

MÁRCIO ANDRÉ MARTINS

ESTIMATIVA DE ERROS DE ITERAÇÃO EM  
DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

Dissertação apresentada como requisito parcial  
à obtenção do grau de Mestre em Ciências,  
Programa de Pós-Graduação em Métodos  
Numéricos em Engenharia, Setor de Ciências  
Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do  
Paraná.

Orientador: Prof. Carlos Henrique Marchi.

CURITIBA

2002

MÁRCIO ANDRÉ MARTINS

ESTIMATIVA DE ERROS DE ITERAÇÃO EM  
DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ciências, M. Sc. – Área de concentração: Programação Matemática – Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia da Universidade Federal do Paraná, pela banca examinadora formada pelos professores:

Orientador:

---

Prof. Carlos Henrique Marchi, Dr. Eng.  
DEMEC/TC/UFPR.

---

Prof. António Fábio Carvalho da Silva, Dr. Eng.  
SINMEC/EMC/CTC/UFSC.

---

Prof. Roberto Dalledone Machado, Dr. Eng.  
DCC/TC/UFPR.

Curitiba, 13 de dezembro de 2002.

À Deus.

À minha família.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo financiamento deste trabalho.

Ao meu orientador Prof. Carlos Henrique Marchi Dr. Eng., pela orientação, apoio, e ensinamentos no transcórre deste trabalho.

Aos professores, funcionários e colegas do CESEC, pela amizade e dedicação.

Meus sinceros agradecimentos a todos os familiares e aos amigos que direta ou indiretamente colaboraram na elaboração desta dissertação.

Aos membros da banca examinadora pelas críticas e sugestões apresentadas na defesa da dissertação.

Em especial, à minha esposa Danyelle pelo incentivo, apoio, compreensão e muito amor.

## SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS.....	vii
LISTA DE FIGURAS.....	viii
LISTA DE SÍMBOLOS.....	xi
RESUMO.....	xiii
ABSTRACT.....	xiv
<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1 O Problema.....	1
1.2 Objetivo.....	3
1.3 Erro Numérico.....	3
1.4 Organização da Dissertação.....	5
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>7</b>
2.1 Convergência.....	7
2.1.1 Critérios de convergência.....	8
2.2 Critérios para medir o desempenho de uma estimativa de erro.....	11
2.3 Estimadores de Erro de Iteração.....	12
2.3.1 O Estimador Delta.....	12
2.3.2 O Estimador de Ferziger e Peric.....	12
2.3.3 O Estimador de Kim, Anand e Rode.....	17
2.3.4 O Estimador de Roy e Blottner.....	21
2.4 Sistemas de equações.....	25
2.5 Resolução de sistemas de equações.....	26
2.6 Resumo do capítulo.....	26
<b>3. O ESTIMADOR EMPÍRICO.....</b>	<b>27</b>
3.1 Características do Erro de Iteração.....	27
3.1.1 A ordem efetiva.....	29
3.2 Estimativa do Erro de Iteração.....	29
3.2.1 Ordem aparente.....	30
3.2.2 Dedução do estimador empírico.....	31
3.3 O estimador empírico e o estimador <i>FP</i> .....	32
3.4 O estimador empírico e o estimador <i>Delta</i> .....	32
3.5 O estimador empírico e o estimador <i>RB</i> .....	33
3.6 Previsão da confiabilidade do resultado obtido pelo estimador de erro.....	34
3.6.1 Intervalo I.....	35
3.6.2 Intervalo II.....	36
3.6.3 Intervalo III.....	36
3.7 Considerações Finais.....	38
<b>4. TESTES INICIAIS.....</b>	<b>39</b>

4.1	Caso 1.....	39
4.2	Caso 2.....	42
4.3	Caso 3.....	46
4.4	Caso 4.....	48
4.5	Conclusão.....	52
<b>5.</b>	<b>CASO 5: EQUAÇÃO DE POISSON.....</b>	<b>53</b>
5.1	Modelo matemático e solução analítica.....	53
5.2	Modelo numérico.....	54
5.3	Resultados e discussões.....	55
5.4	Conclusão.....	61
<b>6.</b>	<b>CASO 6: EQUAÇÃO DE LAPLACE.....</b>	<b>62</b>
6.1	Modelo matemático e solução analítica.....	62
6.2	Modelo numérico.....	63
6.3	Resultados e discussões.....	65
6.4	Conclusão.....	72
<b>7.</b>	<b>CASO 7: EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES.....</b>	<b>73</b>
7.1	Modelo matemático e solução analítica.....	73
7.2	Modelo numérico.....	75
7.3	Resultados e discussões.....	76
7.4	Conclusão.....	81
<b>8.</b>	<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>83</b>
8.1	Constatações.....	83
8.2	Resumo das contribuições.....	84
8.3	Trabalhos futuros.....	85
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>86</b>

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Ordem assintótica e razão de convergência para os testes iniciais.....	52
Tabela 5.1 – Subcasos do Caso 5.....	56
Tabela 5.2 – Resultados numéricos para $I^{(L/2)}$ .....	57
Tabela 5.3 – Resultados numéricos para $I^{(9L/10)}$ .....	57
Tabela 5.4 – Resultados numéricos para $I^{(L/5)}$ .....	58
Tabela 5.5 – Resultados numéricos para $I_m$ .....	58
Tabela 5.6 – Razão de convergência e ordem assintótica para Caso 5.....	61
Tabela 6.1 – Subcasos do Caso 6.....	65
Tabela 6.2 – Resultados numéricos para $I^{(L_1/2, L_2/2)}$ , Caso 6.....	66
Tabela 6.3 – Resultados numéricos para $I_m$ , Caso 6.....	66
Tabela 6.4 – Razão de convergência e ordem assintótica para o Caso 6.....	70
Tabela 7.1 – Subcasos do Caso 7.....	76
Tabela 7.2 – Resultados numéricos para $u^{(L_1/2, L_2/2)}$ , Caso 7.....	77
Tabela 7.3 – Resultados numéricos para $v^{(L_1/2, L_2/2)}$ , Caso 7.....	77
Tabela 7.4 – Resultados numéricos para $p^{(L_1/2, L_2/2)}$ , Caso 7.....	77
Tabela 7.5 – Resultados numéricos para $\bar{M}$ , Caso 7.....	77
Tabela 7.6 – Razão de convergência e ordem assintótica para Caso 7.....	81

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Comportamento apresentado pelo critério absoluto para alguns procedimentos iterativos (Roache, 1998).....	9
Figura 3.1 – Erro da solução numérica da Eq. (3.1), causado pelos erros de iteração.	28
Figura 3.2 – Comportamento de $f_{n_4}$ com relação a $f_{p_v}$ para o Intervalo I.....	35
Figura 3.3 – Comportamento de $f_{n_4}$ com relação a $f_{p_v}$ para o Intervalo II.....	36
Figura 3.4 – Comportamento de $f_{n_4}$ com relação a $f_{p_v}$ para o Intervalo III.....	37
Figura 3.5 – Gráfico de confiabilidade do método de previsão.....	37
Figura 4.1 – Erro ( $E$ ) e Incerteza ( $U$ ) envolvidos no cálculo da variável $x$ do subcaso 1 (caso 1).....	40
Figura 4.2 – Erro ( $E$ ) e Incerteza ( $U$ ) envolvidos no cálculo da variável $y$ do subcaso 1 (caso 1).....	41
Figura 4.3 – Erro ( $E$ ) e Incerteza ( $U$ ) envolvidos no cálculo da variável $x$ do subcaso 2 (caso 1).....	41
Figura 4.4 – Erro ( $E$ ) e Incerteza ( $U$ ) envolvidos no cálculo da variável $y$ do subcaso 2 (caso 1).....	42
Figura 4.5 – Erro ( $E$ ) e Incerteza ( $U$ ) para a variável $x$ dos subcasos 1 e 3 (caso 2)....	44
Figura 4.6 – Erro ( $E$ ) e Incerteza ( $U$ ) para a variável $x$ dos subcasos 2 e 4 (caso 2)....	44
Figura 4.7 – Gráfico de confiabilidade para o subcaso 1 (caso 2).....	45
Figura 4.8 – Gráfico de confiabilidade para o subcaso 2 (caso 2).....	45
Figura 4.9 – Erro ( $E$ ) e Incerteza ( $U$ ) para a variável $x$ do subcaso 1 (caso 3).....	47
Figura 4.10 – Erro ( $E$ ) e Incerteza ( $U$ ) para a variável $y$ do subcaso 1 (caso 3).....	47

Figura 4.11 – Erro ( $E$ ) e Incerteza ( $U$ ) para as variável $x$ do subcaso 1 (caso 4).....	49
Figura 4.12 – Erro ( $E$ ) e Incerteza ( $U$ ) para a variável $x$ do subcaso 2 (caso 4).....	49
Figura 4.13 – Erro ( $E$ ) e Incerteza ( $U$ ) a partir da Fig. 4.11 iterações 150 a 190.....	50
Figura 4.14 – Gráfico de confiabilidade subcaso 1 (caso 4).....	51
Figura 4.15 – Gráfico de confiabilidade subcaso 2 (caso 4).....	51
Figura 5.1 – Malha unidimensional uniforme.....	54
Figura 5.2 – Ordem efetiva ( $p_E$ ) do erro e ordem aparente ( $p_U$ ) da incerteza de $I^{(L/5)}$ para o subcaso 1.....	59
Figura 5.3 – Erro e incerteza de $I^{(L/5)}$ para o subcaso 1.....	60
Figura 5.4 – Gráfico de confiabilidade para $I^{(L/5)}$ do subcaso 1.....	60
Figura 6.1 – Malha bidimensional uniforme.....	64
Figura 6.2 – Ordem aparente $p_U$ da incerteza de $I^{(L_1/2, L_2/2)}$ para o subcaso 1.....	67
Figura 6.3 – Ordem aparente $p_U$ da incerteza de $I_m$ para o subcaso 1.....	68
Figura 6.4 – Erro e incerteza de $I^{(L_1/2, L_2/2)}$ para o subcaso 1.....	68
Figura 6.5 – Erro e incerteza de $I_m$ para o subcaso 1.....	69
Figura 6.6 – Gráfico de confiabilidade para $I^{(L_1/2, L_2/2)}$ do subcaso 1.....	69
Figura 6.7 – Gráfico de confiabilidade para $I_m$ do subcaso 1.....	70
Figura 6.8 – Razão de convergência para $I^{(L_1/2, L_2/2)}$ do subcaso 4.....	71
Figura 6.9 – Erro de iteração para $I^{(L_1/2, L_2/2)}$ do subcaso 4.....	72
Figura 7.1 – Razão de convergência ( $\mathbf{y}$ ) para $v^{(L_1/2, L_2/2)}$ , subcaso 2, caso 7.....	78
Figura 7.2 – Ordem efetiva ( $p_E$ ) do erro e ordem aparente ( $p_U$ ) da incerteza de $\bar{M}$ para o subcaso 3, caso 7.....	79

Figura 7.3 – Erro e incerteza de $\bar{M}$ para o subcaso 3, caso 7.....	79
Figura 7.4 – Gráfico de confiabilidade de $\bar{M}$ para o subcaso 3, caso 7.....	80

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	matriz do processo iterativo
Cap.	capítulo
$CDS$	<i>Central Differencing Scheme</i>
$CFD$	Dinâmica dos Fluidos Computacional ( <i>Computational Fluid Dynamics</i> )
$E(\mathbf{f}_n)$	erro de iteração na iteração $n$
$E_p$	erro de programação
$E_p$	erro de arredondamento
$E_t$	erro de truncamento
Eq.	equação
Fig.	figura
$FP$	Estimador de Ferziger e Peric
$h$	tamanho de um elemento da malha, que é igual à distância entre dois nós consecutivos da malha (m)
$(i, j)$	coordenada de um nó em uma malha bidimensional
$j$	coordenada do nó em uma malha unidimensional
$k$	coeficientes da equação da incerteza de uma solução numérica
$l^2$	quadrado da magnitude do autovalor dominante de $A$
$L$	comprimento do domínio de cálculo (m)
$N$	número de nós da malha unidimensional
$N^2$	número de nós da malha bidimensional
$p_E$	ordem efetiva do erro (adimensional)
$p_L$	ordem assintótica do erro (adimensional)

$p_U$	ordem aparente da incerteza (adimensional)
$r$	raio espectral de $A$
$R_n$	resíduo na $n$ -ésima iteração
$R^*$	resíduo adimensionalizado
$RB$	Estimador de Roy e Blottner
Tab.	tabela
$TDMA$	<i>TriDiagonal Matrix Algorithm</i>
$U$	incerteza ou erro estimado da solução numérica
$z_n$	parâmetro envolvido na formulação de $FP$

### Letras Gregas

$e$	tolerância
$f$	solução numérica de uma variável genérica
$\Phi$	solução analítica exata de uma variável genérica
$f_\infty$	estimativa da solução analítica exata ( $\Phi$ ) obtida por extrapolação
$m_1$	autovalor dominante de $A$
$m_k$	$k$ -ésimo autovalor de $A$
$\Psi_k$	$k$ -ésimo autovetor de $A$
$q$	efetividade de um estimador de erro: razão entre incerteza ( $U$ ) e erro ( $E$ )
$s$	amplitude de uma função iterativa
$y$	razão de convergência
$v$	parâmetro envolvido na formulação de $RB$
$t$	taxa de convergência de um processo iterativo
$\Lambda$	variável dependente (escalar difundido)

## RESUMO

A principal motivação para o desenvolvimento deste trabalho consiste no aperfeiçoamento dos critérios adotados para interromper a execução de um processo iterativo. Com este fim, analisa-se o desempenho do estimador *empírico*. Este estimador fornece uma estimativa do erro de iteração, também denominada de incerteza ( $U$ ), com base na taxa de convergência da variável de interesse. O erro ( $E$ ) de iteração pode ser definido pela diferença entre a solução numérica exata e a solução numérica em uma determinada iteração. Através da efetividade do estimador de erro, isto é, da razão entre incerteza e erro, analisa-se a eficiência do estimador *empírico* quanto à sua acurácia ( $U/E \approx 1$ ) e confiabilidade ( $U/E \geq 1$ ). Para tanto, são resolvidos sistemas de equações gerados a partir da aplicação dos métodos de diferenças finitas e volumes finitos sobre malhas unidimensionais e bidimensionais uniformes, de problemas de transferência de calor e de mecânica dos fluidos. Estes sistemas de equações foram resolvidos com a utilização de vários métodos iterativos. O desempenho do estimador *empírico* pode ser dividido em três intervalos: nas iterações iniciais, em geral a acurácia é baixa; quando o número de iterações é muito elevado, os erros de arredondamento predominam sobre os erros de iteração mas, mesmo assim, a acurácia é relativamente boa; no intervalo entre esses dois extremos, a acurácia tende a melhorar à medida que se aumenta o número de iterações. Não se recomenda o uso do estimador *empírico* em processos iterativos que envolvem a aplicação da técnica *multigrid* pois, em geral, sua acurácia é baixa. Constatou-se que existem relações diretas entre o estimador *empírico* e alguns estimadores disponíveis na literatura.

**Palavras-chave:** simulação numérica, erros numéricos, erros de iteração, estimador de erro, dinâmica dos fluidos, verificação.

## ABSTRACT

The main motivation to develop this work consists in improve the rules or approaches adopted to interrupt the execution of an iterative process. It's proposed to calculate the uncertainty ( $U$ ) of numerical solutions, where the uncertainty is defined as an estimated iterative error ( $E$ ). To a variable of any interest, this error is the difference between the exact numerical solution and the calculated numerical solution. It is analyzed the efficiency of an empirical error estimator to iterative processes. This estimator calculates the numerical uncertainty ( $U$ ) on basis on the convergence rate of the interest variable. Through the effectiveness of the error estimator, that is, of the reason between uncertainty and error, the error estimator efficiency is verified on its accuracy ( $U/E$ ) and reliability ( $U/E$ ). Therefore, are resolved linear systems generated from the application of finite differences and finite volume methods, on uniform unidimensional and bidimensional meshes, in heat transfer problems and and fluid mechanics. These systems of equations were resolved with the use of iterative methods. The performance of the empirical estimator can be divided in three intervals: In the "initial" iterations the accuracy is low, in general; when the number of iterations is very high, the round-off affect the accuracy, that is good; in the interval among those two limits, the accuracy tends to be big as it increases the iteration number. It was verified that, in iterative processes that involve the application of the multigrid method, the empirical estimator behavior doesn't seems to be good; because in the accomplished simulations it was obtained results with low accuracy and not very reliable. It was also verified that there are direct relations between the studied error estimator and some existent estimators in the literature.

Keywords: Numerical simulation, numerical errors, iteration errors, error estimator, fluid dynamics, verification.