta equação, quando linearizada através de logaritmo, permite obter a distribuição ilustrada nas Figuras 4.18, sendo que a zona inercial tem inclinação $-5/3$.

Uma variedade de experimentos em laboratório e de experimentos numéricos têm sido realizados objetivando-se a comprovação desta lei, para uma variedade de valores do número de Reynolds. Todos eles têm resultado na lei de Kolmogorov.

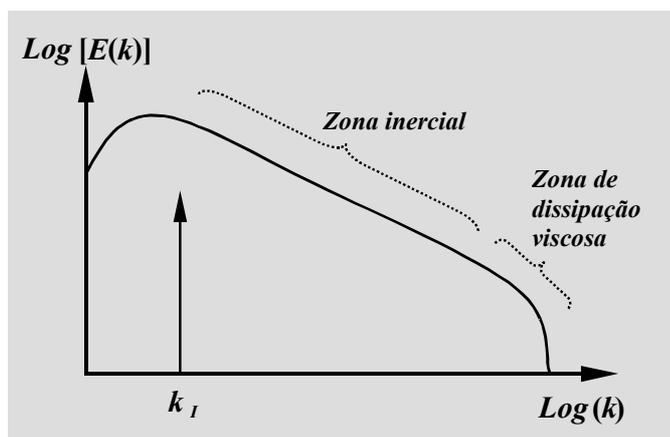


Figura 4.18. Espectro de energia; zona inercial e zona de dissipação viscosa.

4.7. ESCALAS DA TURBULÊNCIA

Antes de aprofundar qualquer tipo de estudo sobre os escoamentos turbulentos é

interessante poder ter uma idéia das ordens de grandezas das variáveis envolvidas nos fenômenos, através das escalas características da turbulência. Estas escalas são relacionadas com tempo, comprimento, velocidades, energia, e vorticidade

4.7.1. Escalas dissipativas de Kolmogorov

Para lançar o conceito de escala de dissipação viscosa de Kolmogorov, toma-se um turbilhão de tamanho característico r com uma velocidade característica v_r originário em um fluido de viscosidade ν . Define-se então um número de Reynolds local,

$$Re_r = \frac{v_r r}{\nu}. \quad (4.44)$$

O quadrado deste parâmetro representa a importância relativa das forças de inércia e das forças viscosas. Admita-se que a escala r esteja numa zona do espectro onde, pela teoria de Kolmogorov, $v_r = (\varepsilon r)^{1/3}$, ver Lesieur (1994). Substituindo v_r na equação acima tem-se $Re_r = (\varepsilon r^4)^{1/3} / \nu$. Se se considera que para esta escala r os efeitos viscosos são pequenos pode-se então afirmar que Re_r é maior que 1. Se r diminui Re_r diminui também e se $r < l_d$, onde l_d é definido abaixo,

$$l_d = \left(\nu^3 / \varepsilon \right)^{1/4}, \quad (4.45)$$

então Re_r torna-se menor que 1 e os efeitos viscosos passam a dominar os efeitos de inércia. Esta escala l_d é a escala dissipativa de Kolmogorov. Logo os turbilhões de tamanhos menores que l_d são dissipados por efeitos viscosos e não podem se desenvolver. Esta análise permite entender porque o espectro de energia cinética cai tão rapidamente quando se aproxima do número de onda dissipativo de Kolmogorov, $2\pi/l_d$. A título de exemplo, a escala de Kolmogorov no interior da camada limite atmosférica é da ordem de 1 mm, enquanto que no caso de uma turbulência de grelha é da ordem de 0,1 mm.

Fazendo-se uma análise dimensional e expressando-se o tempo característico em função de ν e ε , chega-se à seguinte expressão para este parâmetro, relativo às estruturas dissipativas de Kolmogorov,

$$\tau = \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2}. \quad (4.46)$$

De forma semelhante deduz-se as escalas de velocidade, de vorticidade (da ordem do inverso da escala de tempo de Kolmogorov) e de energia cinética turbulenta de Kolmogorov (da ordem do quadrado da escala de velocidade de kolmogorov):

$$v_r = (\nu\varepsilon)^{1/4}, \quad (4.47)$$

$$\omega = \left(\frac{\varepsilon}{\nu}\right)^{1/2}, \quad (4.48)$$

$$e = (\nu\varepsilon)^{1/2}. \quad (4.49)$$

4.7.2. Grandes Escalas

As maiores estruturas de um escoamento são determinadas pela geometria que lhes dão origem. Seja L a escala de comprimento típica de um escoamento: por exemplo o diâmetro de um cilindro longo à jusante do qual se forma uma esteira turbilhonar. Seja U a escala de velocidade, ou seja, a velocidade de transporte das grandes estruturas de um escoamento. Com estas duas grandezas características define-se as demais, na seguinte ordem: tempo, vorticidade e energia, as quais são dadas pelas equações seguintes:

$$t = \frac{L}{U}, \quad (4.50)$$

$$W = \frac{U}{L}, \quad (4.51)$$

$$E = U^2, \quad (4.52)$$

4.7.3. Taxa de dissipação

Para os escoamentos turbulentos completamente desenvolvidos pode-se fazer a hipótese do equilíbrio para os quais a dissipação viscosa (ε) é igual à taxa de injeção de

energia cinética nas grandes escalas (U^2 / t). É interessante perceber que a dissipação viscosa pode então ser expressa em função de grandezas independentes da viscosidade, como ilustrado esquematicamente na Figura 4.19.

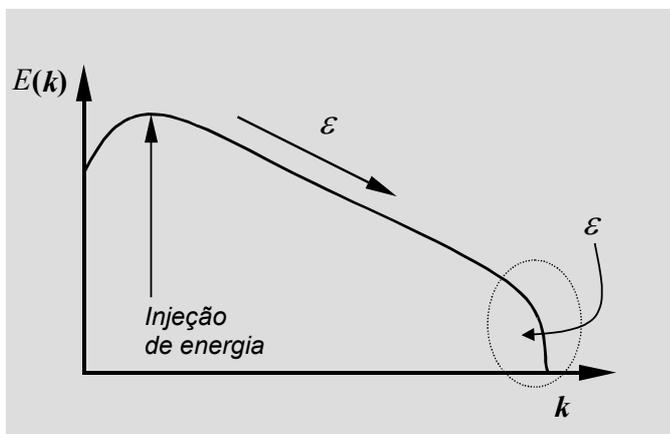


Figura 4.19. Esquema ilustrativo da hipótese do equilíbrio.

Desta forma pode-se expressar a taxa de dissipação como segue:

$$\varepsilon \approx \frac{U^2}{t} = \frac{U^3}{L}. \quad (4.53)$$

Com esta equação diz-se que a taxa de dissipação pode ser estimada a partir de parâmetros relativos às grandes escalas, sem a participação da viscosidade.

4.7.4. Relações Entre as Escalas da turbulência

Pode-se, agora, deduzir relações interessantes envolvendo as escalas estabelecidas acima:

$$l_d = \left(\nu^3 / \left(\frac{U^3}{L} \right) \right)^{1/4}, \quad (4.54)$$

onde

$$\frac{L}{l_d} = \text{Re}_L^{3/4}. \quad (4.55)$$

Analogamente,

$$\frac{T}{\tau} = \text{Re}_L^{1/2}, \quad (4.56)$$

$$\frac{U}{v_r} = \text{Re}_L^{1/4}, \quad (4.57)$$

$$\frac{\omega}{W} = \text{Re}_L^{1/2}, \quad (4.58)$$

$$\frac{E}{e} = \text{Re}_L^{1/2}, \quad (4.59)$$

Observa-se alguns fatos interessantes ao analisar estas expressões. Todas elas mostram que as escalas dissipativas são muito menores que as escalas das estruturas coerentes, exceto a vorticidade. As leis de variação com o número de Reynolds são diferentes, como se ilustra na Figura 4.20. Vê-se que as escalas de comprimento se distanciam mais rapidamente que as escalas de tempo e de velocidade.

Pela relação para as escalas de vorticidade vê-se que as pequenas escalas têm mais vorticidade que as grandes escalas, e, de forma contrária, pela relação para as escalas de energia, as grandes escalas são portadoras de uma maior quantidade de energia.

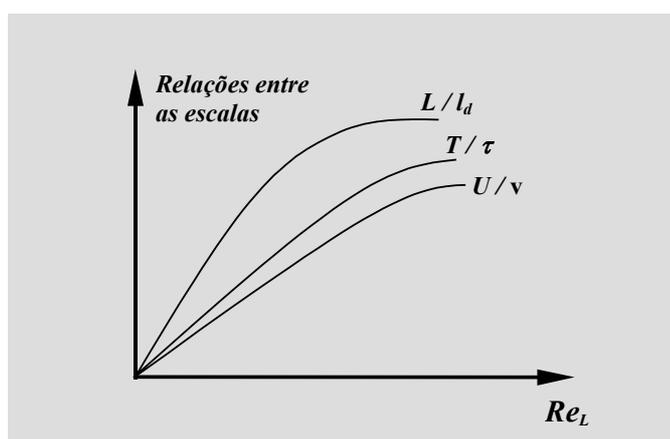


Figura 4.20. Comportamento qualitativo das relações de escalas.

4.7.5. Escalas moleculares versus escalas turbulentas

As escalas dissipativas de Kolmogorov são as menores que podem ocorrer em um escoamento turbulento. É importante verificar quando estas escalas podem sofrer influências

das escalas moleculares. Seja ξ o livre caminho médio molecular. Para os gases a escala molecular de velocidade pode ser associada à velocidade do som c . Da teoria cinética dos gases mostra-se que a viscosidade cinemática pode ser expressa em função destas duas grandezas características (ξ, c) pela relação $\nu \approx c\xi$, d'onde

$$\xi \approx \frac{\nu}{c}. \quad (4.60)$$

Já tinha sido visto que:

$$l_d = \left(\frac{U}{\nu}\right)^{-3/4} L^{1/4}. \quad (4.61)$$

Dividindo uma equação pela outra tem-se:

$$\frac{\xi}{l_d} = \frac{M}{\text{Re}_L^{1/4}}, \quad (4.62)$$

onde $M = U/c$ é o número de Mach. Numa primeira análise desta equação pode-se dizer que a escala característica molecular, ξ , é sempre muito menor que a escala dissipativa l_d uma vez que mesmo para altíssimos números de Mach o número de Reynolds deve ser ainda muito superior a ele de forma que esta relação seria sempre muito menor que a unidade. No entanto um cuidado especial deve ser tomado pois à medida que Reynolds aumenta a escala dissipativa l_d tende às escalas moleculares. Segundo Lesieur (1994), para Mach acima de 15 estas duas escalas começam a se confundir. Esta informação é extremamente importante pois isto implicaria em dizer que as equações de Navier-Stokes não são mais representativas dos escoamentos com $M > 15$. Ter-se-ia, neste caso, que utilizar equações alternativas do tipo Boltzman. Felizmente, para quase a totalidade dos problemas práticos da atualidade Mach não supera esta marca, mesmo para os escoamentos com fortes efeitos de aquecimento.

Supor a hipótese do equilíbrio, pela qual toda a energia injetada no espectro, deve ser dissipada pelos efeitos viscosos. Nesta condição, o processo de transferência e dissipação de energia cinética turbulenta foi traduzido por Richardson na forma de uma paródia: “Os grandes vórtices são compostos de menores vórtices, os quais se alimentam da energia dos maiores; os menores se compõem de outros ainda menores, e assim até as escalas viscosas dissipativas”.