

CAPÍTULO 5

FENOMENOLOGIA DO PROBLEMA DE FECHAMENTO DA TURBULÊNCIA

5.1. INTRODUÇÃO AO PROBLEMA DE FECHAMENTO E A MODELAGEM DA TURBULÊNCIA

Como foi comentado em unidades anteriores, uma das características mais importantes de um escoamento turbulento é a multiplicidade de escalas que o caracteriza. Para ilustrar esta afirmação, mostra-se na Figura 5.1 o escoamento em transição à jusante de uma bolha que sobe em um meio líquido. Nesta figura observa-se a formação de duas recirculações simétricas de tamanhos característicos da ordem do tamanho característico da bolha. Observa-se que estas recirculações são nitidamente compostas de instabilidades de Kelvin-Helmholtz de comprimentos de onda menores que as recirculações já citadas. Se a fotografia apresentasse maior nível de detalhe poder-se-ia detectar que estas menores instabilidades apresentariam sinais de novas instabilidades sobre si mesmas, dando uma ideia física do processo de multiplicidade de escalas.

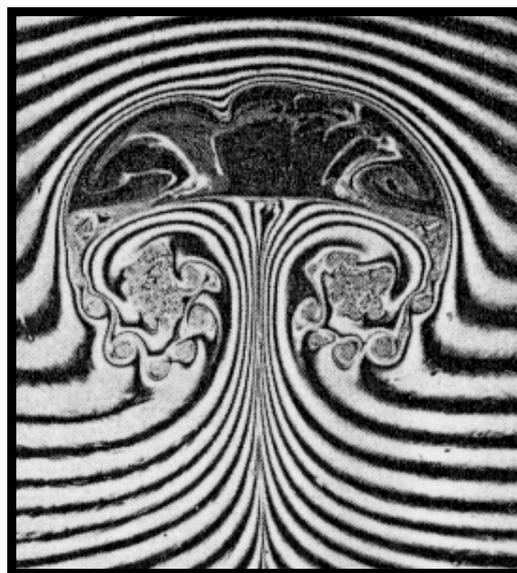


Figura 5.1. Escoamento em transição em torno de uma bolha (Figura retirada de Couder *et al.* 1989).

Esta multiplicidade de escalas representa também o número de graus de liberdade de um escoamento turbulento, o qual a pode ser estimado a partir do número de Reynolds, através da equação abaixo:

$$N_{gl} = \left(\frac{L}{l_d} \right)^3 = Re_L^{9/4}. \quad (5.1)$$

Percebe-se com esta equação que quanto maior o número de Reynolds maior será o número de graus de liberdade do escoamento. Na Figura 5.2 mostra-se um espectro de energia de um escoamento turbulento a alto número de Reynolds obtido em um túnel de vento.

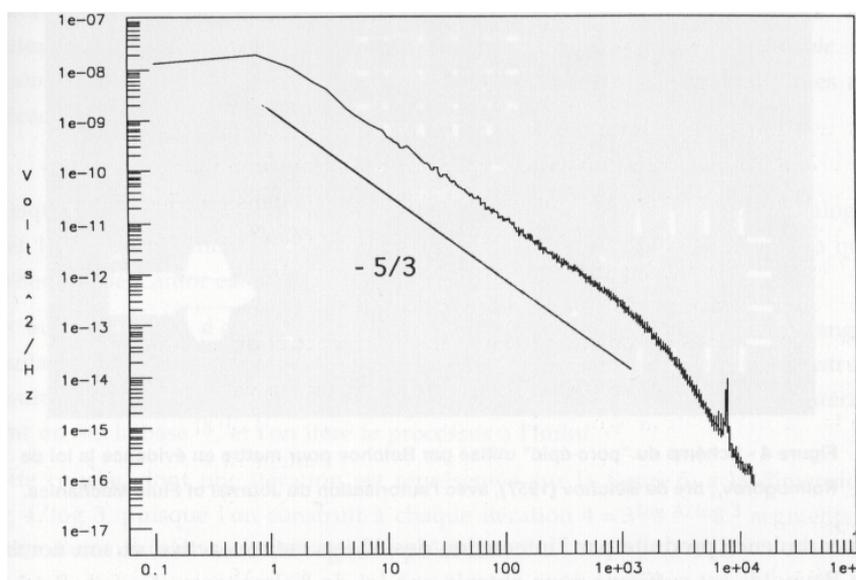


Figura 5.2. Espectro de energia cinética turbulenta de um escoamento a alto número de Reynolds (retirado de Lesieur, 1994).

Observa-se que este espectro está representado em escalas log-log e que a sua largura é de cinco décadas aproximadamente. Este resultado é um dos espectros mais largos obtidos experimentalmente em túneis de vento.

Para exemplificar o cálculo do N_{gl} de escoamentos turbulentos, dois casos extremos serão tomados: um escoamento atmosférico e um escoamento à jusante de uma grelha. O primeiro caso está ilustrado na Figura 5.3, onde uma estrutura turbilhonar atmosférica pode ser visualizada.

Para o cálculo do N_{gl} deste escoamento, tomar-se-á alguns dados típicos: $L \approx 500$ km (escala de comprimento característica) e $l_d \approx 1$ mm (menor escala da turbulência, escala dissipativa de Kolmogorov). Com estas duas escalas calcula-se $N_{gl} \approx 10^{26}$. Sabendo-se que, a

análise teórica de um problema passa pela solução de sistemas lineares, compostos por um número de equações igual ao N_{gl} , vê-se que a solução teórica ou numérica do problema acima está fora das possibilidades atuais, mesmo com os maiores supercomputadores existentes.

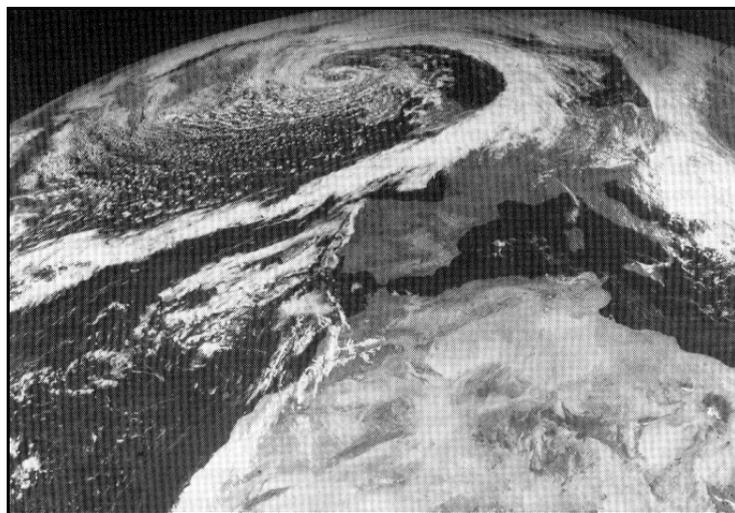


Figura 5.3. Turbilhão atmosférico (Figura retirada de Lesieur, 1994).

Um outro exemplo pode ser visualizado na Figura 5.4 onde se mostra um escoamento turbulento à jusante de uma grelha. Visualiza-se as estruturas turbilhonares características.

Para o cálculo do N_{gl} , novamente toma-se alguns dados típicos: $L = 4$ mm (tamanho dos passos da grelha); $U = 10$ m/s (velocidade típica); $\nu = 10^{-5}$ m²/s (viscosidade cinemática). Com estas informações tem-se $Re=4.000$, o que fornece $N_{gl}=1,3 \times 10^8$. Verifica-se que, mesmo neste caso, a um modesto número de Reynolds, o cálculo explícito de todos os graus de liberdade não é possível. Seria necessário resolver sistemas lineares de 10^8 equações simultâneas. A maior parte dos problemas práticos de engenharia são caracterizados por números de Reynolds que se localizam nesta faixa. Surge então a questão: como resolver esta classe de problemas?

Reynolds (1894) iniciou uma reflexão sobre este assunto e propôs um processo de decomposição das equações governantes, de tal forma a se analisar o comportamento médio do escoamento e modelar suas flutuações. Esta decomposição conduz ao chamado problema de fechamento da turbulência e deu origem a um vasto domínio de pesquisa, denominado *problema de fechamento e modelagem da turbulência*. Em outra unidade este problema será investigado e serão apresentadas duas linhas de modelagem: modelagem estatística clássica (simulação numérica do comportamento médio dos escoamentos turbulentos) e modelagem

sub-malha (simulação numérica de grandes escalas, onde as grandes estruturas são resolvidas explicitamente e as menores estruturas são modeladas).

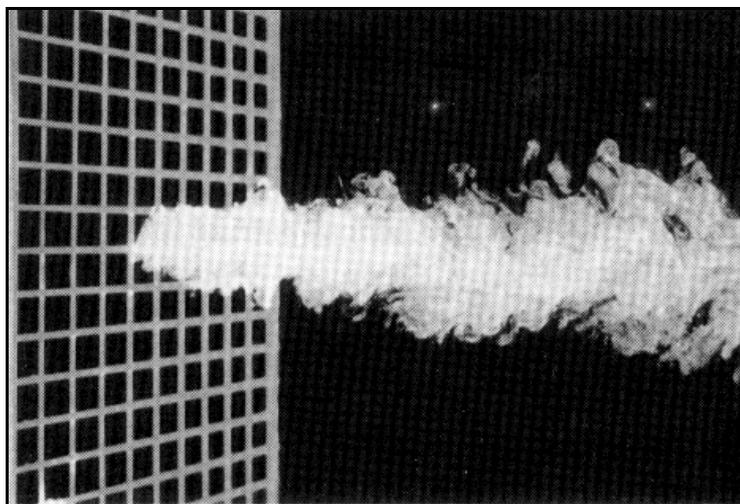


Figura 5.4. escoamento turbulento à jusante de uma grelha (Figura retirada de Lesieur, 1994).

5.2. EQUAÇÕES DA TURBULÊNCIA

A chamada Simulação Numérica Direta seria aquela que permitiria, dado um escoamento caracterizado por um valor do número de Reynolds, resolver todos os graus de liberdade ou todo o espectro de energia associado ao escoamento. Com base nos dois exemplos colocados na seção precedente, mesmo para os escoamentos a baixos números de Reynolds não é possível praticar SND, ou seja, resolver diretamente todos os graus de liberdade que caracterizam os escoamentos turbulentos. Com base nisto surgiu a ideia de separação ou decomposição das escalas da turbulência.

5.2.1. Decomposição das escalas da Turbulência

O processo de decomposição das escalas deu origem a dois grupos de equações para a turbulência:

- Equações médias de Reynolds (1884), para as quais as escalas da turbulência são separadas nas escalas relativas ao comportamento médio e nas escalas relativas às flutuações em relação a esta média;

- Equações de Navier-Stokes filtradas (Smagorinsky, 1963), para as quais as escalas da turbulência são separadas em dois grupos, ou seja, o grupo das grandes escalas e o grupo das pequenas escalas ou escalas sub-malha.

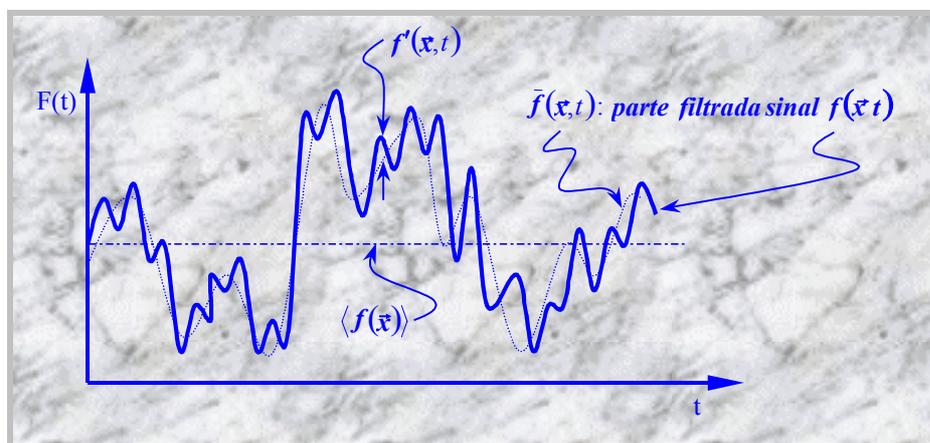


Figura 5.5. Sinais representativos de uma função genérica $f(\bar{x}, t)$, da sua média temporal $\langle f(\bar{x}) \rangle$, da sua parte filtrada $\bar{f}(\bar{x}, t)$ e da sua parte flutuante $f'(\bar{x}, t)$.

5.2.2. Equações médias de Reynolds

Neste caso, conforme já comentado, separa-se um sinal genérico $f(\bar{x}, t)$ na sua parte média $\langle f(\bar{x}) \rangle$, se a média for temporal, e na sua parte flutuante $f'(\bar{x}, t)$:

$$f(\bar{x}, t) = \langle f(\bar{x}) \rangle + f'(\bar{x}, t), \quad (5.2)$$

conforme ilustrado na Figura 5.5. Antes de aplicar o conceito de separação de escalas às equações de Navier-Stokes, apresenta-se as propriedades associadas ao processo de média.

5.2.2.1. Propriedades associadas ao conceito de separação de escalas por meio de médias

Com base na equação de decomposição acima tem-se as seguintes propriedades:

- A média de uma flutuação é nula

$$\begin{cases} f(\bar{x}, t) = \bar{f}(\bar{x}) + f'(\bar{x}, t) \Rightarrow f'(\bar{x}, t) = f(\bar{x}, t) - \bar{f}(\bar{x}) \Rightarrow \\ \bar{f}'(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x}) - \bar{f}(\bar{x}) = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

- A média do produto de uma variável média por uma flutuação de uma variável é nula

$$\overline{\bar{f} f'} = \bar{f} \bar{f}' = \bar{f} \cdot 0 = 0 \quad (5.4)$$

- A média do produto de duas médias é igual ao produto das duas médias

$$\overline{\bar{f} \bar{f}} = \bar{f} \bar{f} \cdot \bar{1} = \bar{f} \bar{f}. \quad (5.5)$$

Observa-se que em todas as propriedades descritas, considerou-se que a média de uma variável é uma constante.

5.2.2.2. Equações médias de Reynolds

Considera-se as equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia, para escoamentos incompressíveis e de fluidos newtonianos, escritas em notação tensorial.

- Conservação da massa

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (5.6)$$

Aplicando o operador média sobre esta equação e utilizando a propriedade comutativa entre este operador e o operador derivada parcial, tem-se a conservação da massa para as médias das componentes da velocidade:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5.7)$$

Subtraindo-se uma equação da outra, tem-se a conservação da massa para as flutuações das componentes da velocidade:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0. \quad (5.8)$$

- Equação da conservação da quantidade de movimento

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (5.9)$$

Aplicando-se o operador média sobre esta equação e utilizando-se da propriedade comutativa, tem-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (5.10)$$

Observa-se que esta equação não pode ser resolvida como está, uma vez que no termo não linear aparece a média do produto de duas variáveis desconhecidas. Neste ponto a decomposição de escalas deve ser aplicada, na forma da seguinte igualdade:

$$u_\ell = \bar{u}_\ell + u'_\ell, \quad (5.11)$$

e utilizando-se das três propriedades já comentadas, tem-se que:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\bar{u}_i \bar{u}_j + u'_i u'_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (5.12)$$

Observa-se que a consequência imediata do processo de decomposição de escalas e da transformação das equações originais em equações médias, é o aparecimento de um tensor adicional $\tau_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$, conhecido como tensor de Reynolds. Ele pode ser reescrito na forma matricial como abaixo:

$$\tau = \begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Verifica-se que este tensor é simétrico: $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Ressalta-se que este tensor tem natureza física semelhante ao tensor viscoso molecular, a pesar de sua origem, ligada ao

termo não linear. Desta forma é natural transpor este tensor para o segundo membro da equação de conservação e agrupá-lo com o tensor viscoso:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u'_i u'_j} \right]. \quad (5.14)$$

Logo, tem-se seis incógnitas a mais, levando em conta a simetria do tensor de Reynolds. Faz-se necessário modelar este tensor. Trata-se de um momento de Segunda ordem, o qual apareceu devido aos processos de média e de separação de escalas utilizados. É sempre possível gerar uma equação de transporte para este momento de Segunda ordem, porém, pela mesma razão, irá aparecer um momento de terceira ordem a ser modelado. Este é o famoso problema de fechamento da turbulência.

As soluções viáveis para se resolver este problema, até os dias atuais, baseiam-se na chamada modelagem da turbulência, o que será visto em seções posteriores.

5.2.3. Equações de Navier-Stokes filtradas

Neste caso, conforme já comentado, separa-se um sinal genérico $f(\vec{x}, t)$ na sua parte filtrada $\bar{f}(\vec{x})$ e na sua parte flutuante $f'(\vec{x}, t)$:

$$f(\vec{x}, t) = \bar{f}(\vec{x}, t) + f'(\vec{x}, t), \quad (5.15)$$

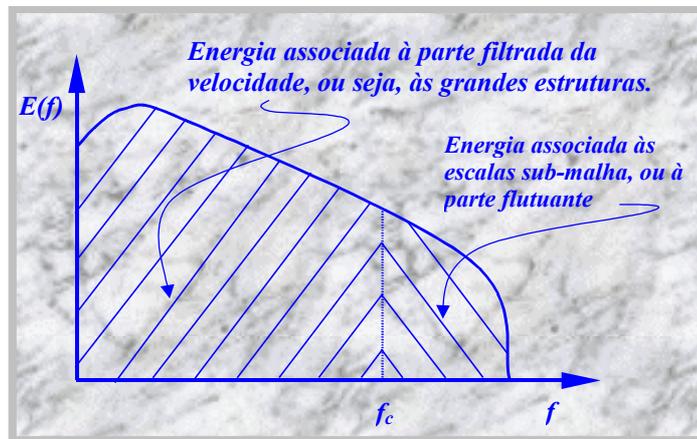


Figura 5.6. Espectro e distribuição de energia nas grandes escalas (maiores que o tamanho característico do filtro) e nas pequenas escalas (menores que o tamanho característico do filtro).

Aqui, $\overline{f}(\vec{x}, t)$ é a parte filtrada da variável $f(\vec{x}, t)$, que representa fisicamente as menores frequências do escoamento ou as maiores estruturas turbilhonares; $f'(\vec{x}, t)$ é a flutuação de $f(\vec{x}, t)$, em relação à sua parte filtrada, que representa fisicamente as maiores frequências do escoamento ou as menores estruturas turbilhonares.

Na Figura 5.5 ilustra-se estas três variáveis em função do tempo. Na Figura 5.6 mostra-se a repartição do espectro de energia em relação à frequência ou ao número de onda de corte, a qual ou o qual são determinados pelo processo de filtragem. Apresenta-se aqui as propriedades associadas ao processo de filtragem, que são diferentes daquelas associadas ao processo de média.

5.2.3.1. Conceito de filtros

Qualquer distribuição de uma função no tempo ou no espaço podem ser submetidas a processos de filtragem, seja por meio de um filtro temporal, seja por meio de um filtro espacial. No contexto da dedução das Equações de Reynolds Filtradas utiliza-se somente filtros espaciais, uma vez que a solução das equações filtradas avança no tempo de forma parabólica. Desta forma, limitar-se-á a comentar sobre filtros espaciais.

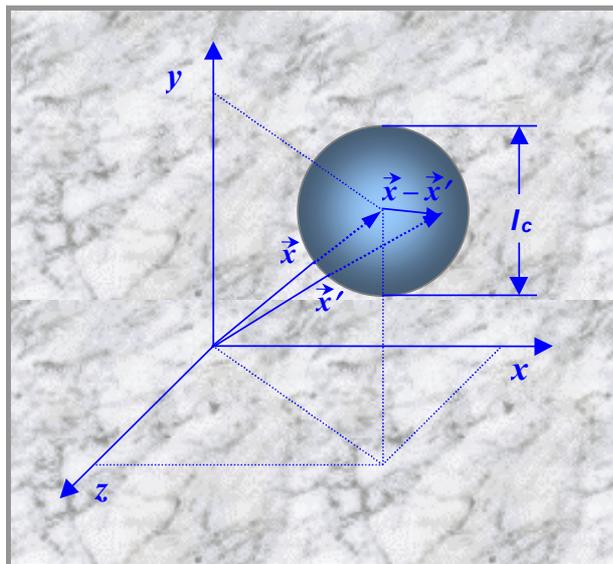


Figura 5.7. Esquema ilustrando o volume de integração para o processo de filtragem.

O processo de filtragem pode ser definido como sendo a integral de convolução envolvendo a função a ser filtrada e uma função filtro apropriada; como ilustra a equação abaixo.

$$\bar{f}(\bar{x}, t) = \int_V G(\bar{x} - \bar{x}') f(\bar{x}', t) d\bar{x}' . \quad (5.16)$$

A função G pode ser uma função temporal ou espacial. Na equação acima aparece um filtro espacial. Ela guarda também as características do filtro que determina a frequência de corte f_c . São dados a seguir dois exemplos de filtros espaciais.

O primeiro deles é definido como segue:

$$G(\bar{x} - \bar{x}') = \begin{cases} \frac{1}{V} & \text{se } \bar{x} - \bar{x}' \leq \ell_c \\ 0 & \text{se } \bar{x} - \bar{x}' > \ell_c \end{cases} . \quad (5.17)$$

O volume V é o volume de integração para a filtragem. O filtro tem um comprimento característico ℓ_c o qual determina a frequência de corte que determina quais frequências permanecem no sinal filtrado e quais são eliminadas. Em outras palavras, quais frequências serão calculadas e quais serão modeladas. A Figura 5.7 ilustra as variáveis envolvidas neste exemplo.

Aplicando este filtro sobre uma função, tem-se que a função filtrada assume um valor médio no interior do volume de integração:

$$\bar{f}(\bar{x}, t) = \frac{1}{V} \int_V f(\bar{x}, t) dV . \quad (5.18)$$

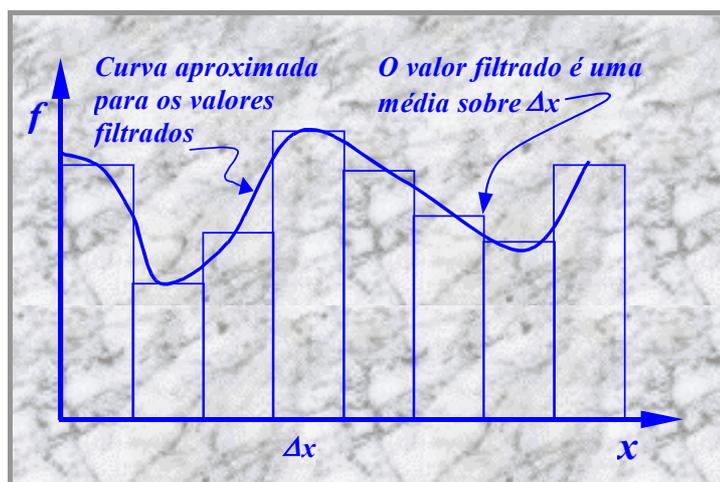


Figura 5.8. Processo de filtragem espacial unidimensional; o tamanho característico do filtro é Δx .

Um segundo tipo de função filtro G , como uma gaussiana, pondera a influência dos pontos vizinhos em função da distância ao ponto em questão. A que apresentamos foi sugerida por Juric (1996), a função D_{ij} , chamada de *função distribuição* é dada pelas Equações (5.19)-(5.21).

$$D_{ij}(\bar{x}_k) = \frac{f[(x_k - x_i)/h] f[(y_k - y_j)/h]}{h^2}, \quad (5.19)$$

$$f(r) \begin{cases} f_1(r) & \text{se } \|r\| \leq 1 \\ \frac{1}{2} - f_1(2 - \|r\|) & \text{se } 1 < \|r\| \leq 2 \\ 0 & \text{se } \|r\| > 2 \end{cases}, \quad (5.20)$$

$$f_1(r) = \frac{3 - 2\|r\| + \sqrt{1 + 4\|r\| - 4\|r\|^2}}{8}, \quad (5.21)$$

onde r representa $(x_k - x_i)/h$ ou $(y_k - y_j)/h$ e h o passo espacial da malha na direção correspondente. Considerando a função distribuição, uma variável qualquer é filtrada com a seguinte expressão:

$$\bar{X}_{ij} = \sum_{kl} (D_{kl} X_{kl}) h^2. \quad (5.22)$$

X_{kl} são as variáveis correspondentes a cada ponto vizinho tomado em conta.

5.2.3.2. Propriedades associadas ao conceito de separação de escalas por meio de filtragem das equações

Com base na equação de decomposição tem-se as seguintes propriedades:

- Uma flutuação filtrada não é nula

$$\begin{cases} f(\bar{x}, t) = \bar{f}(\bar{x}) + f'(\bar{x}, t) \Rightarrow f'(\bar{x}, t) = f(\bar{x}, t) - \bar{f}(\bar{x}) \Rightarrow \\ \bar{f}'(\bar{x}) = \bar{f}(\bar{x}) - \bar{\bar{f}}(\bar{x}) \neq 0 \end{cases} \quad (5.23)$$

Esta propriedade se deve ao fato que uma variável filtrada pela segunda vez não é, forçosamente, igual à mesma variável filtrada pela primeira vez, como ilustra a Figura 5.9.

- O produto filtrado de uma variável filtrada por sua flutuação é diferente de zero

$$\overline{\bar{f} f'} \neq \bar{f} \bar{f}' \neq 0 \quad (5.24)$$

- A produto de duas variáveis filtradas, filtrado novamente, é diferente do produto das duas variáveis filtradas separadamente:

$$\overline{\bar{f} \bar{f}} \neq \bar{f} \bar{f}. \quad (5.25)$$

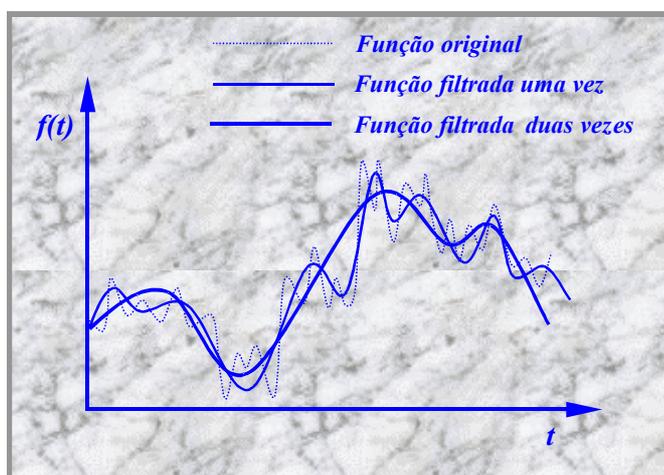


Figura 5.9. Ilustração dos processos de filtragem de uma função qualquer.

5.2.3.3. Equações de Navier-Stokes filtradas

Considera-se as equações de conservação de massa, quantidade de movimento e energia, para escoamentos incompressíveis e de fluidos newtonianos, escritas em notação tensorial.

- Conservação da massa

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (5.26)$$

Aplicando o operador filtro sobre esta equação e utilizando a propriedade comutativa entre este operador e o operador derivada parcial, tem-se a conservação da massa para as componentes da velocidade filtradas:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (5.27)$$

Subtraindo-se uma equação da outra, tem-se a conservação da massa para as flutuações das componentes da velocidade:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0. \quad (5.28)$$

- Equação da conservação da quantidade de movimento

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (5.29)$$

Aplicando-se o operador filtro sobre esta equação e utilizando-se da propriedade comutativa, tem-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (5.30)$$

Observa-se que esta equação não é solúvel desta forma na qual ela está escrita. Trata-se de uma equação de transporte para \bar{u}_i . No entanto, no termo não linear aparece o produto filtrado e não o produto das variáveis filtradas como deveria ser. Assim, para resolver este problema, utiliza-se a equação da decomposição:

$$u_\ell = \bar{u}_\ell + u'_\ell, \quad (5.31)$$

para gerar o seguinte resultado:

$$\overline{u_i u_j} = \overline{(\bar{u}_i + u'_i)(\bar{u}_j + u'_j)} = \bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{\bar{u}_i u'_j} + \overline{\bar{u}_j u'_i} + \overline{u'_i u'_j}. \quad (5.32)$$

Necessita-se ainda da seguinte definição:

$$L_{ij} \equiv \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j. \quad (5.33)$$

Substituindo-se estes dois resultados na equação filtrada tem-se:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j + L_{ij} + \overline{u'_i u'_j} + \overline{\bar{u}_i u'_j} + \overline{u'_i \bar{u}_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (5.34)$$

Novamente tem-se um sistema de equações com mais incógnitas que equações. A classificação dos tensores adicionais que aparecem nesta equação será discutida numa seção posterior. Para resolver o problema de fechamento serão discutidos os modelos de turbulência.

5.3. MODELOS DE TURBULÊNCIA

É sabido que as equações de Navier-Stokes são suficientes para modelar escoamentos em qualquer regime e para qualquer valor do número de Reynolds. O problema reside no fato que quanto maior o número de Reynolds, mais largo se torna o espectro de energia associado ao escoamento. Como as maiores estruturas são reguladas pela geometria do problema, isto significa que grandes valores de Re implica em altas frequências ou estruturas viscosas muito pequenas. Para calcular todas elas faz-se necessária o uso de malhas extremamente finas, o que implica em custos computacionais muito elevados. Logo, Simulação Numérica Direta é limitada a baixos números de Reynolds. É verdade que os valores de Reynolds cujos escoamentos são solúveis via SND se tornam a cada ano muito maiores: em 1991 o record mundial era de $Re=600$, o que exigiu a solução de 1.800.000 equações simultâneas. Nos dias atuais (2000) já estão sendo resolvidas 20.000.000 de equações simultâneas, o que corresponde a $Re=1.700$. No entanto estes valores ainda são muito modestos para se resolver uma grande maioria dos problemas que são caracterizados por elevados números de Reynolds.

Como se viu nas unidades precedentes, a solução paleativa que vem sendo utilizada com sucesso passa pela noção de decomposição de escalas e dedução de equações médias ou, mais moderadamente, filtradas. Foi visto que isto leva ao famoso problema de fechamento da turbulência.

O fechamento passa por estabelecer uma relação entre as tensões de Reynolds e o campo filtrado de velocidades:

$$\overline{u'_i u'_j} = f(\bar{u}_i, \bar{u}_j). \quad (5.35)$$

Boussinesq propôs fechar o sistema de equações, modelando o tensor de Reynolds com o conceito de viscosidade turbulenta, o que será abordado a seguir.

5.3.1. Conceito de viscosidade turbulenta

Boussinesq, em 1877, propôs, estabelecendo uma analogia com o modelo de Stokes para as tensões viscosas moleculares. O seguinte modelo de fechamento para o tensor de Reynolds, foi proposto:

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad (5.36)$$

onde

$$k \equiv \frac{1}{2} (\overline{u'_i u'_i}) = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}), \quad (5.37)$$

é a energia cinética turbulenta. O termo envolvendo o delta de Kronecker δ_{ij} surge devido à necessidade de compatibilizar a definição de k acima com a soma do traço do tensor de Reynolds modelado através da hipótese de Boussinesq. De fato, fazendo $i=j$ tem-se que:

$$-\overline{u'_i u'_i} = 2\nu_t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} - \frac{2}{3} k \delta_{ii} = -2k \Rightarrow k = \frac{1}{2} (\overline{u'_i u'_i}). \quad (5.38)$$

Ressalta-se que ν_t é a viscosidade turbulenta, uma propriedade do escoamento e não do fluido como a viscosidade molecular. Esta característica implica na dificuldade maior de avaliação desta propriedade uma vez que ela depende da natureza do próprio escoamento, constituindo-se numa forte não linearidade na solução das equações. Trata-se de uma propriedade que depende do espaço e do tempo.

A energia cinética turbulenta k também aparece no modelo de fechamento proposto por Boussinesq. No entanto, como ela depende apenas do traço do tensor de Reynolds, ela tem uma natureza semelhante à pressão e pode ser incorporada a ela, como será explicado.

5.3.2. Equações Médias de Reynolds Modeladas

Rescreve-se abaixo a equação tensorial de Reynolds:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u'_i u'_j} \right]. \quad (5.39)$$

Substituindo-se o modelo de Boussinesq nesta equação, tem-se o fechamento, via hipótese de viscosidade turbulenta:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right]. \quad (5.40)$$

Observa-se que o divergente do termo envolvendo a energia cinética turbulenta e o delta de Kronecker resulta no gradiente da energia cinética turbulenta:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) = \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x_i}, \quad (5.41)$$

o que permite incorporar este termo ao termo da pressão, gerando uma pressão modificada na equação modelada:

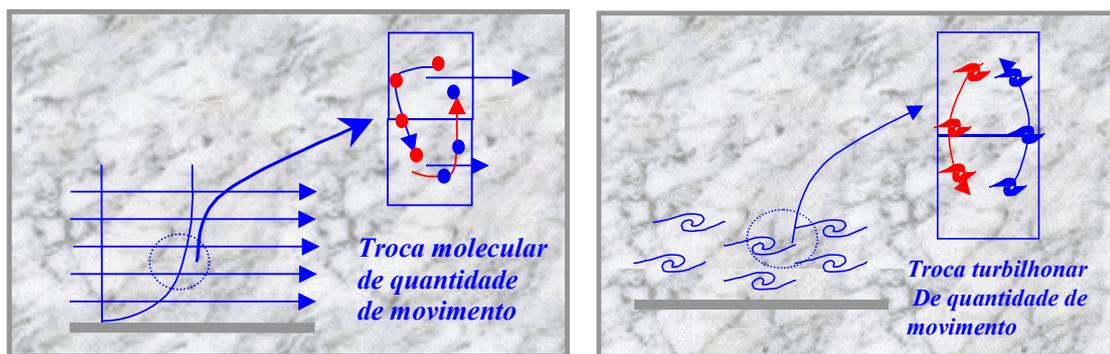
$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (5.42)$$

Observa-se que esta equação de transporte para as componentes médias da velocidade tem uma natureza fechada, sendo composta de um mesmo número de equações que de incógnitas. No entanto resta ainda o problema maior da modelagem da turbulência que é o cálculo da viscosidade turbulenta.

Para recuperar o verdadeiro campo de pressão torna-se necessário modelar também a energia cinética turbulenta, o que deve ser feito simultaneamente com o cálculo da viscosidade turbulenta. É importante enfatizar que, quando se resolve as equações da turbulência modeladas, o que se chama de pressão não é a pressão termodinâmica e sim, uma pressão modificada pela energia cinética turbulenta:

$$\bar{p}^* = \bar{p} + \frac{2}{3} \rho k. \quad (5.43)$$

Resta ainda o cálculo da viscosidade turbulenta, o que é o papel fundamental dos chamados modelos de turbulência. Para tanto, lança-se mão de uma analogia estreita entre o que se passa a nível de partícula de fluido e o que se passa a nível de estruturas turbulentas, como esquematizado abaixo.



(a)

(b)

Figura 5.10. Analogia entre o processo de difusão turbulenta e de difusão molecular: (a) escoamento laminar; (b) escoamento turbulento.

| Analogia entre o processo de difusão turbulenta e de difusão molecular | |
|--|--|
| Processo de Difusão Molecular | Processo de Difusão Turbulenta |
| <ul style="list-style-type: none"> Movimento e colisões entre moléculas; | <ul style="list-style-type: none"> Movimento e colisão entre estruturas turbilhonares; |
| <ul style="list-style-type: none"> Transferência de quantidade de movimento entre partículas de fluido se dá através de movimento de moléculas entre as partículas; | <ul style="list-style-type: none"> Transferência de quantidade de movimento entre diferentes sítios do escoamento se dá através de movimento de estruturas turbilhonares; |
| <ul style="list-style-type: none"> Esta transferência é modelada a nível de contínuo via viscosidade molecular: $\nu \approx C\zeta$ C: Escala de velocidade molecular; ζ: Escala de comprimento molecular; | <ul style="list-style-type: none"> Esta transferência pode ser modelada, por analogia, com o conceito de viscosidade turbulenta: $\nu_t \approx UL$ U: Escala de velocidade de transporte dos turbilhões; L: Escala de comprimento dos turbilhões; |

A analogia apresentada na tabela acima é a base do cálculo da viscosidade turbulenta. Destaca-se, no entanto, algumas deficiências nesta analogia:

- Na teoria cinética dos gases pressupões-se que o tamanho de uma partícula de fluido é muito superior ao livre caminho médio molecular. No entanto, para a turbulência, pode-se
- ter estruturas turbilhonares muito maiores que o comprimento característico L , normalmente avaliado para cada escoamento;

- A viscosidade molecular é uma grandeza escalar. No entanto a turbulência tem como característica altos níveis de anisotropia, sobretudo para as grandes escalas dos escoamentos. Isto diz que tomar a viscosidade turbulenta como uma grandeza não tensorial pode ser uma aproximação comprometedora;
- Apesar destes pontos, o conceito de viscosidade turbulenta permitiu um enorme avanço no campo da modelagem e da simulação de escoamentos turbulentos;
- Modernamente, novas filosofias de simulação, tem permitido tornar esta analogia muito mais realista: é o caso da Simulação de Grandes Escalas, uma vez que filosoficamente, procura-se resolver as grandes escalas e modelar apenas as menores, onde a hipótese de isotropia se torna muito mais realista.

5.3.3. Classificação dos Modelos de Turbulência

Os modelos de turbulência podem ser classificados segundo a dependência ou não do conceito de viscosidade turbulenta. Em ambos os grupos torna-se necessário obter equações de transporte adicionais para o cálculo da viscosidade turbulenta ou para o fechamento alternativo das equações médias de Reynolds, sem passar pelo conceito de viscosidade turbulenta. Neste sentido tem-se dois grandes grupos de modelos:

5.3.3.1. Grupo a: modelos que dependem da viscosidade turbulenta

5.3.3.1.1. Modelos a zero equações de transporte

- Trata-se de toda uma família de modelos baseados na hipótese do comprimento de mistura de Prandtl;
- A grande maioria dos modelos sub-malha, utilizados para Simulação de Grandes Escalas;

5.3.3.1.2. Modelos a uma equação: por exemplo, modelo $k-L$

k : energia cinética turbulenta, cujo cálculo passa pela solução de uma equação de transporte adicional;

L : Comprimento característico, estimado para cada problema em análise;

5.3.3.1.3. Modelos a duas equações

São os modelos $k-\varepsilon$ ou os modelos $k-\omega$, por exemplo. Duas equações de transporte devem ser deduzidas e resolvidas.

5.3.3.2. Grupo b: modelos que não dependem da viscosidade turbulenta

5.3.3.2.1. Modelos a zero equações: as tensões turbulentas são relacionadas algebraicamente com as componentes médias de velocidade;

5.3.3.2.2. Modelos a seis equações: modelo das tensões de Reynolds com seis equações de transporte para as seis componentes do tensor de Reynolds.

5.3.4. Modelos do comprimento de mistura de Prandtl

A viscosidade turbulenta é calculada através de uma velocidade e de um comprimento característicos:

$$\nu_t \approx \hat{V} \ell_m. \quad (5.44)$$

Para escoamentos mais simples, do tipo camada de mistura, jatos e esteiras, considera-se que o cisalhamento médio transversal ao escoamento é predominante sobre o cisalhamento médio em relação às outras direções. Logo,

$$\hat{V} = \ell_m \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|. \quad (5.45)$$

Esta é a chamada hipótese de Prandtl, uma das primeiras tentativas de se calcular a viscosidade turbulenta. O comprimento de mistura permanece como uma incógnita. Tomando como exemplo uma camada de mistura em desenvolvimento espacial ilustrada na figura abaixo, pode-se estimar o comprimento de mistura de Prandtl.

Analisando a Figura 5.11 observa-se que este tipo de escoamento apresenta um comportamento bem determinando em termos do espaçamento criado pela dinâmica das estruturas coerentes. Claramente o comprimento característico deste escoamento é a espessura da camada de mistura $\delta(x)$. Logo,

$$\ell_m \approx \delta(x) \Rightarrow \ell_m = C\delta(x). \quad (5.46)$$

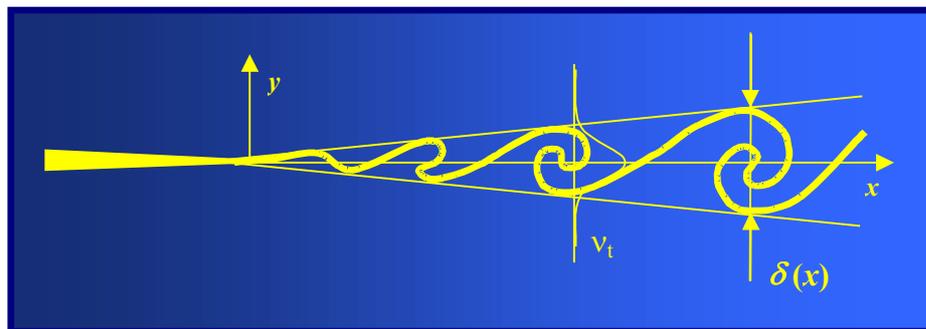


Figura 5.11. Camada de mistura em desenvolvimento espacial; ν_t : distribuição de viscosidade turbulenta; $\delta(x)$: espessura da camada de mistura (comprimento característico).

A constante C é empírica e diferente para cada tipo de escoamento considerado, em função da sua natureza física. Na tabela abaixo mostra-se diferentes valores desta constante para alguns tipos mais clássicos de escoamentos.

| Escoamento | Camada de mistura | Jato plano | Jato redondo | Esteira plana |
|--------------------------------------|-------------------|------------|--------------|---------------|
| $\left(\frac{\ell_m}{\delta}\right)$ | 0,07 | 0,09 | 0,075 | 0,16 |

Esta tabela é válida para escoamentos em meios estagnados.

Observa-se que a viscosidade turbulenta passa a depender de x e de y , como mostra a equação abaixo. A função $\delta(x)$ é empírica, deduzida a partir de experimentos para todos os tipos de escoamentos apresentados.

$$\nu_t(\vec{x}) = \ell_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|. \quad (5.47)$$

Para escoamentos completamente desenvolvidos em dutos ou canais, Nikuradse propôs a seguinte expressão para o comprimento característico:

$$\frac{\ell_m}{R} = 0,14 - 0,08 \left(1 - \frac{y}{R}\right)^2 - 0,06 \left(1 - \frac{y}{R}\right)^4, \quad (5.48)$$

onde R é o raio para dutos circulares e a meia largura para canais planos. A coordenada y representa tanto uma coordenada cartesiana quanto uma coordenada cilíndrica.

Próximo às paredes utiliza-se uma equação apropriada para modelar esta região especial do escoamento, ou seja, a função de amortecimento de Van Driest:

$$\ell_m = \kappa y \left[1 - \exp \left(- y \frac{(\tau_w / \rho)^{1/2}}{A \nu} \right) \right], \quad (5.49)$$

onde

- $A=26$: constante;
- $\kappa=0,4$: é a constante de Von Karman;
- τ_w : tensão de cisalhamento na parede;
- $y^+ = \frac{y \sqrt{\tau_w / \rho}}{\nu} \leq 40$.

Este amortecimento junto à parede é necessário uma vez que os efeitos viscosos são predominantes sobre os efeitos turbulentos.

Para escoamentos mais complexos o modelo do comprimento de mistura de Prandtl torna-se não aplicável devido às dificuldades de se avaliar o comprimento de mistura. Além disto este tipo de modelo se tornaria pouco representativo, mesmo que o comprimento de mistura pudesse ser avaliado.

5.3.5. Modelo a uma equação de transporte

No modelo a uma equação de transporte busca-se o cálculo de uma das grandezas características da turbulência, utilizadas para o cálculo da viscosidade turbulenta, por exemplo a energia cinética turbulenta, com a qual calcula-se a velocidade característica: $\hat{V} = \sqrt{k}$, onde $k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$ é a energia cinética turbulenta. Lembrando que $\nu_t = C \hat{V} L$, tem-se que:

$$\nu_t = C_\mu \sqrt{k} L, \quad (5.50)$$

sendo C_μ uma constante. Esta relação foi proposta por Kolmogorov e Prandtl. Eles sugeriram também a dedução de uma equação de transporte para k . Para tanto reescreve-se as equações de Navier-Stokes e as equações médias de Reynolds:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (5.51)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u'_i u'_j} \right]. \quad (5.52)$$

Com estas duas equações pode-se deduzir uma equação para a flutuação de velocidade, subtraindo-se uma da outra, obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i \bar{u}_j + \bar{u}_i u'_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i u'_i + \overline{u'_i u'_i}) \quad (5.53)$$

a qual pode ser rescrita como segue:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i u'_i + \overline{u'_i u'_i}) - u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (5.54)$$

Multiplicando-se esta equação por u'_i , utilizando-se a regra da cadeia para as derivadas, fazendo-se a média de toda a equação chega-se à equação de transporte para a energia cinética turbulenta:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j k) = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_j} + \frac{1}{\rho} \overline{p' u'_j} \right) \quad (5.55)$$

Nota-se que esta é uma equação de transporte, sendo a variável transportada a energia cinética turbulenta k , com os diversos termos que se encarregam de equilibrar o balanço desta quantidade. É interessante estudar cada um dos termos desta equação.

- O lado esquerdo representa a derivada substantiva de k , ou seja, a taxa de mudança de k à medida que se acompanha uma partícula de fluido no interior de um escoamento turbulento;
- O primeiro termo do lado direito da equação, que é o produto do tensor de Reynolds pela taxa de deformação imposta pelo escoamento filtrado ou médio representa a conhecida

produção de k que significa a taxa de transferência de energia do escoamento médio ou filtrado para a turbulência;

- O segundo termo, é classicamente representado por $\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}}$. Ele representa a taxa de dissipação de energia cinética turbulenta, sendo convertida em energia interna do escoamento, que, no equilíbrio, deve ser igual à taxa de produção de k ;
- O quarto termo representa a difusão molecular de k ;
- O triplo produto de flutuações de velocidade ou o momento de terceira ordem, que aparece no último parênteses, representa o processo de transporte turbulento de k , ou seja, a taxa de transporte de k através do fluido pelas flutuações turbulentas;
- A correlação de flutuação de velocidade com a flutuação de pressão representa uma espécie de difusão de k , gerada pelas flutuações de pressão.

Observa-se que, ao se gerar uma equação de transporte para um momento de Segunda ordem, k , apareceram momentos de terceira ordem, o que faz parte do problema de fechamento da turbulência. Para fechar esta equação faz-se necessário modelar estas correlações de terceira ordem.

O primeiro a propor um modelo de fechamento para esta equação foi Prandtl em 1945. A tendência natural indica que, por analogia com o processo difusivo molecular, qualquer correlação do tipo $-\overline{u'_j \phi'} \approx \nu_t \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x_j}$, onde $\bar{\phi}$ representa o campo médio da função ϕ , cuja flutuação ϕ' está sendo transportada. Na falta de experimentos em laboratório, a Simulação Numérica Direta (Mansur *et al.* 1988, por exemplo) tem indicado que o momento que envolve a flutuação de pressão também pode ser modelado de forma semelhante. Logo, a vasta literatura no assunto apresenta a seguinte proposta para fechar a equação de transporte de k .

$$\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_j} + \frac{1}{\rho} \overline{p' u'_j} = -\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j}, \quad (5.56)$$

onde σ_k é uma constante a ser ajustada, em função do método de solução das equações e do tipo de escoamento a ser simulado.

O termo de dissipação ε também deve ser modelado. Nota-se, que no todo, tem-se ainda duas incógnitas, o taxa de dissipação ε e o comprimento característico ℓ . Taylor (1935)

, utilizando-se de análise dimensional puramente, propôs a seguinte relação:

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{\ell}. \quad (5.57)$$

A constante C_D deve ser determinada empiricamente. Nota-se que esta proposta pressupõe que ε e ℓ não dependem de qualquer propriedade física do fluido. Resta ainda a determinação do comprimento característico do escoamento. Uma longa discussão sobre o assunto é apresentada por Wilcox (1998).

Reescrevendo a equação de transporte para k , tem-se que:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j k) = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - C_D \frac{k^{3/2}}{\ell}. \quad (5.58)$$

O tensor de Reynolds $-\overline{u'_i u'_j}$ já está modelado, a menos do cálculo de ℓ . A viscosidade turbulenta pode ser rescrita, como sendo

$$\nu_t = k^{1/2} \ell = C_D k^2 / \varepsilon. \quad (5.59)$$

Bobyleva, seguindo idéias de Von Karman propôs o seguinte modelo para o cálculo de ℓ :

$$\ell = k \psi / \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right), \quad (5.60)$$

$$\psi = \frac{k^{1/2}}{\ell}. \quad (5.61)$$

Observa-se que foi introduzida uma nova variável e mais uma equação. Este modelo permite avaliar a função auxiliar ψ e o comprimento ℓ , desde que seja conhecido o campo de k . Isto pode ser feito de forma interativa: dado k , calcula-se ψ e ℓ , recalcula-se k pela solução da sua equação de transporte. Procedem-se interações até a convergência.

Uma longa discussão sobre os valores das constantes e sobre ℓ podem também ser encontrados em Wilcox (1998).

Objetivando-se uma melhor compreensão do todo já apresentado, faz-se um resumo e apresenta-se uma sucinta seqüência de passos para a solução das equações.

SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS QUE COMPÕEM O MODELO

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (5.62)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j k) = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - C_D \frac{k^{3/2}}{\ell}, \quad (5.63)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (5.64)$$

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}. \quad (5.65)$$

SEQUÊNCIA DE CÁLCULO

1. Iniciar todas as variáveis;
2. Com ν_t do tempo precedente resolve-se as equações para as velocidades médias e para a pressão;
3. Ainda com ν_t no tempo precedente resolve-se a equação para k ;
4. Calcula-se ℓ ;
5. Com k e ℓ recalcula-se ν_t ;
6. Retorna-se ao passo 2 e recalcula-se as velocidades e a pressão;
7. Verifica-se a convergência de todas as variáveis;
8. Incrementa-se o tempo.

A pesar deste modelo ter sido uma alavanca para o progresso da modelagem da turbulência, ele ainda apresenta muitas limitações em relação a simulação de escoamentos complexos. Daí a motivação para a proposição dos chamados modelos a duas equações.

5.3.6. Modelo a duas equações de transporte

Os modelos de turbulência baseados em duas equações de transporte serviram como a base de muitas pesquisas e desenvolvimentos nas duas últimas décadas. São modelos compostos de uma equação de transporte para a energia cinética turbulenta e outra, seja para o comprimento característico, seja para a dissipação da energia cinética turbulenta. Isto implica que os modelos desta classe são, em tese, suficientes para calcular diferentes tipos de escoamentos sem a necessidade de se conhecer a estrutura do escoamento à priori. Isto seria verdadeiro caso não se tivesse a necessidade de se ajustar um número muito importante de constantes ad-hoc e que, via de regra, são dependentes do tipo de escoamento considerado.

Os modelos a duas equações mais utilizados nos últimos tempos são aqueles do tipo $k - \omega$ e aqueles do tipo $k - \varepsilon$. A primeira equação, já estabelecida, serve para modelar o transporte da energia cinética turbulenta. A Segunda equação, como sugerido por Kolmogorov, em 1942, deve ser uma equação para a taxa específica de dissipação ω , ou para a dissipação ε , as quais podem se relacionar com k , ℓ e ν_t das formas seguintes:

$$\ell \approx h^{1/2} / \omega; \quad \varepsilon \approx \omega k \quad e \quad \nu_t = k / \omega. \quad (5.66)$$

Utilizando-se destas relações e de um procedimento semelhante ao que foi adotado para se deduzir a equação para k , pode-se deduzir equações similares para ω e para ε .

5.3.6.1. Modelo do tipo $k - \omega$

As equações que caracterizam este modelo são, conforme apresentado por Wilcox, as seguintes:

- Viscosidade turbulenta cinemática

$$\nu_t = \frac{k}{\omega} \quad (5.67)$$

- Energia cinética turbulenta

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j k) = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \sigma^* \nu_t \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \beta^* k \omega \quad (5.68)$$

- Taxa de dissipação específica

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j \omega) = -\overline{u'_i u'_j} \alpha \frac{\omega}{k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\nu + \sigma \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) - \beta \omega^2 \quad (5.69)$$

- Relações complementares e constantes de fechamento

$$\alpha = \frac{13}{25}; \quad \beta = \beta_0 f_\beta; \quad \beta^* = \beta_0^* f_{\beta^*}; \quad \sigma = \sigma^* = \frac{1}{2}; \quad \beta_0 = \frac{9}{125} \quad (5.70)$$

$$f_\beta = \frac{1 + 70 \chi_\omega}{1 + 80 \chi_\omega}; \quad \chi_\omega \equiv \left| \frac{\Omega_{ij} \Omega_{jk} S_{ki}}{(\beta_0^* \omega)^3} \right|; \quad \beta_0^* = \frac{9}{100} \quad (5.71)$$

$$f_\beta = \begin{cases} 1 & \text{se } \chi_k \leq 0 \\ \frac{1 + 680 \chi_k^2}{1 + 400 \chi_k^2} & \text{se } \chi_k > 0 \end{cases}; \quad \chi_k \equiv \frac{1}{\omega^3} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}. \quad (5.72)$$

Caso se necessite, pode-se avaliar a dissipação viscosa e o comprimento característico:

$$\varepsilon = \beta^* \omega k \quad \text{e} \quad \ell = \frac{k^{1/2}}{\omega}. \quad (5.73)$$

Nas equações acima aparecem os tensores rotação média e taxa de deformação média, definidos abaixo:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{e} \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (5.74)$$

5.3.6.2. Modelo do tipo $k - \varepsilon$

As equações que caracterizam este modelo são, conforme apresentado por Wilcox, as seguintes:

- Viscosidade turbulenta cinemática

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (5.75)$$

- Energia cinética turbulenta

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j k) = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \varepsilon \quad (5.76)$$

- Taxa de dissipação específica

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j \varepsilon) = -C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right). \quad (5.77)$$

- Relações complementares e constantes de fechamento

$$C_{\varepsilon_1} = 1,44; \quad C_{\varepsilon_2} = 1,92; \quad C_\mu = 0,09; \quad \sigma_k = 1,0; \quad \sigma_\varepsilon = 1,3 \quad (5.78)$$

$$\omega = \frac{\varepsilon}{C_\mu k} \quad \text{e} \quad \ell = C_\mu k^{3/2} / \varepsilon \quad (5.79)$$

5.3.6.3. Modelo do tipo $k - \varepsilon$ RNG

Este modelo proposto por Yakhot e Orzag (1986), baseia-se na teoria do grupo de renormalização. Ele tem exatamente a mesma formulação do modelo $k - \varepsilon$ clássico apresentado acima, exceto pelo cálculo da constante C_{ε_2} que deixa de ser uma constante e passa a ser uma função da taxa de deformação média, como descrito abaixo:

$$C_{\varepsilon_1} = 1,42; \quad C_{\varepsilon_2} = \tilde{C}_{\varepsilon_2} + \frac{C_\mu \lambda^3 (1 - \lambda / \lambda_0)}{1 + \beta \lambda^3}; \quad \tilde{C}_{\varepsilon_2} = 1,68; \quad C_\mu = 0,085; \quad \sigma_k = 0,72 \quad (5.80)$$

$$\sigma_\varepsilon = 0,72; \quad \beta = 0,012; \quad \lambda_0 = 4,38; \quad \lambda = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}. \quad (5.81)$$

5.3.7. Modelo a seis equações ou modelo das tensões de Reynolds ou modelo R_{ij}

O modelo baseado nas tensões de Reynolds não passa pela hipótese da viscosidade turbulenta de Boussinesq. Neste trabalho apresenta-se apenas as idéias básicas relativas ao mesmo.

Observa-se que, nos itens anteriores, modelava-se as tensões de Reynolds, via viscosidade turbulenta, e buscava-se calcular, de diferentes formas, as escalas da turbulência, com as quais se determina a própria viscosidade turbulenta. O modelo das tensões de Reynolds está fundamentado em deduzir equações de transporte diretamente para cada componente das tensões de Reynolds.

Utilizando-se de um procedimento similar àquele utilizado para obter as equações da energia cinética turbulenta e para sua dissipação viscosa, pode-se obter um conjunto de seis equações para as componentes do tensor de Reynolds. Em notação tensorial, elas são escritas da seguinte forma:

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\ell} (\bar{u}_\ell \tau_{ij}) = TF. \quad (5.82)$$

Observa-se que esta equação é composta de todos os termos clássicos de uma equação de transporte, onde o segundo membro representa: termos de produção, de difusão e de dissipação da variável conservada, que são as componentes do tensor de Reynolds τ_{ij} .

Como já comentado, as componentes do tensor de Reynolds são momentos de segunda ordem. Logo, no processo de geração das equações de transporte, origina-se termos que envolvem momentos de terceira ordem. Por tanto, faz-se necessário um processo de fechamento do modelo, via relações complementares de proporcionalidade, as quais exigem a determinação de constantes ad-hoc.

Este tipo de modelo é muito mais geral que os precedentes. Isto significa que com um mesmo conjunto de constantes, pode-se simular escoamentos mais diversificados, com boa confiabilidade. No entanto, observa-se que são seis equações de transporte adicionais, o que o torna muito mais caro computacionalmente.

No que segue, será apresentada uma metodologia alternativa, com a qual se busca, ao mesmo tempo, simplicidade, generalidade e confiabilidade. Busca-se também uma ferramenta que permita analisar escoamentos turbulentos fisicamente. Isto significa que, enquanto com os modelos clássicos, torna-se viável apenas a obtenção de resultados médios dos escoamentos, procura-se alternativamente, modelos matemáticos que permitam obter informações mais

refinadas para compreender fisicamente a dinâmica da Turbulência nos Fluidos. Isto pode ser feito com Simulação Numérica Direta, porém com o grande limitante que só é possível praticá-la em escoamentos a baixos números de Reynolds. A metodologia de Simulação de Grandes Escalas se posiciona de forma intermediária, viabilizando a simulação da natureza física de escoamentos turbulentos, mesmo a altos números de Reynolds. Sua fundamentação e principais características são apresentadas no capítulo seguinte.