

CAPÍTULO 3

TEORIA DA ESTABILIDADE LINEAR

3.1. INTRODUÇÃO

A turbulência já foi caracterizada e o processo de transição em diversos tipos de escoamentos foi estudada. No entanto, a transição é um assunto muito complexo e pouco compreendido. Ele permanece, ainda nos dias atuais, sem uma teoria plausível que permita descrevê-lo coerentemente.

A teoria da estabilidade linear é, no entanto, uma ferramenta interessante que tem permitido obter informações importantes.

3.2. TEORIA DA ESTABILIDADE LINEAR

As referências mais clássicas neste assunto são Drazin and Reid (1981) e White (1991). Os escoamentos laminares são exceção. A altos números de Reynolds, via de regra, acontece a transição para a turbulência. Devido à complexidade dos sistemas fluidos, torna-se interessante estudar e caracterizar o processo de transição de sistemas mecânicos simples antes de estudar a transição de escoamentos.

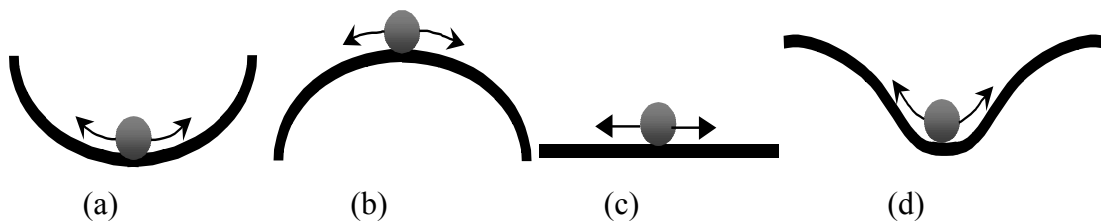


Figura 3.1. Esquemas de estabilidade.

Na figura 3.1 tem-se um exemplo de um sistema dinâmico simples, composto por uma superfície e uma esfera lisa. As possibilidades de regime de operação nesta categoria de problema são as seguintes:

- (a) Sistema incondicionalmente estável – retorna ao equilíbrio, independentemente da amplitude da perturbação;
- (b) Sistema instável – por menor que seja a amplitude da perturbação, ele se torna instável, sem retorno à posição inicial;
- (c) Sistema neutralmente estável – sempre encontrará uma nova posição de equilíbrio;
- (d) Sistema condicionalmente estável – dependendo da amplitude da perturbação o sistema poderá ou não retornar ao equilíbrio.

Uma camada limite sobre uma placa plana, com uma fonte de perturbação ilustrada na Figura 3.2, é um exemplo de um sistema condicionalmente estável. Ela poderá se tornar instável, dependendo da natureza da perturbação injetada, em relação ao regime de operação.

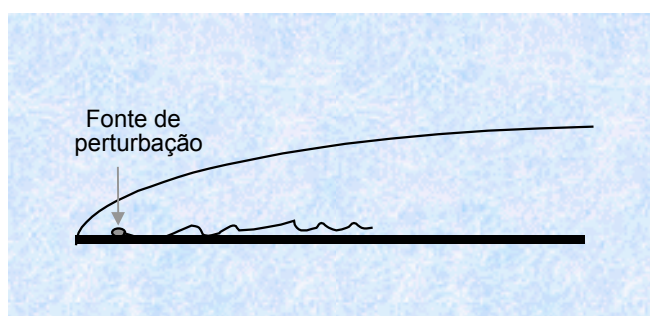


Figura 3.2. Camada limite perturbada na sua entrada por um arame vibrante.

3.3. ESQUEMA BÁSICO DE UMA ANÁLISE DE ESTABILIDADE

Pode-se estabelecer a análise de estabilidade de um sistema dinâmico segundo os seguintes passos:

- a. Procura-se examinar a estabilidade de uma solução de base para o sistema em questão. Seja Q_0 esta solução de base, a qual pode ser, tanto um escalar, quanto um vetor;
- b. Perturba-se esta solução de base: $Q_0 + Q'$, sendo Q' uma perturbação;
- c. Subtrai-se da solução em $Q_0 + Q'$ a solução em Q_0 e obtém-se uma equação para Q' ;
- d. Linearizar a equação para Q' desprezando-se os termos com ordem acima de Q'^2 ($Q' \ll Q_0$);
- e. Se a equação linearizada ainda permanecer complicada, simplificar a perturbação, fazendo-a, bidimensional ou unidimensional;

- f. Esta equação deve ser homogênea com condições de contorno também homogêneas, o que implica em solução envolvendo autovetores e autofunções;
- g. Determinados estes autovetores ou as auto funções, determina-se diagramas de estabilidade, identificando-se as zonas de estabilidade e instabilidade, separadas por linhas neutras.

Um exemplo de um sistema instável é ilustrado na Figura 3.3, trata-se de uma viga sob compressão.

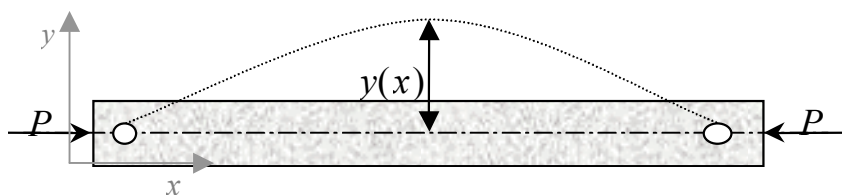


Figura 3.3. Viga em flexão.

Dados: L: comprimento da viga;
 E: módulo de elasticidade
 I: Momento de inércia
 P: Carga imposta
 Questão: a viga fletirá?

A questão que se coloca é se a viga fletirá e em que regime de estabilidade ela pode ser classificada seguindo-se os passos descritos anteriormente.

Assim, tem-se:

- a. Modelo e solução de base: teoria do momento fletor para uma viga

$$\sum M \approx EI \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (3.1)$$

$$y(0) = y(L) = 0 \quad (3.2)$$

Solução de base: $y(x) = 0$

- b. Perturbar:

$$\frac{d^2(y + y')}{dx^2} + \frac{P}{EI}(y + y') = 0 \quad (3.3)$$

Logo,

$$\frac{d^2 y'}{dx^2} + \frac{P}{EI} y' = 0, \text{ com } y'(0) = y'(L) = 0 \quad (3.4)$$

c. Solução em y

$$y(x) = A \operatorname{sen}(\lambda x) + B \cos(\lambda x) \quad (3.5)$$

$$\text{Onde } \lambda = \left(\frac{P}{EI} \right)^{1/2}, \text{ e } y(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \quad (3.6)$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(\lambda L) = 0 \Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{L} \text{ com } n \text{ inteiro}, \quad (3.7)$$

$$\text{Fisicamente } \left(\frac{P_n}{EI} \right)^{1/2} = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow P_n = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \quad (3.8)$$

d. Examinar a estabilidade

Para diferentes cargas P_n , com n inteiro, tem-se diferentes níveis de flexão na forma de senoides:

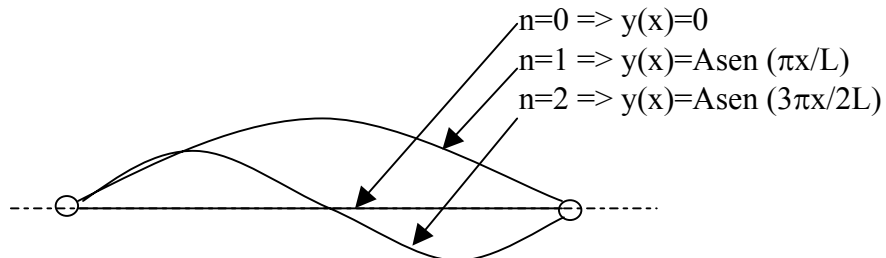


Figura 3.4. Exame da estabilidade do sistema dinâmico em questão:
estabilidade neutra.

3.4. ESTABILIDADE LINEAR EM ESCOAMENTOS

3.4.1. Equação de Orr-Sommerfeld

- escoamentos incompressíveis laminares;
- Propriedades físicas constantes;
- Equações:

$$\text{CM: } \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (3.9)$$

$$\text{CQM: } \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (3.10)$$

Seguindo os passos:

- a. Assumir uma dada solução de base para o comportamento médio do escoamento

$$\begin{cases} \vec{V}_0 = (U, V, W) \\ p_0 = P \end{cases} \quad (3.11)$$

- b. Superpor uma perturbação sobre a solução de base

$$\begin{cases} \vec{V}_0 + \hat{v} = (U + \hat{u}, V + \hat{v}, W + \hat{w}) \\ p_0 + \hat{p} = P + \hat{p} \end{cases} \quad (3.12)$$

- c. Após desprezar as potências de ordem superior, tem-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \hat{u}_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \approx -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \end{cases} \quad (3.13)$$

Observa-se que $i=1,2,3$ e utiliza-se a regra da soma de Einstein para os índices repetidos. Observa-se ainda que estas equações já são lineares.

- d. Para continuar, assume-se um escoamento de base bidimensional e localmente paralelo $U = U(y)$, por exemplo;
- e. As perturbações se comportam na forma de ondas que são transportadas. Expressando-as na forma complexa, tem-se:

$$\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p} = [u(y), v(y), w(y), p(y)] \exp[i\alpha(x \cos \phi + z \sin \phi - ct)], \quad (3.14)$$

onde

- $i = \sqrt{-1}$
- α : n° de onda
- ϕ : ângulo em relação à direção considerada
- c : velocidade de propagação das ondas

- $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$: forma de um trem de ondas cujas amplitudes dependem de y e movimentam-se com um ângulo ϕ ;
 - Todas as ondas se propagam com um número de onda α , com velocidade c e com frequência αc ;
 - Estas ondas são classicamente conhecidas como ondas de Tolmien-Schilichting (ondas TS);
- f. Substituindo-se $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p})$ nas equações precedentes para as perturbações, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$CM \left\{ i\alpha u \cos \phi + \frac{dv}{dy} + i\alpha \omega \sin \phi = 0, \right. \quad (3.15)$$

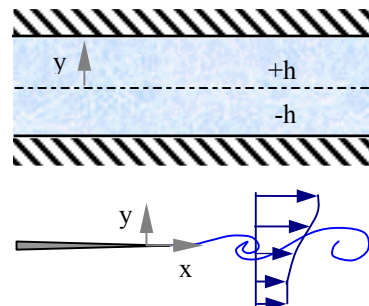
$$CQM \left\{ \begin{aligned} i\alpha u F + v \frac{dU}{dy} + \frac{i}{\rho} \alpha p \cos \phi - v \left(\frac{d^2 u}{dy^2} - \alpha^2 u \right) &= 0 \\ i\alpha v F + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} - v \left(\frac{d^2 v}{dy^2} - \alpha^2 v \right) &= 0 \\ i\alpha w F + v \frac{dW}{dy} + \frac{i}{\rho} \alpha p \cos \phi - v \left(\frac{d^2 w}{dy^2} - \alpha^2 w \right) &= 0 \\ F &= U \cos \phi + w \sin \phi - c \end{aligned} \right. \quad (3.16)$$

Tem-se um sistema de quatro equações e quatro incógnitas (u, v, w e p). Elas são de segunda ordem em (u, v e w) e de primeira ordem na pressão p . Trabalhando estas equações e eliminando variáveis tem-se a *equação de Orr-Sommerfeld*:

$$(U - c)(v'' - \alpha^2 v) - U''v + \frac{i v}{\alpha} (v''' - 2\alpha^2 v'' + \alpha^4 v) = 0. \quad (3.17)$$

Esta equação assume condições de contorno diferentes dependendo do tipo de escoamento:

- Para duto : $v(\pm h) = v'(\pm h) = 0$
 Camada limite : $\begin{cases} v(0) = v'(0) = 0 \\ v(\infty) = v'(\infty) = 0 \end{cases}$
 Camada cizalhante : $v(\pm \infty) = v'(\infty) = 0$



A equação de Orr-Sommerfeld é homogênea e linear e as condições de contorno também o são. Logo ela admite solução do tipo autovalores e auto-funções. Para um dado perfil $U(y)$ e $U''(y)$ apenas uma seqüência de valores satisfará a equação de Orr-Sommerfeld, submetida a estas condições de contorno. O problema matemático maior que reside é a determinação destas auto-funções associadas à solução

3.4.1. Estabilidade linear para escoamentos invíscidos

Neste caso considera-se que $\nu \rightarrow 0$ ou $Re \rightarrow \infty$. Desta forma, simplifica-se a equação de Orr-Sommerfeld, obtendo-se a equação de Rayleigh (1878).

$$v'' - \left(\frac{U''}{U-c} + \alpha^2 \right) v = 0. \quad (3.18)$$

Com base nesta teoria, foram propostos e demonstrados os seguintes teoremas:

Teorema 1 (Rayleigh -1880) – É necessária a existência de um ponto de inflexão (escoamentos 2D) ou uma linha de inflexão (escoamentos 3D) em $U(y)$ (perfil de base) para aparecer instabilidades no escoamento.

Teorema 2 (Fjortoff - 1950) – É também necessário que o valor numérico da vorticidade $|U'|$ assuma um máximo no ponto ou sobre a linha de inflexão.

Teorema 3 (Fjortoff – 1950) – Se um ponto ou uma linha de inflexão existem é também necessário que $U''(U - U_{PI}) < 0$ em algum ponto sobre o perfil $U(y)$, onde U_{PI} é a velocidade sobre o ponto ou sobre a linha de inflexão.

Teorema 4 (Fjortoff - 1950) – Se um ponto ou uma linha de inflexão existe sobre $U(y)$, ou seja, em $y = y_I$, então poderá existir uma linha neutra ($c_i = 0$) cuja velocidade de fase é $C_r = U(y_I)$. Isto é importante pois esta linha separa as regiões estáveis e instáveis em um diagrama de estabilidade.

Teorema 5 (Rayleigh - 1880) – A velocidade de fase C_r de uma perturbação amplificada deve sempre estar no intervalo U_{\max} e U_{\min} .

Na figura abaixo pode-se visualizar algumas configurações de perfis de velocidade média relativos aos campos de base de velocidade que aparecem nas equações precedentes.

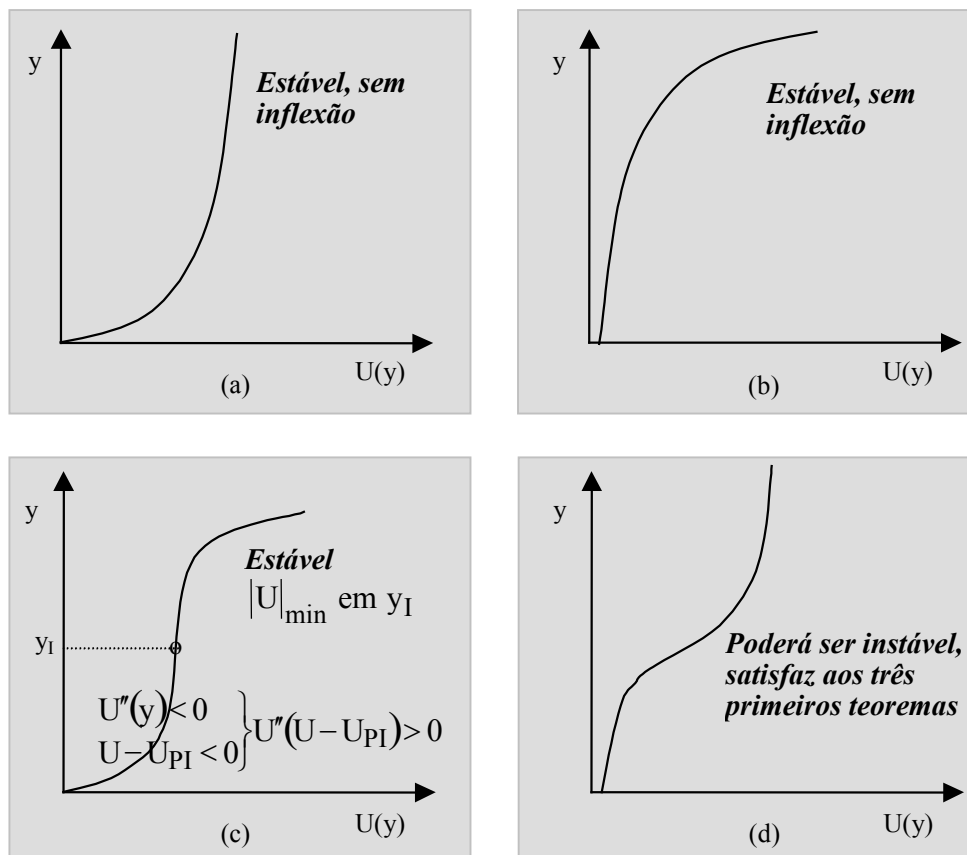


Figura 3.5. Possíveis perfis de velocidade de base de escoamentos cizalhantes livres.

Por muito tempo, pensou-se, que pelo teorema 1, só os escoamentos cizalhantes livres poderiam transicionar. Coube a Prandtl (1921) constatar que os efeitos viscosos podem desestabilizar escoamentos do tipo camada limite. Conclui-se, desta forma, que existem duas famílias de instabilidades: aquelas de natureza cizalhante e aquelas de natureza viscosa.

3.4.2. Estabilidade linear para escoamentos viscosos

3.4.2.1. Escoamentos cizalhantes livres

Aqui é apresentada uma análise de estabilidade relativa a uma camada de mistura em desenvolvimento temporal. Betchov e Szewcyk (1963), utilizaram um perfil de base do tipo

$U(y) = U_0 \tanh\left(\frac{y}{L}\right)$, ilustrado na figura abaixo e resolveram a equação de Orr-Sommerfeld, objetivando um diagrama de estabilidade.

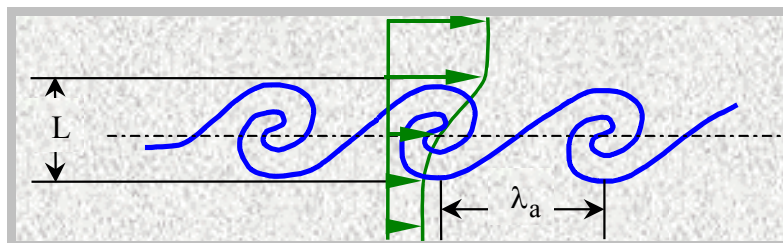


Figura 3.6. Esquema de uma camada de mistura em desenvolvimento temporal.

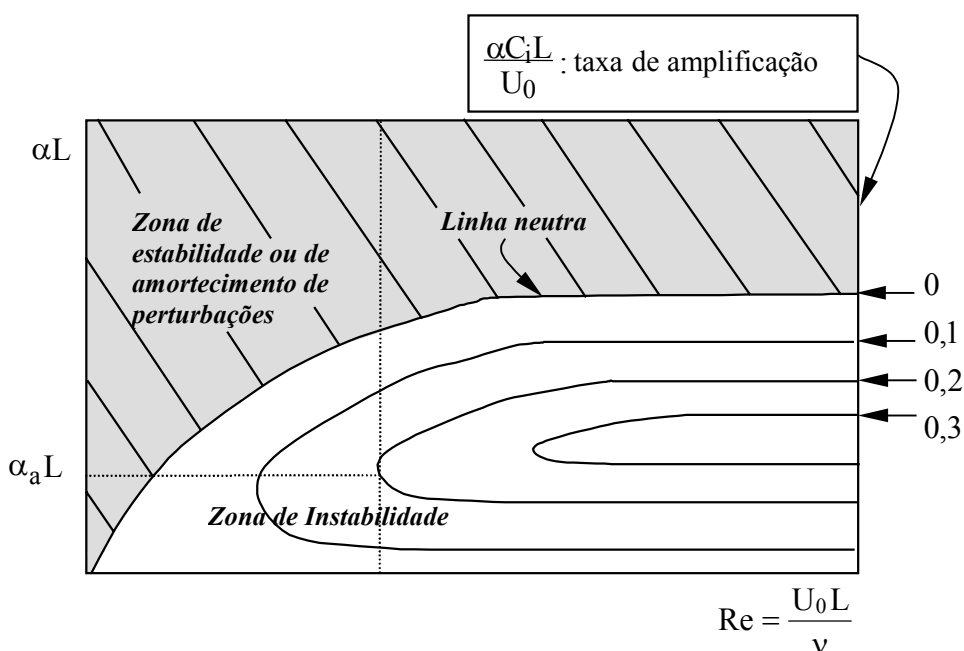


Figura 3.7. Diagrama de estabilidade para uma camada de mistura em desenvolvimento temporal.

Observa-se na Figura acima que existe uma linha neutra, acima da qual o escoamento é estável. Nesta região, qualquer perturbação injetada no escoamento será amortecida. Abaixo desta linha tem-se taxas de amplificação positivas. Se um conjunto de perturbações é injetado sobre o escoamento, em função do número de Reynolds, existirá um comprimento de onda que será amplificado com taxa máxima, fazendo com que um comprimento de onda $\lambda_a = 1 / \alpha_a$, onde α_a é o número de onda associado, apareça em primeiro lugar. Após o seu

aparecimento surgem os seus harmônicos, o que complementa toda a faixa de frequências amplificadas que aparecem para este valor do número de Reynolds. Estas instabilidades que aparecem nestas circunstâncias são conhecidas como instabilidades de Kelvin-Helmholtz. Elas são de natureza cizalhante.

Estudos similares existem para camadas de mistura em desenvolvimento espacial, esteiras, jatos. A seguir apresenta-se a análise de estabilidade para uma camada limite de Blasius.

3.4.2.2. Camada limite de Blasius

Neste estudo, toma-se uma camada limite sem gradiente de pressão, com um perfil de velocidade $U(y)$ do tipo Blasius. Este estudo pode ser encontrado em Schlichting (1968). Com o perfil de base especificado e resolvendo-se a equação de Orr-Sommerfeld, obtém-se o diagrama de estabilidade abaixo.

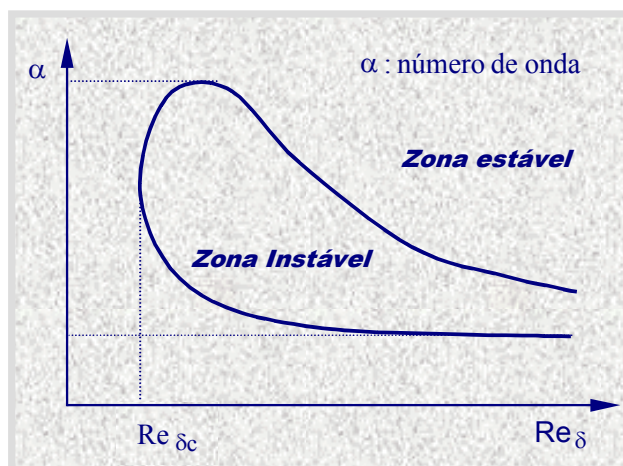


Figura 3.8. Diagrama de estabilidade para uma camada limite de Blasius.

Na Figura 3.8, Re_δ é o número de Reynolds baseado na espessura da camada limite. No eixo vertical está assinalada uma faixa de números de onda passíveis de amplificação. O diagrama mostra que existe um número de Reynolds crítico abaixo do qual não pode haver amplificação de perturbações e portanto de haver transição de uma camada limite. O diagrama não pode ser 100% representativo da física da transição de uma camada limite. De fato para altos números de Reynolds visualiza-se que a camada limite se torna menos suscetível de transicionar. Este resultado já era esperado uma vez que se trata de análise de estabilidade

linear. Para altos números de Reynolds as não linearidades tornam-se cada vez mais importantes. Na figura abaixo pode-se visualizar o cenário da transição de uma camada limite.

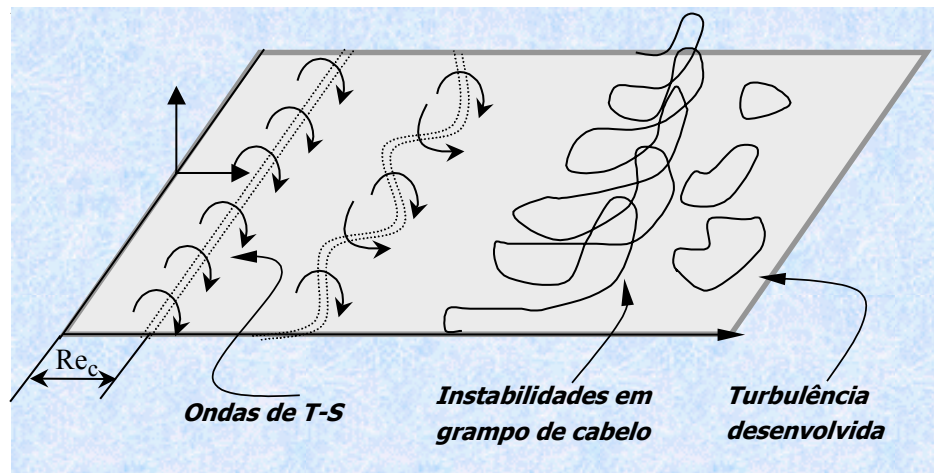


Figura 3.9. Cenário do processo de transição em uma camada limite.

O cenário do processo de transição em uma camada limite pode ser resumido como segue:

1. Formação de ondas TS: natureza física está ligada a efeitos viscosos, que neste caso são voltado para o processo de amplificação de perturbações e geração das ondas TS;
2. Surgimento de instabilidades transversais;
3. Surgimento de instabilidades do tipo “grampo de cabelo”;
4. Formação dos chamados *spots turbulentos*;
5. Degeneração em turbulência 3D.