

---

## CASO 6: EQUAÇÃO DE LAPLACE

---

Em todos os casos anteriores, Caps. 4 e 5, os problemas possuíam apenas um tratamento unidimensional. Neste capítulo, é abordado um problema de difusão bidimensional, em regime permanente, sem geração de calor e com condutividade térmica constante (Incropera e DeWitt, 1992), o que resulta na equação de Laplace. O modelo numérico é constituído pelo método de diferenças finitas, com aproximações numéricas de 2ª ordem através de diferença central e malha uniforme.

### 6.1 MODELO MATEMÁTICO E SOLUÇÃO ANALÍTICA

O modelo matemático do caso 6 é dado por

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2} = 0 \quad (6.1)$$

com as seguintes condições de contorno de Dirichlet:

$$\Lambda(0, y) = 0 \quad (6.2)$$

$$\Lambda(x, 0) = 0 \quad (6.3)$$

$$\Lambda(L_1, y) = y \quad (6.4)$$

$$\Lambda(x, L_2) = x \quad (6.5)$$

com o domínio de cálculo  $D = \{0 < x < L_1; 0 < y < L_2\}$ . Considera-se um domínio quadrado, ou seja,  $L_1 = L_2 = 1$ .  $\Lambda$  é a variável dependente do problema, que é um escalar difundido,  $x$  e  $y$  são as variáveis independentes, as direções coordenadas. A solução analítica exata do modelo matemático definido pelas Eqs. (6.1) a (6.5), para a variável dependente ( $\Lambda$ ), é

$$\Lambda(x, y) = xy \quad (6.6)$$

Definindo-se a média da variável dependente ao longo do domínio de cálculo por

$$\Lambda_m = \frac{1}{L_1} \frac{1}{L_2} \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} \Lambda dx dy \quad (6.7)$$

sua solução analítica exata é

$$\Lambda_m = \frac{L_1 L_2}{4} \quad (6.8)$$

## 6.2 MODELO NUMÉRICO

A solução numérica do modelo matemático definido pelas Eqs. (6.1) a (6.5) é obtida considerando-se: método de diferenças finitas, aproximação numérica da derivada de 2ª ordem da equação diferencial com diferença central e malha uniforme, Fig. 6.1. Desta forma, não se tem erro de discretização (Ferziger e Peric, 1996), e

$$\frac{I_{i+1,j} - 2I_{i,j} + I_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{I_{i,j+1} - 2I_{i,j} + I_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0 \quad (6.9)$$

Ao se utilizar malha uniforme, Fig. 6.1, tem-se  $\Delta x = \Delta y = h$ . Portanto, a Eq. (6.9) pode ser reescrita como

$$\frac{I_{i+1,j} - 2I_{i,j} + I_{i-1,j}}{h^2} + \frac{I_{i,j+1} - 2I_{i,j} + I_{i,j-1}}{h^2} = 0 \quad (6.10)$$

ou

$$-I_{i,j-1} - I_{i-1,j} + 4I_{i,j} - I_{i+1,j} - I_{i,j+1} = 0, \quad i = 2, \dots, (N-1), \quad j = 2, \dots, (N-1) \quad (6.11)$$

onde  $N$  é o número de nós da malha em cada direção,  $h$  é a distância entre os nós  $(i, j)$  e  $(i, j-1)$ , ou entre  $(i-1, j)$  e  $(i, j)$ , também denominado de tamanho dos elementos da malha, Fig. 6.1, e  $I$  é a incógnita do problema, ou a variável dependente.

**Erro!**

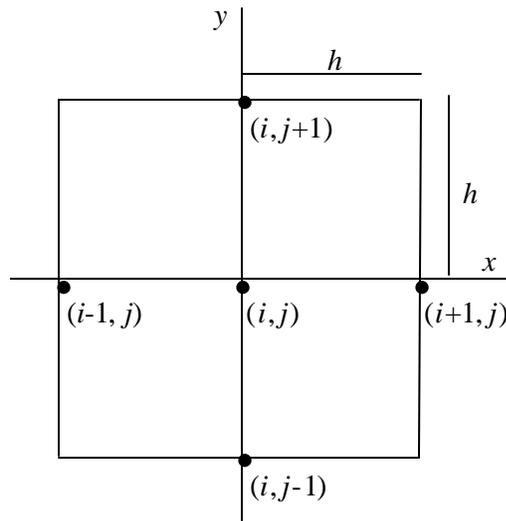


Figura 6.1 Malha bidimensional uniforme.

Neste caso; o erro de truncamento é nulo, pois apresenta somente aproximações numéricas de 2ª ordem com diferença central. A expressão para o erro de truncamento ( $E_T$ ) envolvido nas aproximações apresentadas pela Eq. 6.10 para o nó  $(i, j)$  é dada por:

$$E_T = -\left(\frac{\partial^4 \Lambda}{\partial x^4}\right)_{i,j} - \left(\frac{\partial^4 \Lambda}{\partial y^4}\right)_{i,j} - \left(\frac{\partial^6 \Lambda}{\partial x^6}\right)_{i,j} - \left(\frac{\partial^6 \Lambda}{\partial y^6}\right)_{i,j} - \left(\frac{\partial^8 \Lambda}{\partial x^8}\right)_{i,j} - \left(\frac{\partial^8 \Lambda}{\partial y^8}\right)_{i,j} - \dots \quad (6.12)$$

que envolve apenas derivadas da variável dependente ( $\Lambda$ ), com ordem 4 e superiores. Pode-se então observar através da Eq. (6.6) que estas derivadas são nulas. Portanto com a resolução do sistema de equações (6.11) e com a Eq. (6.6) pode-se obter o valor numérico do erro iterativo. O sistema de equações (6.11) foi resolvido através do método iterativo de Gauss-Seidel, e também com a utilização de uma técnica *multigrid* para problemas lineares, denominado esquema de

armazenamento de correção, conforme o algoritmo descrito nas páginas 169 e 170 do livro de Tannehill *et. al.* (1997).

### 6.3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste caso, considerou-se duas variáveis de interesse: o resultado numérico no ponto central da malha, isto é,  $\phi(1/2, 1/2)$  e a média aritmética dos resultados numéricos obtidos em todos os nós da malha  $I_m$ . As soluções numéricas foram obtidas para malhas com  $N^2 = 17^2$ ,  $33^2$  e  $65^2$  nós, o que equivale a  $h = 1/16$ ,  $1/32$  e  $1/64$ .

Em cada subcaso, Tab. 6.1, e para cada variável de interesse, foram analisados o resultado numérico ( $f_n$ ), seu erro iterativo ( $E(f_n)$ ), estimativa do erro iterativo ( $U(f_n)$ ), a razão de convergência ( $\gamma$ ), a ordem efetiva ( $p_E$ ), a ordem aparente ( $p_U$ ) e a efetividade ( $q$ ). Com a variação do número de nós da malha, e com ou sem a utilização do método *multigrid* (Tannehill *et al.*, 1997) foram obtidos 6 subcasos que são mostrados na Tab. 6.1. A técnica *multigrid* pode ser aplicada usando qualquer esquema iterativo, embora o mais comum seja o método de Gauss-Seidel (Tannehill *et al.*, 1997), que é utilizado neste caso. O objetivo da técnica *multigrid* é acelerar a convergência de um processo iterativo. Para isso, faz-se uso de vários níveis de malha para fornecer uma solução, ou seja, o mesmo problema diferencial é aproximado em diversas malhas cujos tamanhos de malha são geralmente múltiplos de dois.

Em todos os subcasos utilizou-se a condição inicial:  $I_{i,j} = 0$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, N$ , isto é, nula em todos os nós da malha. O número de iterações em cada subcaso foi obtido de acordo com o seguinte critério de parada: queda mínima de 7 ordens de grandeza na magnitude do erro iterativo para as duas variáveis de interesse.

Tabela 6.1 Subcasos do Caso 6.

Subcaso	Método	Malha	Número de iterações	Tempo de CPU (s)
1	Sem <i>multigrid</i>	$17 \times 17$	397	1,48
2	Sem <i>multigrid</i>	$33 \times 33$	1586	9,86
3	Sem <i>multigrid</i>	$65 \times 65$	6331	135,61
4	Com <i>multigrid</i>	$17 \times 17$	22	0,13
5	Com <i>multigrid</i>	$33 \times 33$	29	1,08
6	Com <i>multigrid</i>	$65 \times 65$	35	2,17

Nas Tabs. 6.2 e 6.3 são mostrados os resultados numéricos obtidos para as duas variáveis de interesse ao final do processo iterativo, em todos os subcasos.

Tabela 6.2 Resultados numéricos para  $I(\cdot/\frac{1}{2}, \cdot/\frac{1}{2})$ , Caso 6.

Subcaso	exato	numérico( $f_n$ )	$E(f_n)$	$\frac{U(f_n)}{E(f_n)}$
1	2,500000000E-01	2,499999019E-01	9,800085901E-08	1,000001584E+00
2	2,500000000E-01	2,499999007E-01	9,922623200E-08	1,000025961E+00
3	2,500000000E-01	2,499999001E-01	9,987822099E-08	1,001350588E+00
4	2,500000000E-01	2,500000534E-01	-5,349941700E-08	1,718844805E+00
5	2,500000000E-01	2,500000768E-01	-7,687705899E-08	2,775431056E+00
6	2,500000000E-01	2,499999729E-01	2,700025700E-08	1,543202394E+01

Tabela 6.3 Resultados numéricos para  $I_m$ , Caso 6.

Subcaso	exato	numérico( $f_n$ )	$E(f_n)$	$\frac{U(f_n)}{E(f_n)}$
1	2,500000000E-01	2,499999603E-01	3,964124800E-08	1,000008338E+00
2	2,500000000E-01	2,499999598E-01	4,019552299E-08	9,998567758E-01
3	2,500000000E-01	2,499999595E-01	4,047425700E-08	1,007464542E+00
4	2,500000000E-01	2,499999126E-01	8,737835599E-08	-3,456950907E-02
5	2,500000000E-01	2,499999972E-01	2,705836998E-09	-3,247324112E+01
6	2,500000000E-01	2,500000205E-01	-2,052561898E-08	-1,228276055E+00

Considerando-se primeiramente os subcasos 1 a 3, notou-se como nos casos anteriores que a partir de um determinado número de iterações iniciais a ordem aparente ( $p_U$ ) tende monotonicamente à ordem assintótica ( $p_L$ ), com o aumento do número de iterações, Figs. 6.2 e 6.3. Constatou-se também a ocorrência de valores negativos para a ordem aparente ( $p_U$ ) somente no cálculo de  $I(L_1/2, L_2/2)$ , Fig. 6.2.

Pode-se notar na Fig. 6.4 o comportamento obtido ao se aplicar o estimador empírico com ordem aparente ( $p_U$ ) negativa nas iterações iniciais: a magnitude da estimativa do erro

aumenta com o número de iterações, conforme explicado na seção 3.2.2. Para  $I_m$  a estimativa do erro não apresenta oscilações nas iterações iniciais, Fig. 6.5.

Para o subcaso 1 o resultado obtido pela aplicação do método de previsão da confiabilidade da estimativa do erro, descrito na seção 3.6, pode ser observado através dos gráficos de confiabilidade mostrados nas Figs. 6.6 e 6.7, sendo que para os subcasos 2 e 3 os resultados são semelhantes. Pode-se notar na Fig. 6.6 que para  $I(L_1/2, L_2/2)$  o método de previsão não pôde ser aplicado até a iteração 23, valor (0) no gráfico de confiabilidade, pois nestas iterações  $p_U < 0$  (Fig. 6.2). O mesmo não ocorre para  $I_m$ , sendo que o método de previsão pôde ser aplicado em todo processo iterativo. Notou-se que em ambas as variáveis de interesse a primeira iteração onde ocorre falha (-1) no método de previsão é a mesma iteração onde ocorre oscilação na magnitude da estimativa do erro, devido ao efeito dos erros de arredondamento.

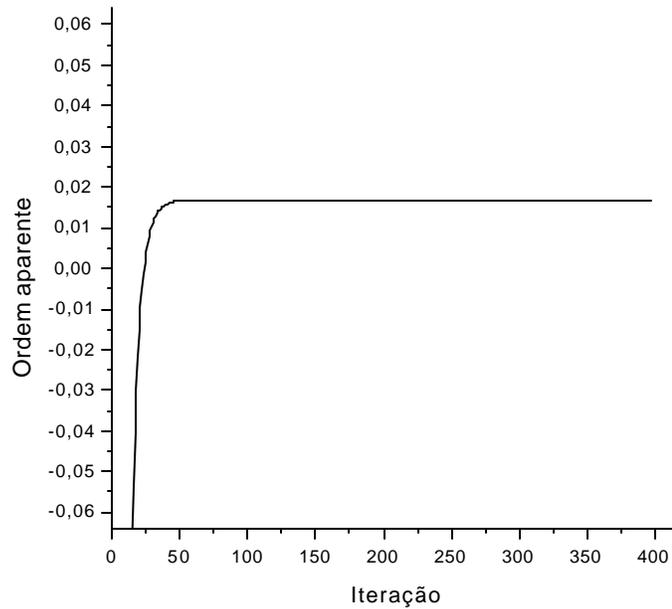


Figura 6.2 Ordem aparente  $p_U$  da incerteza de  $I(L_1/2, L_2/2)$  para o subcaso 1.

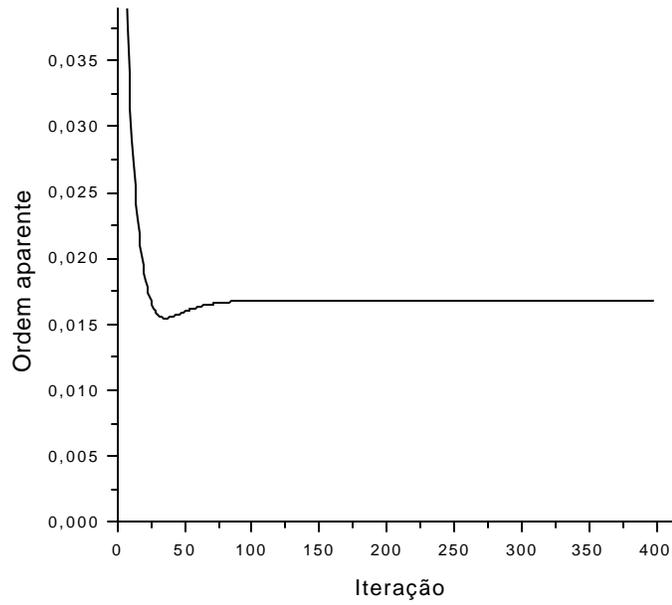


Figura 6.3 Ordem aparente  $p_U$  da incerteza de  $I_m$  para o subcaso 1.

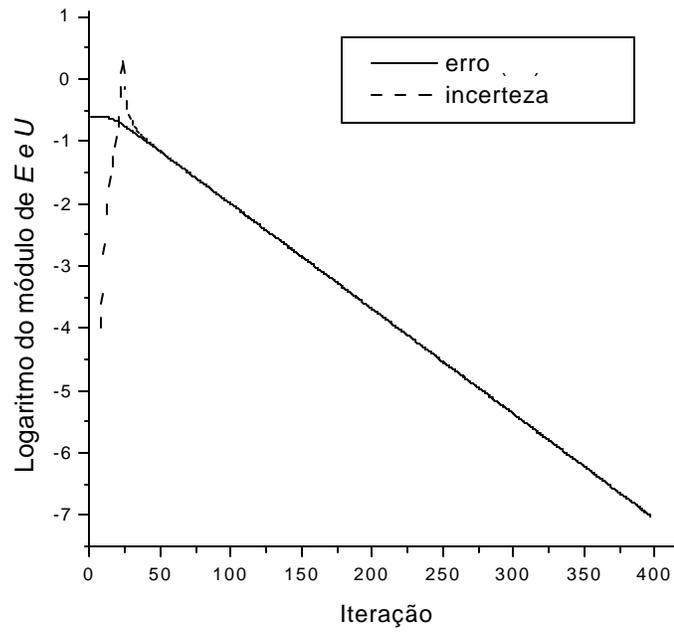


Figura 6.4 Erro e incerteza de  $I^{(L_1/2, L_2/2)}$  para o subcaso 1.

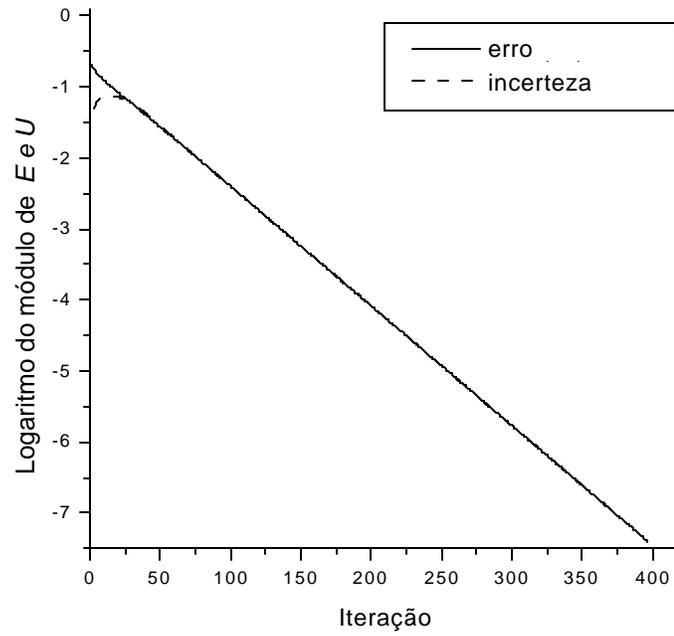


Figura 6.5 Erro e incerteza de  $I_m$  para o subcaso 1.

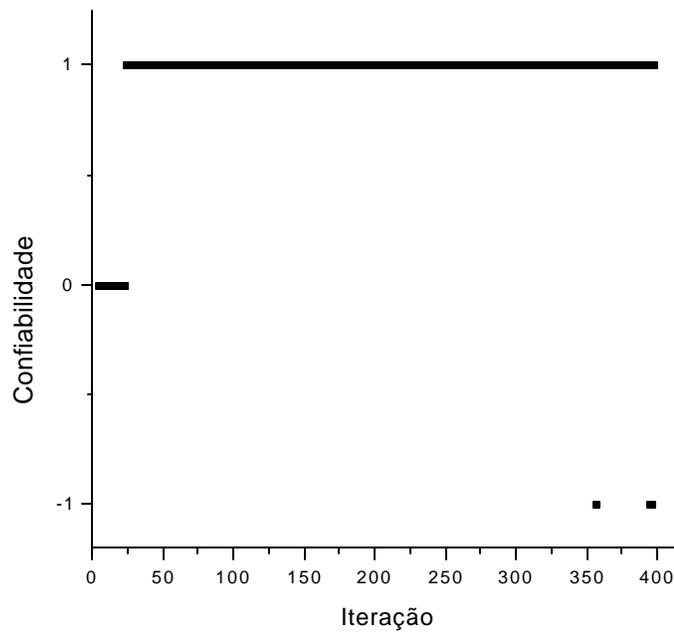


Figura 6.6 – Gráfico de confiabilidade para  $I(L_2/2, L_2/2)$  do subcaso 1.

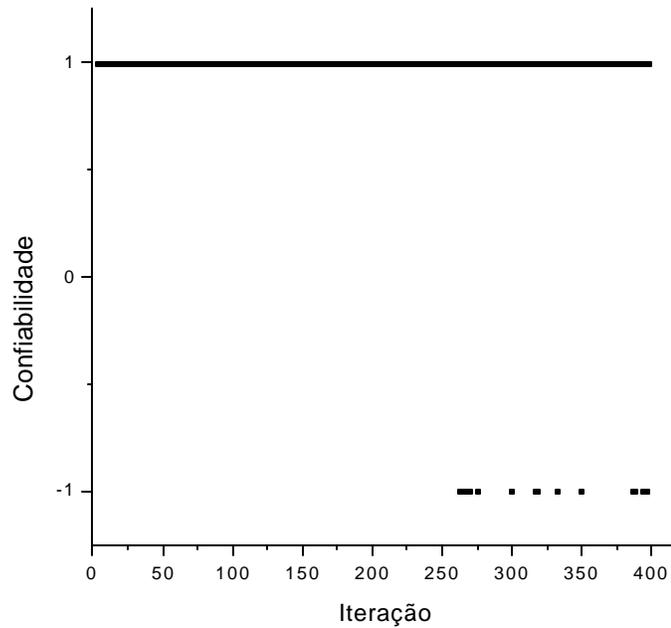


Figura 6.7 – Gráfico de confiabilidade para  $I_m$  do subcaso 1.

Pode-se ver na Tab. 6.4 que a razão de convergência ( $\gamma$ ) e a ordem assintótica ( $p_L$ ) variam com o número de nós da malha. No subcaso 3 existe uma pequena diferença entre a razão de convergência de  $I^{(L_1/2, L_2/2)}$  e  $I_m$ , provavelmente devido ao efeito dos erros de arredondamento. Apesar de que segundo Roache (1998), diferentes variáveis envolvidas em um mesmo processo iterativo podem apresentar diferentes taxas de convergência.

Tabela 6.4 Razão de convergência e ordem assintótica para o caso 6.

Subcaso	Malha	Variável	$\gamma$	$p_L$
1	17×17	$I^{(L_1/2, L_2/2)}$	1,03956	0,01685
1	17×17	$I_m$	1,03956	0,01685
2	33×33	$I^{(L_1/2, L_2/2)}$	1,00970	0,00419
2	33×33	$I_m$	1,00970	0,00419
3	65×65	$I^{(L_1/2, L_2/2)}$	1,00241	0,00104
3	65×65	$I_m$	1,00238	0,00103

Nos subcasos 4 a 6, notou-se que ao se utilizar a técnica *multigrid* (Tannehill *et al.*, 1997) a razão de convergência  $\rho$  apresentou comportamento oscilatório (Fig. 6.8), ou seja, não possui convergência monotônica como nos casos anteriores. Além disso, tem-se  $\rho < 1$  em algumas iterações, o que acarreta em valores negativos para ordem aparente ( $p_U$ ). Pode-se, então, observar na Fig. 6.9 que o erro de iteração não apresenta comportamento monotônico, conforme explicado na seção 3.1. Para estes subcasos, pode-se também constatar nas Tabs. 6.2 e 6.3 os resultados obtidos ao se aplicar o estimador *empírico* através de sua efetividade ( $q$ ). Para  $I(L_1/2, L_2/2)$ , os resultados são inaccurados e para  $I_m$ , não são confiáveis. Portanto nos subcasos que envolvem a aplicação da técnica *multigrid* o estimador *empírico* não é recomendável; pois apresenta acurácia baixa e é pouco confiável. Pode-se também observar na Fig. 6.9 o comportamento apresentado pelos estimadores *RB* e *FP* ao se utilizar a técnica *multigrid*.

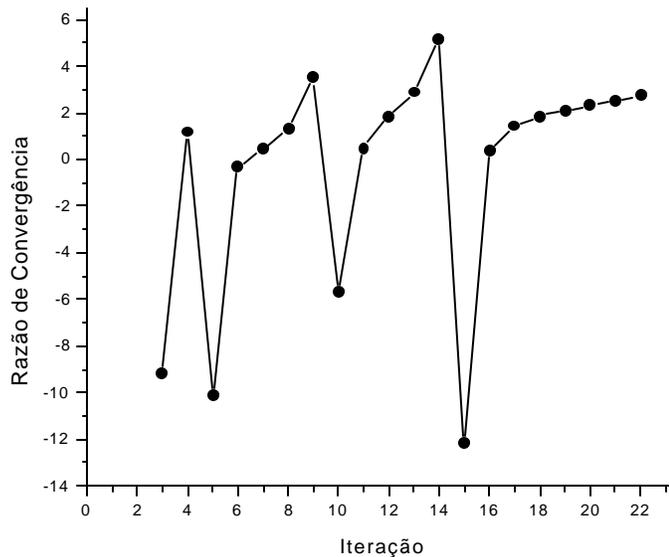


Figura 6.8 – Razão de convergência para  $I(L_1/2, L_2/2)$  do subcaso 4.

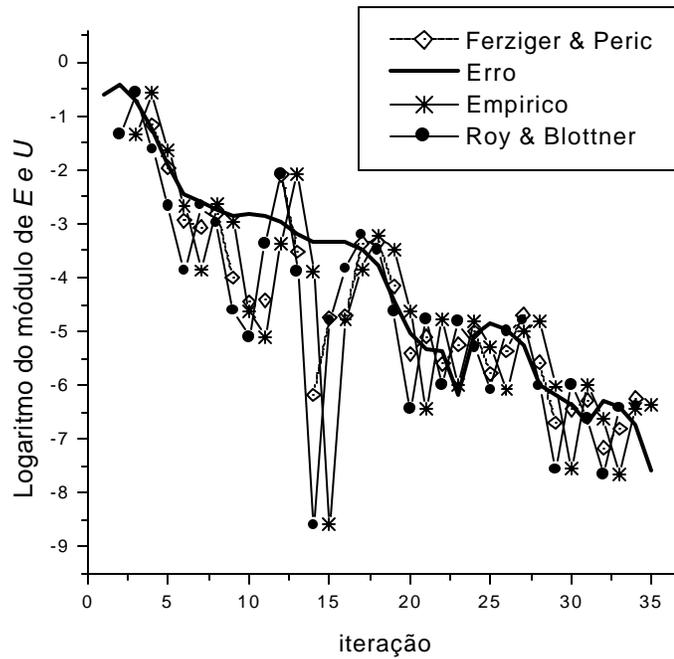


Figura 6.9 – Erro de iteração para  $I(L_2/2, L_2/2)$  do subcaso 6.

### 6.4 CONCLUSÃO

Quanto à eficiência do estimador *empírico*, para os subcasos 1 a 3 constatou-se comportamento semelhante aos casos anteriores, abordados nos Caps. 4 e 5. Ou seja, existe discordância entre incerteza e erro somente nas iterações iniciais, Figs. 6.4 e 6.5. Sendo que, para estes subcasos as “iterações iniciais” correspondem à uma faixa de no máximo 9% do número total de iterações envolvidas no cálculo. Para as demais iterações, verificou-se a eficiência do estimador de erro quanto à sua acurácia e confiabilidade através de sua efetividade ( $q$ ). O método de previsão da confiabilidade, seção 3.6, apresentou bons resultados nestes subcasos. A ocorrência de falha na previsão deu-se pela influência dos erros de arredondamento.

Nos subcasos 4 a 6 o erro de iteração não apresentou comportamento monotônico. Além disso, apresentou valores negativos para ordem aparente ( $p_U$ ) não somente nas “iterações iniciais”. Portanto, não se recomenda usar o estimador *empírico* em processos iterativos que empreguem métodos *multigrid*.

