
CASO 7: EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Este capítulo trata de um problema de escoamento bidimensional isotérmico de fluido incompressível (Shih *et al.*, 1989), governado pelas equações de Navier-Stokes. O modelo numérico é constituído pelo método de volumes finitos, com aproximações numéricas de 2ª ordem através de diferença central e malha uniforme.

7.1 MODELO MATEMÁTICO E SOLUÇÃO ANALÍTICA

O modelo matemático do caso 7 é dado por

$$\frac{\partial}{\partial x}(r u) + \frac{\partial}{\partial y}(r v) = 0 \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(r u u) + \frac{\partial}{\partial y}(r v u) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(r u v) + \frac{\partial}{\partial y}(r v v) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + B \quad (7.3)$$

onde B é um termo fonte imposto para obtenção da solução analítica; definido no trabalho de Shih *et al.* (1989). As condições de contorno usadas são do tipo Dirichlet:

$$u(0, y) = 0 \quad (7.4)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad (7.5)$$

$$u(L_1, y) = 0 \quad (7.6)$$

$$u(x, L_2) = 16(x^4 - 2x^3 + x^2) \quad (7.7)$$

$$v(x, 0) = 0 \quad (7.8)$$

$$v(0, y) = 0 \quad (7.9)$$

$$v(L_1, y) = 0 \quad (7.10)$$

$$v(x, L_2) = 0 \quad (7.11)$$

com o domínio de cálculo $D = \{0 < x < L_1; 0 < y < L_2\}$, onde; neste caso considera-se um domínio quadrado, ou seja, $L_1 = L_2 = 1$; r e m são constantes; u , v e p são as incógnitas do problema, sendo que, u e v representam as componentes do vetor velocidade nas direções x e y , p é a pressão, x e y são as variáveis independentes, as direções coordenadas.

A solução analítica exata do modelo matemático definido pelas Eqs. (7.1) a (7.11), para as variáveis dependentes (u , v e p) e número de Reynolds $Re = 1$, é dada por (Shih *et al.*, 1989)

$$u(x, y) = 8(x^4 - 2x^3 + x^2)(4y^3 - 2y) \quad (7.12)$$

$$v(x, y) = -8(4x^3 - 6x^2 + 2x)(y^4 - y^2) \quad (7.13)$$

$$p(x, y) = 192 \left(0,2x^5 - 0,5x^4 + \frac{1}{3}x^3 \right) y + 8(4x^3 - 6x^2 + 2x)(4y^3 - 2y) + 32(x^4 - 2x^3 + x^2)^2(-4y^6 + 2y^4 - 2y^2) \quad (7.14)$$

Definindo-se a média da variável dependente v em $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$ por

$$\bar{M} = \int_0^{\frac{1}{2}} v(x, y) dx \quad (7.15)$$

sua solução analítica exata é

$$\bar{M} = \frac{3}{32} \quad (7.16)$$

7.2 MODELO NUMÉRICO

A solução numérica do modelo matemático definido pelas Eqs. (7.1) a (7.11) é obtida considerando-se (Malisca, 1995): método de volumes finitos, com aproximações numéricas de 2ª ordem através de diferença central, malha uniforme e arranjo co-localizado de variáveis. Neste caso existe erro de discretização. Portanto, para análise dos erros de iteração não são consideradas as soluções analíticas, Eqs. (7.12) a (7.16). Considera-se, então, a solução iterativa “exata” no limite do “erro de máquina”, ou seja, a solução numérica obtida ao longo do processo iterativo quando não se tem mais erros de iteração mas, apenas, erros de arredondamento.

Algoritmo do modelo numérico utilizado:

- 1) Estimativa dos campos das variáveis dependentes.
- 2) Calcular coeficiente e termos fonte da variável u .
- 3) Resolver o sistema de equações para variável u com o método MSI.
- 4) Repetir os itens 2 e 3 para variável v .
- 5) Calcular as variáveis u e v nas faces dos volumes de controle.
- 6) Calcular os coeficientes e termos fonte para a variável p .
- 7) Resolver o sistema de equações para variável p com o método MSI.
- 8) Corrigir as variáveis u , v e p com a solução de p obtida no item 7.
- 9) Voltar ao item 2 até que algum critério de convergência seja satisfeito.

Observações:

- i) Nos itens 3 e 4 são feitas no máximo 5 iterações ou itera-se até a queda de uma ordem na magnitude do resíduo.
- ii) No item 7 utiliza-se no máximo 10 iterações ou itera-se até a queda de duas ordens na magnitude do resíduo inicial.
- iii) Considera-se uma iteração externa a seqüência dos itens 2 a 9.
- iv) Para cada iteração externa repete-se uma vez os itens 6 a 8.

Em todas as simulações utilizou-se o método iterativo MSI (Schneider e Zedan, 1981) e a condição inicial nula. O método MSI é um método quase direto, ou seja, aquele em que com

poucas iterações se obtém a convergência. Por outro lado, o esforço computacional por iteração, é bem superior aos demais métodos iterativos (Maliska, 1995). O número de iterações externas (n) para obtenção da solução numérica “exata” é mostrado na Tab. 7.1.

7.3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste caso, considerou-se quatro variáveis de interesse: os resultados numéricos de u , v e p no ponto central da malha, isto é, $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $v(\frac{L_1}{2}, \frac{L_2}{2})$, $p(\frac{L_1}{2}, \frac{L_2}{2})$ e a média da variável dependente v dada pela Eq. (7.15), $\bar{M}$. As soluções numéricas foram obtidas para malhas com $N^2 = 16^2$, 32^2 e 64^2 volumes. Analogamente aos casos anteriores, em cada subcaso, Tab. 7.1, e para cada variável de interesse, foram analisados o resultado numérico (f_n), seu erro de iteração ($E(f_n)$), estimativa do erro de iteração ($U(f_n)$), a razão de convergência (γ), a ordem efetiva (p_E), a ordem aparente (p_U) e a efetividade (q). Com a variação do número de volumes da malha, foram determinados 3 subcasos que são mostrados na Tab. 7.1. O número de iterações externas (n) em que se analisou o erro de iteração e a incerteza numérica foi obtido de acordo com o seguinte critério de parada: queda mínima de 7 ordens de grandeza na magnitude do resíduo adimensionalizado (R^*) (Kim *et al.*, 1998), conforme descrito na seção 2.3.3. O tempo de CPU mostrado na Tab. 7.1 refere-se à estas iterações.

Tabela 7.1 Subcasos do Caso 7.

Subcaso	Malha	Iterações externas para queda de 7 ordens em R^*	Iterações externas para obtenção da solução “exata”	Tempo de CPU (s)
1	16×16	728	1889	11,01
2	32×32	1171	3999	53,20
3	64×64	2160	5998	498,41

Nas Tabs. 7.2 a 7.5 são mostrados os resultados numéricos obtidos para as quatro variáveis de interesse ao final do processo iterativo, em todos os subcasos.

Tabela 7.2 Resultados numéricos para $u(\cdot/\sqrt{2}, \cdot/\sqrt{2})$, Caso 7.

Subcaso	exato	numérico(f_n)	$E(f_n)$	$\frac{U(f_n)}{E(f_n)}$
1	-2,436442230E-01	-2,436442229E-01	-9,368000820E-11	1,004184820E+00
2	-2,483636535E-01	-2,483636524E-01	-1,118037996E-09	1,000277942E+00
3	-2,495877767E-01	-2,495877765E-01	-2,180909897E-10	1,041038090E+00

Tabela 7.3 Resultados numéricos para $v(\cdot/\sqrt{2}, \cdot/\sqrt{2})$, Caso 7.

Subcaso	exato	numérico(f_n)	$E(f_n)$	$\frac{U(f_n)}{E(f_n)}$
1	9,264290573E-05	9,264292595E-05	-2,021014950E-11	9,881418986E-01
2	2,728542177E-05	2,728540782E-05	1,395702310E-11	9,994393343E-01
3	7,097000028E-06	7,096996659E-06	3,369877301E-12	1,203608957E+00

Tabela 7.4 Resultados numéricos para $p(\cdot/\sqrt{2}, \cdot/\sqrt{2})$, Caso 7.

Subcaso	exato	numérico(f_n)	$E(f_n)$	$\frac{U(f_n)}{E(f_n)}$
1	1,545591915E+00	1,545591916E+00	-7,184399742E-10	1,013978569E+00
2	1,545434988E+00	1,545434985E+00	2,130740029E-09	1,026254886E+00
3	1,545337016E+00	1,545337015E+00	1,082719914E-09	1,096937015E+00

Tabela 7.5 Resultados numéricos para $\bar{M}$, Caso 7.

Subcaso	exato	numérico(f_n)	$E(f_n)$	$\frac{U(f_n)}{E(f_n)}$
1	9,406575851E-02	9,406575885E-02	-3,372797042E-10	9,932319883E-01
2	9,382148287E-02	9,382148268E-02	1,828833890E-10	1,001629684E+00
3	9,376739441E-02	9,376739437E-02	4,250080843E-11	1,006611077E+00

Nas Tabs. 7.2 a 7.5, pode-se notar que para o subcaso 3, subcaso que envolve um maior número de iterações externas, em todas as variáveis de interesse o estimador *empírico* apresentou resultados confiáveis, isto é, $q > 1$ ao final do processo iterativo. Pode-se constatar também que para as variáveis $u(\frac{L_1}{2}, \frac{L_2}{2})$ e $p(\frac{L_1}{2}, \frac{L_2}{2})$, Tabs. 7.2 e 7.4 respectivamente, a estimativa do erro é confiável em todos os subcasos.

Para a variável $v(\frac{L_1}{2}, \frac{L_2}{2})$ a estimativa do erro não é confiável nos subcasos 1 e 2, Tab. 7.3. Observou-se que nestes subcasos a razão de convergência (γ) para $v(\frac{L_1}{2}, \frac{L_2}{2})$ apresenta oscilações nas iterações externas finais, Fig. 7.1, inclusive com $\gamma < 1$ em algumas dessas iterações externas. Sendo que, para o subcaso 1 o comportamento é semelhante.

Assim como nos casos anteriores, em todos os subcasos, Tab. 7.1, tem-se que a partir de um determinado número de iterações externas iniciais as ordens efetiva (p_E) e aparente (p_U) tendem monotonicamente à ordem assintótica (p_L), com o aumento do número de iterações externas, Fig. 7.2 e Tab. 7.6. No entanto, constatou-se neste caso a ocorrência de oscilações na magnitude do erro numérico. Pode-se, então, notar na Fig. 7.3 o comportamento obtido para o erro numérico e para sua estimativa. Para as demais variáveis e subcasos o comportamento é semelhante.

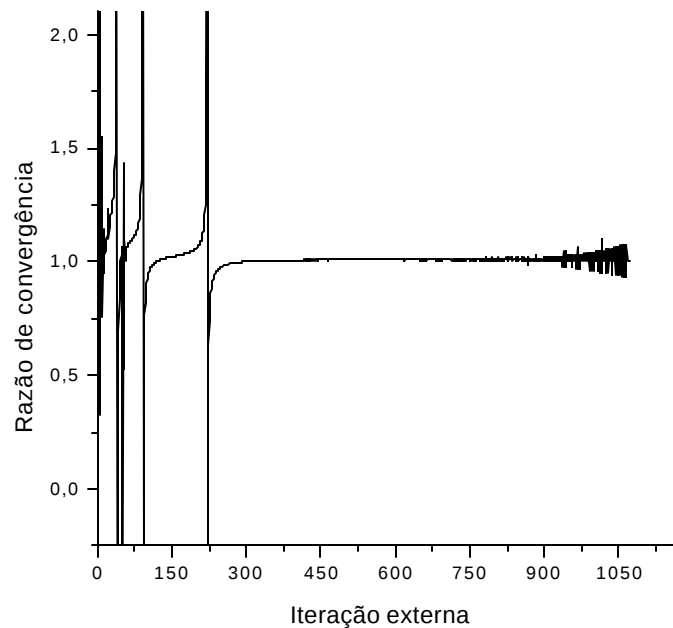


Figura 7.1 – Razão de convergência (γ) para $v(\frac{L_1}{2}, \frac{L_2}{2})$, subcaso 2, caso 7.

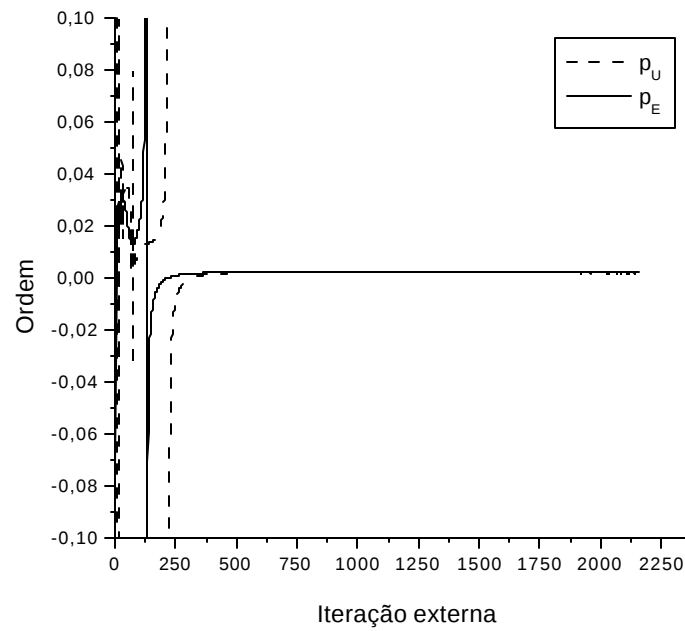


Figura 7.2 – Ordem efetiva (p_E) do erro e ordem aparente (p_U) da incerteza de $\bar{M}$ para o subcaso 3, caso 7.

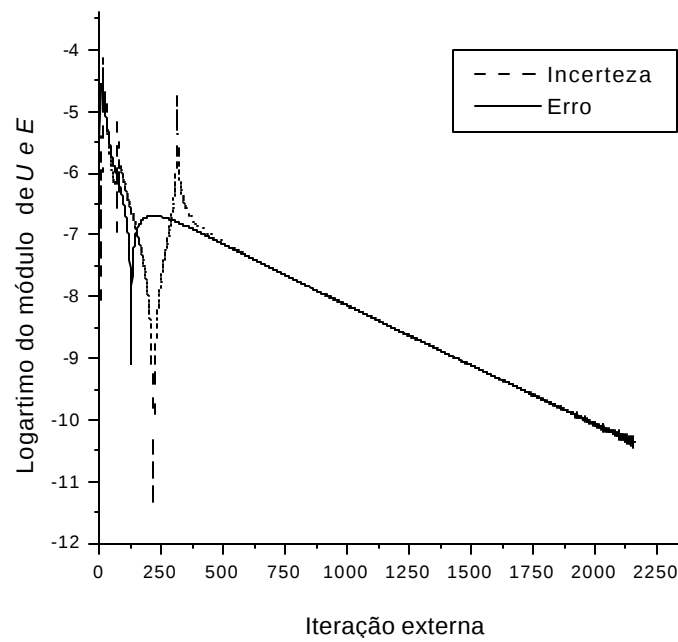


Figura 7.3 – Erro e incerteza de $\bar{M}$ para o subcaso 3, caso 7.

Para o subcaso 3 o resultado obtido pela aplicação do método de previsão da confiabilidade da estimativa do erro, descrito na seção 3.6, pode ser observado através do gráfico de confiabilidade mostrado na Fig. 7.4. Pode-se notar que para $\bar{M}$ o método de previsão não pôde ser aplicado em todas as iterações externas, valor (0) no gráfico de confiabilidade, pois nestas iterações externas $p_U < 0$ (Fig. 7.2). Constatou-se também que em todos os subcasos para todas as variáveis de interesse a primeira iteração externa onde ocorre falha (-1) no método de previsão é a mesma iteração externa onde ocorre oscilação na magnitude da estimativa do erro, devido ao efeito dos erros de arredondamento.

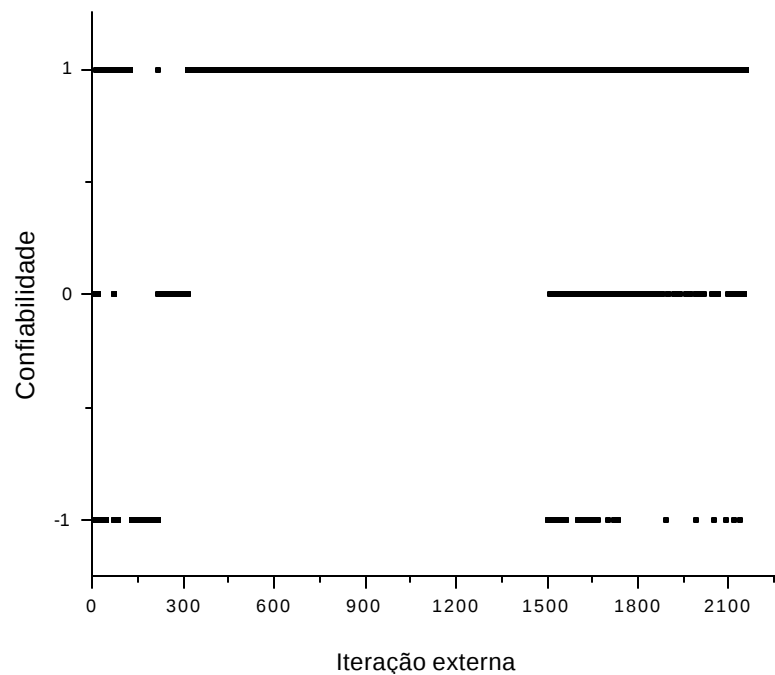


Figura 7.4 – Gráfico de confiabilidade de $\bar{M}$ para o subcaso 3, caso 7.

Observa-se na Tab. 7.6 que a razão de convergência (γ) e a ordem aparente (p_U) variam com o número de volumes da malha. Não se pode afirmar com certeza se há mudança nos valores de γ e p_U para todas as variáveis de interesse, pois pode-se ter influência dos erros de arredondamento.

Tabela 7.6 Razão de convergência e ordem assintótica para caso 7.

Subcaso	Variável	y	P_U
1	$u(L_2/2, L_2/2)$	1,036120005E+00	1,541005888E-02
1	$v(L_2/2, L_2/2)$	1,016553170E+00	7,130099206E-03
1	$p(L_2/2, L_2/2)$	1,015802199E+00	6,809148522E-03
1	$\bar{M}$	1,014395257E+00	6,207209922E-03
2	$u(L_2/2, L_2/2)$	1,008815762E+00	3,811859153E-03
2	$v(L_2/2, L_2/2)$	1,009482381E+00	4,098743285E-03
2	$p(L_2/2, L_2/2)$	1,009284504E+00	4,013605391E-03
2	$\bar{M}$	1,008817479E+00	3,812598191E-03
3	$u(L_2/2, L_2/2)$	1,004591013E+00	1,989288579E-03
3	$v(L_2/2, L_2/2)$	1,005054655E+00	2,189679241E-03
3	$p(L_2/2, L_2/2)$	1,004469947E+00	1,936947299E-03
3	$\bar{M}$	1,004600572E+00	1,993420959E-03

7.4 CONCLUSÃO

Com a utilização do método iterativo MSI constatou-se que, para este caso, a magnitude do erro de iteração apresentou oscilações nas iterações iniciais, o que não havia ocorrido nos casos anteriores.

O estimador *empírico* apresentou comportamento semelhante aos casos anteriores, ou seja, existe discordância entre incerteza e erro somente nas iterações iniciais, Fig. 7.3. Contudo, a amplitude destas oscilações é mais significativa que a obtida nos casos anteriores. Para este caso as “iterações externas iniciais” correspondem à uma faixa de no máximo 17% do número total de iterações externas envolvidas no cálculo. Para as demais iterações, verificou-se a eficiência do estimador de erro quanto à sua acurácia, no entanto não se mostrou confiável para todas as variáveis de interesse e em todos os subcasos. Quanto à aplicação do método de previsão da

confiabilidade, seção 3.6, foi constatado que a iteração externa em que ocorre a primeira falha na previsão (-1) coincide com a iteração em que ocorre oscilação na magnitude da estimativa do erro de iteração devido aos erros de arredondamento.