

Ministério da Educação  
Universidade Federal do Paraná  
Setor de Tecnologia  
*Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PG-Mec)*

**ROBERTO CARLOS MORO FILHO**

**APLICAÇÃO DA TÉCNICA *MULTIGRID* EM TRANSFERÊNCIA DE  
CALOR COMPUTACIONAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Carlos Henrique Marchi, Dr. Eng.

Curitiba, março de 2004.



Dedico este trabalho aos meus avós, e aos meus pais que mesmo discordando do meu ideal me deram todo o suporte para alcançá-lo.

## **AGRADECIMENTOS**

Aos professores que contribuíram para minha formação no curso de mestrado, Prof. Dr. Mauro Lacerda S. Filho, Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maria José J. Ponte, Prof<sup>a</sup>.Dr<sup>a</sup>.Mildred Ballin Hecke, Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado, Prof. Dr. Rubens R. Ortega Jr., Prof. Dr. Waldyr de Lima e Silva Jr.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Carlos Henrique Marchi por ter me mostrado o caminho para a elaboração deste trabalho.

Ao Sr. Eliseu dos Santos, por ter sempre me incentivado, desde a primeira vez que busquei informações sobre o curso até a conclusão deste trabalho.

# SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS.....	vii
LISTA DE FIGURAS.....	viii
LISTA DE SÍMBOLOS.....	x
RESUMO.....	xi
ABSTRACT.....	xii
<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1 A evolução dos computadores.....	1
1.2 Desenvolvimento histórico das estratégias <i>multigrid</i> .....	1
1.3 Métodos numéricos.....	2
<b>2. MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS.....</b>	<b>5</b>
2.1 Discretização da Equação Diferencial.....	5
2.2 Métodos Iterativos.....	7
<b>3. A TÉCNICA MULTIGRID.....</b>	<b>12</b>
3.1 Fundamentos.....	12
3.2 A técnica <i>multigrid</i> utilizando dois níveis de malhas.....	19
3.3 Utilizando vários níveis de malhas.....	21
3.3.1 Restrição e prolongação.....	21
3.3.2 Operadores de restrição e prolongação.....	22
3.3.3 Relação entre as malhas.....	26
3.3.4 Aumento da quantidade de malhas.....	27
3.3.5 Ciclo-V.....	28

3.3.6	Quantidade de iterações internas.....	29
3.3.7	Algoritmo utilizando a técnica <i>multigrid</i> com vários níveis de malhas.....	32
<b>4.</b>	<b>RESULTADOS.....</b>	<b>36</b>
4.1	Aplicação da técnica <i>multigrid</i> utilizando dois níveis de malhas.....	36
4.1.1	Descrição do problema.....	36
4.1.2	Análise da convergência.....	38
4.2	Aplicação da técnica <i>multigrid</i> utilizando vários níveis de malhas.....	39
4.2.1	Aumento da quantidade de malhas.....	39
4.2.2	Relação entre as malhas 1:2 e 1:4.....	46
4.2.3	Quantidade de iterações internas.....	47
4.2.4	Precisão.....	51
4.3	Aplicação da técnica <i>multigrid</i> em um domínio bidimensional.....	54
<b>5.</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>57</b>
5.1	Conclusão.....	57
5.2	Trabalhos Futuros.....	58
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>60</b>

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Quantidade máxima de malhas geradas com as relações de 1:2 e 1:4.....	27
Tabela 4.1 – Técnica <i>multigrid</i> aplicada a resolução da equação de Poisson unidimensional (relação entre as malhas de 1:4).....	40
Tabela 4.2 – Técnica <i>multigrid</i> aplicada a resolução da equação de Poisson unidimensional (relação entre as malhas de 1:2).....	41
Tabela 4.3 Apresentação das relações entre o número de malhas em termos do número de ciclos e a quantidade de nós na malha mais refinada.....	44
Tabela 4.4 – Técnica <i>multigrid</i> aplicada a resolução da equação de Laplace unidimensional (relação entre as malhas de 1:2).....	45
Tabela 4.5 – Técnica <i>multigrid</i> aplicada a resolução da equação de Laplace unidimensional (relação entre as malhas de 1:4).....	45
Tabela 4.6 – Resolução da equação de Laplace unidimensional utilizando relação de 1:2 e 1:4.....	47
Tabela 4.7 Quantidade de iterações internas aplicadas nas fases de restrição e prolongação (relação entre as malhas de 1:2).....	51
Tabela 4.8 Quantidade de iterações internas aplicadas nas fases de restrição e prolongação (relação entre as malhas de 1:4).....	51
Tabela 4.9 Relação entre a quantidade de elementos em uma malha e a precisão obtida. Teste realizado com relação 1:2.....	52
Tabela 4.10 <i>Multigrid</i> aplicado a equação de difusão de calor sem geração de calor (Eq. de Laplace) em um domínio bidimensional.....	56

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 Discretização unidimensional.....	6
Figura 3.1 <i>Smoothing</i> do erro após algumas iterações.....	13
Figura 3.2 Modos de frequência para $f = 1, 2$ e $4$ .....	15
Figura 3.3 Gauss-Seidel utilizando como aproximação inicial modos de frequência para ( $f = 1, 2$ e $4$ ).....	15
Figura 3.4 <i>Multigrid</i> com dois níveis de malhas utilizando como aproximação inicial modos de frequência para $f = 1, 2$ e $4$ .....	16
Figura 3.5 <i>Multigrid</i> com quatro níveis de malhas utilizando como aproximação inicial modos de frequência para $f = 1, 2$ e $4$ .....	16
Figura 3.6 Modos de frequência em uma malha unidimensional.....	17
Figura 3.7 Injeção do resíduo calculado na malha 1 para malha 2.....	19
Figura 3.8 Interpolação das correções calculadas na malha 2 para a malha 1.....	20
Figura 3.9 Deslocamento entre malhas em um espaço bidimensional.....	22
Figura 3.10 Modelo de injeção (restrição) para malhas unidimensionais.....	23
Figura 3.11 Modelo de injeção (restrição) para malhas unidimensionais utilizando a média dos Resíduos, relação entre as malhas 1:2.....	24
Figura 3.12 Modelo de injeção (restrição) para malhas unidimensionais utilizando a média dos Resíduos, relação entre as malhas 1:4.....	24
Figura 3.13 Modelo de interpolação (prolongação) para malhas unidimensionais, relação entre as malhas 1:2.....	25
Figura 3.14 Modelo de interpolação (prolongação) para malhas unidimensionais pela média ponderada das correções no elemento, relação entre as malhas 1:4.....	25



Figura 3.15 Ciclos <i>multigrid</i> .....	28
Figura 3.16 Comparação entre a injeção de resíduos utilizando a relação entre as malhas de 1:2 e 1:4.....	31
Figura 4.1 Malha unidimensional.....	37
Figura 4.2 Gráfico com comparação entre Gauss-Seidel e multigrid com 2 níveis de malhas, com 1025 nós (Relação entre as malhas 1:2).....	39
Figura 4.3 Gráfico com o aumento da quantidade de malhas, com 32769 nós (relação entre as malhas de 1:2).....	42
Figura 4.4 Gráfico com o aumento da quantidade de malhas, com 32769 nós (relação entre as malhas de 1:4).....	42
Figura 4.5 Gráfico com comparação entre a relação 1:2 e 1:4 em uma malha fina de 131072 nós.....	47
Figura 4.6 Gráfico com a alteração do número de iterações internas, com 65537 nós (Relação entre as malhas em 1:2).....	50
Figura 4.7 Gráfico com a alteração do número de iterações internas, com 65537 nós (Relação entre as malhas em 1:4).....	50
Figura 4.8 Gráfico apresentando a máxima precisão alcançada em uma malha com 524288 elementos.....	53
Figura 4.9 Gráfico apresentando a máxima precisão alcançada em uma malha com 1048576 elementos.....	53

## LISTA DE SÍMBOLOS

$T_i$	Temperatura no nó $i$ ( $^{\circ}\text{C}$ )
$T_0$	Temperatura no contorno esquerdo ( $^{\circ}\text{C}$ )
$T_L$	Temperatura no contorno direito ( $^{\circ}\text{C}$ )
$N$	Quantidade de nós na malha original
$Q$	Taxa de geração de energia por unidade de volume do meio ( $\text{W}/\text{m}^3$ )
$C$	Condutividade térmica do material ( $\text{W}/\text{m} \cdot \text{K}$ )
$h$	Tamanho de um elemento da malha, que é igual à distância entre dois nós consecutivos da malha (m).
$i$	Coordenada do nó em uma malha unidimensional
$L$	Comprimento do domínio de cálculo (m)
$m$	Nível da malha
$I$	Operador de injeção ou interpolação
$k$	Quantidade de iterações internas
$R$	Resíduo de erro
$f$	Frequência.
$S$	Termo fonte

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é aplicar a técnica *multigrid* em problemas de transferência de calor buscando seu entendimento e aperfeiçoamento. A técnica *multigrid* foi desenvolvida no final da década de setenta para acelerar a convergência na obtenção de soluções aproximadas para equações diferenciais utilizando várias malhas, bastante abrangente diante dos vários métodos numéricos conhecidos. Foram investigadas as principais características e estruturas da técnica. Tanto a parte teórica como a aplicada trata de problemas lineares unidimensionais, porém, fundamentos, conceitos e modelos podem ser estendidos para problemas não-lineares e problemas em domínios bidimensionais e tridimensionais. Após apresentação dos fundamentos e conceitos, é apresentada a aplicação da técnica à equação de difusão de calor unidimensional com geração de calor. São apresentados algoritmos e o trabalho é finalizado com resultados e análise de convergência em testes sistemáticos com relação ao aumento do número de malhas, relações entre as malhas de 1:2 e 1:4, quantidade de iterações em cada equação nas fases de restrição e prolongação, e precisão alcançada nas soluções obtidas com o aumento do número de nós na malha mais fina. Os resultados apresentaram a relação entre as malhas de 1:4 verificando a norma usada com redução do tempo de processamento da ordem de 2 a 3 vezes quando comparado à relação de 1:2.

Palavras-chave: *multigrid*, técnicas iterativas, simulação numérica.

## ABSTRACT

The objective of this work is to apply the multigrid technique in heat transfer problems searching knowledge and improvement of the technique. The multigrid technique was developed in the end of seventies with the purpose of accelerating the convergence in obtaining approximate solutions to differential equations using several mesh levels, quite general comparing with the others numerical methods known. The main characteristics and structures of the technique were investigated. The theoretical part as the applied part were developed to treat one-dimensional linear problems, but, the basis, concepts, and models can be extended to nonlinear problems and problems in dominions of two-dimensions and three-dimensions. After the presentation of the basis and concepts, the multigrid technique is applied to one-dimensional heat diffusion equation with the generating of heat. The algorithms are introduced and the work is finalized with the results and analyze of the convergence in systematic tests with relation to the increase of the quantity of meshes, relations between meshes of 1:2 and 1:4, quantities of iterations in each equation in the restriction and prolongation phases, and the accuracy obtained in the solutions with the increase of the number of nodes at the fine mesh. The results demonstrated the relation between the meshes of 1:4 verifying the norm used with a reduction in time processing around of 2 to 3 times when compared with the relation of 1:2.

Key-words: multigrid, iterative technique, numerical simulation.

# 1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo introdutório são apresentadas a origem da técnica *multigrid*, a motivação de seu estudo, e sua classificação dentro do conjunto dos métodos aproximados.

## 1.1 A EVOLUÇÃO DOS COMPUTADORES

Na década de sessenta o matemático Edward Lorenz utilizava um computador Royal Macbee, barulhento, lento, sem capacidade de memória, cheio de fios e válvulas que ocupavam quase todo o escritório. Operando com um modelo matemático baseado em 12 equações da mecânica, Lorenz realizava seus ensaios meteorológicos muito longe de serem previsões do tempo.

Hoje mais de 40 anos se passaram, apesar de toda a evolução das últimas décadas, com processadores de até 4.0 GHz nas vitrines das lojas de informática, ainda há grandes obstáculos no tratamento de problemas mais complexos, que envolvam um grande número de variáveis, com precisão, tempo de processamento e custo satisfatórios. Percebe-se cada vez mais que paralelamente à criação de novos processadores, mais rápidos, com maior capacidade de processamento, está à necessidade do desenvolvimento de novas técnicas para resolução de equações diferenciais. Novos algoritmos, cuja eficiência está na velocidade de convergência e na sua abrangência diante dos vários métodos numéricos e classes de problemas.

## 1.2 DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DAS ESTRATÉGIAS *MULTIGRID*

A técnica *multigrid* nasceu da necessidade de se reduzir o tempo de processamento na obtenção de soluções numéricas para equações diferenciais e integrais. O primeiro a produzir um algoritmo utilizando a técnica foi Fedorenko

(1964). O trabalho foi generalizado para uma discretização em diferenças centrais para uma equação diferencial parcial elíptica linear geral por Bachvalov (1966). O trabalho teórico foi pessimista e o método não foi colocado em prática naquele tempo. Os primeiros resultados práticos foram reportados por Brandt (1973), o qual publicou um outro artigo em 1977. O método *multigrid* foi descoberto independentemente por Hackbusch (1976), quem firmou os fundamentos matemáticos (Hackbusch 1978,1980,1981).

Hoje se reconhece que a técnica é muito mais ampla do que se imaginava originalmente, tendo sido empregada em aplicações nas áreas da teoria de controles, otimizações, reconhecimento de padrão, reconstrução de imagens em ressonância magnética e tomografia computadorizada, física da partícula.

### 1.3 MÉTODOS NUMÉRICOS

O Analista numérico segundo Maliska (1995), dispõe de três ferramentas para abordar um determinado problema:

- 1 - métodos analíticos;
- 2 - métodos numéricos;
- 3 - experimentação em laboratório.

Os métodos analíticos devido a grande dificuldade de se encontrar a solução analítica de um problema tornam-se muito restritos, pois, para a obtenção de uma solução para uma equação diferencial ou integral que representa matematicamente o problema real, na maioria das vezes, é impraticável. Apenas mudando o problema real para um problema mais simples aplicando hipóteses simplificadoras e resolvendo analiticamente a equação deste modelo simplificado é

que resultará em uma solução, a qual poderá não ser condizente com a realidade dependendo do problema.

A experimentação em laboratório tem a vantagem de tratar o problema real, obtendo soluções muito próximas da realidade, de acordo com os critérios adotados para o experimento. Porém, o que restringe esta prática é o alto custo para se criar um ambiente, um protótipo e tudo mais que necessita o experimento.

Hoje com a capacidade de memória e velocidade de processamento dos computadores mais modernos, os métodos numéricos ou métodos aproximados constituem uma extraordinária ferramenta para resolver praticamente qualquer equação diferencial ou integral com baixo custo de aplicação. Existe uma grande variedade de métodos numéricos, muitos foram criados através dos mesmos princípios e possuem algumas características exclusivas. Para cada tipo de problema se apresenta um método mais adequado.

Os métodos numéricos mais conhecidos são:

- 1 - método dos elementos finitos;
- 2 - método das diferenças finitas;
- 3 - método dos volumes finitos;
- 4 - método dos elementos de contorno.

Não é simples, em poucas palavras, apresentar uma classificação geral para os métodos numéricos. A classificação dos métodos aproximados que se encontra no livro do Brebbia et al.(1984) deve ser considerada como apropriada.

A técnica *multigrid* ou a estratégia *multigrid* pode ser empregada com qualquer um dos métodos numéricos citados acima. Neste trabalho de dissertação apresenta-se apenas a técnica aplicada com o método das diferenças finitas pela facilidade de apresentação.

O trabalho foi desenvolvido tratando problemas unidimensionais, com o

objetivo de apresentar, de forma didática e estruturada, os fundamentos da técnica *multigrid*, podendo os conceitos e fundamentos apresentados ser facilmente estendidos para outros domínios. Foram desenvolvidos algoritmos para um problema linear embora os mesmos possam ser adaptados e utilizado em problemas não lineares com performance próxima do método *multigrid* conhecido por FAS (*Full approximation scheme*) desenvolvido para problemas não-lineares.



## 2 MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

A técnica *multigrid* é uma técnica iterativa, logo trabalha com equações discretizadas. Neste capítulo são apresentados o método das diferenças finitas, o qual é utilizado para se encontrar as equações nas suas formas discretizadas, e o método iterativo conhecido por Gauss-Seidel, o qual pode ser aplicado na técnica *multigrid*.

### 2.1 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL

A tarefa dos métodos numéricos é resolver sistemas de equações diferenciais que representam matematicamente o problema em estudo. O primeiro passo é substituir a equação diferencial por uma expressão algébrica que contenha a função incógnita. Para tanto, divide-se o domínio em subdomínios ou elementos e substituem-se as derivadas da equação diferencial por equações algébricas que podem ser obtidas de várias maneiras, por exemplo, através de séries de Taylor como apresentados no livro do Maliska (1995) e no livro do Ferziger et. al.(2002), ou através das aproximações das derivadas apresentadas no livro do Incropera et. al. (1992).

Considere a seguinte equação diferencial do problema de condução de calor em regime permanente unidimensional com geração de calor,

$$\frac{dT}{dx} + S = 0 \quad (2.1)$$

onde,  $T$  é a temperatura, e  $S$  é o termo fonte, o qual representa o quociente da taxa de geração de calor e a condutividade térmica do material. Usando séries de Taylor

em torno de  $i$  de acordo com a figura 2.1, os valores da temperatura em  $i+1$  e  $i-1$  podem ser calculados por:

$$T_{i+1} = T_i + \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i \Delta x + \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_i \frac{\Delta x^2}{2!} + \left. \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right|_i \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots + \dots \quad (2.2)$$

$$T_{i-1} = T_i - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i \Delta x + \left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_i \frac{\Delta x^2}{2!} - \left. \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right|_i \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots + \dots \quad (2.3)$$

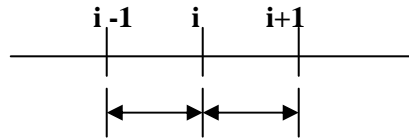


FIGURA 2.1 – DISCRETIZAÇÃO UNIDIMENSIONAL.

Das equações 2.2 e 2.3 é possível encontrar as aproximações numéricas das derivadas parciais. Usando estas equações, obtém-se, respectivamente,

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i = \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.4)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_i = \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.5)$$

As equações 2.4 e 2.5 são as aproximações numéricas, para frente e para trás, da derivada de primeira ordem. Somando a Eq. (2.2) com a Eq. (2.3), se obtém:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1} + T_{i-1} - 2T_i}{\Delta x^2} + O(\Delta x)^2 \quad (2.6)$$

A equação 2.6 é a aproximação numérica para a derivada de segunda ordem em diferenças centrais. Neste caso o erro de truncamento é da ordem de  $(\Delta x)^{(2)}$ .

Finalmente com as aproximações já substituídas chega-se à equação (2.1) na sua forma discretizada,

$$\frac{T_{i+1} + T_{i-1} - 2T_i}{\Delta x^2} + S = 0 \quad (2.7)$$

Existirão tantas equações quanto o número de nós. Para resolver este sistema de equações será utilizado um método iterativo, a seguir descrito.

## 2.2 MÉTODOS ITERATIVOS

Os métodos iterativos são aplicados às equações discretizadas, começam com uma aproximação inicial da solução em cada ponto e tentam melhorar os resultados em cada iteração sucessivamente. Existem muitos métodos iterativos o livro do Tannehill et. al. (1997) apresenta vários deles. Será apresentado neste trabalho apenas o método desenvolvido por Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Philip Ludwig von Seidel (1821-1896), método conhecido por Gauss-Seidel, apresentado também no livro do Kolman (1998).

Reescrevendo a Eq.(2.7) tem-se:

$$\left(\frac{2}{\Delta x^2}\right)T_i - \left(\frac{1}{\Delta x^2}\right)T_{i+1} - \left(\frac{1}{\Delta x^2}\right)T_{i-1} = (S) \quad (2.8)$$

A partir da equação (2.8) obtém-se um sistema de equações onde cada linha corresponde a equação para cada nó da malha

$$\begin{aligned}
a_{11}T_1 + a_{12}T_2 + a_{13}T_3 + \Lambda + a_{1N}T_N &= s_1 \\
a_{21}T_1 + a_{22}T_2 + a_{23}T_3 + \Lambda + a_{2N}T_N &= s_2 \\
&\vdots \\
a_{N1}T_1 + a_{N2}T_2 + a_{N3}T_3 + \Lambda + a_{NN}T_N &= s_N
\end{aligned} \tag{2.9}$$

onde, as grandezas  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1N}, \dots, a_{N1}, \dots, a_{NN}$  são coeficientes e constantes conhecidos que envolvem as grandezas  $\Delta x$ , e  $S$ .

Definindo por  $\mathbf{T}$  a solução exata para o sistema, e por  $\mathbf{v}$  uma aproximação para a solução exata. Tanto  $\mathbf{T}$  como  $\mathbf{v}$ , representam vetores, enquanto os  $j^{th}$  componentes destes vetores são denotados por  $T_j$  e  $v_j$ .

Representando o sistema 2.9 por:

$$\mathbf{AT} = \mathbf{S}$$

Uma medida de  $\mathbf{v}$  como aproximação para  $\mathbf{T}$ , é o erro, e é dado simplesmente por

$$\mathbf{e} = \mathbf{T} - \mathbf{v} \tag{2.10}$$

Os parágrafos seguintes fazem uma explanação sobre as origens do erro numérico, são uma adaptação do texto elaborado por Martins(2002).

A diferença entre a solução analítica exata de uma variável de interesse e a sua solução numérica é denominada por Ferziger e Peric (1999) de erro da solução numérica, ou simplesmente, erro numérico. O erro numérico é causado por diversas fontes de erro, que podem ser classificados por erros de truncamento, erros de iteração, erros de arredondamento e erros de programação.

### **- Erros de truncamento:**

Dado um modelo matemático, é comum substituí-lo por um modelo numérico. A maioria dos modelos numéricos envolve o truncamento, que nada mais é do que o modelo original definido de tal forma que todas suas partes possam ser calculadas em um número finito de passos. O erro que ocorre ao se truncar um processo infinito é chamado erro de truncamento.

### **- Erros de Arredondamento:**

Um número pode admitir várias representações, mas normalmente adota-se uma sucessão de racionais que são múltiplos de uma potência de 10 (base decimal), ou seja, utiliza-se notação científica. No caso da notação científica, um número representa-se através do sinal, da mantissa e do expoente, na base decimal. Os dígitos variam entre 0 e 9, mas o primeiro dígito da mantissa deve ser diferente de zero (o número zero é representado à parte). Mas, a menos que se esteja de posse de uma máquina com memória infinita, a representação de um número deve ser finita, pelo que, conseqüentemente obriga-se a considerar um número finito de dígitos na mantissa e uma limitação nos valores dos expoentes admitidos.

Os erros de arredondamento são os erros que ocorrem principalmente devido à representação finita dos números reais nas computações. Eles dependem do compilador (*software*) usado para gerar o código computacional e do computador (*hardware*) empregado em sua execução.

### **- Erros de Programação:**

Não basta desenvolver o programa para resolver um dado problema, deve-se analisar se a solução está correta. Muitos erros podem ocorrer durante o desenvolvimento de um programa. Esses erros podem ocorrer por um mau entendimento dos elementos da linguagem utilizada ou até mesmo por descuido. Uma maneira de se evitar esse tipo de erro é efetuar testes para detectar erros no programa.

### - Erros de Iteração:

De acordo com Ferziger e Peric (1999), considerando-se uma determinada variável de interesse, o erro de iteração é a diferença entre a solução exata das equações discretizadas e a solução numérica em uma determinada iteração, admitindo-se que a solução exata seja única.

Entre outros, alguns fatores que geram erros de iteração são:

- 1) O emprego de métodos iterativos para resolver as equações discretizadas, ou o sistema de equações algébricas;
- 2) O uso de métodos segregados na obtenção da solução de modelos matemáticos constituídos por mais de uma equação diferencial;
- 3) A existência de não-linearidades no modelo matemático.

O método de Gauss-Seidel pode ser aplicado tal como apresentado no livro do Incropera et.al.(1998):

1 - Na medida do possível, as equações devem ser reordenadas de modo que os elementos da diagonal principal tenham módulos maiores que outros elementos da mesma fileira. Isto é, a seqüência de equações desejável deve propiciar  $|a_{11}| > |a_{12}|, |a_{13}|, \dots, |a_{1N}|$ ;  $|a_{22}| > |a_{21}|, |a_{23}|, \dots, |a_{2N}|$ ; e assim sucessivamente.

2 - Depois de reordenar cada uma das  $N$  equações, elas se escrevem de forma explícita na temperatura associada ao seu elemento diagonal. Cada temperatura no vetor solução terá então a forma

$$T_i^{(k)} = \frac{C_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} T_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^N \frac{a_{ij}}{a_{ii}} T_j^{(k-1)} \quad (2.10)$$

onde  $i=1,2,\dots,N$ . O índice superior  $k$  refere-se à etapa da iteração.

3 - Para cada temperatura  $T_i$  admite-se um valor inicial ( $k = 0$ ).

Os cálculos posteriores reduzem-se bastante mediante uma escolha inicial baseada em estimativas razoáveis.

4 - Calculam-se então novos valores de  $T_i$  pela substituição dos valores admitidos inicialmente ( $k = 0$ ), ou de novos valores de  $T_j$  ( $k = 1$ ), no segundo membro da Eq. 2.10. Esta etapa é a primeira iteração ( $k=1$ ).

5 - Mediante a Eq. 2.10, o procedimento de iteração continua pelo cálculo dos novos valores de  $T_i^{(k)}$ , a partir dos valores de  $T_i^{(k)}$  da iteração em curso, onde  $1 \leq j \leq i-1$  e dos valores  $T_j^{(k-1)}$  da iteração anterior, onde  $i+1 \leq j \leq N$ .

6 - A iteração termina quando se satisfaz a um critério de convergência previamente aceito. O critério pode exprimir-se como

$$T_i^{(k)} - T_i^{(k-1)} \leq \varepsilon \quad (2.11)$$

onde,  $\varepsilon$  representa a incerteza aceitável na temperatura.

7 - O método iterativo Gauss-Seidel nem sempre converge para a solução, considerando o sistema linear  $Au=d$ , uma condição suficiente para a convergência é:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} |a_{ij}| \quad (1 \leq i \leq n) \quad (2.12)$$

Ou seja, a matriz  $A$  tem que ser diagonalmente dominante.

### 3 A TÉCNICA *MULTIGRID*

No capítulo anterior foi apresentado o método iterativo Gauss-Seidel, neste capítulo são apresentados os fundamentos da técnica *multigrid*. O efeito da aplicação de Gauss-Seidel sobre o erro nas malhas refinadas e nas malhas mais grosseiras, as fases de restrição e prolongação, como Gauss-Seidel é aplicado nestas fases, e os quatro parâmetros que mais afetam o tempo de processamento (Minkowycz et.al.,1988; Fletcher, 1997; Hirsch, 1988; Roache, 1998; Briggs et.al.,2000).

#### 3.1 FUNDAMENTOS

*Multigrid* é uma técnica iterativa que demanda menor tempo de processamento que outras técnicas quando aplicada à resolução de equações diferenciais. Pode ser utilizada para tratar de problemas lineares e não lineares, e pode ser implementada utilizando um método iterativo qualquer. Utilizar-se-á neste trabalho apenas o método iterativo conhecido por Gauss-Seidel. A técnica *multigrid* pode ser utilizada também com qualquer um dos métodos numéricos citados no item 1.3.

Os métodos iterativos como Gauss-Seidel possuem a propriedade de em poucas iterações removerem os componentes de alta frequência do erro transformando-o em uma função suave como apresentado na figura 3.1. Este processo chama-se *smoothing*.

Ao longo do texto utilizaremos a palavra erro se referindo ao erro de iteração.



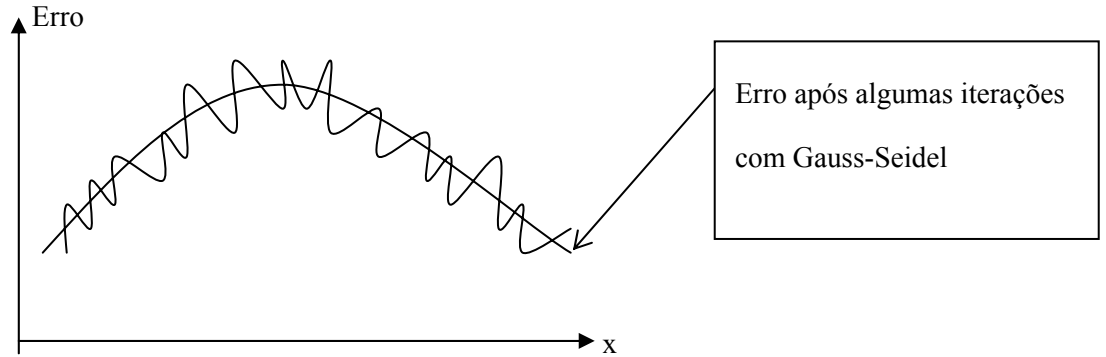


Figura 3.1 *Smoothing* do erro após algumas iterações (Hirsch, 1988)

Após algumas iterações o erro se torna uma função suave com componentes de baixa frequência de erro. A remoção dos componentes de alta frequência é rápida e demanda poucas iterações em um método iterativo, o que não ocorre com os componentes de baixa frequência de erro.

Pode-se verificar as afirmações dos parágrafos anteriores sobre a remoção dos componentes de baixa e alta frequência de erro considerando um problema teórico unidimensional, o qual é representado pela equação discretizada 3.1 (adaptação do livro do Briggs et.al., 2000).

$$-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1} = 0 \quad (3.1)$$

Com as seguintes condições de contorno de primeira espécie:

$$u_0 = u_N = 0$$

Onde,  $1 \leq j \leq N - 1$ .

A razão para se utilizar este problema é que a solução exata é conhecida ( $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ ) e o erro em uma aproximação  $\mathbf{v}$  é simplesmente  $-\mathbf{v}$ .

Os vetores ou modos de Fourier são calculados pela seguinte equação:

$$v_j = \sin\left(\frac{jf\pi}{n}\right), \quad 0 \leq j \leq n, \quad 1 \leq f \leq n-1 \quad (3.2)$$

Onde  $j$  está relacionado a um nó específico na malha unidimensional, e o inteiro  $f$  está relacionado à frequência da senóide. Para cada  $f$  obtém-se um vetor  $\mathbf{v}$  e estes são chamados de modos de frequência ou modos de Fourier. A figura 3.2 apresenta as curvas dos modos de frequência para  $f = 1$ ,  $f = 2$  e  $f = 4$  as quais servirão como primeiras aproximações no processo iterativo.

O erro é também um vetor e sua magnitude pode ser medida por qualquer norma vetorial. As normas mais comuns utilizadas para este propósito são a norma máxima (ou infinita) e a Euclidiana, definidas, respectivamente por

$$\|e\|_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq N} |e_j| \quad \text{e} \quad \|e\|_2 = \left\{ \sum_{j=1}^N e_j^2 \right\}^{1/2} \quad (3.3)$$

A norma que se ajusta melhor aos propósitos deste trabalho e será utilizada em todas as aplicações será a norma máxima.

Utilizando Gauss-Seidel com a norma máxima do erro, pode-se apresentar através da figura 3.3, o gráfico do erro versus o número de iterações para as aproximações iniciais com  $f = 1, 2$  e  $4$ . Quando se aplica  $f = 1$ , a curva é suave com baixa frequência, o que torna lenta a convergência em um método iterativo. Para  $f = 4$  a frequência é maior a curva é mais oscilatória o que torna a convergência através de um método iterativo mais veloz como mostra a figura 3.3 para  $f=4$ .

Como um componente de baixa frequência de erro em uma malha refinada se torna um componente de alta frequência de erro em uma malha mais grosseira, é uma boa idéia utilizar malhas mais grosseiras para remover os componentes de baixa frequência de erro e propagar a informação do contorno através do domínio mais rapidamente, e utilizar malhas mais refinadas para melhorar a precisão.

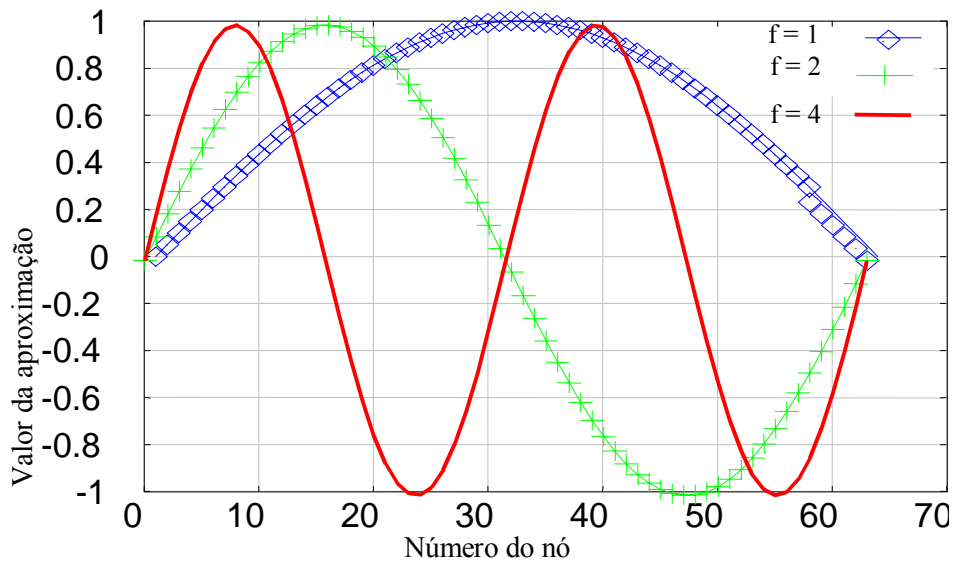


FIGURA 3.2 MODOS DE FREQUÊNCIA PARA  $F=1, 2$  E  $4$ .

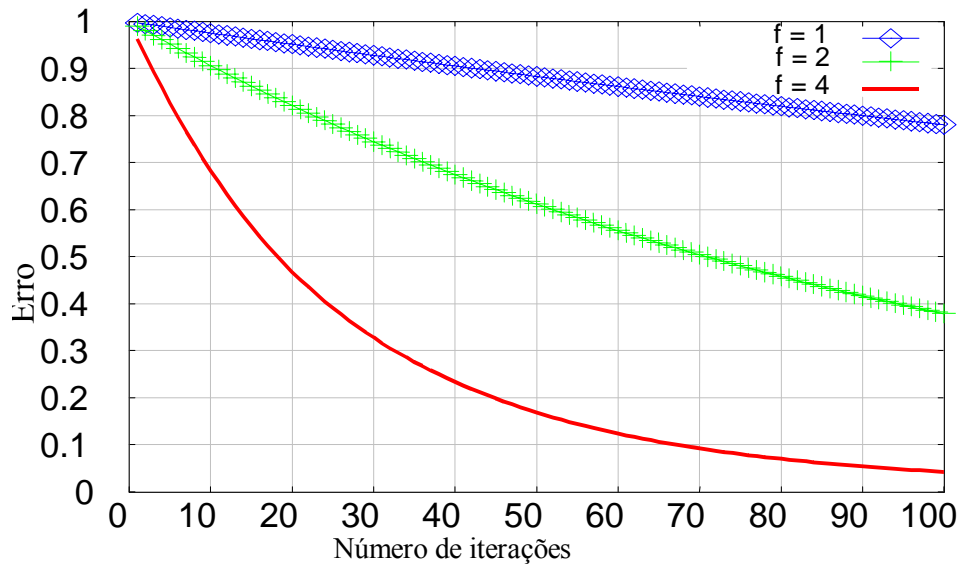


FIGURA 3.3 GAUSS-SEIDEL UTILIZANDO COMO APROXIMAÇÃO INICIAL MODOS DE FREQUÊNCIA PARA  $F=1, 2$  E  $4$ .

Para se obter o máximo de vantagem da técnica *multigrid*, várias malhas devem ser utilizadas. Normalmente o tamanho dos elementos contidos nas malhas é aumentado por um fator dois a cada nível de malha que se acrescenta. Para muitos problemas pode-se trabalhar com o número de malhas de maneira que a malha mais grosseira contenha um nó interno.

As figuras 3.4 e 3.5 ilustram a aplicação da técnica *multigrid* na resolução da equação 3.1 utilizando 2 e 4 malhas respectivamente.

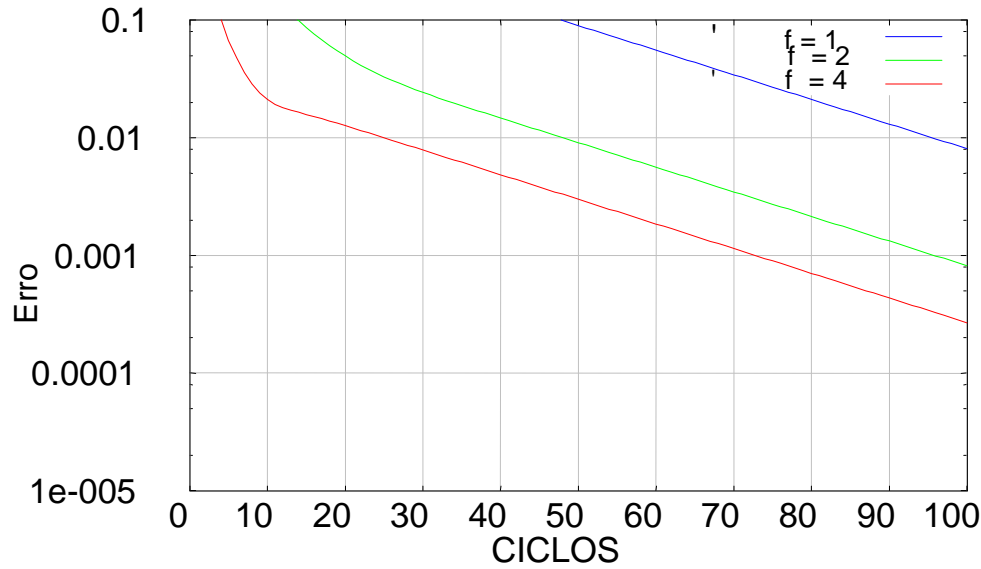


FIGURA 3.4 *MULTIGRID* COM 2 NÍVEIS DE MALHAS UTILIZANDO COMO APROXIMAÇÃO INICIAL MODOS DE FREQUÊNCIA PARA F =1, 2 E 4.

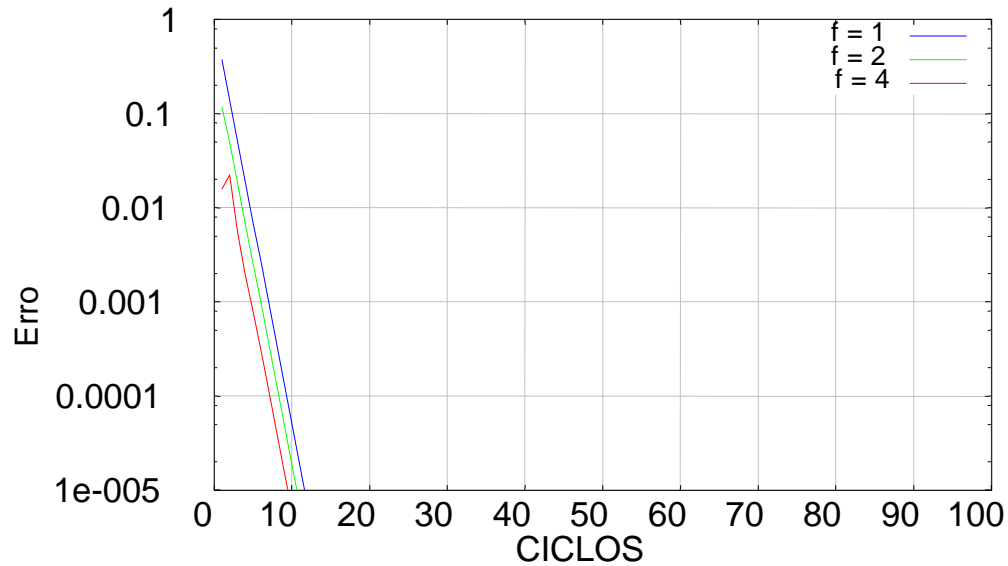


FIGURA 3.5 *MULTIGRID* COM 4 NÍVEIS DE MALHAS UTILIZANDO COMO APROXIMAÇÃO INICIAL MODOS DE FREQUÊNCIA PARA F =1, 2 E 4.

A figura 3.6 representa os modos de frequência de erro para uma malha refinada e uma malha mais grosseira.

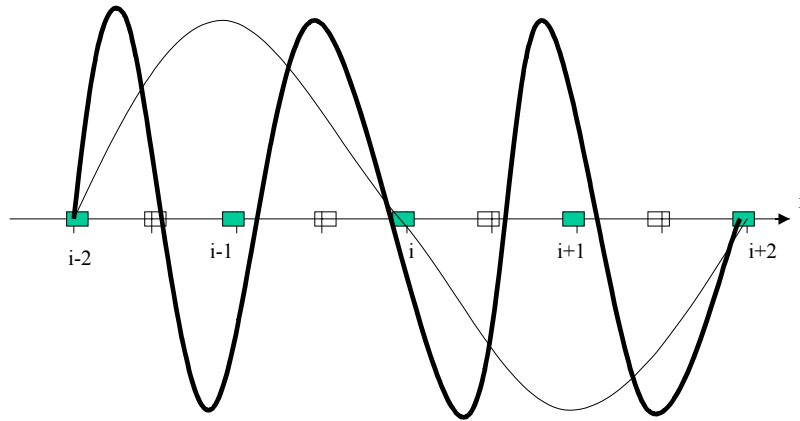


FIGURA 3.6 MODOS DE FREQUÊNCIA EM UMA MALHA UNIDIMENSIONAL (HIRSCH, 1988)

Considerando o problema unidimensional correspondente à equação 2.1, são apresentados a seguir os fundamentos da técnica *multigrid*, adaptando texto do livro do Tannehill et. al. (1997). Definindo por  $L$  o operador numérico tem-se que,

$$LT_i = \frac{T_{i+1} + T_{i-1} - 2T_i}{(\Delta x)^2} \quad (3.4)$$

O resíduo  $R$  é definido como sendo o número que resulta da equação diferencial 2.1, quando avaliada para uma solução intermediária. Portanto para a presente aplicação tem-se:

$$R_i = LT_i^k + S \quad (3.5)$$

Onde é entendido que na convergência,  $R_i = 0$ . Considerando a solução final

convergida da equação diferencial 2.1 por  $T_i$  e definindo as correções  $\Delta T_i$  por

$$T_i = \Delta T_i + T_i^k \quad (3.6)$$

onde, o sobrescrito  $k$  representa o nível de iteração. Portanto a correção é o valor que deve ser adicionado à solução intermediária para obtenção da solução final convergida. Desde que a equação a ser resolvida é

$$L T_i + S = 0$$

é possível escrever que:

$$L \Delta T_i + L T_i^k + S = 0 \quad (3.7)$$

Mas pela Eq. 3.5 tem-se:

$$R_i = L T_i^k + S$$

Portanto,

$$L \Delta T_i + R_i = 0 \quad (3.8)$$

A equação 3.8 pode ser resolvida iterativamente para o  $\Delta T_i$  utilizando Gauss-Seidel. Se  $R_i$  for mantido fixo, as iterações convergirão gerando valores finitos para o  $\Delta T_i$  os quais podem ser adicionados ao  $T_i^k$  em  $R_i$  para se obter o valor final para a solução.

As malhas mais grosseiras são usadas apenas para obter correções para as malhas mais refinadas.

### 3.2 A TÉCNICA *MULTIGRID* UTILIZANDO DOIS NÍVEIS DE MALHAS

De acordo com as equações fundamentadas no item 3.1 será apresentado o seguinte procedimento adaptado do livro do Tannehill et. al.(1997) para obtenção de uma solução aproximada para o problema definido no item 2.1 utilizando dois níveis de malhas:

Etapa 1: Utilizando Gauss-Seidel, faça  $k$  iterações na malha mais refinada, a malha definida por  $N$  nós, resolvendo a Eq. 2.7 para a incógnita  $T_i$ .

Etapa 2: Se a solução não convergir após  $k$  iterações calcule e armazene o resíduo em cada ponto da malha utilizando a equação 3.5.

Etapa 3: Utilizando um operador de restrição, injete os resíduos calculados na etapa anterior (malha 1) para a malha mais grosseira (malha 2) como mostra a figura 3.7.

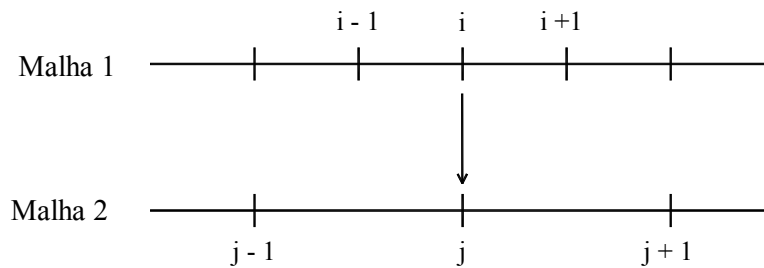


FIGURA 3.7 INJEÇÃO DO RESÍDUO CALCULADO NA MALHA 1 PARA MALHA 2.

Etapa 4: Reescrevendo a Eq. 3.8 chega-se na forma residual da equação de Poisson unidimensional (Eq. 2.1):

$$L(\Delta T_i) = -R_i \quad (3.9)$$

Resolva a Eq. 3.9 na malha 2 para as correções usando zero como aproximação inicial, utilize Gauss-Seidel com  $k$  iterações.

Etapa 5: Interpole as correções calculadas nos nós da malha mais grosseira (malha 2) para a malha mais refinada (malha 1) usando um operador de prolongação como mostra a figura 3.8.

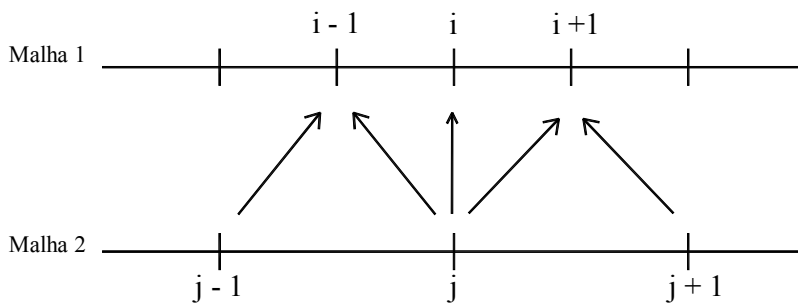


FIGURA 3.8 INTERPOLAÇÃO DAS CORREÇÕES CALCULADAS NA MALHA 2 PARA A MALHA 1.

Etapa 6: Adicione as correções calculadas nos nós da malha mais grosseira (etapa 4) às soluções intermediárias obtidas na etapa 1.

Após concluir a etapa 6 executa-se a etapa 1 novamente e verifica-se a convergência, caso não seja satisfeita inicia-se um novo ciclo partindo da etapa 2, injetando os novos resíduos para a malha mais grosseira e seguindo para as etapas posteriores.

O procedimento acima pode ser representado através do seguinte algoritmo:

$$1) T_i^k$$

$$2) LT_i^k + S = R_i^1$$



$$3) I_1^2 R_i^1$$

$$4) L\Delta(T_2)_i = -I_1^2 R_i^1$$

$$5) I_2^1 \Delta(T_2)_i^k$$

$$6) T_i = I_2^1 \Delta(T_2)_i^k + T_i^k$$

Onde,

$I$  – representa o operador de injeção com o subscrito indicando o nível de origem e o sobrescrito indicando o nível de destino.

$R$  – representa o resíduo calculado com o sobrescrito indicando o nível onde foi calculado e o subscrito indicando o nó onde foi calculado.

$\Delta(T_2)_i^k$  – representa a correção calculada na malha 2 com o sobrescrito  $k$  indicando o número de iterações para obtenção de  $\Delta(T_2)_i^k$  e o subscrito indicando o nó onde foi calculada.

### 3.3 UTILIZANDO VÁRIOS NÍVEIS DE MALHAS

#### 3.3.1 RESTRIÇÃO E PROLONGAÇÃO

A passagem na marcha de cálculo de uma malha mais refinada para uma mais grosseira, ou seja, com menor número de nós, ocorre na fase conhecida por restrição. A passagem dos cálculos de uma malha para outra mais refinada ocorre na etapa de prolongação.

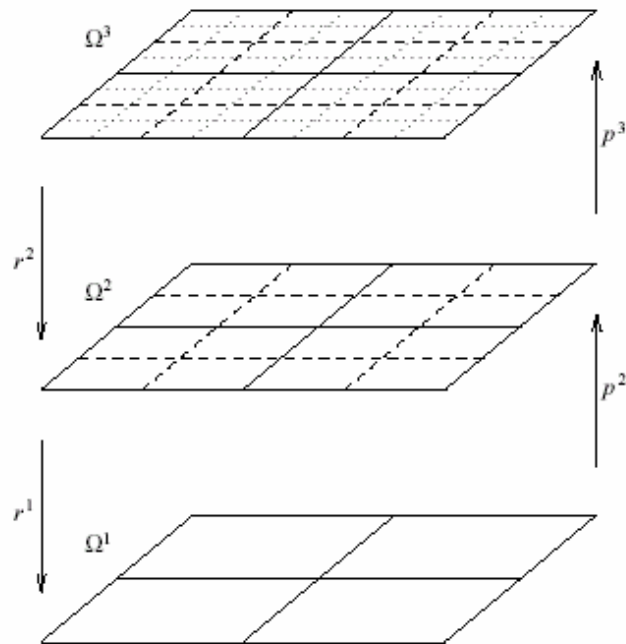


FIGURA 3.9 DESLOCAMENTO ENTRE MALHAS EM UM ESPAÇO BIDIMENSIONAL(LIOEN,1985)

A seqüência de restrições e prolongações adotadas na marcha de cálculo recebe o nome de ciclo. O ciclo que é investigado no decorrer deste trabalho será o ciclo-V (Tannehill et. al.,1997; Wesseling, 1991).

O ciclo-V recebe este nome devido à seqüência de restrições e prolongações. Inicia-se na malha mais refinada e restringe a marcha de cálculo para a próxima malha gerada, mais grosseira, e assim sucessivamente até chegar na última malha mais grosseira. Em seguida, retorna para a próxima malha mais refinada e assim sucessivamente até chegar na última malha mais refinada.

### 3.3.2 OPERADORES DE RESTRIÇÃO E PROLONGAÇÃO

Os operadores de restrição e prolongação devem ser modelados de forma que quando injetem e propaguem resíduos e correções verifiquem a norma com o menor tempo de processamento possível. O operador de restrição é um operador de

injeção, sua função é injetar resíduos calculados em uma malha refinada para a malha mais grosseira, ou seja, com menor número de elementos. Neste trabalho foram estudadas duas formas de realizar a injeção no caso unidimensional. Definindo por  $G^{m-1}$  uma malha fina e por  $G^m$  a próxima malha gerada mais grosseira e considerando relação entre as malhas 1:2 ou seja um elemento  $h$  pertencente a  $G^m$  terá o dobro da dimensão de um elemento  $h$  pertencente a malha  $G^{m-1}$ , cada resíduo  $R_i$  injetado em  $G^m$  tem sua origem no resíduo calculado na malha  $G^{m-1}$  no nó  $i$  onde a relação entre os nós das duas malhas é  $i=2*j-1$ , como ilustrado na figura 3.10.

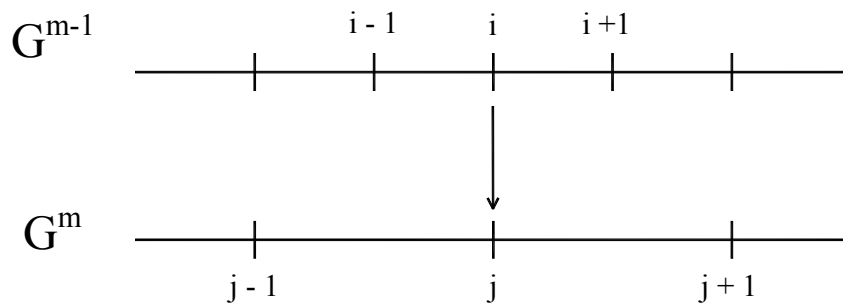


FIGURA 3.10 MODELO DE INJEÇÃO (RESTRIÇÃO) PARA MALHAS UNIDIMENSIONAIS

Outra forma de realizar a injeção seria semelhante à do parágrafo anterior porém injetando a média aritmética dos três resíduos  $i-1$ ,  $i$  e  $i+1$  pertencentes ao  $G^{m-1}$  como mostra a figura 3.11, para uma relação entre as malhas de 1:2, e a figura 3.10, para a relação de 1:4.

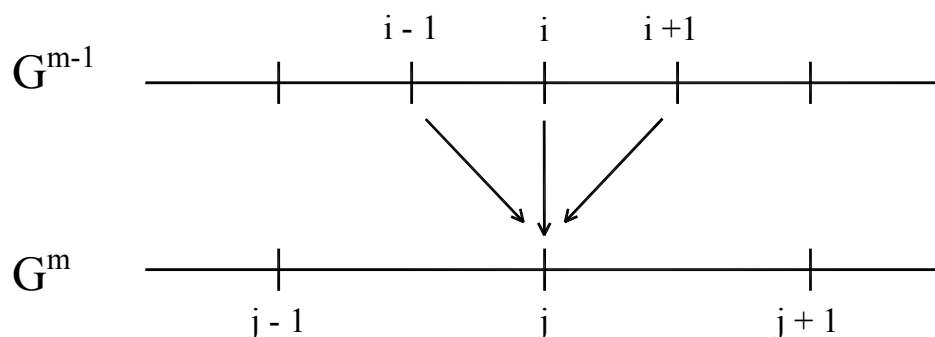


FIGURA 3.11 MODELO DE INJEÇÃO (RESTRIÇÃO) PARA MALHAS UNIDIMENSIONAIS UTILIZANDO A MÉDIA DOS RESÍDUOS, RELAÇÃO ENTRE AS MALHAS 1:2.

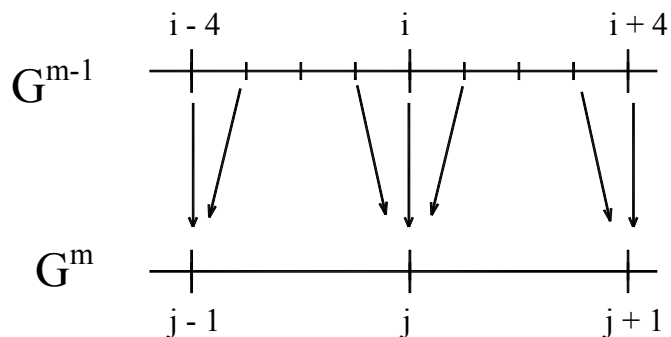


FIGURA 3.12 MODELO DE INJEÇÃO (RESTRIÇÃO) PARA MALHAS UNIDIMENSIONAIS UTILIZANDO A MÉDIA DOS RESÍDUOS, RELAÇÃO ENTRE AS MALHAS 1:4.

O operador de prolongação interpola as correções calculadas em uma malha  $G^m$  para uma malha mais refinada  $G^{m-1}$ . Para este operador também existem várias formas de se executar a interpolação. Nos casos onde se esteja aplicando a relação de 1:2 entre as malhas, a maneira mais eficaz é a apresentada na figura 3.11.

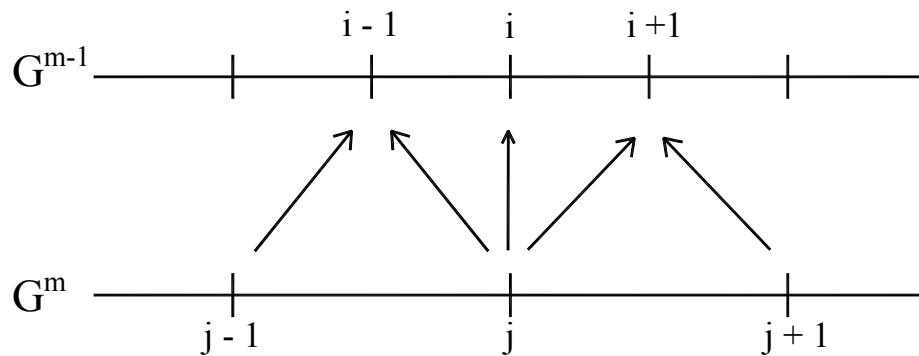


FIGURA 3.13 MODELO DE INTERPOLAÇÃO (PROLONGAÇÃO) PARA MALHAS UNIDIMENSIONAIS, RELAÇÃO ENTRE AS MALHAS DE 1:2.

Quando aplicada a relação de 1:4 entre as malhas, é possível apresentar dois modelos diferentes. O primeiro modelo interpola a média ponderada das correções calculadas em um elemento pertencente à  $G^m$ , para os nós do elemento pertencente à  $G^{m-1}$ .

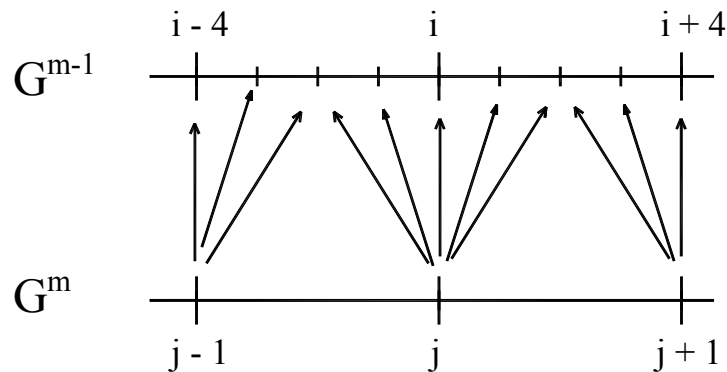


FIGURA 3.14 MODELO DE INTERPOLAÇÃO (PROLONGAÇÃO) PARA MALHAS UNIDIMENSIONAIS PELA MÉDIA PONDERADA DAS CORREÇÕES NO ELEMENTO, RELAÇÃO ENTRE AS MALHAS DE 1:4.

Um segundo modelo que pode ser empregado prolonga as correções de forma que a correção calculada em uma malha  $G^m$ , identificada pelo índice  $j$ , será interpolada para os nós identificados pelo índice  $i$  pertencentes a malha  $G^{m-1}$  (malha mais refinada) seguindo a relação entre  $i$  e  $j$  definida do seguinte modo:

$$i = 4*j-2 \quad \Rightarrow \quad \Delta T_i = \Delta T_j$$

$$i = 4*j-3 \quad \Rightarrow \quad \Delta T_i = \Delta T_j$$

$$i = 4*j-4 \quad \Rightarrow \quad \Delta T_i = \Delta T_j$$

$$i = 4*j-1 \quad \Rightarrow \quad \Delta T_i = (\Delta T_j + \Delta T_{j+1}) \div 2$$

para  $1 < j < N$ , onde  $N$  é o número de elementos de  $G^m$  e  $\Delta T_i$  é a correção no nó  $i$ .

### 3.3.3 RELAÇÃO ENTRE AS MALHAS

A relação entre as malhas supondo que as mesmas sejam fixas, é definida como sendo a relação entre a dimensão de um elemento em uma malha refinada e a dimensão de um elemento em uma malha mais grosseira gerada da primeira. Por exemplo, a relação 1:2 significa que um elemento que possui dimensão  $\Delta$  em uma malha terá dimensão  $2\Delta$  na malha seguinte gerada, mais grosseira. A técnica *multigrid* possibilita que se utilizem quaisquer relações entre as malhas, como por exemplo, 1:3, 1:4, 2:3.

A relação de 1:4, que é pesquisada neste trabalho, não ocupa tanta memória do computador para armazenamento de resíduos e correções quando comparada a relação de 1:2. Por exemplo, utilizando o número máximo de malhas que podem ser gerados a partir de uma malha com 1024 elementos, temos na relação 1:2 a quantidade de 10 malhas e na relação 1:4 a quantidade de 5 malhas. As quantidades de nós em cada malha são apresentadas na tabela 3.1.

Relação de 1:2		Relação de 1:4	
Malha 1	1025 nós	Malha 1	1025 nós
Malha 2	513 nós	Malha 2	257 nós
Malha 3	257 nós	Malha 3	65 nós
Malha 4	129 nós	Malha 4	17 nós
Malha 5	65 nós	Malha 5	5 nós
Malha 6	33 nós		
Malha 7	17 nós		
Malha 8	9 nós		
Malha 9	5 nós		
Malha 10	3 nós		

TABELA 3.1 QUANTIDADE MÁXIMA DE MALHAS GERADAS COM AS RELAÇÕES ENTRE AS MALHAS 1:2 E 1:4.

### 3.3.4 AUMENTO DA QUANTIDADE DE MALHAS

A técnica *multigrid* pode ser aplicada utilizando tantas malhas quantas forem possíveis de serem geradas por uma malha original. A ordem de visitação destas malhas pode ser fixa ou adaptativa. Fixa caso se defina com antecedência a ordem de restrições e prolongações formando uma seqüência fixa ou ciclo. Como por exemplo são apresentados, na figura 3.15, os ciclos para duas e quatro malhas, onde conforme ilustrado  $S$  é a inicial de *smoothing*, ou seja, a aplicação de um método iterativo e transferência do problema para outra malha,  $E$  é a inicial de exata significando a obtenção da solução exata e  $\gamma$  representa o número de ciclos-V internos. Na figura 3.13 constam os ciclos mais comuns que é o ciclo-V e o ciclo-W.

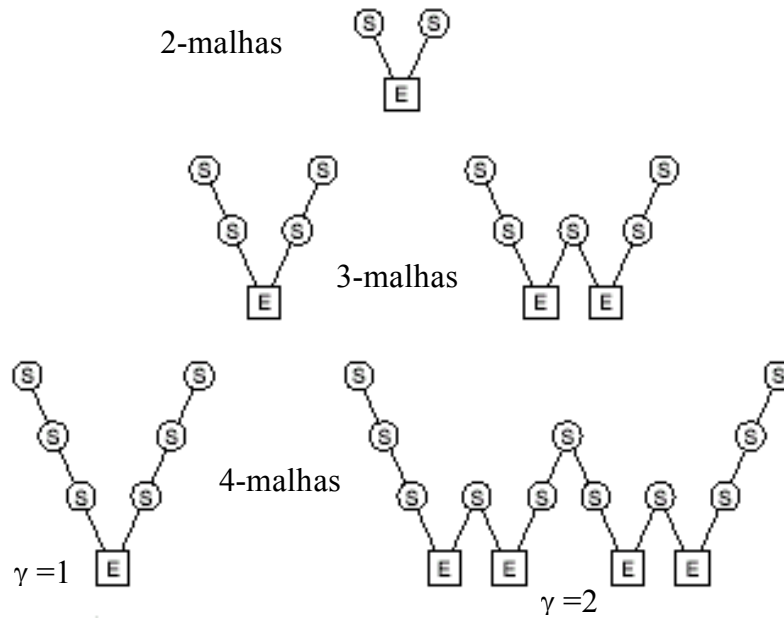


FIGURA 3.15 CICLOS *MULTIGRID*

As seqüências adaptativas são dependentes dos resultados de cada etapa de restrição ou prolongação, a partir do resultado o algoritmo define-se qual será a próxima etapa do ciclo. Estas seqüências não serão abordadas neste trabalho.

### 3.3.5 CICLO-V

O ciclo mais simples utilizando mais de duas malhas é o ciclo-V. Inicia-se na malha mais refinada e segue-se restringindo até a malha mais grosseira, em seguida prolongam-se as correções retornando até a malha mais refinada.

O aumento do número de malhas é limitado de acordo com a relação entre as malhas como foi apresentado no item 3.3.3. Por exemplo, no caso de uma malha unidimensional com 1024 elementos, a quantidade máxima de malhas obtidas fixando a relação entre as mesmas em 1:2 será de 10 malhas, tendo um nó interno na malha mais grosseira. No caso da relação entre as malhas ser de 1:4, a quantidade máxima de malhas será 5, tendo 3 nós internos na malha mais grosseira (tabela 3.1).



O aumento na quantidade de malhas está diretamente ligado ao aumento na velocidade de convergência na técnica *multigrid*, basta aumentar uma malha e o efeito será o aumento da velocidade de convergência.

### 3.3.6 QUANTIDADE DE ITERAÇÕES INTERNAS

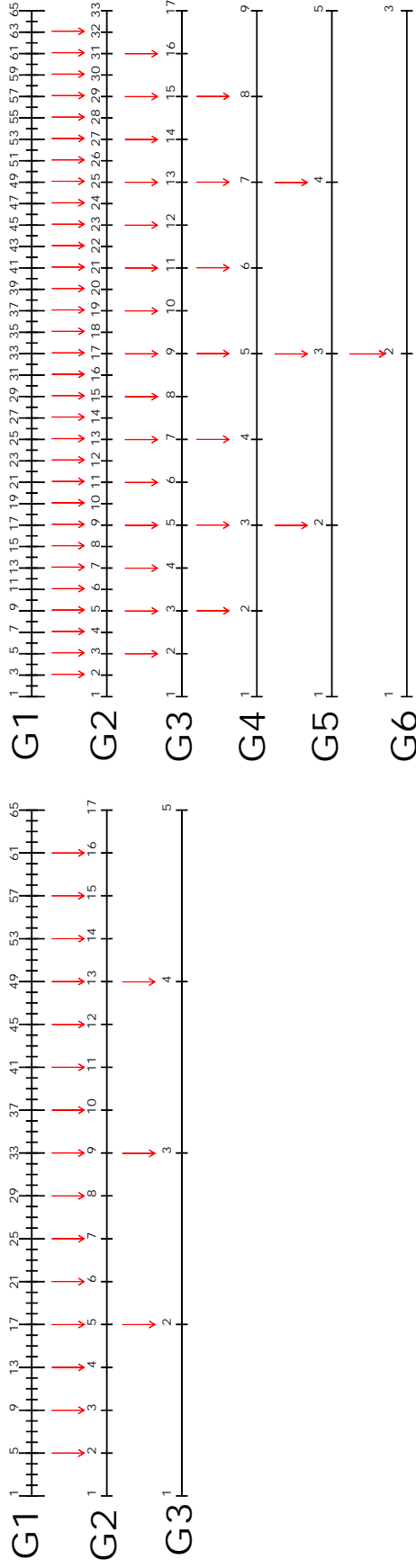
Em um algoritmo *multigrid* trabalhando com o ciclo-V, ocorrerão processos iterativos em diferentes níveis, as alterações na quantidade de iterações internas afetam o tempo de processamento, logo deve-se investigar qual será a melhor seqüência de iterações. Procura-se otimizar o algoritmo analisando quantas iterações são necessárias nas malhas mais refinadas e nas malhas mais grosseiras e aplicar valores de  $k$  diferenciados para cada equação. Em geral para aplicações utilizando a relação entre as malhas de 1:2, como os valores de  $k$  são baixos pode-se adotar um valor  $k$  para todas as equações.

A relação entre as malhas de 1:2 apresenta convergência independentemente do número de iterações internas com relação à incógnita ou com relação às correções. O mesmo não ocorre alterando a relação para 1:4. Nesta relação, dependendo do número de iterações internas adotadas nas etapas de restrição e prolongação, se estes valores estiverem abaixo de um mínimo ocorrerá divergência. Este fato se deve à diferença entre a quantidade de nós em uma malha refinada e a próxima malha mais grosseira gerada, a qual terá um quarto da quantidade de nós da anterior. Esta diferença na quantidade de nós provoca instabilidade numérica se executadas poucas iterações, pois este número baixo de iterações não é o suficiente para transportar a informação contida em uma malha para a outra.

Através da figura 3.16 apresenta-se na fase de restrição a relação entre a

quantidade de resíduos calculados e injetados entre as malhas, nas relações de 1:2 e 1:4 para uma malha original com 65 nós. Pode-se notar que na relação entre as malhas de 1:2, no segundo nível de malha (G2), a quantidade de resíduos calculados e injetados é o dobro que na relação 1:4 no mesmo nível. Passando a análise para o terceiro nível de malha (G3), nota-se que a quantidade de resíduos calculados e injetados na relação de 1:2 é cinco vezes maior do que na relação 1:4 no mesmo nível (G3).

Pode-se também afirmar com base no que foi discutido, que quando se passa de uma malha para outra com um quarto da quantidade de nós, caso da relação de 1:4, os componentes de baixa frequência na malha mais refinada se tornarão componentes de frequência muito mais altas do que se a relação entre as malhas fosse de 1:2. Isto condiz com o fato de que na relação 1:4 a taxa de convergência é muito mais alta, pois, como fora apresentado, componentes de alta frequência de erro são muito mais rápidos de serem removidos que componentes de baixa frequência.



(A)

(B)

FIGURA 3.16 COMPARAÇÃO ENTRE A INJEÇÃO DE RESÍDUOS UTILIZANDO RELAÇÃO ENTRE OS GRIDS 1 : 4 ( A ) E 1 : 2 ( B ) . AS SETAS INDICAM INJEÇÃO DE RESÍDUOS DE UM NÓ EM UMA MALHA MAIS REFINADA PARA UM NÓ NA MALHA MAIS GROSSEIRA.

### 3.3.7 ALGORITMO UTILIZANDO A TÉCNICA *MULTIGRID* COM VÁRIOS NÍVEIS DE MALHAS

Considerando o mesmo problema descrito no item 2.1, apresenta-se neste item a técnica *multigrid* utilizando vários níveis de malhas, e assim obtendo a solução aproximada para a norma máxima definida no item 3.1 com menor tempo de processamento e menor quantidade de ciclos (Procedimento adaptado do livro do Tannehill et. al., 1997).

a) Inicia-se o esquema geral para a técnica *multigrid* da mesma maneira que no esquema para dois níveis no item 3.2. Aplicam-se  $k$  iterações à equação 2.7 resolvendo-a para a incógnita  $T_i$ .

b) O resíduo,  $LT_i^k + S = R_i^1$  é calculado e armazenado em cada ponto. Este resíduo é então restrito por injeção para a próxima malha mais grosseira. O resíduo restringido é denotado por  $I_1^2 R_i^1$ , onde  $I$  é o operador de transferência, o subscrito indica o nível de origem, e o sobrescrito o nível de destino. O sobrescrito no  $R$  indica a malha na qual o resíduo foi calculado. As malhas serão numeradas a partir da mais refinada (nível 1) para a mais grosseira (nível  $m$ ). Para executar a injeção utilizam-se os mesmos modelos sugeridos no item 3.3.2.

c) Executam-se  $k$  iterações na equação  $L\Delta(T_2)_i = -I_1^2 R_i^1$  na malha nível 2, usando zero como valor inicial e mantendo o resíduo fixo em cada ponto da malha. A solução após  $k$  iterações,  $\Delta(T_2)_i^k$  representa a correção para a solução na malha mais refinada. Esta solução, tanto quanto o resíduo utilizado para obtê-la, são armazenados para uso futuro na fase de prolongação. Em ordem para transferir o problema para uma malha mais grosseira é necessário calcular um resíduo atualizado na malha nível 2. O resíduo atualizado no nível 2 é

$R_i^2 = I_1^2 R_i^1 + L\Delta(T_2)_i^k$ , onde  $\Delta(T_2)_i^k$  é a solução obtida na malha nível 2 após  $k$  iterações. O novo resíduo atualizado é então restrito para a próxima malha mais grosseira (nível 3) como  $I_2^3 R_i^2$ .

d) Executam-se  $k$  iterações na equação  $L\Delta(T_3)_i = -I_2^3 R_i^2$  na malha nível 3 utilizando zero como valor inicial. A solução após  $k$  iterações pode ser entendida como uma correção para a correção obtida na malha nível 2. Esta solução e o resíduo usado para obtê-la são armazenados para serem utilizados na fase de prolongação. A transferência do problema para malhas mais grosseiras, iterações utilizando Gauss-Seidel, e a criação de novas correções continua seguindo a atualização de resíduos e etapa de restrição descrita acima até a última malha mais grosseira gerada. A malha mais grosseira pode consistir de um ponto interior.

e) A partir deste ponto iniciá-se a fase de retorno ou prolongação. As correções obtidas na malha mais grosseira são então prolongadas para a próxima malha com mais pontos, malha mais refinada, seguindo as orientações apresentadas no esquema para 2 níveis de malhas (item 3.2).

Assumindo que a malha mais grosseira seja a malha no nível 4 ou malha 4, as correções calculadas e atualizadas na malha 4 são denotadas por  $\Delta(T_4)_i^k$  e sua interpolação ou prolongação para o próximo nível malha 3, por  $I_4^3 \Delta(T_4)_i^k$ . Inicia-se agora o processo de retorno para a malha mais refinada também definido como fase de prolongação.

As correções interpoladas para nível 3 nesta fase de prolongação são adicionadas às correções calculadas no nível 3 na fase de restrição ou seja,  $I_4^3 \Delta(T_4)_i^k + \Delta(T_3)_i^k$ . A soma das correções é usada como aproximação inicial para que se continue a resolver o problema agora na fase de prolongação. Armazena-se o resultado desta soma na matriz  $\Delta S(T_3)_i$  e resolve-se a equação  $L\Delta(T_3)_i = -I_2^3 R_i^2$

para a correção aplicando-se Gauss-Seidel com  $k$  iterações, e utilizando como aproximação inicial os valores armazenados em  $\Delta S(T_3)_i$ .

f) As novas correções obtidas no nível 3 são interpoladas para a próxima malha no nível 2. Estas correções interpoladas são adicionadas aos valores das correções calculadas na malha 2 na fase de restrição,  $I_3^2 \Delta S(T_3)_i^k + \Delta(T_2)_i^k$ . Armazena-se o resultado desta soma na matriz  $\Delta S(T_2)_i$  e resolve-se a equação  $L \Delta S(T_2)_i = -I_1^2 R_i^1$  para a correção aplicando Gauss-Seidel com  $k$  iterações, e utilizando como aproximação inicial os valores armazenados em  $\Delta S(T_2)_i$ . Nota-se que nenhum novo resíduo é calculado na fase de prolongação, a solução está sendo aperfeiçoada devido às novas seqüências de iterações utilizando aproximações iniciais aperfeiçoadas.

g) As correções obtidas na malha 2 na fase de prolongação são interpoladas para a malha 1, que é a mais refinada, e adicionadas a última solução obtida na malha 1 ou seja:

$$I_2^1 \Delta(T_2)_i^k + T_i^k.$$

Na solução corrigida anteriormente aplica-se Gauss-Seidel com  $k$  iterações a menos que a convergência tenha sido detectada antes das  $k$  iterações. Se a convergência não ocorrer após as iterações, novos resíduos são calculados e um novo ciclo é iniciado com o cálculo e armazenamento de novos resíduos.

Exemplificar-se-á o procedimento acima apresentando um algoritmo para 4 níveis de malhas:

- 1)  $T_i^k$
- 2)  $LT_i^k + S = R_i^1$
- 3)  $I_1^2 R_i^1$
- 4)  $L\Delta(T_2)_i = -I_1^2 R_i^1$
- 5)  $R_i^2 = I_1^2 R_i^1 + L\Delta(T_2)_i^k$
- 6)  $I_2^3 R_i^2$
- 7)  $L\Delta(T_3)_i = -I_2^3 R_i^2$
- 8)  $R_i^3 = I_2^3 R_i^2 + L\Delta(T_3)_i^k$
- 9)  $I_3^4 R_i^3$
- 10)  $L\Delta(T_4)_i = -I_3^4 R_i^3$
- 11)  $I_4^3 \Delta(T_4)_i^k$  (Início da fase de prolongação)
- 12)  $\Delta S(T_3)_i = I_4^3 \Delta(T_4)_i^k + \Delta(T_3)_i^k$
- 13)  $L\Delta S(T_3)_i = -I_2^3 R_i^2$
- 14)  $I_3^2 \Delta S(T_3)_i^k$
- 15)  $\Delta S(T_2)_i = I_3^2 \Delta S(T_3)_i^k + \Delta(T_2)_i^k$
- 16)  $L\Delta S(T_2)_i = -I_1^2 R_i^1$
- 17)  $I_2^1 \Delta S(T_2)_i^k$
- 18)  $T_i = I_2^1 \Delta S(T_2)_i^k + T_i^k$

19) Repete-se a etapa 1, verifica-se o critério de convergência caso não seja atendido inicia-se mais um ciclo e assim sucessivamente até atender o critério de convergência.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

No capítulo três foram apresentados quatro temas que muito afetam o tempo de processamento nas aplicações envolvendo a técnica *multigrid*: Aumento da quantidade de malhas na resolução de um problema, operadores de restrição e prolongação, relação entre as malhas, e quantidade de iterações internas. Estes quatro temas são fundamentais para a otimização de algoritmos *multigrid*. Neste capítulo são apresentados os resultados dos testes elaborados dentro destes temas. Todos os testes foram elaborados no laboratório de experimentação numérica LENA II na Universidade Federal do Paraná, o equipamento utilizado é um Pentium 4 com 2,4 GHz e 1GB de memória RAM.

O presente trabalho abordou apenas problemas lineares unidimensionais para os quais existe, entre outros métodos, o método conhecido por TDMA (*Tridiagonal matrix algorithm*), o qual resolve o sistema de equações discretizadas de forma exata, porém, para problemas não-lineares unidimensionais e multidimensionais, a técnica *multigrid* é uma alternativa moderna, abrangente, e eficaz.

### 4.1 APLICAÇÃO DA TÉCNICA MULTIGRID UTILIZANDO DOIS NÍVEIS DE MALHAS

#### 4.1.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Foi aplicada a técnica *multigrid* ao problema de condução de calor em regime permanente unidimensional com geração de calor descrito pela equação 2.1 no item 2.1, com condições de contorno do tipo Dirichlet como mostra a figura 4.1. A técnica *multigrid* foi empregada utilizando dois níveis de malhas e relação de 1:2



entre elas, ou seja, a malha 1 terá N-1 elementos e cada elemento terá dimensão  $h = L / (N-1)$ , a malha 2 terá  $(N-1)/2$  elementos com dimensão  $h = 2L/(N-1)$ .

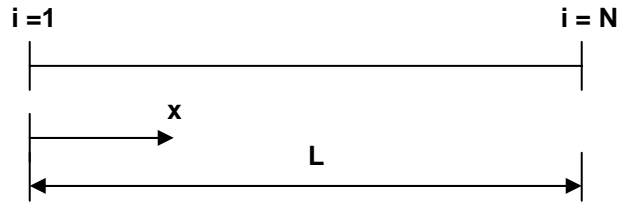


FIGURA 4.1 MALHA UNIDIMENSIONAL

Condições de contorno tipo Dirichlet:

$$T(x=0) = T_0$$

$$T(x=L) = T_L$$

Onde,

$T_0$  - Temperatura no contorno esquerdo ( $^{\circ}\text{C}$ );

$T_L$  - Temperatura no contorno direito( $^{\circ}\text{C}$ );

N - Quantidade de nós na malha original;

L - Comprimento da malha unidimensional (metros, m);

Q - Taxa de geração de energia por unidade de volume do meio ( $\text{W}/\text{m}^3$ );

C – Condutividade térmica do material ( $\text{W}/\text{m} \cdot ^{\circ}\text{C}$ ).

Solução analítica do problema de difusão de calor unidimensional com geração de calor:

$$T(x) = -\frac{Q}{2C}x^2 + \frac{QL}{2C}x + \frac{(T_L - T_0)}{L}x + T_0$$

#### 4.1.2 ANÁLISE DA CONVERGÊNCIA

Foram elaborados testes com a aplicação da técnica *multigrid* utilizando dois níveis de malhas na resolução do problema de difusão de calor unidimensional descrito no item 4.1.1. Foi estabelecido o teste de precisão pela verificação da norma máxima, definida pela equação 3.3 no item 3.1. A figura 4.2 apresenta as curvas do erro versus o tempo de processamento em segundos. O teste foi realizado com a quantidade de 1025 nós, relação entre as malhas de 1:2, quantidade de iterações internas  $k=4$  para todas as equações, com aproximação inicial para as temperaturas nos nós iguais à 20°C, e com os seguintes dados:

- $L=0.1\text{m}$
- $T_0 = 20\text{ }^\circ\text{C}$
- $T_L = 30\text{ }^\circ\text{C}$
- $C = 401\text{ W/m}\cdot^\circ\text{C}$  (Cobre)
- $Q = 5 \times 10^6\text{ W/m}^3$
- $S = Q/C$  (Termo fonte)
- $\|e\|_\infty = 10^{-5}$

Verificou-se que aumento na velocidade de convergência utilizando a técnica *multigrid* com dois níveis de malhas como apresentado na figura 4.2, é da ordem de duas vezes a velocidade de convergência do método Gauss-Seidel puro.

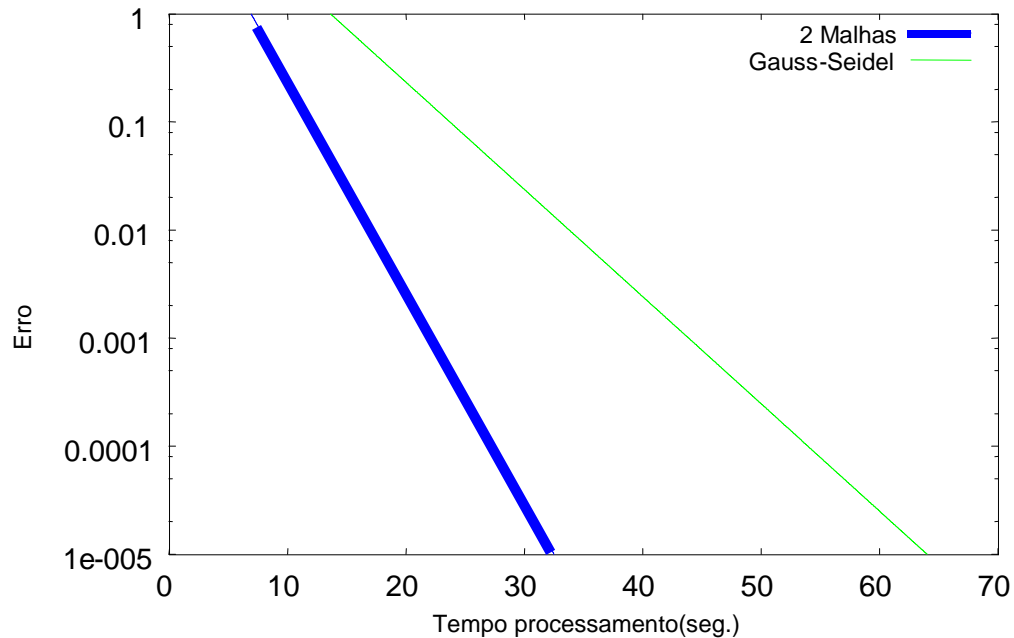


FIGURA 4.2 GRÁFICO COM COMPARAÇÃO ENTRE GAUSS-SEIDEL E *MULTIGRID* COM DOIS NÍVEIS DE MALHAS, COM 1025 NÓS (RELAÇÃO ENTRE AS MALHAS EM 1:2)

## 4.2 APLICAÇÃO DA TÉCNICA *MULTIGRID* UTILIZANDO VÁRIOS NÍVEIS DE MALHAS

### 4.2.1 AUMENTO DA QUANTIDADE DE MALHAS

Uma das características fundamentais do método *multigrid* é o de reduzir o número de ciclos e o tempo de processamento na resolução de uma equação diferencial ou conjunto de equações diferenciais com o aumento da quantidade de malhas. Como há um limite no número de malhas geradas, conseqüentemente há um limite mínimo de ciclos necessários para obtenção da solução aproximada que atenda a uma norma especificada. Fixando todos os parâmetros, pode-se afirmar que o aumento da quantidade de malhas utilizadas na resolução de um determinado problema, cuja precisão da solução aproximada é definida por uma norma especificada, implica na redução do número de ciclos e do tempo de processamento.

A figura 4.3 mostra o aumento da quantidade de malhas e o efeito sobre o

tempo de processamento e o erro. Para a relação entre as malhas de 1:2, em geral o acréscimo de uma malha na resolução do problema, implica em um aumento da velocidade de convergência da ordem de 4 vezes. Fixando a relação entre as malhas em 1:4, o aumento em uma malha implicará no aumento da velocidade de convergência na ordem de até 16 vezes como ilustrado na figura 4.4.

As tabelas 4.1 e 4.2 apresentam o aumento na quantidade de malhas e o efeito sobre o tempo de processamento e a quantidade de ciclos, para as relações entre as malhas de 1:4 e 1:2 respectivamente. Os testes foram elaborados seguindo o procedimento do item 3.3.7 com os dados do item 4.1.2, com a quantidade de iterações internas  $k=4$  para a relação de 1:2 e  $k=20$  para a relação de 1:4.

Utilizando a quantidade máxima de malhas, independente da quantidade de nós na malha mais fina, sempre resultará a mesma quantidade de ciclos necessários para se atingir a precisão exigida pela norma especificada no problema. No caso da resolução da equação de Poisson unidimensional (Equação 2.1), com os parâmetros apresentados no item 4.1.2, teremos sempre 7 ciclos independente da quantidade de nós na malha mais refinada como mostra a tabela 4.2.

Nº NOS		Gauss	3G	4G	5G	6G	7G	8G	9G
1025	Nº ciclos	389208	269	17	3				
	Tempo (seg.)	66,032	0,219	0,016	0				
2049	Nº ciclos	1555305	1076	67	5	3			
	Tempo (seg.)	528,015	1,719	0,125	0,016	0			
4097	Nº ciclos	6215277	4302	268	17	3			
	Tempo (seg.)	4223,44	14,016	1,047	0,078	0,016			
8193	Nº ciclos	24861114	17206	1072	67	5	3		
	Tempo (seg.)	33782,64	126,922	9,625	0,609	0,047	0,031		
16385	Nº ciclos			4287	268	17	3		
	Tempo (seg.)			79,687	5,484	0,391	0,078		
32769	Nº ciclos			17148	1072	67	5	4	
	Tempo (seg.)			682,125	66,609	4,797	0,438	0,765	
655367	Nº ciclos				4291	269	17	4	
	Tempo (seg.)				559,75	38,922	2,907	0,765	
131073	Nº ciclos				17554	1098	69	5	4
	Tempo (seg.)				5341,891	340,031	23,468	1,969	1,703

TABELA 4.1 MULTIGRID APLICADA À EQUAÇÃO DE POISSON (RELAÇÃO DE 1:4 ENTRE AS MALHAS)

nós		Gauss	2G	3G	4G	5G	6G	7G	8G	9G	10G	11G	12G	13G	14G	15G	16G
<b>129</b>	ciclos	6167	1215	244	59	15	7										
	(seg.)	0,125	0,062	0,016	0	0	0										
<b>257</b>	ciclos	24281	4857	972	232	58	15	7									
	(seg.)	1,031	0,516	0,094	0,031	0	0	0									
<b>513</b>	ciclos	97497	19425	3886	926	229	58	15	7								
	(seg.)	8,312	4,062	0,812	0,218	0,063	0,016	0	0								
<b>1025</b>	ciclos	389208	77893	15540	3701	915	229	58	15	7							
	(seg.)	66,032	32,313	6,484	1,938	0,485	0,125	0,047	0	0							
<b>2049</b>	ciclos	1555305	310759	62154	14800	3658	913	229	58	15	7						
	(seg.)	528,015	279,937	51,891	15,797	3,844	1	0,281	0,078	0,016	0,016						
<b>4097</b>	ciclos	6215277		248607	59195	14626	3647	912	229	58	15	7					
	(seg.)	4223,44		430,281	148,063	47,547	15,422	4,375	1,297	0,281	0,094	0,046					
<b>8193</b>	ciclos	2,5E+07			236769	58498	14583	3644	912	229	58	15	7				
	(seg.)	33782,6			1712,5	504,421	161,422	49,328	14,735	3,531	1,047	0,297	0,141				
<b>16385</b>	ciclos							14573	3644	912	229	58	15	7			
	(seg.)							588,203	169,297	36,25	9,856	2,641	0,719	0,375			
<b>32769</b>	ciclos									3644	912	229	58	15	7		
	(seg.)									317,984	89,921	23,937	6,171	1,812	0,875		
<b>65537</b>	ciclos									14578	3646	912	229	58	15	7	
	(seg.)									2740,31	716,688	186,657	50,084	12,891	3,485	1,765	
<b>131073</b>	ciclos									14782	3696	925	232	58	16	7	
	(seg.)									5771,75	1491,47	391,313	108,797	27,281	7,844	3,75	

TABELA 4.2 TÉCNICA *MULTIGRID* APLICADA A RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE POISSON UNIDIMENSIONAL (RELAÇÃO ENTRE OS GRIDS DE 1:2).

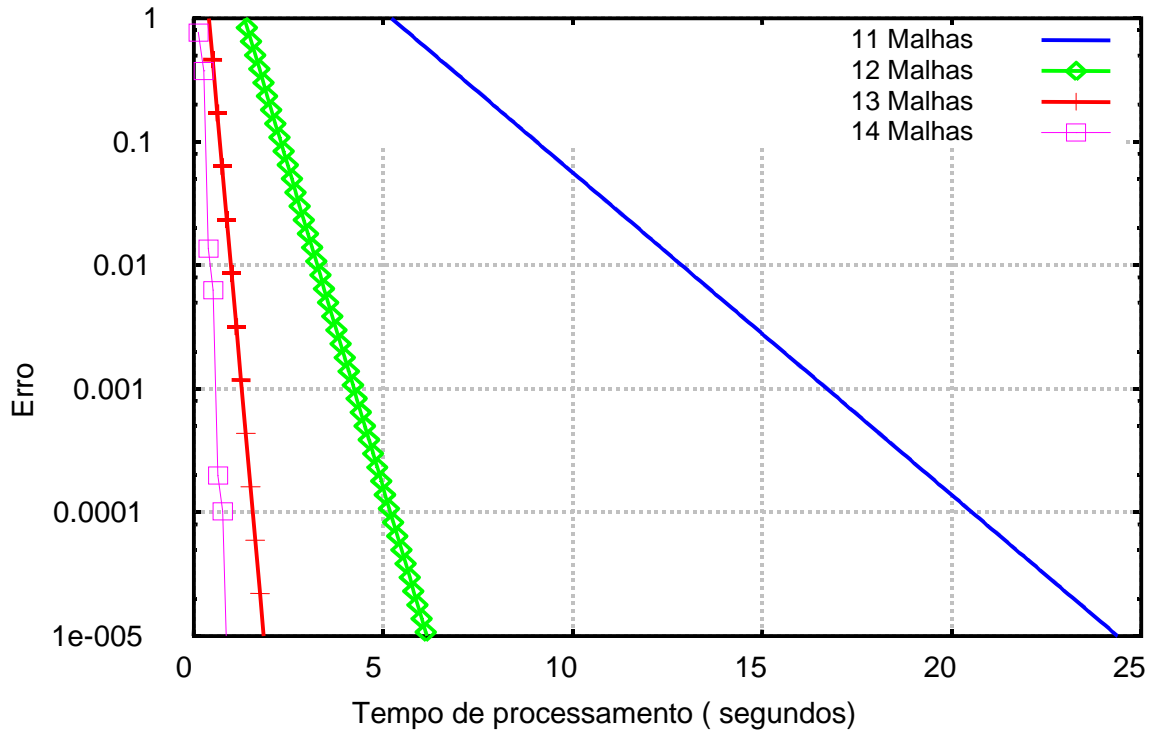


FIGURA 4.3 GRÁFICO COM O AUMENTO DA QUANTIDADE DE MALHAS, COM 32769 NÓS (RELAÇÃO ENTRE AS MALHAS 1:2) .

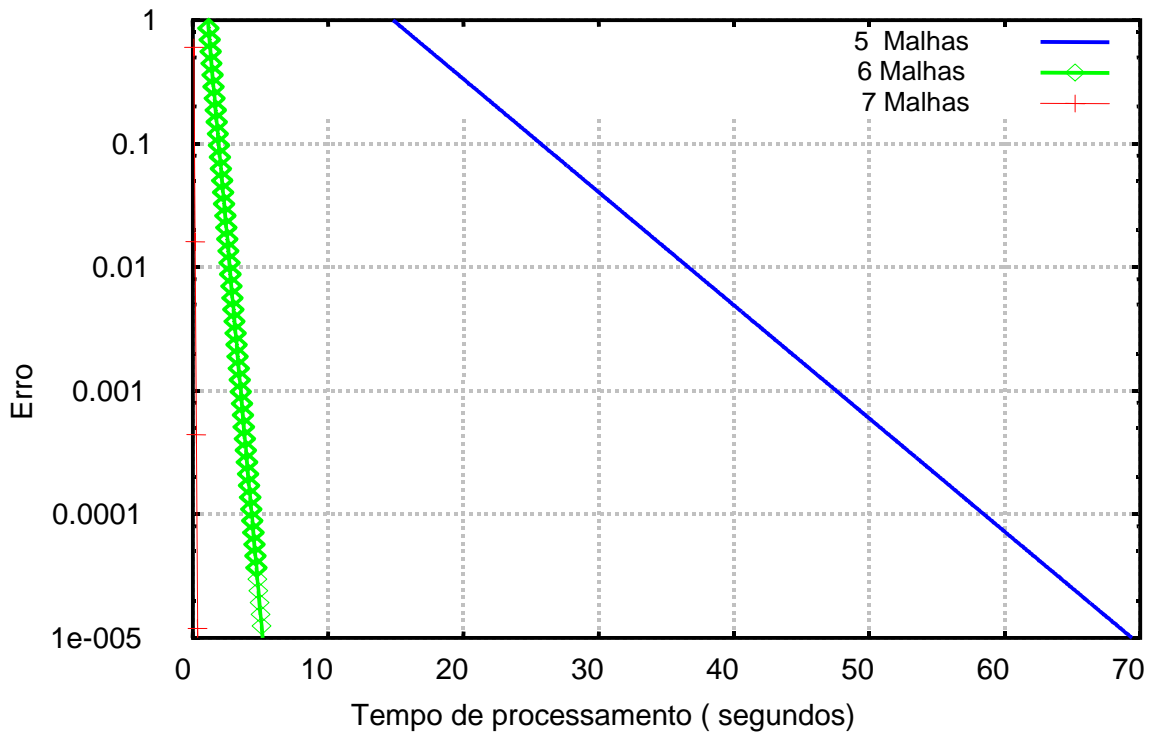


FIGURA 4.4 GRÁFICO COM O AUMENTO DA QUANTIDADE DE MALHAS, COM 32769 NÓS (RELAÇÃO ENTRE AS MALHAS 1:4).

Observam-se relações entre a quantidade de malhas, o número de elementos na malha mais refinada e a quantidade de ciclos, desde que não se esteja trabalhando com dimensões dos elementos muito pequenas ( $< +10^{-7}$ ) o que provoca oscilações na convergência devido a erros de arredondamento através de operações envolvendo valores com ordens de grandeza muito diferentes.

Trabalhando-se com  $m$  malhas e com relação 1:2, tem-se que a quantidade de ciclos obtidos para uma dada quantidade de nós  $N$  na malha mais refinada, é aproximadamente a quantidade de ciclos obtida trabalhando-se com  $m+1$  malhas e com o dobro do número de elementos. A tabela 4.3 ilustra estas relações para o caso da resolução da equação 2.1. Variando-se as quantidades de malhas de 5G (que significa 5 *grids*) à 14G, e a quantidade de nós nas linhas de 129 à 65537 nós. A intersecção da linha e da coluna fornece a quantidade de ciclos necessários para se atingir a norma máxima especificada de  $10^{-5}$  definida pela equação 3.3.

No caso em que a relação entre as malhas é de 1:4, nota-se que trabalhando com  $m$  malhas, a quantidade de ciclos obtidos para uma quantidade de nós  $N$ , é próxima da quantidade de ciclos obtidos trabalhando com  $m+1$  malhas e com o quádruplo da quantidade de nós.

A característica mais importante da técnica *multigrid* é a de que se for empregada a máxima quantidade de malhas possíveis de serem geradas, o número de ciclos necessários para se atingir uma norma específica será sempre o mesmo independente do número de nós na malha mais refinada. A tabela 4.3 exemplifica a situação onde para qualquer quantidade de nós na malha mais refinada, se utilizar sempre a quantidade máxima de malhas possíveis de serem geradas, o resultado será 7 ciclos necessários para verificação da norma especificada.

nós		5G	6G	7G	8G	9G	10G	11G	12G	13G	14G
129	ciclos	15	7								
257	ciclos	58	15	7							
513	ciclos	229	58	15	7						
1025	ciclos	915	229	58	15	7					
2049	ciclos	3658	913	229	58	15	7				
4097	ciclos		3647	912	229	58	15	7			
8193	ciclos			3644	912	229	58	15	7		
16385	ciclos				3644	912	229	58	15	7	
32769	ciclos					3644	912	229	58	15	7
65537	ciclos						3646	912	229	58	15

TABELA 4.3 APRESENTAÇÃO DAS RELAÇÕES ENTRE O NÚMERO DE MALHAS EM TERMOS DO NÚMERO DE CICLOS E A QUANTIDADE DE NÓS NA MALHA MAIS REFINADA.

A equação 2.1 sem o termo de geração de calor é conhecida como a equação de Laplace unidimensional,

$$\frac{dT^2}{dx^2} = 0 \quad (4.1)$$

Na resolução da equação 4.1 seguindo o procedimento apresentado no item 3.3.7 sem o termo de geração de calor, fixando a relação entre as malhas em 1:2, com a quantidade de iterações internas  $k=4$  para todas as equações, iniciando as temperaturas nos nós com o valor  $0.5^\circ\text{C}$ , e utilizando os seguintes dados:

- $L=1\text{m}$
- $T_0 = 0^\circ\text{C}$
- $T_L = 1^\circ\text{C}$
- $\|e\|_\infty = 10^{-5}$

Observa-se a quantidade de 4 ciclos necessários para se atingir a norma independente do número de nós na malha mais refinada. Alterando a relação entre as malhas para 1:4, e a quantidade de iterações internas para  $k=20$  para todas as



equações, obtém-se 3 ciclos necessários a verificação da norma como mostram as tabelas 4.4 e 4.5. As tabelas apresentam o aumento da quantidade de malhas e o efeito sobre o tempo de processamento e a quantidade de ciclos necessários à verificação da norma.

Nº NOS		9G	10G	11G	12G	13G	14G	15G	16G
1025	Nº ciclos	6	5						
	Tempo (seg.)	0	0						
2049	Nº ciclos	10	5						
	Tempo (seg.)	0,016	0,016						
4097	Nº ciclos	35	10	5					
	Tempo (seg.)	0,172	0,063	0,032					
8193	Nº ciclos	128	35	10	5				
	Tempo (seg.)	1,829	0,61	0,188	0,109				
16385	Nº ciclos	469	128	35	10	5			
	Tempo (seg.)	17,625	5,531	1,593	0,5	0,266			
32769	Nº ciclos	1704	469	128	35	10	5		
	Tempo (seg.)	145,734	43,812	12,797	3,718	1,14	0,594		
65537	Nº ciclos	6130	1703	468	128	35	10	5	
	Tempo (seg.)	1065,265	321,61	93,64	26,032	7,735	2,313	1,219	
131073	Nº ciclos		6129	1703	468	128	35	10	5
	Tempo (seg.)		2230,062	654,437	189,375	55,094	15,689	4,828	2,562

TABELA 4.4 TÉCNICA *MULTIGRID* APLICADA À RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE (RELAÇÃO ENTRE AS MALHAS 1: 2)

Nº NOS		3G	4G	5G	6G	7G	8G
1025	Nº ciclos	141	11	3			
	Tempo (seg.)	0,078	0	0			
2049	Nº ciclos	515	38	3			
	Tempo (seg.)	0,672	0,063	0,016			
4097	Nº ciclos	1858	141	10	3		
	Tempo (seg.)	4,797	0,438	0,031	0,016		
8193	Nº ciclos	6622	512	38	3		
	Tempo (seg.)	40,734	3,921	0,313	0,031		
16385	Nº ciclos		1849	140	10	3	
	Tempo (seg.)		29,062	2,469	0,204	0,078	
32769	Nº ciclos		6593	512	38	3	
	Tempo (seg.)		228,782	29,141	2,468	0,25	
655367	Nº ciclos			1849	140	10	3
	Tempo (seg.)			227,797	19,093	1,641	0,578
131073	Nº ciclos			6592	512	38	3
	Tempo (seg.)			1752,282	153,265	12,828	1,188

TABELA 4.5 TÉCNICA *MULTIGRID* APLICADA A RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE (RELAÇÃO ENTRE AS MALHAS 1: 4)

#### 4.2.2 RELAÇÃO ENTRE AS MALHAS 1:2 E 1:4

A investigação de um determinado problema deverá conduzir ao desenvolvimento de um algoritmo ideal composto de modelos para restrição e prolongação, número de iterações internas tanto para a incógnita como para resíduos e correções, onde em cada etapa deve-se minimizar o esforço computacional. O conjunto de parâmetros que serão adotados dependerá em primeiro lugar da relação entre as malhas.

No artigo publicado por Brandt (1977) são apresentados testes comparativos com relações entre as malhas de 1:2, 1:3 e 2:3. Através destes testes Brandt conclui que a relação de 1:2 é próxima da ótima. Segundo Brandt a relação 1:2 é mais conveniente e econômica nos processos de interpolação do que outras relações. Os testes realizados no presente trabalho demonstram, dentro do campo de parâmetros adotados e do espaço unidimensional, divergências com as afirmações de Brandt. Os testes com relações entre as malhas de 1:2 e 1:4 mostraram que o tempo de processamento com a relação de 1:4 é menor e a quantidade de matrizes é muito menor, pois o número de malhas e a quantidade de nós em cada malha são muitos menores.

A confrontação dos dois algoritmos mostra que a relação de 1:4 verifica a norma especificada com a metade do tempo de processamento que na relação de 1:2 quando aplicados a problemas lineares unidimensionais. Portanto, é preferível utilizar a relação entre as malhas de 1:4 com as vantagens da menor quantidade de matrizes e menor tempo de processamento. A tabela 4.6 apresenta para as relações de 1:2 e 1:4, utilizando a quantidade máxima de malhas possíveis de serem geradas a partir das malhas originais (mais refinadas), o tempo de processamento para as quantidades de nós de 1025 à 131072 nós. Os dados desta tabela foram extraídos das tabelas 4.4 e 4.5. A figura 4.5 apresenta a comparação entre a relação entre as

malhas de 1:2 e 1:4 em um teste com 131072 nós. O teste foi realizado seguindo os dados do item 4.1.2.

	Nº NÓS	1025	2049	4097	8193	16385	32769	65537	131073
1:2	Tempo (seg)	0	0,016	0,032	0,109	0,266	0,594	1,219	2,562
1:4	Tempo (seg)	0	0,016	0,016	0,031	0,078	0,25	0,578	1,188

TABELA 4.6 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE UTILIZANDO RELAÇÃO ENTRE AS MALHAS DE 1:2 E 1:4.

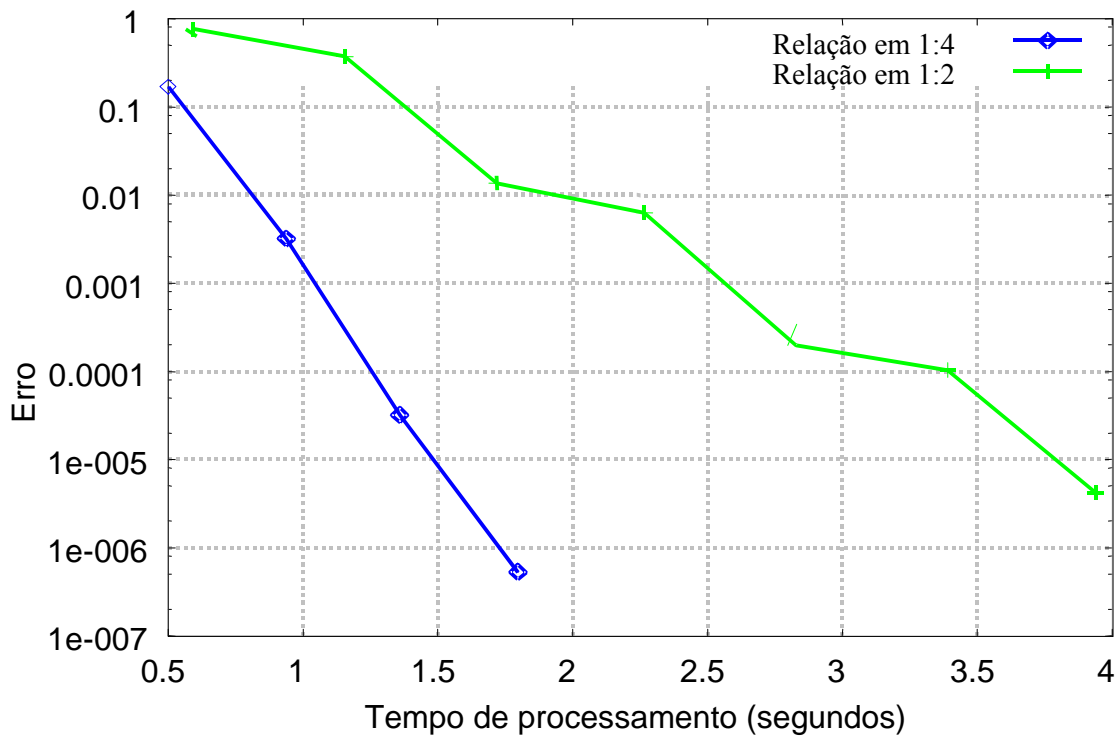


FIGURA 4.5 GRÁFICO COM COMPARAÇÃO ENTRE A RELAÇÃO 1:2 E 1:4, EM UMA MALHA FINA DE 131072 NÓS. NA RELAÇÃO 1:4 FORAM UTILIZADAS 9 MALHAS COM  $K=20$ . NA RELAÇÃO DE 1:2 FORAM UTILIZADAS 16 MALHAS COM  $K=4$ .

#### 4.2.3 QUANTIDADE DE ITERAÇÕES INTERNAS

Em um algoritmo resolvendo a equação 2.1 através da técnica *multigrid*, a quantidade de equações onde se aplica o método iterativo Gauss-Seidel depende da

quantidade de malhas utilizadas na resolução do problema. Na resolução das equações de Laplace e Poisson unidimensional seguindo o procedimento 3.3.7, para  $m$  malhas usadas na resolução há  $2m-1$  equações resolvidas através de processo iterativo. Na primeira equação são aplicadas  $k$  iterações resolvendo a equação 2.7 com relação a incógnita  $T_i^k$ . Esta seqüência de iterações esta fora do ciclo-V. Há mais  $2m-2$  equações dentro do ciclo-V, onde ocorrem aplicações de processo iterativo com  $k$  iterações. Estas iterações denominam-se de iterações internas.

A alteração na quantidade de iterações internas está diretamente ligada à quantidade de iterações externas ou ciclos necessários para se alcançar uma norma específica. Aumentando-se a quantidade de iterações internas, a quantidade de ciclos necessários para se atingir uma norma específica será menor, porém, o tempo de processamento poderá ser maior ou menor. Logo, faz-se necessário investigar na resolução de cada problema qual é a quantidade ótima de iterações internas em cada equação.

Neste trabalho, investigou-se a alteração na quantidade de iterações internas nas  $2m-1$  equações onde ocorrem processos iterativos. O resultado é que, em geral, pode-se chegar a um valor próximo do ótimo e aplicá-lo em todas as equações, tanto no caso da relação entre as malhas 1:2 como 1:4. As figuras 4.6 e 4.7 apresentam alterações nas quantidades de iterações internas para relação entre as malhas de 1:2 e 1:4 respectivamente.

A figura 4.6 apresenta a aplicação dos valores de 2, 4, 16 e 32 quantidades de iterações internas ( $k$ ) nas equações onde ocorrem processos iterativos dentro de um algoritmo *multigrid* utilizando relação entre as malhas de 1:2.

Foram elaborados vários testes com  $k$  diferenciado para as várias equações que utilizam processo iterativo. A figura 4.6 apresenta um destes testes representado pela curva ‘regra1’, onde foram aplicadas 30 iterações na primeira equação do algoritmo para a incógnita  $T_i^k$ . Na fase de restrição foram aplicadas 30 iterações na

segunda equação do algoritmo, a partir da terceira equação do algoritmo foram aplicadas 30 iterações nas malhas mais refinadas e 10 nas malhas mais grosseiras. Na primeira equação da fase de prolongação foram aplicadas 10 iterações, nas equações restantes da fase de prolongação foram aplicadas 10 iterações nas malhas mais grosseiras e 30 nas malhas mais refinadas, e na última equação com relação a incógnita  $T_i^k$ , novamente foram aplicados 30 iterações.

A figura 4.7 foi elaborada utilizando relação entre as malhas de 1:4. Problemas resolvidos utilizando esta relação são muito mais sensíveis a alterações nas quantidades de iterações internas, pois dependendo da quantidade de iterações adotada a técnica *multigrid* diverge rapidamente. Na figura 4.7 para  $k$  igual a 10, a curva apresenta a divergência da solução aproximada. A quantidade de iterações necessárias para se atingir rapidamente a norma especificada, que é a norma máxima igual a  $10^{-5}$ , é muito maior nesta relação de 1:4 que na relação de 1:2. As figuras 4.6 e 4.7 foram elaboradas com os mesmos dados apresentados no item 4.1.2 e com o procedimento apresentado no item 3.3.7 para uma malha de 65537 nós.

As tabelas 4.7 e 4.8 apresentam os resultados dos testes com a alteração das quantidades de iterações internas. Os testes foram elaborados para 32769 nós, 65537 nós e 131073 nós seguindo o procedimento do item 3.3.7, com os dados do item 4.1.2. Os resultados mostram que quando se utiliza a relação de 1:2 pode-se adotar um valor para  $k$  próximo de 4. A escolha adequada de quantidades de iterações diferentes em cada equação pode melhorar a convergência como apresentada na tabela 4.7 na coluna ‘Regra 1’.

A tabela 4.8 apresenta para a relação de 1:4, dentro de um campo especificado de tamanhos de malhas, o melhor valor para  $k$  que é 30.

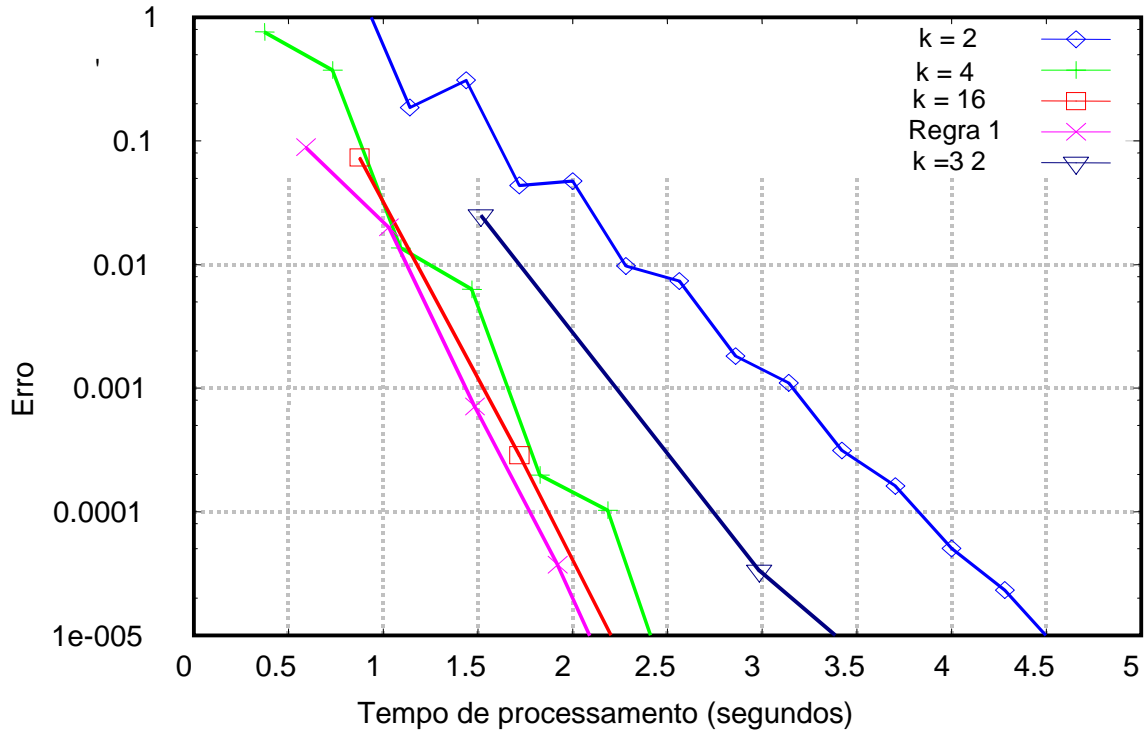


FIGURA 4.6 GRÁFICO COM A ALTERAÇÃO DO NÚMERO DE ITERAÇÕES INTERNAS, COM 65537 NÓS (RELAÇÃO ENTRE AS MALHAS 1:2).

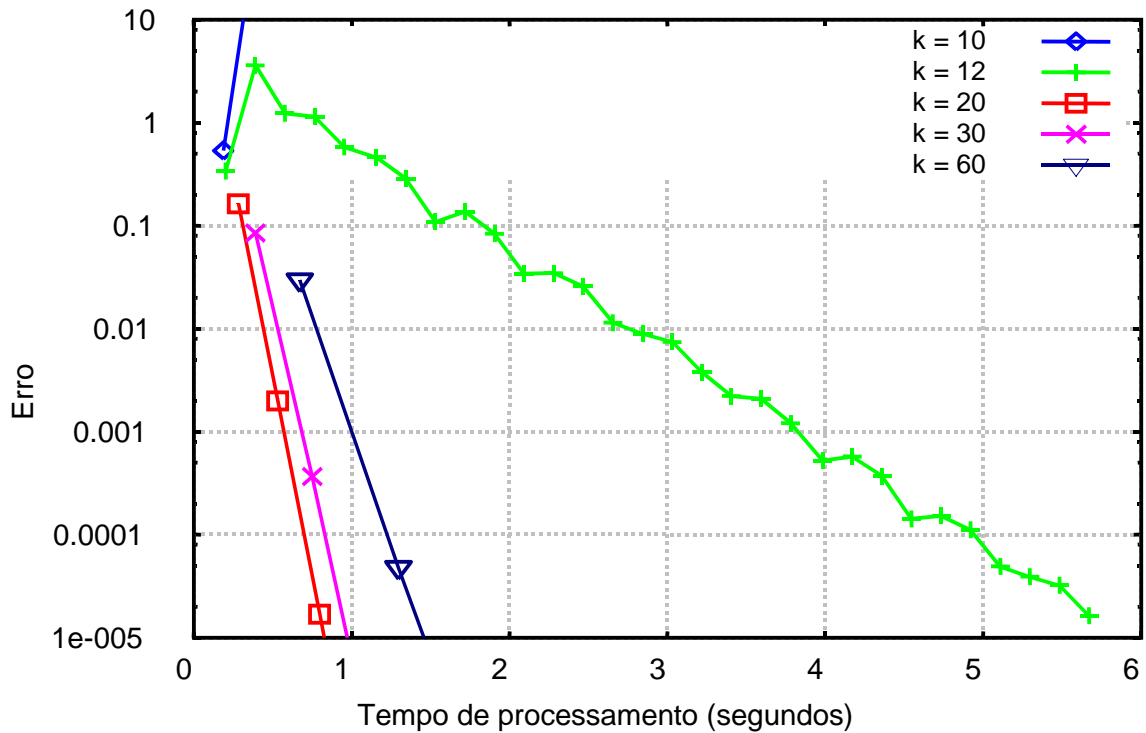


FIGURA 4.7 GRÁFICO COM A ALTERAÇÃO DO NÚMERO DE ITERAÇÕES INTERNAS, COM 65537 NÓS (RELAÇÃO ENTRE AS MALHAS 1:4).

Nº NÓS	N.de iterações=>	2	4	16	32	Regra1
32769	Nº ciclos	16	7	3	3	5
	Tempo (seg.)	2,282	1,265	1,203	2,234	1,172
65537	Nº ciclos	16	7	3	3	5
	Tempo (seg.)	4,563	2,547	2,578	4,469	2,375
131073	Nº ciclos	16	7	3	3	5
	Tempo (seg.)	9,5	5,328	5,312	9,469	4,844

TABELA 4.7 QUANTIDADE DE ITERAÇÕES INTERNAS APLICADAS NAS FASES DE RESTRIÇÃO E PROLONGAÇÃO (RELAÇÃO ENTRE AS MALHAS DE 1:2)

Nº NÓS	N.de iterações	10	12	20	30	60
32769	Nº ciclos	DIVERGE	16	5	3	3
	tempo (seg)		1,297	5,62	0,453	0,796
65537	Nº ciclos	DIVERGE	30	4	3	3
	tempo (seg)		5,671	1,047	1,109	1,906
131073	Nº ciclos	DIVERGE	30	5	3	3
	tempo (seg)		12,016	2,765	2,313	4,141

TABELA 4.8 QUANTIDADE DE ITERAÇÕES INTERNAS APLICADAS NAS FASES DE RESTRIÇÃO E PROLONGAÇÃO (RELAÇÃO ENTRE AS MALHAS DE 1:4)

#### 4.2.4 PRECISÃO

O nível de precisão que se pode alcançar a partir de um certo nível de refino, depende da quantidade de elementos na malha mais refinada ou mais especificamente da dimensão do elemento na malha mais refinada. Os testes realizados trabalhando com matrizes com seus elementos definidos como real(8) ou seja, números negativos entre  $-1.797693134862316 \times 10^{+308}$  e  $-2.225073858507201 \times 10^{-308}$ , positivos entre  $+2.225073858507201 \times 10^{-308}$  e  $+1.797693134862316 \times 10^{+308}$ , apresentaram o limite de precisão de  $+10^{-5}$  para malhas com dx (dimensão do elemento) em torno de  $+10^{-7}$  e precisão de

aproximadamente  $+10^{-4}$  para malhas com dx em torno de  $+10^{-8}$ .

Para o mesmo problema e dados propostos no item 4.1.2, trabalhando com relação entre as malhas de 1:2, verificaram-se relações entre a quantidade de elementos na malha mais fina e a precisão máxima alcançada de acordo com a tabela 4.9. Quanto maior a quantidade de elementos na malha mais refinada menor a precisão alcançada.

Elementos	Dimensão do elemento	Campo de oscilação	
16384	6,10352E-06	2,0E10-8	3,0E10-8
32768	3,05176E-06	1,0E10-7	9,0E10-8
65536	1,52588E-06	6,0E10-7	7,0E10-7
131072	7,62939E-07	2,3E10-6	2,5E10-6
262144	3,8147E-07	1,0E10-5	9,0E10-6
524288	1,90735E-07	3,8E10-5	4,0E10-5

TABELA 4.9 RELAÇÃO ENTRE A QUANTIDADE DE ELEMENTOS EM UMA MALHA E A PRECISÃO OBTIDA. TESTE REALIZADO COM RELAÇÃO 1:2.

A técnica *multigrid* como foi exposta anteriormente no capítulo três e nos itens 4.1.2 e 4.2.1 opera com correções e resíduos os quais atingem no decorrer da marcha de cálculo, a ordem de grandeza da precisão que se pretende alcançar. Porém, nestas operações aparece um termo que é a dimensão do elemento elevada à segunda potência. Com isto, existirão operações com elementos de baixa ordem de grandeza operando com elementos, no caso exposto na última linha da tabela 4.9,  $10^{14}$  vezes maior. Estas diferenças na ordem de grandeza das variáveis envolvidas nas operações, somadas ao grande número de operações em cada ciclo, constituem a razão principal para o comportamento exposto na tabela 4.9 e nas figuras 4.8 e 4.9. As figuras 4.8 e 4.9 e a tabela 4.9 foram elaboradas com os mesmos dados apresentados no item 4.1.2 e com o procedimento apresentado no item 3.3.7.



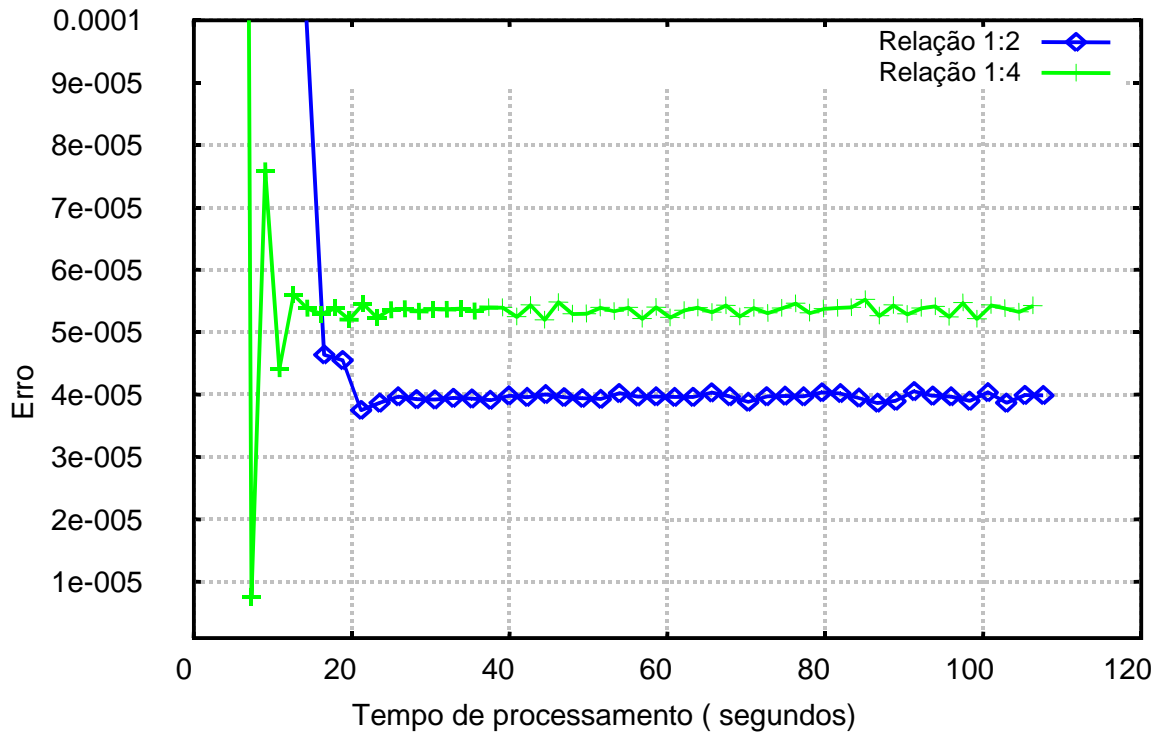


FIGURA 4.8 GRÁFICO APRESENTANDO A MÁXIMA PRECISÃO ALCANÇADA EM UMA MALHA COM 524.288 ELEMENTOS

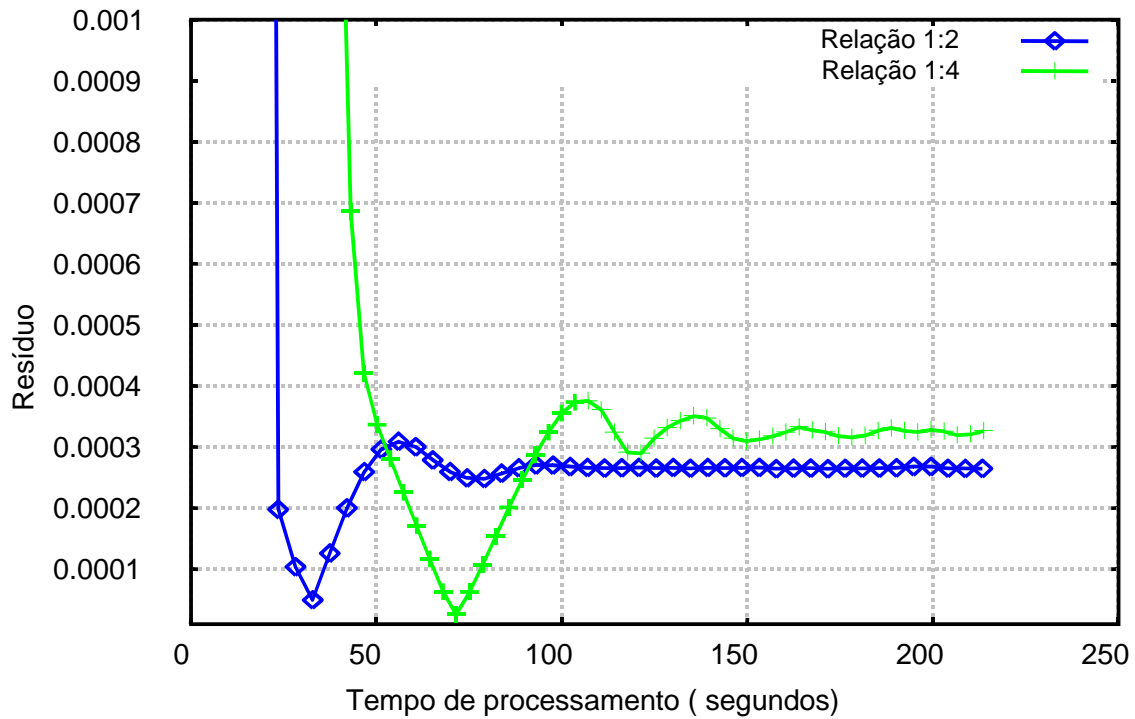


FIGURA 4.9 GRÁFICO APRESENTANDO A MÁXIMA PRECISÃO ALCANÇADA EM UMA MALHA COM 1.048.576 ELEMENTOS

A figura 4.8, apresenta a curva da relação 1:4 oscilando paralelamente à curva com a relação 1:2. O nível de precisão que as curvas se mantêm oscilando depende da dimensão dos elementos na malha mais fina, e da quantidade de operações por ciclo. Após vários testes, foi constatado que se calcularmos a quantidade de operações nas iterações por ciclo, dadas duas curvas, independente da relação que esteja sendo aplicada, a curva que for gerada com maior quantidade de operações por ciclo, alcançara um nível de precisão inferior, devido a um erro de arredondamento gerado, o qual permanece ao longo dos ciclos seguintes.

Para elaborar os testes, foram deduzidas duas equações do algoritmo implementado para o ciclo-V (item 3.3.7). As equações 4.1 e 4.2 apresentam o total de operações nas iterações por ciclo, para as relações de 1:2 e 1:4 respectivamente.

$$Op = 2k(N-1) + k\left(\frac{N}{2} - 1\right) + k\left(\frac{N}{2^{(g-2)}} - 1\right) + \sum_{i=2}^{g-1} k\left(\frac{N}{2^i} - 1\right) + \sum_{i=1}^{g-3} k\left(\frac{N}{2^i} - 1\right) \quad (4.2)$$

$$Op = 2k(N-1) + k\left(\frac{N}{4} - 1\right) + k\left(\frac{N}{2^{(2g-4)}} - 1\right) + \sum_{i=3}^g k\left(\frac{N}{2^{(2i-2)}} - 1\right) + \sum_{i=2}^{g-2} k\left(\frac{N}{2^{(2i-2)}} - 1\right) \quad (4.3)$$

### 4.3 APLICAÇÃO DA TÉCNICA *MULTIGRID* EM UM DOMÍNIO BIDIMENSIONAL

Apresenta-se nesta secção resultados da aplicação da técnica *multigrid* à equação de difusão de calor sem geração de calor (Equação de Laplace) em um domínio bidimensional. O algoritmo foi adaptado do procedimento apresentado no

item 3.3.7, foram utilizadas a norma máxima, e  $k=3$ . Os resultados são apresentados na tabela 4.10, com as malhas variando de  $33 \times 33$  à  $1025 \times 1025$ , a quantidade de malhas utilizadas na resolução variando de 2 à 9. Os resultados são comparados com a aplicação de Gauss-Seidel.

<b>MALHA</b>		<b>Norma Máx.</b>	<b>Gauss</b>	<b>2G</b>	<b>3G</b>	<b>4G</b>	<b>5G</b>	<b>6G</b>	<b>7G</b>	<b>8G</b>	<b>9G</b>
<b>33x33</b>	Nº ciclos		195	41	9	3					
	Tempo (seg.)		1,047	0,110	0,000	0,000					
<b>65x65</b>	Nº ciclos		1062	215	44	11	4				
	Tempo (seg.)		2,890	1,000	0,141	0,032	0,000				
<b>129x129</b>	Nº ciclos		5295	1063	214	52	11	4			
	Tempo (seg.)		23,047	10,985	2,297	0,625	0,500	0,063			
<b>257x257</b>	Nº ciclos		22317	4469	895	214	54	14	5		
	Tempo (seg.)		350,546	228,000	43,469	12,640	3,640	1,016	0,391		
<b>513x513</b>	Nº ciclos				4282	1021	254	64	17	5	
	Tempo (seg.)				869,891	250,235	71,546	19,891	5,812	1,938	
<b>1025x1025</b>	Nº ciclos						1043	261	66	17	5
	Tempo (seg.)						1442,890	400,515	115,500	35,547	10,532

TABELA 4.10 MULTIGRID APLICADO A RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE DIFUSÃO DE CALOR SEM GERAÇÃO DE CALOR (EQUAÇÃO DE LAPLACE) EM UM DOMÍNIO BIDIMENSIONAL.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 5.1 CONCLUSÃO

Com o presente trabalho procurou-se alcançar uma boa compreensão da técnica *multigrid* quando aplicada a problemas lineares. Verificou-se quais as mudanças que são válidas e suas influências no tempo de processamento. Entenderam-se as estruturas que compõem a técnica, operadores de restrição e prolongação, e a aplicação de Gauss-Seidel dentro do processo.

Investigando a relação entre as malhas de 1:4, a qual não foi encontrada na pesquisa bibliográfica realizada, descobriram-se divergências com as afirmações de Brandt (1977) para o caso estudado. Brandt afirma em seu artigo que a relação de 1:2 é a mais próxima da ótima conduzindo ao mínimo esforço computacional, e mais conveniente e econômica nos processos de interpolação. Os resultados dos testes utilizando a relação entre as malhas de 1:4 comparados com a relação de 1:2, apresentaram uma redução no tempo de processamento da ordem de 2 a 3 vezes, dentro dos limites dos problemas lineares unidimensionais tratados. Além da velocidade de convergência um outro aspecto importante desta relação, é a redução da quantidade de memória necessária para processamento.

A análise dos resultados mostrou que a técnica *multigrid* utilizando dois níveis de malhas proporciona uma redução no tempo de processamento, quando comparada com Gauss-Seidel puro, da ordem de duas vezes.

Utilizando a quantidade máxima de malhas possíveis de serem geradas a partir de uma malha original, a redução do tempo de processamento quando comparado com Gauss-Seidel se torna proporcional à quantidade de nós na malha original (mais refinada). Para uma malha de 2.049 nós, a redução do tempo de processamento é da ordem de 33.000 vezes. Para uma malha com 8.193 nós, a

redução do tempo de processamento é da ordem de 230.000 vezes.

O aumento na quantidade de malhas nos processos de resolução dos problemas abordados utilizando relações entre as malhas de 1:2 e 1:4, apresentaram relações entre a quantidade de malhas, o número de elementos na malha mais fina, e a quantidade de ciclos. Estas relações devido a problemas de arredondamento sofrem perda da precisão próximo à algumas regiões do espectro de malhas pesquisadas, mas foram bem utilizadas no decorrer do trabalho para estimativas do tempo de processamento.

## 5.2 TRABALHOS FUTUROS

A técnica *multigrid* é mundialmente utilizada em vários campos da ciência, mas necessitamos continuar pesquisando formas para se encontrar soluções aproximadas com grau de precisão e tempo de processamento melhores. A técnica *multigrid* é muito ampla, em cada aplicação encontramos grande quantidade de parâmetros que podem ser otimizados e para tanto é necessário melhor investigação, testes computacionais, pois ainda não dispomos de métodos de análise puramente matemáticos que possam ser utilizados para problemas mais complexos.

Nos livros e artigos pesquisados, o que se observa é a utilização da mesma ferramenta para otimização e análise teórica das técnicas iterativas. A análise de erro de Fourier é basicamente o que se encontra nas referências bibliográficas citadas. Sua aplicação está condicionada a problemas bastante simplificados o que torna a análise matemática limitada.

A relação entre as malhas de 1:4 e as relações entre a quantidade de malhas, quantidade de elementos na malha mais refinada, e a quantidade de ciclos, são dois temas que merecem continuidade. A pesquisa de novas relações entre as malhas faz-se necessária. As relações entre a quantidade de malhas, elementos na

malha mais refinada, e ciclos, pode ser um caminho para se chegar a melhores resultados nas pesquisas dos estimadores de erros.

Com base no que foi mencionado nos parágrafos anteriores, fica como sugestão para futuros trabalhos, aplicações em espaços multidimensionais. Um novo projeto que apresente as características e regras que foram delineadas para um espaço unidimensional, porém, tratando de espaços de maior dimensão, apresentaria também as principais características e diferenças da técnica *multigrid* quando aplicada a problemas parabólicos e hiperbólicos, e a problemas elípticos. Um outro trabalho poderia verificar também a performance da técnica *multigrid* aplicada aos mais conhecidos métodos aproximados: Volumes finitos, elementos finitos e elementos de contorno. Assim com estas pesquisas, se formaria uma base de conhecimento ampla e prática para o desenvolvimento de novos algoritmos. Estas obras popularizariam a técnica ainda mais e conseqüentemente contribuiriam para sua evolução.

## REFERÊNCIAS

BACHVALOV, N. S. **On the convergence of a relaxation method with natural constraints on the elliptic operator**, USSR Comp. Math. and Math. Phys., 6, 101-135 (1966).

BRANDT, A. **‘Multilevel adaptive technique (MLAT) for fast numerical solution to boundary value problems.’** Proc. 3<sup>rd</sup> Int. Conf. On Numerical Methods in Fluid Mechanics, Vol. 1, H. Cabannes and R. Temam (eds)(Lecture Notes in Physics 18) Springer, Berlin, 82-89, 1973.

BRANDT, A. **‘Multilevel adaptive solutions to boundary value problems.’** Math. Of Computation , 31, 333-90, 1977.

BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L.C. **Boundary Element Techniques**, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

BRIGGS, W. L.; HENSON, V. E.; MCCORMICK, S.F. **A Multigrid Tutorial**, Second Edition, SIAM, (2000).

FEDORENKO, R. P. **The Speed of convergence of one iterative process**, USSR Comput. Math. and Math. Phys., 4(3), 227-235 (1964).

FERZIGER, J. H.; PERIC, M. **Computational Methods for fluid dynamics**. 3<sup>rd</sup> ed. Berlin: Springer 2002.

FLETCHER, C. A. J. **Computational Techniques for Fluid Dynamics**, v.1, 2<sup>nd</sup> ed. Berlin: Springer, 1997.

HACKBUSCH, W. **Ein iteratives Verfahren zur schnellen Auflosung elliptischer Randwertprobleme**, Universitat Koln, Report, 76-12, 1976.



HACKBUSCH, W. **On the multi-grid method applied to difference equations**, Computing, 20, 291-306, 1978.

HACKBUSCH, W. **Survey of convergence proofs for multi-grid iterations**, Special topics of applied mathematics, J. Frehse and D. Pallaschke and U. Trottenberg (eds), Proceedings, Bonn, Oct. 1979, North-Holland, Amsterdam, 151-164, 1980.

HACKBUSCH, W. **On the convergence of multi-grid iterations**, Beit. Numer. Math. 9, 231-329, 1981.

HIRSCH, C. **Numerical Computations of Internal and External Flows**, v. 1, New York : Wiley, 1988.

INCROPERA, F. P.; DeWITT, D. P. **Fundamentos de Transferência de Calor e Massa**. 4ª ed. Rio de Janeiro : Guanabara Koogan, 1992.

KOLMAN, B. **Introdução à algebra linear com aplicações** , Prentice-Hall do Brasil, (1998).

LIOEN, W.M. **Multigrid methods for elliptic PDEs**, Centre for Mathematics and Computer Science, Amsterdam, The Netherlands, (1985).

MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**. Rio de Janeiro : LTC, 1995.

MARTINS, A.M. **Estimative de Erros de Iteração em Dinâmica dos Fluidos Computacional**. Dissertação de Mestrado em Métodos Numéricos para Engenharia (PGMNE) da UFPR, Curitiba, (2002)

MINKOWYCZ, W. J.; SPARROW, E. M.; SCHNEIDER, G. E.; PLETCHER, R. H. **Handbook of Numerical Heat Transfer**. New York : Wiley, 1988.

PATANKAR, S. V. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**, New York : McGraw-Hill, 1980.

ROACHE, P. J. **Computational Fluid Dynamics**, Albuquerque, USA : Hermosa, 1998.

TANNEHILL, J. C.; ANDERSON, D. A.; PLETCHER, R. H. **Computational fluid mechanics and heat transfer**. Washington, DC : Taylor & Francis, 1997.

YAN, J. and THIELE, F. **Performance and accuracy of a modified full multigrid Algorithm for fluid flow and heat transfer** . Numerical Heat Transfer, Part B, 34:323-338, Taylor&Francis , 1998.

WESSELING, P. **An Introduction to Multigrid Methods**. Chichester, John Wiley & Sons, 1991.