

ROBERTA SUERO

**VERIFICAÇÃO DE SOLUÇÕES NUMÉRICAS DE ESCOAMENTOS
BIDIMENSIONAIS LAMINARES EM MALHAS UNIFORMES**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Ciências, Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.

**Orientador: Prof. Dr. Carlos Henrique Marchi
Co-orientador: Prof. Ms. Fábio Alencar Schneider**

CURITIBA

2006

Suero, Roberta

Verificação de soluções numéricas de escoamentos bidimensionais laminares em malhas uniformes / Roberta Suero. - Curitiba, 2006.
188 f. : il. ; tab., graf.

Orientador: Carlos Henrique Marchi

Co-orientador: Fábio Alencar Schneider

Dissertação (Mestrado) – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia.

Inclui Bibliografia.

1. Análise de erros (Matemática) 2. Método dos volumes finitos.
3. Cálculos numéricos. 3. Dinâmica fluídos. I. Marchi, Carlos Henrique.
II. Schneider, Fábio Alencar. III. Título. IV. Universidade Federal do Paraná.

CDD 511.8

TERMO DE APROVAÇÃO

ROBERTA SUERO

VERIFICAÇÃO DE SOLUÇÕES NUMÉRICAS DE ESCOAMENTOS BIDIMENSIONAIS LAMINARES EM MALHAS UNIFORMES

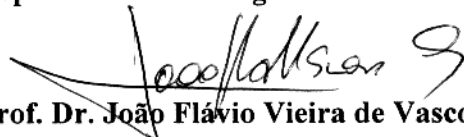
Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientador:




Prof. Dr. Carlos Henrique Marchi

Departamento de Engenharia Mecânica, UFPR



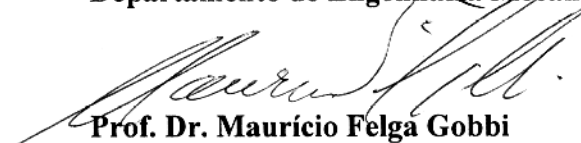
Prof. Dr. João Flávio Vieira de Vasconcelos

Departamento de Engenharia Mecânica e Energia, UERJ



Prof.^a Dr.^a Viviana Cocco Mariani

Departamento de Engenharia Mecânica, PUC/PR



Prof. Dr. Maurício Felga Gobbi

Departamento de Transportes, UFPR

Curitiba, 20 de fevereiro de 2006

À minha família pelo amor e apoio incondicionais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Carlos Henrique Marchi pela paciência e orientação no transcorrer deste trabalho, agradeço também pelo apoio e os conhecimentos que me foram transmitidos.

Ao Prof. Fábio Alencar Schneider pelas sugestões apresentadas.

Agradeço aos amigos que, direta ou indiretamente, me ajudaram no desenvolvimento deste trabalho, seja com ensinamentos ou em momentos de descontração, em especial aos doutorandos Marcio Villela e Luciano Araki.

Aos professores, colegas e funcionários do CESEC, em especial à Maristela, pela amizade e dedicação.

Gostaria de agradecer também à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo financiamento deste trabalho.

Agradeço também aos membros da banca, Dr. João Flávio Vieira de Vasconcellos, Dra. Viviana Cocco Mariani e Dr. Maurício Felga Gobbi pelo tempo dispensado, sugestões e críticas apresentadas a esta dissertação.

Resumo

Neste trabalho aborda-se o problema do escoamento em uma cavidade quadrada cuja tampa tem velocidade constante ou variável. O modelo numérico caracteriza-se pelo emprego do método dos Volumes Finitos com arranjo co-localizado de variáveis, solver MSI e malhas uniformes com diversas resoluções. O objetivo principal do trabalho é avaliar o desempenho de estimadores do erro de discretização. Para isso, as variáveis de interesse são: o fluxo de massa que escoar na cavidade, a força que a tampa exerce sobre o fluido e as componentes do vetor velocidade no centro do domínio de cálculo. Os estimadores considerados são: Richardson, GCI e Convergente, baseados tanto na ordem assintótica quanto na ordem aparente do erro. São apresentados resultados em malhas com até 1024x1024 volumes, seus erros verdadeiros e estimados. A principal conclusão é que, em geral, o estimador GCI é confiável para estimar erros de discretização.

Palavras-chave: GCI, extrapolação de Richardson, erro numérico, erro de discretização, volumes finitos.

Disponível em: ftp://ftp.demec.ufpr.br/cfd/monografias/2006_Roberta_Suero_mestrado

Abstract

In this work the problem of the flow in a square shaped cavity, whose lid has constant or changeable velocity, is approached. The numerical model is characterized by the use of the Finite Volumes Method with co-located arrangement of variables, MSI solver and diverse uniform meshes. The main objective of the work is to evaluate the performance of discretization error estimators. For this, the variables of interest are: the mass flux that flows in the cavity, the force that the lid exerts on the fluid and the velocity vector components in the center of the calculation domain. The considered estimators are: Richardson, Convergent and GCI, based on both the asymptotic and the apparent error orders. Results are presented for meshes as refined as 1024×1024 volumes and numerical and estimated errors. The main conclusion is that, in general, GCI estimator is trustworthy for discretization error estimate.

Keywords: GCI, Richardson extrapolation, numerical error, discretization error, finite volumes.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Malha estruturada uniforme bidimensional com volumes de controle.....	35
Figura 2.2: Discretização com meio-volume na fronteira (Maliska, 2005).....	38
Figura 2.3: Discretização bidimensional com meios-volumes na fronteira	39
Figura 2.4: Condições de contorno com volumes fictícios (Maliska, 2005).....	39
Figura 2.5: Discretização unidimensional com volumes inteiros (Maliska, 2005)	40
Figura 2.6: Localização dos nós no domínio de cálculo discretizado	46
Figura 2.7: Malha geométrica utilizada no MSI.....	52
Figura 2.8: Posição das linhas de tomada de dados para os cálculos do fluxo de massa	58
Figura 2.9: Aplicação da força da placa numericamente.....	60
Figura 2.10: Localização dos nós para a tomada de valores para a obtenção do fluxo de massa	61
Figura 3.1: Erros envolvidos nos métodos de engenharia (Marchi e Schneider, 2004).....	63
Figura 4.1: Domínio de cálculo para o problema da cavidade quadrada (Shih <i>et al.</i> 1989)	76
Figura 4.2: Soluções analítica e numérica para a força da placa com UDS	89
Figura 4.3: Soluções analítica e numérica para a força da placa com UDS-2.....	89
Figura 4.4: Soluções analítica e numérica para o fluxo de massa total.....	89
Figura 4.5: Soluções analítica e numérica para o fluxo de massa obtido com v_n	89
Figura 4.6: Velocidade u central	90
Figura 4.7: Velocidade v central	90
Figura 4.8: Linhas de corrente para o problema de Shih.....	90
Figura 4.9: Linhas de corrente para o problema de Shih.....	91
Figura 4.10: Campo de velocidades para o problema de Shih	91
Figura 4.11: Ordens aparente, assintótica e efetiva por h para a força da placa com UDS.....	96
Figura 4.12: Ordens efetiva, aparente e assintótica por h para a força da placa com UDS-2 ..	96
Figura 4.13: Ordens aparente, assintótica e efetiva por h para o fluxo de massa total.....	96
Figura 4.14: Ordens aparente, assintótica e efetiva por h para o fluxo de massa com v_n	96
Figura 4.15: Ordens aparente, assintótica e efetiva para a velocidade u central	97
Figura 4.16: Ordens aparente, assintótica e efetiva para a velocidade v central	97
Figura 4.17: Razões dos estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica) e GCI pelo erro numérico para a força da placa com UDS.....	102
Figura 4.18: Razões dos estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica) e GCI pelo erro numérico para a força da placa com UDS-2	102

Figura 4.19: Razões dos estimadores de Richardson (ordens assintótica – prática e assintótica) e GCI pelo erro numérico para a força da placa com UDS	102
Figura 4.20: Razões dos estimadores de Richardson (ordens assintótica - prática e assintótica) e GCI pelo erro numérico para a força da placa com UDS-2.....	102
Figura 4.21: Razões dos estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica) e GCI pelo erro numérico para o fluxo de massa total.....	103
Figura 4.22: Razões dos estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica) e GCI pelo erro numérico para o fluxo de massa com v_n	103
Figura 4.23: Razões do Estimador de Richardson (ordens aparente e assintótica) e GCI pelo erro numérico para a velocidade u central.....	103
Figura 4.24: Razões do Estimador de Richardson (ordens aparente e assintótica) e GCI pelo erro numérico para a velocidade v central.....	103
Figura 4.25: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI e erro verdadeiro para a força da placa com UDS	104
Figura 4.26: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI e erro verdadeiro para a força da placa com UDS-2.....	104
Figura 4.27: Estimadores de Richardson (ordens assintótica –prática e assintótica), GCI e erro verdadeiro para a força da placa com UDS	104
Figura 4.28: Estimadores de Richardson (ordens assintótica –prática e assintótica), GCI e erro verdadeiro para a força da placa com UDS-2.....	104
Figura 4.29: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI e erro verdadeiro para o fluxo de massa total	105
Figura 4.30: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI e erro verdadeiro para o fluxo de massa com v_n	105
Figura 4.31: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI e erro verdadeiro para a velocidade u central	105
Figura 4.32: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI e erro verdadeiro para a velocidade v central.....	105
Figura 4.33: Perfil de velocidade u em $x=0,5m$ para a malha com 1024X1024 nós com barra de erros	109
Figura 4.34: Perfil de velocidade v em $y=0,5m$ para a malha com 1024X1024 nós com barra de erros	109
Figura 5.1: Domínio de cálculo para o problema de Ghia	112
Figura 5.2: Soluções para o perfil de velocidade u em $x=0,5m$	120

Figura 5.3: Soluções para o perfil de velocidade v em $y=0,5m$	120
Figura 5.4: Linhas de corrente para o problema de Ghia com $Re=100$	120
Figura 5.5: Linhas de corrente para o problema de Ghia com $Re=100$	121
Figura 5.6: Campo de velocidades para o problema de Ghia com $Re=100$	121
Figura 5.7: Ordens aparente e assintótica por h para a força da placa com UDS.....	125
Figura 5.8: Ordens aparente e assintótica por h para a força da placa com UDS-2	125
Figura 5.9: Ordens aparente e assintótica por h para o fluxo de massa total.....	126
Figura 5.10: Ordens aparente e assintótica por h para o fluxo de massa com v_n	126
Figura 5.11: Ordens aparente e assintótica por h para a velocidade u central.....	126
Figura 5.12: Ordens aparente e assintótica por h para a velocidade v central.....	126
Figura 5.13: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a força da placa com UDS	128
Figura 5.14: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a força da placa com UDS-2.....	128
Figura 5.15: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para o fluxo de massa total	129
Figura 5.16: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para o fluxo de massa com v_n	129
Figura 5.17: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a velocidade u central	129
Figura 5.18: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a velocidade v central	129
Figura 5.19: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI para a força da placa com UDS.....	130
Figura 5.20: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI para a força da placa com UDS-2	130
Figura 5.21: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI para o fluxo de massa total	130
Figura 5.22: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI para o fluxo de massa com v_n	130
Figura 5.23: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI para a velocidade u central.....	131
Figura 5.24: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI para a velocidade v central	131

Figura 6.1: Soluções para o perfil de velocidade u em $x=0,5m$	143
Figura 6.2: Soluções para o perfil de velocidade v em $y=0,5m$	143
Figura 6.3: Linhas de corrente para o problema de Ghia com $Re=1000$	144
Figura 6.4: Linhas de corrente para o problema de Ghia com $Re=1000$	144
Figura 6.5: Campo de velocidades para o problema de Ghia com $Re=1000$	145
Figura 6.6: Ordens aparente e assintótica por h para a força da placa com UDS.....	149
Figura 6.7: Ordens aparente e assintótica por h para a força da placa com UDS-2	149
Figura 6.8: Ordens aparente e assintótica para o fluxo de massa total	149
Figura 6.9: Ordens aparente e assintótica para o fluxo de massa com v_n	149
Figura 6.10: Ordens aparente e assintótica para a velocidade u central	149
Figura 6.11: Ordens aparente e assintótica para a velocidade v central	149
Figura 6.12: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a força da placa com UDS	152
Figura 6.13: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a força da placa com UDS-2.....	152
Figura 6.14: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para o fluxo de massa total	152
Figura 6.15: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para o fluxo de massa com v_n	152
Figura 6.16: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a velocidade u central	153
Figura 6.17: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a velocidade v central.....	153
Figura 6.18: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI para a força da placa com UDS.....	153
Figura 6.19: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI para a força da placa com UDS-2	153
Figura 6.20: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI para o fluxo de massa total	154
Figura 6.21: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI para o fluxo de massa com v_n	154
Figura 6.22: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI para a velocidade u central.....	154

Figura 6.23: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI para a velocidade v central	154
Figura A.1: Ordens aparente, assintótica e efetiva por h para UDS	171
Figura A.2: Ordens aparente, assintótica e efetiva por h para UDS-2.....	171
Figura A.3: Razões dos estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica) e GCI pelo erro numérico para UDS.....	173
Figura A.4: Razões dos estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica) e GCI pelo erro numérico para UDS-2	173
Figura A.5: Razões dos estimadores de Richardson (ordens aparente prática e assintótica) e GCI pelo erro numérico para UDS	173
Figura A.6: Razões dos estimadores de Richardson (ordens aparente prática e assintótica) e GCI pelo erro numérico para UDS-2.....	173
Figura A.7: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI e erro verdadeiro para UDS	174
Figura A.8: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI e erro verdadeiro para UDS-2	174
Figura A.9: Estimadores de Richardson (ordens aparente prática e assintótica), GCI e erro verdadeiro para UDS	174
Figura A.10: Estimadores de Richardson (ordens aparente prática e assintótica), GCI e erro verdadeiro para UDS-2	174

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1: Ordem assintótica para as variáveis de interesse.....	58
Tabela 4.1: Dados fixos para o problema de Shih.....	78
Tabela 4.2: Solução analítica das variáveis de interesse para o problema de Shih.....	80
Tabela 4.3: Dados numéricos fixos do problema de Shih.....	82
Tabela 4.4: Identificação das simulações realizadas para o problema do Shih.....	82
Tabela 4.5: Identificação das simulações realizadas para o problema do Shih.....	83
Tabela 4.6: Solução e erros numéricos para a força da placa com UDS para o problema de Shih.....	83
Tabela 4.7: Solução e erros numéricos para a força da placa com UDS-2 para o problema de Shih.....	84
Tabela 4.8: Solução e erros numéricos para o fluxo de massa total para o problema de Shih.	84
Tabela 4.9: Solução e erros numéricos para o fluxo de massa obtido com v_n para o problema de Shih.....	85
Tabela 4.10: Solução e erros numéricos para a velocidade u central para o problema de Shih	85
Tabela 4.11: Solução e erros numéricos para a velocidade v central para o problema de Shih	86
Tabela 4.12: Solução numérica para o perfil de velocidade u para o problema de Shih.....	86
Tabela 4.13: Erros numéricos para o perfil de velocidade u para o problema de Shih.....	87
Tabela 4.14: Solução numérica para o perfil de velocidade v para o problema de Shih.....	87
Tabela 4.15: Erros numéricos para o perfil de velocidade v para o problema de Shih.....	88
Tabela 4.16: Comparação entre os erros numéricos.....	88
Tabela 4.17: Ordens práticas da solução numérica para a força de placa obtido com UDS (problema de Shih).....	92
Tabela 4.18: Ordens práticas da solução numérica para a força da placa obtido com UDS-2 (problema de Shih).....	92
Tabela 4.19: Ordens práticas da solução numérica para o fluxo de massa total (problema de Shih).....	92
Tabela 4.20: Ordens práticas da solução numérica para o fluxo de massa com v_n (problema de Shih).....	93
Tabela 4.21: Ordens práticas da solução numérica para a velocidade central u (problema de Shih).....	93
Tabela 4.22: Ordens práticas da solução numérica para a velocidade central v (problema de Shih).....	93

Tabela 4.23: Ordens práticas para o perfil de velocidade u (problema de Shih).....	94
Tabela 4.24: Ordens práticas para o perfil de velocidade v (problema de Shih).....	94
Tabela 4.25: Comparação entre as ordens práticas para a força da placa	95
Tabela 4.26: Comparação das ordens práticas para o fluxo de massa.....	95
Tabela 4.27: Ordens práticas para as variáveis de interesse para o problema de Shih.....	97
Tabela 4.28: Estimativa do erro da solução numérica para as variáveis de interesse (problema de Shih).....	98
Tabela 4.29: Estimativa do erro da solução numérica para o perfil de velocidade u (problema de Shih).....	100
Tabela 4.30: Estimativa do erro da solução numérica para o perfil de velocidade v (problema de Shih).....	100
Tabela 4.31: Solução numérica com seu erro estimado para o problema de Shih	106
Tabela 4.32: Solução numérica com seu erro estimado para o perfil de velocidade u para o problema de Shih	106
Tabela 4.33: Solução numérica com seu erro estimado para o perfil de velocidade v para o problema de Shih	107
Tabela 4.34: Solução numérica com seu erro estimado com estimador GCI para o problema de Shih.....	107
Tabela 4.35: Solução numérica para o perfil de velocidade u com seu erro estimado com estimador GCI para o problema de Shih	108
Tabela 4.36: Solução numérica para o perfil de velocidade v com seu erro estimado com estimador GCI para o problema de Shih	108
Tabela 5.1: Dados fixos para o problema de Ghia com $Re=100$	113
Tabela 5.2: Parâmetros variáveis para o problema de Ghia com $Re=100$	113
Tabela 5.3: Dados numéricos fixos do problema de Ghia com $Re=100$	114
Tabela 5.4: Identificação das simulações para o problema de Ghia com $Re=100$	115
Tabela 5.5: Identificação das simulações para o problema de Ghia com $Re=100$	115
Tabela 5.6: Solução numérica para a força da placa com UDS para o problema de Ghia com $Re=100$	116
Tabela 5.7: Solução numérica para a força da placa com UDS-2 para o problema de Ghia com $Re=100$	116
Tabela 5.8: Solução numérica para o fluxo de massa total para o problema de Ghia com $Re=100$	116

Tabela 5.9: Solução numérica para o fluxo de massa com v_n para o problema de Ghia com $Re=100$	117
Tabela 5.10: Solução numérica para a velocidade central u para o problema de Ghia com $Re=100$	117
Tabela 5.11: Solução numérica para a velocidade central v para o problema de Ghia com $Re=100$	118
Tabela 5.12: Solução numérica para o perfil de velocidade u para o problema de Ghia com $Re=100$	118
Tabela 5.13: Solução numérica para o perfil de velocidade v para o problema de Ghia com $Re=100$	119
Tabela 5.14: Resultados obtidos no presente trabalho, por Ghia <i>et al.</i> (1982) e por Nishida <i>et al.</i> (1992)	119
Tabela 5.15: Ordem aparente para a força da placa com UDS para o problema de Ghia com $Re=100$	122
Tabela 5.16: Ordem aparente para a força da placa com UDS-2 para o problema de Ghia com $Re=100$	122
Tabela 5.17: Ordem aparente para o fluxo de massa total para o problema de Ghia com $Re=100$	122
Tabela 5.18: Ordem aparente para o fluxo de massa com v_n para o problema de Ghia com $Re=100$	123
Tabela 5.19: Ordem aparente para a velocidade central u para o problema de Ghia com $Re=100$	123
Tabela 5.20: Ordem aparente para a velocidade central v para o problema de Ghia com $Re=100$	123
Tabela 5.21: Ordem aparente para o perfil de velocidade u para o problema de Ghia com $Re=100$	124
Tabela 5.22: Ordem aparente para o perfil de velocidade v para o problema de Ghia com $Re=100$	125
Tabela 5.23: Estimativa do erro numérico para as variáveis de interesse para o problema de Ghia com $Re=100$	127
Tabela 5.24: Estimativa do erro numérico para o perfil de velocidade u para o problema de Ghia com $Re=100$	127
Tabela 5.25: Estimativa do erro numérico para o perfil de velocidade v para o problema de Ghia com $Re=100$	128

Tabela 5.26: Solução numérica com seu erro estimado com estimador Convergente para o problema de Ghia com $Re=100$	132
Tabela 5.27: Solução numérica para o perfil de velocidade u com seu erro estimado com estimador Convergente para o problema de Ghia com $Re=100$	132
Tabela 5.28: Solução numérica para o perfil de velocidade v com seu erro estimado com estimador Convergente para o problema de Ghia com $Re=100$	133
Tabela 5.29: Solução numérica com seu erro estimado com estimador GCI para o problema de Ghia com $Re=100$	133
Tabela 5.30: Solução numérica para o perfil de velocidade u com seu erro estimado com estimador GCI para o problema de Ghia com $Re=100$	134
Tabela 5.31: Solução numérica para o perfil de velocidade v com seu erro estimado com estimador GCI para o problema de Ghia com $Re=100$	134
Tabela 6.1: Parâmetros variáveis para o problema de Ghia com $Re=1000$	137
Tabela 6.2: Dados numéricos fixos do problema de Ghia com $Re=1000$	138
Tabela 6.3: Identificação das simulações para o problema de Ghia com $Re=1000$	138
Tabela 6.4: Identificação das simulações para o problema de Ghia com $Re=1000$	139
Tabela 6.5: Solução numérica para a força da placa com UDS para o problema de Ghia com $Re=1000$	139
Tabela 6.6: Solução numérica para a força da placa com UDS-2 para o problema de Ghia com $Re=1000$	140
Tabela 6.7: Solução numérica para o fluxo de massa total para o problema de Ghia com $Re=1000$	140
Tabela 6.8: Solução numérica para o fluxo de massa com v_n para o problema de Ghia com $Re=1000$	140
Tabela 6.9: Solução numérica para a velocidade central u para o problema de Ghia com $Re=1000$	141
Tabela 6.10: Solução numérica para a velocidade central v para o problema de Ghia com $Re=1000$	141
Tabela 6.11: Solução numérica para o perfil de velocidade u para o problema de Ghia com $Re=1000$	142
Tabela 6.12: Solução numérica para o perfil de velocidade v para o problema de Ghia com $Re=1000$	142
Tabela 6.13: Resultados obtidos com Stokes_1p3, por Ghia et al. (1982) e por Nishida et al. (1992)	143

Tabela 6.14: Ordem aparente para a força da placa com UDS para o problema de Ghia com $Re=1000$	145
Tabela 6.15: Ordem aparente para a força da placa com UDS-2 para o problema de Ghia com $Re=1000$	146
Tabela 6.16: Ordem aparente para o fluxo de massa total para o problema de Ghia com $Re=1000$	146
Tabela 6.17: Ordem aparente para o fluxo de massa com v_n para o problema de Ghia com $Re=1000$	146
Tabela 6.18: Ordem aparente para a velocidade central u para o problema de Ghia com $Re=1000$	146
Tabela 6.19: Ordem aparente para a velocidade central v para o problema de Ghia com $Re=1000$	147
Tabela 6.20: Ordem aparente para o perfil de velocidade u para o problema de Ghia com $Re=1000$	148
Tabela 6.21: Ordem aparente para o perfil de velocidade v para o problema de Ghia com $Re=1000$	148
Tabela 6.22: Estimativa do erro numérico para as variáveis de interesse para o problema de Ghia com $Re=1000$	150
Tabela 6.23: Estimativa do erro numérico para o perfil de velocidade u para o problema de Ghia com $Re=1000$	151
Tabela 6.24: Estimativa do erro numérico para o perfil de velocidade v para o problema de Ghia com $Re=1000$	151
Tabela 6.25: Solução numérica com seu erro estimado com estimador Convergente para o problema de Ghia com $Re=1000$	155
Tabela 6.26: Solução numérica para o perfil de velocidade u com seu erro estimado com estimador Convergente para o problema de Ghia com $Re=1000$	155
Tabela 6.27: Solução numérica para o perfil de velocidade v com seu erro estimado com estimador Convergente para o problema de Ghia com $Re=1000$	156
Tabela 6.28: Solução numérica com seu erro estimado com estimador GCI para o problema de Ghia com $Re=1000$	157
Tabela 6.29: Solução numérica para o perfil de velocidade u com seu erro estimado com estimador GCI para o problema de Ghia com $Re=1000$	157
Tabela 6.30: Solução numérica para o perfil de velocidade v com seu erro estimado com estimador GCI para o problema de Ghia com $Re=1000$	158

Tabela A.1: Ordem assintótica para cada uma das aproximações utilizadas	168
Tabela A.2: Identificação das simulações realizadas	169
Tabela A.3: Solução e erro numérico para a derivada com aproximação UDS	169
Tabela A.4: Solução e erro numérico com aproximação UDS-2	169
Tabela A.5: Ordens práticas da solução numérica para a aproximação com UDS	169
Tabela A.6: Ordens práticas da solução numérica para a aproximação com UDS-2	170
Tabela A.7: Ordem prática para cada uma das aproximações utilizadas	170
Tabela A.8: Análise para a ordem efetiva	172
Tabela A.9: Estimativa do erro da solução numérica para as aproximações com UDS e UDS-2	172
Tabela A.10: Solução numérica com seu erro estimado com estimador Convergente	175
Tabela A.11: Solução numérica com seu erro estimado com estimador GCI.....	175
Tabela C.1: Razões dos estimadores de Richardson e GCI pelo erro numérico para a força da placa com UDS.....	178
Tabela C.2: Razões dos estimadores de Richardson e GCI pelo erro numérico para a força da placa com UDS-2	178
Tabela C.3: Razões dos estimadores de Richardson (ordens assintótica-prática e assintótica) e GCI pelo erro numérico para a força da placa com UDS.....	178
Tabela C.4: Razões dos estimadores de Richardson (ordens assintótica-prática e assintótica) e GCI pelo erro numérico para a força da placa com UDS-2.....	179
Tabela C.5: Razões dos estimadores de Richardson e GCI para o fluxo de massa total.....	179
Tabela C.6: Razões dos estimadores de Richardson e GCI pelo erro numérico para o fluxo de massa com v_n	179
Tabela C.7: Razões do estimador de Richardson e GCI pelo erro numérico para a velocidade u central	179
Tabela C.8: Razões do estimador de Richardson e GCI pelo erro numérico para a velocidade v central	180
Tabela C.9: Estimadores de Richardson, GCI e erros verdadeiros para a força da placa com UDS	180
Tabela C.10: Estimadores de Richardson, GCI e erros verdadeiros para a força da placa com UDS-2.....	180
Tabela C.11: Estimadores de Richardson (ordens assintótica-prática e assintótica), GCI e erro verdadeiro para a força da placa com UDS	180

Tabela C.12: Estimadores de Richardson (ordens assintótica-prática e assintótica), GCI erro verdadeiro para a força da placa com UDS-2.....	181
Tabela C.13: Estimadores de Richardson, GCI e erro verdadeiro para o fluxo de massa total	181
Tabela C.14: Estimadores de Richardson, GCI e erro verdadeiro para o fluxo de massa com v_n	181
Tabela C.15: Estimadores de Richardson, GCI e erro verdadeiro para a velocidade u central	181
Tabela C.16: Estimadores de Richardson, GCI e erro verdadeiro para a velocidade v central	182
Tabela C.17: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a força da placa com UDS	182
Tabela C.18: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a força da placa com UDS-2	182
Tabela C.19: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para o fluxo de massa total	183
Tabela C.20: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para o fluxo de massa com v_n	183
Tabela C.21: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a velocidade u central.....	183
Tabela C.22: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a velocidade v central.....	184
Tabela C.23: Estimadores de Richardson e GCI para a força da placa com UDS	184
Tabela C.24: Estimadores de Richardson e GCI para a força da placa com UDS-2.....	184
Tabela C.25: Estimadores de Richardson e GCI para o fluxo de massa total	184
Tabela C.26: Estimadores de Richardson e GCI para o fluxo de massa com v_n	185
Tabela C.27: Estimadores de Richardson e GCI para a velocidade u central	185
Tabela C.28: Estimadores de Richardson e GCI para a velocidade v central	185
Tabela C.29: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a força da placa com UDS	185
Tabela C.30: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a força da placa com UDS-2	186
Tabela C.31: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para o fluxo de massa total	186

Tabela C.32: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para o fluxo de massa com v_n	186
Tabela C.33: Razões dos estimadores de Richardsom (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a velocidade u central.....	186
Tabela C.34: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a velocidade v central.....	187
Tabela C.35: Estimadores de Richardson e GCI para a força da placa com UDS	187
Tabela C.36: Estimadores de Richardson e GCI para a força da placa com UDS-2.....	187
Tabela C.37: Estimadores de Richardson e GCI para o fluxo de massa total	187
Tabela C.38: Estimadores de Richardson e GCI para o fluxo de massa com v_n	188
Tabela C.39: Estimadores de Richardson e GCI para a velocidade u central	188
Tabela C.40: Estimadores de Richardson e GCI para a velocidade v central	188

LISTA DE SÍMBOLOS

A	matriz dos coeficientes
a	área considerada para o cálculo
a_i^V	coeficientes resultantes da discretização utilizados na resolução do sistema de equações
B	termo fonte para o problema de Shih
b_p^V	termo fonte resultante da discretização para a resolução do sistema de equações
CDS	<i>Central Differencing Scheme</i>
CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i>
E	erro de discretização
E	ponto localizado à direita do ponto geral nodal
E_n	erro de iteração
E_p	erros de programação
E_T	erros de truncamento
E_π	erros de arredondamento
Eq.	equação
EDP	equações diferenciais parciais
F	força da placa sobre o fluido
F_S	fator de segurança para o GCI
GCI	<i>Grid Convergence Index</i>
h	tamanho dos elementos ou volumes de controle da malha
it	contador do número de iterações para o MSI
it_max	número máximo de iterações externas para o MSI
L^n	norma dos resíduos na iteração n
L^0	norma dos resíduos na iteração 0
L_1	norma utilizada para se obter o resíduo
M_P	massa do volume de controle P
\dot{M}_i	fluxo de massa nas faces
\dot{M}_u	fluxo de massa na direção u
\dot{M}_v	fluxo de massa na direção v

<i>MSI</i>	<i>Modified Strongly Implicit Method</i>
<i>N</i>	ponto localizado acima do ponto geral nodal
<i>n</i>	número de iterações para o ciclo interno do MSI
<i>n_maximo</i>	número máximo de iterações para o ciclo interno do MSI
<i>p</i>	pressão
<i>P</i>	ponto geral nodal
<i>p_V</i>	ordens verdadeiras
<i>p_L</i>	ordem assintótica
<i>p'</i>	correção para a pressão
<i>p_U</i>	ordem aparente
<i>p_E</i>	ordem efetiva
<i>p_L^{prático}</i>	ordem assintótica prática
<i>q</i>	razão de refino da malha
Re	número de Reynolds
<i>Rⁿ</i>	resíduo na iteração <i>n</i>
<i>S</i>	ponto localizado abaixo do ponto geral nodal
<i>S^{U_i}</i>	termo fonte da equação da quantidade de movimento linear
<i>t</i>	tempo
<i>Tol.</i>	tolerância admitida para se interromper o processo iterativo
<i>u</i>	componente da velocidade paralela ao eixo x
<i>U_i</i>	vetor velocidade
<i>U_{Ri}</i>	incerteza obtida com o estimador de Richardson
<i>U</i>	incerteza da solução numérica
<i>U_{GCI}</i>	incerteza obtida com o estimador GCI
<i>U_C</i>	estimador convergente de erro
<i>UDS</i>	<i>Upstream Differencing Scheme</i>
<i>v</i>	componente da velocidade paralela ao eixo y
<i>W</i>	ponto localizado à esquerda do ponto geral nodal
<i>z</i>	profundidade da cavidade

Letras Gregas

Δx	distância entre dois nós consecutivos na horizontal
Δy	distância entre dois nós consecutivos na vertical
ϕ	solução numérica da variável de interesse
λ	vetor solução
Φ	solução analítica exata da variável de interesse
β	coeficiente para a correção adiada
σ_i	diagonais adicionais não-nulas
α	parâmetro iterativo para o MSI
ψ	linha de corrente
$\bar{\tau}_{xy}$	tensão de cisalhamento
ϕ_∞	estimativa do valor da solução analítica da variável de interesse
ϕ_C	solução numérica do estimador convergente
ρ	massa específica do fluido
μ	Viscosidade do fluido
∇	operador nabla
∇^2	operador laplaciano

Subíndices

n	face localizada acima do ponto geral nodal
s	face localizada abaixo do ponto geral nodal
e	face localizada à direita do ponto geral nodal
w	face localizada à esquerda do ponto geral nodal
i	posição do nó na direção x
j	posição do nó na direção y
1	malha fina
2	malha grossa
3	malha supergrossa

Superíndices

V direção da velocidade (u e v)

Sumário

1	Introdução.....	25
1.1	O problema.....	25
1.2	Objetivos.....	27
1.3	Organização do trabalho.....	28
2	Fundamentação Teórica.....	30
2.1	Introdução.....	30
2.2	Modelo Matemático Geral.....	31
2.3	Modelo Numérico.....	33
2.3.1	Formulação do problema e definição do modelo numérico.....	34
2.3.2	Discretização do domínio de cálculo.....	34
2.3.3	Discretização do modelo matemático.....	35
2.3.4	Acoplamento pressão-velocidade.....	36
2.3.5	Aplicação das condições de contorno.....	38
2.3.6	Obtenção da solução numérica.....	40
2.3.7	Coefficientes e termos fontes da velocidade.....	41
2.3.8	Coefficientes e termo fonte da pressão.....	44
2.3.9	Algoritmos.....	50
2.4	Definição e obtenção das variáveis de interesse.....	56
2.4.1	Definições.....	56
2.4.2	Aproximações numéricas.....	59
3	Erros Numéricos.....	62
3.1	Introdução.....	62
3.2	Fontes de Erros Numéricos.....	64
3.3	Tipos de estimativas de erro de discretização.....	65
3.4	Estimador de Richardson.....	67
3.4.1	Baseado na ordem assintótica.....	67
3.4.2	Baseado na ordem aparente.....	69
3.5	Estimador GCI.....	72
3.6	Ordem Efetiva.....	74
3.7	Estimador Convergente.....	74
4	Problema de Shih para $Re=1$	76
4.1	Definição do Problema.....	76

4.2	Solução Analítica.....	78
4.3	Solução Numérica	80
4.4	Verificação da solução numérica.....	98
4.5	Conclusão	109
5	Problema de Ghia para Re=100.....	112
5.1	Definição do problema	112
5.2	Solução Numérica	113
5.3	Verificação da solução numérica.....	126
5.4	Conclusão	135
6	Problema de Ghia para Re=1000.....	137
6.1	Definição do problema	137
6.2	Solução Numérica	137
6.3	Verificação da solução numérica.....	150
6.4	Conclusão	158
7	Conclusão	160
8	REFERÊNCIAS	164
	APÊNDICE A – Análise da derivada $\frac{du}{dy}$	167
A1.	Definição do problema	167
A2.	Solução Analítica.....	167
A3.	Solução Numérica	168
A4.	Verificação da solução numérica.....	172
A5.	Conclusão	175
	APÊNDICE B – Uso do Matlab.....	177
	APÊNDICE C – Tabelas	178

1 Introdução

Este capítulo descreve o contexto que o problema a ser abordado neste trabalho está inserido. Este problema trata do escoamento recirculante em uma cavidade quadrada, cujo fluido escoar em seu interior devido ao movimento da tampa da cavidade. São apresentados também os objetivos e a estrutura desta dissertação.

1.1 O problema

Uma das áreas do conhecimento que trata da solução de problemas de dinâmica dos fluidos através de métodos numéricos é a Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD). Nela estão envolvidas as modelagens de fenômenos físico-químicos nas áreas de mecânica dos fluidos, transferência de calor e massa, entre outras, que são representados por modelos matemáticos (OBERKAMPF e BLOTTNER, 1998).

Segundo Fortuna (2000), o objetivo básico em CFD é reduzir o número de experimentos e explorar fenômenos que não poderiam ser estudados em laboratório de forma prática. Utilizando as técnicas de CFD podem-se avaliar numericamente os diversos parâmetros relevantes ao problema.

A simulação numérica de problemas de engenharia ocupa atualmente uma posição de destaque no cenário mundial de pesquisa e desenvolvimento de novas tecnologias. O crescente interesse, tanto no meio acadêmico como no setor industrial, pela modelagem dos fenômenos físicos, associado ao crescimento exponencial da tecnologia da informática, desencadearam nas últimas décadas uma enorme procura pelas técnicas de simulação. Desta união surgiram os simuladores comerciais, para os quais, a cada momento, novas ferramentas e técnicas são desenvolvidas, incorporadas e disponibilizadas (MARCHI e SCHNEIDER, 2004).

Geralmente, em engenharia, problemas que possuem solução analítica são aqueles que envolvem equações, geometrias e condições de contorno e iniciais simples, ou seja, são exceções. Para os demais problemas, é necessário utilizar métodos numéricos onde as soluções são obtidas através do emprego de computadores. O objetivo de um método numérico é obter a solução de uma ou mais equações diferenciais através da substituição das derivadas existentes por expressões algébricas que envolvem a função incógnita. O que caracteriza um método numérico é a forma de obtenção destas expressões. Elas serão aplicadas a cada ponto do domínio de cálculo, que deverá ser discretizado, ou seja, dividido em pontos, elementos ou volumes. As soluções serão obtidas nestes pontos.

Um fato de extrema importância a ser observado é se os resultados obtidos numericamente são confiáveis. Segundo Ferziger e Peric (1999), a diferença entre a solução analítica exata de uma variável de interesse e a sua solução numérica é denominada erro numérico. O erro numérico é causado por diversas fontes (MARCHI, 2001): erros de truncamento, erros de iteração, erros de arredondamento e erros de programação. Todas estas fontes de erro serão explicadas no capítulo 3. O processo que quantifica o erro numérico tem sido chamado recentemente de verificação (ROACHE, 1998; FORTUNA, 2000) ou validação numérica (MALISKA, 2005). A verificação é feita através de estimadores de erros, sendo que esta estimativa pode também ser chamada de incerteza numérica.

Quando se trata de problemas reais, ou seja, quando se obtêm soluções numéricas de modelos matemáticos cuja solução analítica é desconhecida, não é possível obter o erro numérico. Nestes casos é necessário estimar qual seria o valor da solução analítica. Desta forma, em vez do erro numérico obtém-se o erro estimado, que também é chamado de incerteza (U) por Metha (1996). A forma de obtenção da incerteza (U) está descrita no capítulo 3, a maioria delas se baseia na extrapolação de Richardson (ROACHE, 1998). A incerteza de uma solução numérica é calculada com os chamados estimadores de erro.

O tema deste trabalho é a **verificação de soluções numéricas de escoamentos bidimensionais laminares em malhas uniformes**, verificação esta feita através dos estimadores de Richardson, GCI e Convergente. Estes estimadores são aplicados aos resultados obtidos das equações de Navier-Stokes.

As equações de Navier-Stokes modelam o escoamento de fluidos compressíveis e incompressíveis, turbulentos e laminares. Neste trabalho serão abordadas estas equações com várias simplificações (descritas no capítulo 2) para se resolver o problema da cavidade quadrada com tampa móvel com diferentes condições contorno. Serão analisadas variáveis de interesse globais (força da placa e fluxo de massa) e também variáveis locais (perfis de velocidade e velocidades centrais nas duas direções). Com os resultados obtidos das simulações numéricas será feita uma análise de erros através dos estimadores de erros já descritos anteriormente.

O presente trabalho se concentra apenas no erro de discretização, sendo que as outras fontes de erro; arredondamento, iteração e programação são consideradas desprezíveis, pois utiliza-se precisão dupla para a obtenção das soluções numéricas e o número de iterações é fixado para se garantir que o erro de máquina seja atingido.

Com a resolução do problema da cavidade, pretende-se responder a duas perguntas:

Por que estimar erros numéricos?

Por que verificar erros numéricos?

O primeiro problema abordado (descrito no capítulo 4) possui solução analítica, ou seja, não é um problema inédito. Pretende-se observar como se comporta o erro numérico conforme a malha é refinada, e também estimar as incertezas das soluções numéricas.

O segundo problema (descrito nos capítulos 5 e 6) não possui solução analítica, desta forma, é interessante que se faça uma análise da solução numérica, análise esta feita através da verificação da solução numérica. Esta verificação se faz necessária para que se tenha confiabilidade nos resultados obtidos.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem por objetivo resolver o problema da cavidade quadrada com tampa móvel, empregando-se as funções de interpolação UDS-1 (*Upstream Differencing Scheme*, de

primeira ordem), que neste trabalho será referenciado por UDS, e CDS (*Central Differencing Scheme*) com correção adiada para os termos advectivos, e CDS puro para os termos difusivos e de pressão (TANNEHILL *et al.* 1997), são considerados diferentes números de Reynolds e também diferentes condições de contorno. De forma sintetizada, os objetivos estão descritos abaixo:

1. verificar a ordem aparente para as variáveis de interesse globais e locais;
2. verificar o comportamento de erro numérico conforme a malha é refinada;
3. observar o desempenho dos estimadores de erros conforme a malha é refinada;
4. gerar um resultado de referência para os resultados obtidos com diferentes números de Reynolds para o problema sem solução analítica.

1.3 Organização do trabalho

Esta dissertação está organizada em oito capítulos e três apêndices, da seguinte forma:

- No capítulo 1 foi apresentada uma breve abordagem do problema a ser tratado neste trabalho e também os objetivos desta dissertação.
- O capítulo 2 aborda a teoria envolvida nos modelos matemático e numérico, e também são definidas e obtidas as variáveis de interesse.
- O capítulo 3 expõe a teoria de erros numéricos utilizada neste trabalho, ou seja, as fontes de erros e os estimadores aqui utilizados.
- No capítulo 4 são apresentados os resultados obtidos para o problema da cavidade quadrada descrito por Shih *et al.* (1989), bem como a análise de erros.

- Nos capítulos 5 e 6 estão expostos os resultados obtidos para o problema da cavidade descrito por Ghia *et al.* (1982), para os números de Reynolds iguais a 100 e 1000, bem como a análise feita para os erros.
- O capítulo 7 é dedicado à conclusão da dissertação.
- O capítulo 8 traz as referências bibliográficas dos trabalhos citados nesta dissertação.
- No apêndice A tem-se uma análise realizada para uma derivada em especial, ligada à variável de interesse força da placa.
- O apêndice B traz uma breve descrição do uso do Matlab.
- O apêndice C traz as tabelas com os dados utilizados para a construção dos gráficos das razões entre os estimadores de erros e também dos estimadores de erros obtidos a cada refinamento de malha para todos os problemas abordados.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Introdução

Para se obter a solução de um problema de engenharia, pode-se contar, fundamentalmente, com pelo menos três tipos de métodos:

- ✓ Métodos analíticos;
- ✓ Métodos numéricos (experimentação numérica); e
- ✓ Experimentação em laboratório.

Cada um destes tipos de métodos apresenta vantagens e desvantagens sobre os demais dependendo do problema e dos recursos disponíveis para resolvê-lo.

A experimentação numérica (uso de técnicas numéricas), praticamente não apresenta restrições, podendo resolver problemas com condições de contorno complicadas, definidos em geometrias arbitrárias e apresentando resultados com rapidez considerável. Entretanto, os dados obtidos devem ser confiáveis, e este é um ponto de extrema importância a ser observado pelo analista (MALISKA, 2005).

Para a obtenção da solução numérica neste trabalho, será utilizado o Método dos Volumes Finitos (descrito neste capítulo). Já a obtenção do modelo matemático será baseada nas leis universais de conservação.

O enfoque deste capítulo será a teoria envolvida nos modelos matemáticos e numéricos, e também a definição e obtenção das variáveis de interesse. Para um melhor entendimento, este capítulo está dividido em três partes, a saber:

- ✓ Modelo matemático geral;

- ✓ Modelo numérico;
- ✓ Variáveis de interesse.

2.2 Modelo Matemático Geral

Neste trabalho, as equações fundamentais de Dinâmica dos Fluidos são baseadas nas seguintes leis universais de conservação: Conservação da Massa e Conservação da Quantidade de Movimento Linear.

A Equação da Continuidade ou Conservação da Massa expressa na forma diferencial, é dada por (KUNDU, 1990)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0, \quad (2.1)$$

onde ρ é a massa específica do fluido (kg/m^3), t é o tempo (s), $\vec{\nabla}$ é o vetor gradiente e $\vec{U} = u\hat{i} + v\hat{j}$ é a velocidade do fluido (m/s).

O primeiro termo da Eq. (2.1) representa a taxa de incremento de ρ no volume de controle, enquanto o segundo representa a taxa do fluxo de massa passando através da superfície (que delimita o volume de controle) por unidade de volume (TANNEHILL *et al.* 1997).

As Equações da Conservação de Quantidade de Movimento Linear são obtidas a partir da segunda Lei de Newton, sendo que, para um escoamento incompressível, tem-se (KUNDU, 1990)

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \rho \mathbf{g} + \mu \nabla^2 U_i. \quad (2.2)$$

onde p é a pressão, g é a aceleração da gravidade e μ é a viscosidade dinâmica do fluido (suposta constante).

Todos os problemas que são considerados neste trabalho têm as seguintes características comuns:

- ✓ O regime é permanente;
- ✓ A variável tempo é usada como parâmetro de relaxação;
- ✓ As geometrias são bidimensionais;
- ✓ O escoamento é incompressível;
- ✓ As propriedades dos fluidos (massa específica e viscosidade) são constantes;
- ✓ Os efeitos gravitacionais são desprezados.

Pelo fato das equações serem bidimensionais, apenas as componentes u e v da velocidade nas direções x e y são necessárias; por serem incompressíveis, as deformações volumétricas são consideradas nulas. Como as propriedades dos fluidos mencionadas acima são constantes, elas são fatoradas nas derivadas; as forças de corpo podem ser desprezadas não incluindo os termos fonte, pois os efeitos gravitacionais foram desprezados..

Após essas simplificações as equações governantes, de Conservação da Massa e da Conservação da Quantidade de Movimento Linear, tornam-se, respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(U_i) = 0, \quad (2.3)$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(U_i) + \rho \frac{\partial}{\partial x_j}(U_i U_j) = -\frac{\partial P}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right) + S^{U_i}. \quad (2.4)$$

onde S^{U_i} é o termo fonte.

2.3 Modelo Numérico

A Dinâmica dos Fluidos Computacional é a área da computação científica que estuda métodos computacionais para simulação de fenômenos que envolvem fluidos em movimento com ou sem trocas de calor. Isso inclui tanto o movimento de fluidos ao redor de um corpo, escoamentos externos, como dentro de tubulações, escoamentos internos ou confinados (FORTUNA, 2000).

A tarefa de um método numérico é resolver uma ou mais equações diferenciais, substituindo as derivadas existentes na equação por expressões algébricas que envolvem a função incógnita. Um método analítico que tivesse a habilidade de resolver tais equações nos daria a solução em uma forma fechada e seria possível, então, calcular os valores das variáveis dependentes em nível infinitesimal, isto é, para um número infinito de pontos.

Por outro lado, ao fazer uma aproximação numérica da equação diferencial, se aceita ter a solução para um número discreto de pontos, esperando que, quanto maior for este número de pontos, mais próxima da solução exata será a solução aproximada (ou numérica). A maneira de se obter essas equações algébricas é que caracteriza o tipo de método numérico.

Uma das maneiras de se obter as equações aproximadas no método dos volumes finitos é, partindo-se da equação diferencial na forma conservativa (onde os fluxos aparecem dentro do sinal da derivada), integrá-la sobre o volume elementar no espaço e no tempo (MALISKA, 2005; VERSTEEG e MALALASEKERA, 1995).

2.3.1 Formulação do problema e definição do modelo numérico

Para definir o modelo numérico serão determinados todos os métodos, esquemas e procedimentos específicos usados para resolver numericamente o problema, entre eles: tipo de malha, método numérico, tipos de aproximações numéricas, variáveis de interesse, métodos para a resolução de sistema de equações, critérios de convergência do processo iterativo, estimadores de erros numéricos, *hardware*, algoritmo do programa computacional, linguagem de programação, precisão e compilador.

2.3.2 Discretização do domínio de cálculo

Discretizar o domínio de cálculo consiste em definir, ao longo deste domínio, em quais pontos se deseja conhecer a variável dependente. Para isso é necessário construir sobre o domínio uma malha, que conterá um conjunto de nós posicionados onde se deseja determinar a variável em questão. A geração da malha será realizada conforme o método numérico adotado.

O primeiro passo no Método dos Volumes Finitos é dividir o domínio em volumes de controle discretos. Os centros dos volumes são pontos nodais onde se deseja conhecer a variável dependente. Os contornos (ou faces) dos volumes de controle são posicionados nos pontos médios entre os nós adjacentes. Assim, cada nó é rodeado por um volume de controle ou célula, conforme mostra a figura 2.1. Para este trabalho foi adotado arranjo co-localizado de variáveis.

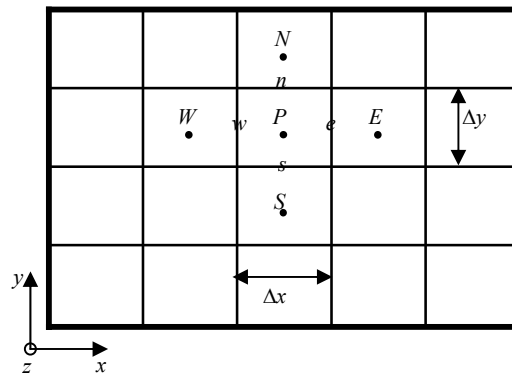


Figura 2.1: Malha estruturada uniforme bidimensional com volumes de controle

Um ponto geral nodal é identificado por P , e os vizinhos na horizontal são os nós oeste e leste, que são identificados por W e E , respectivamente. Ainda na linha horizontal, a face do lado oeste do volume de controle é referenciada por ' w ', e a face do lado leste é indicada por ' e '. As distâncias entre os nós W e P , e entre os nós P e E , são identificados por Δx . Para a vertical, os nós vizinhos ao ponto P são norte e sul, identificados por N e S , respectivamente. A mesma notação para as faces são adotadas para esta direção, sendo referenciadas por ' n ' para a face norte, e ' s ' para a face sul, conforme pode ser observado. As distâncias entre os nós S e P , e entre os nós P e N , são identificadas por Δy , se a malha for uniforme.

2.3.3 Discretização do modelo matemático

Para que seja possível tratar numericamente as equações diferenciais parciais (EDP), elas devem ser expressas na forma de operações aritméticas que o computador possa executar. Essas expressões poderão ser manipuladas pelo computador, relacionando entre si os valores das grandezas nos pontos discretos do domínio de cálculo. Portanto, antes de resolvermos a EDP de forma numérica, precisamos encontrar, para os termos que nela aparecem, as respectivas expressões algébricas escritas em função dos pontos da malha (FORTUNA, 2000).

Os termos das equações que constituem o modelo matemático e suas condições de contorno e iniciais são aproximados numericamente através de um método numérico, gerando assim, um sistema de equações algébricas, também denominado sistema de equações discretizadas.

Para cada nó genérico P da malha haverá uma equação discretizada do modelo matemático, relacionando o valor da variável dependente armazenada em P com os valores armazenados nos nós vizinhos.

Para completar a discretização do modelo matemático, são necessárias expressões algébricas para a variável dependente e sua derivada de primeira ordem, avaliadas nas faces dos volumes de controle. Essas expressões são chamadas de funções de interpolação. Em geral, elas têm o objetivo de avaliar o valor de uma propriedade genérica ϕ na interface do volume de controle bem como suas derivadas. Tradicionalmente o Método dos Volumes Finitos utiliza dois tipos de aproximação. Uma para determinação dos valores das derivadas de ϕ e outra para a determinação dos valores de ϕ nas interfaces de integração. Normalmente, na avaliação das derivadas é suficiente o uso de um esquema de diferenças centrais, e na avaliação de ϕ , emprega-se algum mecanismo que considere os efeitos advectivos do problema.

Os problemas associados com as não-linearidades no conjunto de equações e a ligação entre a pressão e a velocidade (acoplamento), podem ser resolvidos adaptando uma estratégia de solução iterativa tais como o algoritmo SIMPLE de Patankar e Spalding (1972). A aplicação destes algoritmos, que são necessários devido aos acoplamentos que surgem durante a resolução do problema, será vista a seguir.

2.3.4 Acoplamento pressão-velocidade

Quando as equações de conservação são escritas em função de uma única variável, significa que apenas uma das variáveis foi escolhida para ser tratada implicitamente, com as

outras sendo colocadas no termo fonte ou nos coeficientes e, portanto, sendo tratadas de forma explícita. Com isto, o sistema de equações tem que ser resolvido de maneira segregada ou sequencial.

A solução segregada das equações de Navier-Stokes gera o problema de acoplamento pressão-velocidade. Neste caso, para a determinação do campo de pressões, é necessário promover um acoplamento entre a equação de conservação da massa e as equações de conservação da quantidade de movimento, originando uma equação para a pressão. Através de algum esquema numérico, a equação de conservação da massa é transformada em uma equação que forneça o campo de pressões ou uma correção para tal (MALISKA, 2005).

Existem, atualmente, diversos métodos para tratar deste acoplamento. O objetivo de todos eles é criar uma equação para a pressão que permita que o processo iterativo avance, observando a conservação da massa.

Baseados nas idéias de Chorin (1971), muitos métodos para tratar o acoplamento pressão-velocidade foram desenvolvidos, sendo que um deles, muito utilizado até bem recentemente, é o método SIMPLE, desenvolvido por Patankar e Spalding (1972). Neste método, o acoplamento pode ser resolvido adaptando uma estratégia de solução iterativa.

O algoritmo que será utilizado para o desenvolvimento deste trabalho é o SIMPLEC (SIMPLE - Consistente) de Van Doormal e Raithby (1984). Neste algoritmo, os fluxos convectivos por unidade de massa através das faces das células, são calculados a partir das componentes de velocidade existentes. Um campo de pressões definido previamente é usado para resolver as equações de conservação da quantidade de movimento linear, e uma equação para a correção da pressão, deduzida da equação da continuidade, é resolvida para obter um campo de correção da pressão, que é usado para retornar os campos de velocidade e pressão. Para iniciar o processo iterativo são usados os campos de velocidade e pressão previamente determinados. Enquanto o algoritmo é executado, a intenção será a de melhorar os campos supostos progressivamente. O processo é repetido até a convergência dos campos de velocidade e pressão (VERSTEEG e MALALASEKERA, 1995).

2.3.5 Aplicação das condições de contorno

Os problemas de Dinâmica dos Fluidos Computacional são definidos em termos das equações diferenciais parciais e das condições de contorno e iniciais. É importante que o usuário especifique as condições de contorno e iniciais e compreenda seu papel no algoritmo numérico. Em problemas transientes, os valores iniciais de todas as variáveis do escoamento necessitam ser especificadas para todos os pontos das soluções no domínio do escoamento.

A seguir, ao obtermos a equação aproximada para um volume elementar genérico, esta foi deduzida para um volume interno. Todos os outros volumes internos possuem equações aproximadas idênticas (para malhas estruturadas). Para se obter o sistema de equações algébricas completo é também necessário obter as equações para os volumes que estão na fronteira. Existem diversas formas de aplicação das condições de contorno. Uma delas é criar uma malha na qual o ponto central do volume de controle fique sobre a fronteira. Este procedimento dá origem ao meio volume de controle perto da fronteira e aos volumes internos inteiros, conforme pode ser visto na figura 2.2.

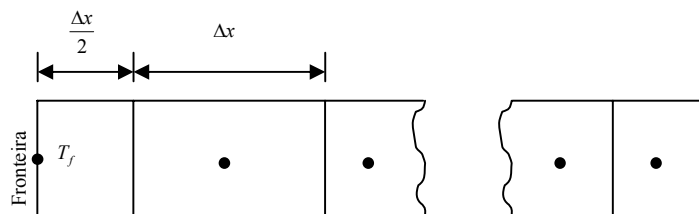


Figura 2.2: Discretização com meio-volume na fronteira (Maliska, 2005)

Segundo Maliska (2005), dois problemas aparecem com este procedimento, o primeiro se deve a não-uniformidade dos volumes, conforme pode ser visto na figura 2.3 e o segundo ocorre quando a variável de interesse na fronteira é conhecida. Neste último, para problemas bidimensionais e tridimensionais teremos toda uma faixa de volumes de controle não respeitando os princípios de conservação.

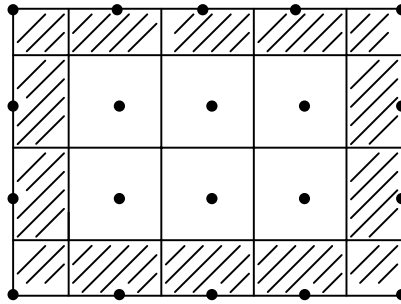


Figura 2.3: Discretização bidimensional com meios-volumes na fronteira

A seguir são descritos dois procedimentos que respeitam a conservação para todos os volumes, a saber:

- ✓ Volumes Fictícios que utiliza volumes inteiros para todos os volumes, respeitando, portanto, os princípios de conservação para todo o domínio. Todos os volumes do domínio, inclusive os de fronteira, são interpretados como internos, uma vez que são criados os volumes fictícios. A desvantagem é a criação de novas incógnitas, aumentando o tamanho do sistema linear, situação que vai se agravando quando a dimensão do problema aumenta (figura 2.4).

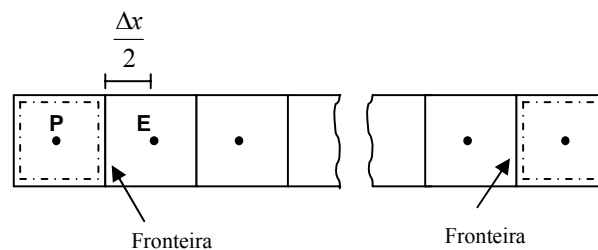


Figura 2.4: Condições de contorno com volumes fictícios (Maliska, 2005)

- ✓ Balanços para os Volumes de Fronteira significa realizar a integração das equações de conservação também para os volumes de fronteira, da mesma forma realizada para os volumes internos, respeitando a condição de contorno existente. Neste procedimento, a discretização do domínio é feita com volumes elementares inteiros. Assim, não existem variáveis sobre a fronteira, sendo sempre necessário realizar os balanços para todos os volumes, independentemente do tipo de condição de contorno (figura 2.5).

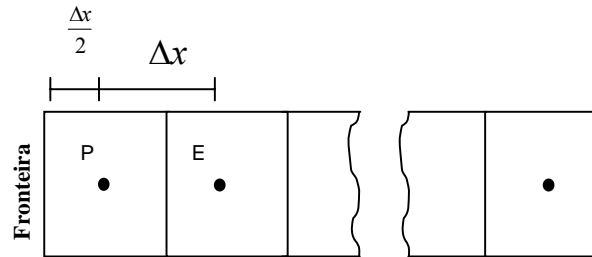


Figura 2.5: Discretização unidimensional com volumes inteiros (Maliska, 2005)

2.3.6 Obtenção da solução numérica

As equações discretizadas resultantes da discretização do modelo matemático formam um sistema de equações, que é resolvido com algum método direto ou iterativo, sendo então obtida a solução *aproximada* do problema. Ela não é exata devido a erros que são inerentes ao processo de discretização das equações, e devido a erros de arredondamento nos cálculos feitos no computador (FORTUNA, 2000). As fontes de erro serão definidas no capítulo 3.

Após a obtenção da solução aproximada, pode-se visualizar e analisar os resultados através de gráficos, isolinhas, isorregiões, isosuperfícies, campos de vetores e estimativas de erros de modelagem e numéricos.

Para a obtenção da solução numérica do problema da cavidade, alguns parâmetros foram levados em conta, como: malha uniforme em cada direção com razão de refino constante, o uso de volumes fictícios para a aplicação das condições de contorno, o acoplamento pressão-velocidade obtido com o método SIMPLEC, as equações foram resolvidas segregadamente, com arranjo co-localizado de variáveis, e o tempo foi usado como parâmetro de relaxação.

2.3.7 Coeficientes e termos fontes da velocidade

Para se obter a solução numérica, as equações governantes (Eqs. (2.3) e (2.4)) foram discretizadas com o Método dos Volumes Finitos, sendo que foram consideradas as seguintes hipóteses simplificativas: domínio de cálculo quadrado com dimensões unitárias, massa específica e viscosidade do fluido constantes, tempo usado como parâmetro de relaxação, empregando a função de interpolação WUDS. Para os volumes internos, tem-se que:

$$a_p^V \phi_p = a_w^V \phi_w + a_e^V \phi_e + a_s^V \phi_s + a_n^V \phi_n + b_p^\phi, \quad (2.5)$$

onde ϕ é a variável de interesse, neste caso pode ser velocidades ou pressão.

$$a_e^V = \frac{\mu \Delta y \Delta z}{\Delta x} - \left(\frac{1}{2} - \alpha_e \right) \dot{M}_e, \quad (2.6)$$

$$a_w^V = \frac{\mu \Delta y \Delta z}{\Delta x} + \left(\frac{1}{2} + \alpha_w \right) \dot{M}_w, \quad (2.7)$$

$$a_n^V = \frac{\mu \Delta x \Delta z}{\Delta y} - \left(\frac{1}{2} - \alpha_n \right) \dot{M}_n, \quad (2.8)$$

$$a_s^V = \frac{\mu \Delta x \Delta z}{\Delta y} + \left(\frac{1}{2} + \alpha_s \right) \dot{M}_s, \quad (2.9)$$

$$a_p^V = \frac{M_p}{\Delta t} + a_e^V + a_w^V + a_n^V + a_s^V, \quad (2.10)$$

sendo que os fluxos de massa nas faces e a massa do volume de controle **P** são dados por:

$$\dot{M}_e = \rho u_e \Delta y \Delta z, \quad (2.11)$$

$$\dot{M}_w = \rho u_w \Delta y \Delta z, \quad (2.12)$$

$$\dot{M}_n = \rho v_n \Delta x \Delta z, \quad (2.13)$$

$$\dot{M}_s = \rho v_s \Delta x \Delta z, \quad (2.14)$$

$$M_p = \rho \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (2.15)$$

com

$$\mu = U_t L / \text{Re}, \quad (2.16)$$

onde U_t é a velocidade na tampa, $\Delta z = 1$, Δt varia conforme o tamanho da malha. Tem-se ainda que:

$$\alpha_e = \frac{1}{2} \text{sign}(u_e), \quad (2.17)$$

$$\alpha_w = \frac{1}{2} \text{sign}(u_w), \quad (2.18)$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2} \text{sign}(v_n), \quad (2.19)$$

$$\alpha_s = \frac{1}{2} \text{sign}(v_s), \quad (2.20)$$

onde a função $sign(a)$ significa tomar apenas o sinal da variável a .

O termo fonte é dado por:

$$b_p^\phi = b_t^\phi + b_p^\phi + b^{S_\phi}, \quad (2.21)$$

que será determinado nos capítulos 4 e 5.

A aplicação das condições de contorno para os volumes fictícios, para o volume norte, por exemplo, resulta em:

$$a_p^V = 1 \quad (2.22 \text{ a})$$

$$a_s^V = -1 \quad (2.22 \text{ b})$$

$$a_w^V = 0 \quad (2.22 \text{ c})$$

$$a_e^V = 0 \quad (2.22 \text{ d})$$

$$a_n^V = 0 \quad (2.22 \text{ e})$$

$$b_p^V = 2 \quad (2.22 \text{ f})$$

sendo que para os outros contornos, os coeficientes podem ser obtidos de maneira equivalente.

2.3.8 Coeficientes e termo fonte da pressão

Da discretização da equação da massa surgem os coeficientes e o termo fonte para se obter a pressão nos volumes internos:

$$a_p^p p_p' = a_w^p p_w' + a_e^p p_e' + a_s^p p_s' + a_n^p p_n' + b_p^p \quad (2.23)$$

onde

$$a_w^p = d_w \Delta y \quad (2.24 \text{ a})$$

$$a_e^p = d_e \Delta y \quad (2.24 \text{ b})$$

$$a_s^p = d_s \Delta x \quad (2.24 \text{ c})$$

$$a_n^p = d_n \Delta x \quad (2.24 \text{ d})$$

$$b_p^p = (u_w^* - u_e^*) \Delta y + (v_s^* - v_n^*) \Delta x \quad (2.24 \text{ e})$$

Os coeficientes para o método SIMPLEX são:

$$(d_e)_p = \frac{(d_p^u + d_e^u)}{2} \quad (2.25)$$

$$(d_w)_p = (d_e)_w \quad (2.26)$$

$$(d_n)_p = \frac{(d_p^v + d_N^v)}{2} \quad (2.27)$$

$$(d_s)_p = (d_n)_s \quad (2.28)$$

onde

$$d_p^u = \frac{\Delta y \Delta z}{(a_p^u - \sum a_{nb}^u)} \quad (2.29)$$

$$d_p^v = \frac{\Delta x \Delta z}{(a_p^v - \sum a_{nb}^v)} \quad (2.30)$$

$$\sum a_{nb}^V = a_w^V + a_e^V + a_n^V + a_s^V \quad (2.31)$$

Para a obtenção da Eq. (2.23), tem-se que:

$$u_e^* = \frac{\left[\sum (a_{nb}^u u_{nb}^*)_P + \sum (a_{nb}^u u_{nb}^*)_E + \left(\frac{M_P + M_E}{\Delta t} \right) u_e^0 - 2(p_E^* - p_P^*) \Delta y \Delta z \right]}{\left[(a_p^V)_P + (a_p^V)_E \right]} \quad (2.32)$$

$$v_n^* = \frac{\sum (a_{nb}^v v_{nb}^*)_P + \sum (a_{nb}^v v_{nb}^*)_N + \left(\frac{M_P + M_N}{\Delta t} \right) v_n^0}{\left[(a_p^V)_P + (a_p^V)_N \right]} + \frac{-2(p_N^* - p_P^*) \Delta x \Delta z + (L[S^v]_P + L[S^v]_N) \Delta x \Delta y \Delta z}{\left[(a_p^V)_P + (a_p^V)_N \right]} \quad (2.33)$$

onde

$$\sum (a_{nb}^u u_{NB}^*)_P = (a_w^u)_P u_W^* + (a_e^u)_P u_E^* + (a_s^u)_P u_S^* + (a_n^u)_P u_N^* \quad (2.34)$$

$$\sum (a_{nb}^u u_{NB}^*)_E = (a_w^u)_E u_P^* + (a_e^u)_E u_{EE}^* + (a_s^u)_E u_{SE}^* + (a_n^u)_E u_{NE}^* \quad (2.35)$$

$$\sum (a_{nb}^v v_{NB}^*)_P = (a_w^v)_P v_W^* + (a_e^v)_P v_E^* + (a_s^v)_P v_S^* + (a_n^v)_P v_N^* \quad (2.36)$$

$$\sum (a_{nb}^v v_{NB}^*)_N = (a_w^v)_N v_{NW}^* + (a_e^v)_N v_{NE}^* + (a_s^v)_N v_P^* + (a_n^v)_N v_{NN}^* \quad (2.37)$$

Os nós utilizados para a obtenção das equações aqui descritas podem ser observados na figura 2.6.

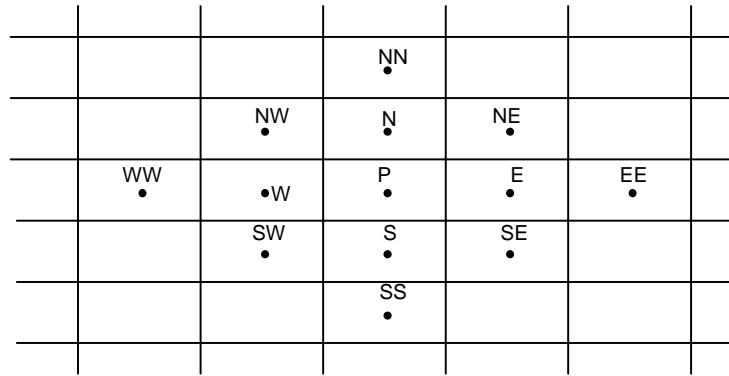


Figura 2.6: Localização dos nós no domínio de cálculo discretizado

A equação utilizada para a correção da pressão e das velocidades para os volumes internos, estão listadas a seguir:

$$p_P = p_P^* + p_p' \quad (2.38)$$

$$u_p = u_p^* - d_p^u \frac{(p'_E - p'_W)}{2} \quad (2.39)$$

$$v_p = v_p^* - d_p^v \frac{(p'_N - p'_S)}{2} \quad (2.40)$$

$$u_e = u_e^* - d_e (p'_E - p'_P) \quad (2.41)$$

$$u_w = u_w^* - d_w (p'_P - p'_W) \quad (2.42)$$

$$v_n = v_n^* - d_n (p'_N - p'_P) \quad (2.43)$$

$$v_s = v_s^* - d_s (p'_P - p'_S) \quad (2.44)$$

Para os contornos as velocidades nas faces são dadas por:

$$u_e^* = 0 \quad (2.45)$$

$$v_n^* = 0 \quad (2.46)$$

Para a pressão, a condição de contorno aplicada foi obtida através de interpolação linear:

Contorno esquerdo:

$$p'_P = p'_E - (p'_{EE} - p'_E) \quad (2.47)$$

ou

$$a_p^p = 1 \quad (2.48 \text{ a})$$

$$a_e^p = 1 \quad (2.48 \text{ b})$$

$$a_w^p = 0 \quad (2.48 \text{ c})$$

$$a_s^p = 0 \quad (2.48 \text{ d})$$

$$a_n^p = 0 \quad (2.48 \text{ e})$$

$$b_p^p = -(p_{EE}' - p_E') \quad (2.48 \text{ f})$$

Contorno direito:

$$p_p' = p_w' + (p_w' - p_{ww}') \quad (2.49)$$

ou

$$a_p^p = 1 \quad (2.50 \text{ a})$$

$$a_w^p = 1 \quad (2.50 \text{ b})$$

$$a_e^p = 0 \quad (2.50 \text{ c})$$

$$a_n^p = 0 \quad (2.50 \text{ d})$$

$$a_s^p = 0 \quad (2.50 \text{ e})$$

$$b_p^p = p_w' - p_{ww}' \quad (2.50 \text{ f})$$

Contorno sul:

$$p_p' = p_N' - (p_{NN}' - p_N') \quad (2.51)$$

ou

$$a_p^p = 1 \quad (2.52 \text{ a})$$

$$a_n^p = 1 \quad (2.52 \text{ b})$$

$$a_w^p = 0 \quad (2.52 \text{ c})$$

$$a_s^p = 0 \quad (2.52 \text{ d})$$

$$a_e^p = 0 \quad (2.52 \text{ e})$$

$$b_p^p = -(p_{NN}' - p_N') \quad (2.52 \text{ f})$$

Contorno norte:

$$p_p' = p_S' + (p_S' - p_{SS}') \quad (2.53)$$

ou

$$a_p^p = 1 \quad (2.54 \text{ a})$$

$$a_s^p = 1 \quad (2.54 \text{ b})$$

$$a_w^p = 0 \quad (2.54 \text{ c})$$

$$a_e^p = 0 \quad (2.54 \text{ d})$$

$$a_n^p = 0 \quad (2.54 \text{ e})$$

$$b_p^p = p_s' - p_{ss}' \quad (2.54 \text{ f})$$

2.3.9 Algoritmos

Para se resolver o sistema de equações lineares que surge da discretização das equações diferenciais envolvidas foi utilizado o método MSI (Modified Strongly Implicit Method) (SCHNEIDER e ZEDAN, 1981).

Dada uma equação diferencial governante para o caso bidimensional, uma equação algébrica é formada para cada volume de controle. Veja abaixo um exemplo de um esquema de 5 pontos:

$$a_{i,j}^s \phi_{i,j-1} + a_{i,j}^w \phi_{i-1,j} + a_{i,j}^p \phi_{i,j} + a_{i,j}^n \phi_{i,j+1} + a_{i,j}^e \phi_{i+1,j} = f_{i,j}. \quad (2.55)$$

A coleção de equações na forma da equação (2.55) escrita para cada par (i, j) do domínio, produz uma equação matricial da forma $\mathbf{A} \phi = f$. O MSI (SCHNEIDER e ZEDAN,

1981) é um método iterativo para se resolver este sistema de equações. Este método é também conhecido como método fortemente implícito. Dentre suas vantagens estão:

- ✓ remover ou enfraquecer a influência da assimetria das matrizes $[\mathbf{L}][\mathbf{U}]$;
- ✓ reduzir o esforço computacional demandado para se obter a solução convergida;
- ✓ reduzir a sensibilidade à razão de aspecto da malha.

Neste método, uma decomposição \mathbf{LU} é proposta, tal que, $[\mathbf{L}][\mathbf{U}] = [\mathbf{A}']$, onde as matrizes $[\mathbf{L}]$ e $[\mathbf{U}]$ são matrizes triangulares inferior e superior, respectivamente, com \mathbf{U} tendo a diagonal unitária. Ao transformar o produto \mathbf{LU} , em \mathbf{A}' existem duas diagonais adicionais não-nulas denotadas por σ_1 e σ_2 . Desta forma, a matriz \mathbf{A}' pode ser escrita da seguinte forma: $[\mathbf{A}'] = [\mathbf{A}] + [\mathbf{B}]$, onde a matriz \mathbf{B} consiste apenas das diagonais σ_1 e σ_2 .

Os coeficientes das matrizes \mathbf{L} e \mathbf{U} e os coeficientes adicionais não-nulos que aparecem na matriz modificada \mathbf{A}' podem ser determinados diretamente pela definição das equações determinadas pela formação do produto \mathbf{LU} . Um procedimento iterativo e corretivo é necessário para anular a forte influência destes termos no sistema de equações modificado. Um parâmetro iterativo α é empregado para o cancelamento parcial da influência dos termos adicionais de \mathbf{A}' . Isto é feito, escrevendo-se as equações modificadas de \mathbf{A}' para o esquema de 5 pontos (figura 2.7) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & a_{i,j}^s \phi_{i,j-1} + a_{i,j}^w \phi_{i-1,j} + a_{i,j}^p \phi_{i,j} + a_{i,j}^n \phi_{i,j+1} + a_{i,j}^e \phi_{i+1,j} + \\
 & \sigma_{i,j}^1 [\phi_{i+1,j-1} - \alpha(-2\phi_{i,j} + 2\phi_{i+1,j} + \phi_{i,j-1})] + \\
 & \sigma_{i,j}^4 [\phi_{i-2,j+1} - \alpha(-2\phi_{i,j} + 2\phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1})] = f_{i,j}
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

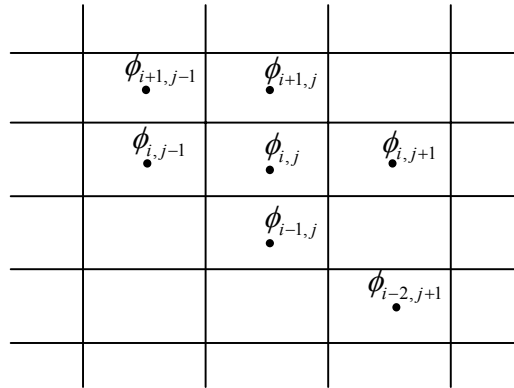


Figura 2.7: Malha geométrica utilizada no MSI

Procedimento MSI para $\mathbf{A}\phi = f$

1. Dado: $\mathbf{A}\phi = f$, $it=1$ e it_max ;
2. Some $B\phi$ em ambos os lados: $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\phi = f + \mathbf{B}\phi$;
3. Crie o processo iterativo: $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\phi^{n+1} = f + \mathbf{B}\phi^n$;
4. Aplique a decomposição **LU** em $(\mathbf{A} + \mathbf{B})$: $(\mathbf{LU})\phi^{n+1} = f + \mathbf{B}\phi^n$;
5. Dados $n = 0$, n_maximo e ϕ^0 ;
6. Resolva por substituição retroativa: $L\kappa^{n+1} = f + \mathbf{B}\phi^n$;
7. Resolva por substituição progressiva: $\mathbf{U}\phi^{n+1} = \kappa^{n+1}$;
8. Faça n receber $n + 1$;
9. Volte ao passo 5 até convergir ou atingir n_maximo .
10. Atualize os coeficientes de \mathbf{A} ;
11. Faça it receber $it + 1$;

12. Volte ao passo 2 até convergir ou atingir it_{max} .

Detalhes sobre a obtenção dos coeficientes das matrizes \mathbf{L} e \mathbf{U} e as diagonais da matriz B podem ser encontrados em Schneider e Zedan (1981).

Para os dois problemas em questão, na implementação da Linguagem FORTRAN/95 foi utilizado o algoritmo descrito a seguir:

1. Ler os dados do problema, discretizar o domínio de cálculo, inicializar as variáveis;
2. Obter os coeficientes para u e v nos volumes reais com as Eqs. (2.6) a (2.10);
3. Calcular o termo fonte para u nos volumes reais com a Eq. (2.21);
4. Obter os coeficientes e termos fontes para u nos volumes fictícios com as Eqs. (2.22 a) a (2.22 f);
5. Resolver o sistema da Eq. (2.5) para u com o método MSI, repetir Iv vezes;
6. Calcular o termo fonte para v nos volumes reais com as Eqs. (2.21);
7. Obter os coeficientes e termos fontes para v nos volumes fictícios com as Eqs. (2.22 a) a (2.22 f);
8. Resolver o sistema da Eq. (2.5) para v com o método MSI, repetir Iv vezes;
9. Calcular as velocidades nas faces internas do domínio de cálculo com as Eqs. (2.32) e (2.33);
10. Obter os coeficientes do método SIMPLEC com as Eqs. (2.25), (2.27), (2.29) e (2.30);
11. Calcular os coeficientes e termos fontes de p' nos volumes reais com as Eqs. (2.24 a) a (2.24 f);
12. Calcular os coeficientes e termos fontes de p' nos volumes fictícios com as Eqs. (2.48 a) a (2.48 f), (2.50 a) a (2.50 f), (2.52 a) a (2.52 f), (2.54 a) a (2.54 f);

13. Resolver o sistema da Eq. (2.23) para p' com o método MSI, repetir I_p vezes;
14. Obter a pressão p através da Eq. (2.38) e aplicar as Eqs. (2.47), (2.49), (2.51) e (2.53) para p_p ;
15. Atualizar u e v com p' nos volumes reais através das Eqs. (2.39) e (2.40);
16. Atualizar u e v com p' nos volumes fictícios;
17. Obter as velocidades nas faces internas do domínio de cálculo com p' através das Eqs. (2.42) e (2.44), voltar ao passo 11 I_m vezes;
18. Visualizar os resultados.

No algoritmo acima, nos passos 5 e 8, I_v é o número de iterações internas para u e v , que será definido conforme o tamanho da malha. No passo 13, I_p é o número de iterações internas para a pressão, que também será definido posteriormente. O ciclo da massa, que tem início no passo 11 indo até o 17, deve ser iterado I_m vezes (definido nos capítulos subsequentes), e por último, o ciclo geral que vai do passo 2 ao 17, deve ser repetido até que o processo atinja o erro de máquina, ou que um critério de parada seja satisfeito, critério este baseado no resíduo.

Segundo Ferziger e Peric (2002), quando o método utilizado para se resolver os sistemas de equações é iterativo, como o adotado neste trabalho, é importante adotar um critério de parada. O procedimento mais comum é baseado na diferença entre duas soluções de iterações sucessivas. Este algoritmo é parado quando esta diferença, medida por alguma norma, é menor que um valor pré-definido. Esta norma pode ser obtida através do cálculo do resíduo, que está descrito a seguir.

Basicamente, deve-se lembrar que a discretização de uma equação diferencial através de um método numérico resulta em

$$[A][\lambda] = [B]. \quad (2.57)$$

O resíduo para o sistema definido pela Eq. (2.57) é definido genericamente por (Ferziger e Peric, 2002)

$$R^n = B - A\lambda^n, \quad (2.58)$$

onde λ^n é a solução da incógnita na iteração n . Para o caso particular que será tratado neste trabalho, tem-se

$$R_p^n = (a_W)_p \phi_W^n + (a_E)_p \phi_E^n + (a_N)_p \phi_N^n + (a_S)_p \phi_S^n + b_p - (a_P)_p \phi_P^n. \quad (2.66)$$

O critério para interromper o processo iterativo com base no resíduo das equações é

$$\text{Se } \frac{L^n}{L^0} \leq Tol \rightarrow \text{parar}, \quad (2.59)$$

onde L^n é a norma dos resíduos na iteração n ; L^0 é a norma dos resíduos na iteração 0 , ou seja, antes de iniciar o processo iterativo. Neste caso, os resíduos são calculados com base na estimativa inicial da solução; Tol é a tolerância admitida para interromper o processo iterativo. A norma utilizada neste trabalho conhecida como L_1 é descrita da seguinte forma:

$$L_1 = \sum_{p=1}^n |R_p^n|. \quad (2.60)$$

Neste trabalho, o resíduo foi utilizado para monitorar o processo iterativo, ou seja, o procedimento foi iterado até que o erro de máquina fosse atingido (por este motivo a tolerância adotada foi 10^{-10}).

2.4 Definição e obtenção das variáveis de interesse

2.4.1 Definições

Neste trabalho, o problema a ser tratado é o escoamento recirculante na cavidade quadrada, onde serão variadas as condições de contorno, dando origem a dois problemas muito conhecidos na engenharia: o problema descrito por Shih *et al.* (1989), que possui um termo fonte atuando no escoamento e, por isso, possui solução analítica. O outro problema é o descrito por Ghia *et al.* (1982), que não possui solução analítica. Cada um dos problemas abordados está descrito nos próximos capítulos, sendo que, para sua resolução, vários aspectos são considerados em comum.

As variáveis de interesse para os dois problemas são as mesmas: força da placa sobre o fluido (F), fluxo de massa (\dot{M}), os perfis de velocidade nas duas direções x e y , e as velocidades centrais $u(0,5;0,5)$ e $v(0,5;0,5)$.

A força da placa é definida por (KUNDU, 1990; FOX e MCDONALD, 1995):

$$F = \tau_{xy} a, \quad (2.61)$$

onde $\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{tampa}$, e a é a área onde a força atua, resultando em:

$$F = \mu \int_0^{L_x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{tampa} z dx, \quad (2.62)$$

onde L_x é o comprimento do domínio de cálculo na direção x , z é a profundidade que é considerada unitária.

Para a outra variável global, fluxo de massa, tem-se que (KUNDU, 1990; FOX e MCDONALD, 1995):

$$\dot{M}_u = -\rho\psi_{\min}, \quad (2.63)$$

com

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy, \quad (2.64)$$

onde

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = u. \quad (2.65)$$

e, para a outra direção

$$\dot{M}_v = \int_0^{x/2} \rho v dx, \quad (2.66)$$

onde \dot{M}_u e \dot{M}_v são os fluxos de massa na direção x e na direção y , respectivamente. Para a obtenção desta variável de interesse a partir das linhas de corrente, como é o caso de \dot{M}_u , foi necessário determinar o campo do fluxo de massa do escoamento, com a Eq. (2.65). Com este campo, foi possível obter linhas com um valor constante para o fluxo. Obtendo-se a diferença entre duas linhas teremos o fluxo de massa que escoar entre elas. Para a obtenção desta variável

de interesse, será tomado o menor valor dentre os obtidos. O \dot{M}_v é obtido através da integração sobre a linha 1, também indicada na figura 2.6.

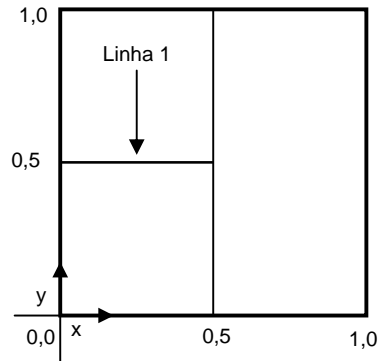


Figura 2.8: Posição das linhas de tomada de dados para os cálculos do fluxo de massa

Analiticamente, os perfis de velocidade nas duas direções, bem como as velocidades centrais, foram obtidas diretamente das equações para u e v , através da substituição das coordenadas desejadas nas expressões.

Na obtenção das equações discretizadas para as variáveis de interesse, pode ser observada a ordem assintótica de cada uma delas, conforme demonstrado na tabela 2.1. Os valores para p_L são os valores que o expoente que acompanha h (espaçamento da malha: $\Delta x = \Delta y$) no primeiro termo do erro de truncamento na equação discretizada assume (MARCHI e SCHNEIDER, 2004). A forma de obtenção da ordem assintótica é descrita no capítulo 3.

Tabela 2.1: Ordem assintótica para as variáveis de interesse

Variável de interesse	Ordem assintótica p_L
Fluxo de massa total	2
Fluxo de massa obtido com v_n	2
Força da placa sobre o fluido com UDS	1
Força da placa sobre o fluido com UDS-2	2
Velocidade na direção u	2
Velocidade na direção v	2

2.4.2 Aproximações numéricas

A forma de obtenção das variáveis de interesse numericamente está descrita a seguir, sendo que as equações abaixo descritas se aplicam aos dois problemas abordados neste trabalho: problema de Shih e problema de Ghia. A força da placa sobre o fluido foi obtida numericamente através de uma aproximação com UDS-2 (FERZIGER e PERIC, 2002), que foi aplicada na derivada parcial que aparece no desenvolvimento da Eq. (2.62). Para se obter os resultados numéricos da força, foram somadas todas as aproximações das velocidades ao longo do contorno superior da placa, conforme está ilustrado na figura 2.9, ou seja,

$$F_{UDS-2} = \sum_{p=2}^{N_y-1} \frac{\mu \Delta x}{3 \Delta y} (8u_{p,tampa} - 9u_{p,N_y-1} + u_{p,N_y-2}), \quad (2.67)$$

onde u_p é a velocidade local da tampa da cavidade.

Para a força da placa foi feita uma análise com os resultados obtidos com outra aproximação numérica: UDS. O procedimento para a obtenção da solução numérica é idêntico ao anterior, com a alteração apenas da aproximação utilizada. Desta forma,

$$F_{UDS} = \sum_{p=2}^{N_y-1} \frac{\mu \Delta x}{\Delta y} (u_{p,tampa} - u_{p,N_y-1}), \quad (2.68)$$

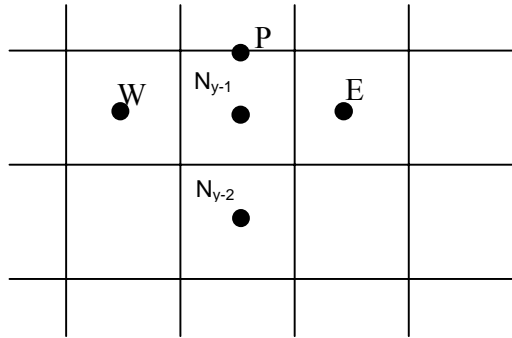


Figura 2.9: Aplicação da força da placa numericamente

O fluxo de massa que escoar na cavidade é obtido com a função de corrente baseada na velocidade média u na face leste de cada volume de controle (figura 2.10), ou seja,

$$\dot{M}_u = -\rho\psi_{\min}, \quad (2.69)$$

onde ψ_{\min} é o mínimo valor obtido por:

$$\psi = \sum_{i=1}^{N_x-1} \sum_{j=2}^{N_y-2} (u_e((j-1)N_x + i)\Delta y). \quad (2.70)$$

O fluxo de massa que escoar em $y = 0,5$ e $x[0;0,5]$, que é representado por \dot{M}_v é obtido pela integração da velocidade média v na face norte de cada volume através da regra do retângulo.

$$\dot{M}_v = \sum_{i=1}^{\frac{N_x}{2}} v_n(i)\rho\Delta x. \quad (2.71)$$

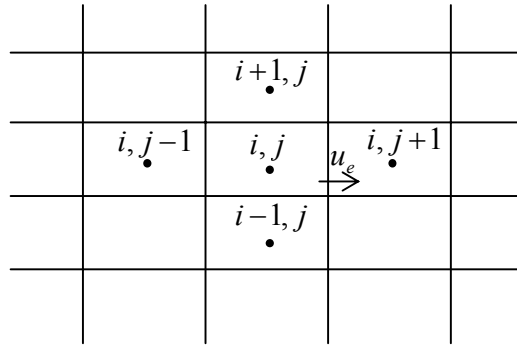


Figura 2.10: Localização dos nós para a tomada de valores para a obtenção do fluxo de massa

Neste trabalho também são analisados os perfis de velocidades tanto na direção x quanto na direção y . Para a obtenção destes perfis, que serão analisados em coordenadas pré-determinadas, foi fixado o centro geométrico do domínio de cálculo em uma das direções, enquanto foram variadas as coordenadas na outra. O perfil da velocidade u em $x=0,5$, foi obtido através da média aritmética das velocidades na face leste nos dois volumes vizinhos, pois nesta coordenada ($x=0,5$), não temos centros de volumes. O perfil da velocidade v em $y=0,5$ foi obtido através da média aritmética das velocidades na face norte nos dois volumes vizinhos, conforme pode ser observado nas Eqs. (2.72) e (2.73).

$$u(0,5;0,5) = \sum_{i=1}^{N_y} \left(\frac{u_e(i) + u_e(i+1)}{2} \right) \quad (2.72)$$

$$v(0,5;0,5) = \sum_{i=1}^{N_x} \left(\frac{v_n(i) + v_n(i+1)}{2} \right) \quad (2.73)$$

A razão de refino adotada é igual a dois ($q = 2$), por causa da análise de erros, para que se tenha uma razão de refino constante. A obtenção dos perfis de velocidade através da média aritmética não comprometeu os resultados, conforme se pode observar nas tabelas que apresentam os erros numéricos (no capítulo 4), e nos gráficos com as ordens práticas obtidas a partir das soluções numéricas (capítulos 4 e 5).

3 Erros Numéricos

3.1 Introdução

Existem dois níveis de erros que podem estar presentes na solução numérica quando os resultados são comparados com a realidade de um problema físico: no primeiro nível estão os erros numéricos, que resultam da má solução das equações diferenciais. Aspectos como precisão da solução e convergência do algoritmo são testados nesta fase, que pode ser chamada de verificação. Esse processo atesta a qualidade do modelo numérico. No segundo nível estão os erros que são resultantes do uso de equações diferenciais, que não representam adequadamente o fenômeno, que pode ser chamado de validação. Este processo, portanto, preocupa-se com a fidelidade do modelo matemático para com o problema físico em questão.

Na visão da engenharia, esta fidelidade é o ponto que interessa. Logo, a ferramenta numérica é adequada e confiável quando se está de posse de um método numérico que resolva corretamente as equações diferenciais, e de um modelo matemático que, sabidamente, represente com fidelidade o fenômeno físico (MALISKA, 2005).

A origem dos erros está ligada aos processos de análise e solução de um problema. Há dois grandes grupos de métodos para a análise e solução de problemas: os experimentais e os teóricos. Estes últimos, por sua vez podem ser divididos em dois grupos distintos, os analíticos e os numéricos. Na Figura 3.1 é mostrada esta divisão entre os métodos de solução e os respectivos erros gerados em cada fase.

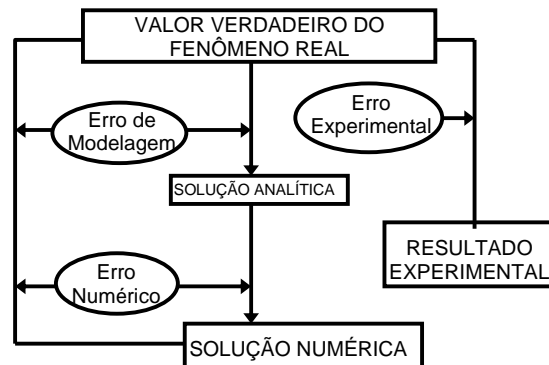


Figura 3.1: Erros envolvidos nos métodos de engenharia (Marchi e Schneider, 2004)

Neste trabalho não será feita a definição dos tipos de erros para os métodos experimentais uma vez que estamos tratando apenas de métodos de solução numérica de problemas, ou seja, apenas de métodos teóricos.

A diferença entre a solução analítica exata (Φ) de uma variável de interesse e a sua solução numérica (ϕ) é denominada por Ferziger e Peric (2002) de erro da solução numérica (E), ou simplesmente, erro numérico, isto é:

$$E(\phi) = \Phi - \phi \quad (3.1)$$

A magnitude aceitável para o erro numérico depende, entre outros, da finalidade da solução numérica, dos recursos financeiros envolvidos, do tempo permitido para realizar as simulações e dos recursos computacionais disponíveis. Sabendo-se que as soluções numéricas contêm erros, é importante estimá-los pelos seguintes motivos (MARCHI, 2001):

- ✓ Quando o erro é maior do que o aceitável, compromete-se a confiabilidade do uso da solução numérica;
- ✓ Quando o erro é menor do que o necessário, há desperdício de recursos computacionais, isto é, de tempo de processamento e de quantidade de memória;

- ✓ Para validar e desenvolver modelos matemáticos que visem explicar fenômenos físico-químicos ainda não modelados adequadamente e cujas soluções analíticas são desconhecidas; um exemplo típico é a modelagem de escoamentos turbulentos;
- ✓ Para otimizar o uso da malha, isto é, adaptá-la visando homogeneizar o nível de erro no domínio de cálculo; e
- ✓ Para evitar interpretações equivocadas.

3.2 Fontes de Erros Numéricos

Segundo Ferziger e Peric (1999), Roache (1998), Tannehill *et al.* (1997), Celik e Zhang (1995) e Marchi (2001) o erro numérico é causado por diversas fontes, que são: erros de truncamento (E_T), erros de arredondamento (E_π), erros de programação (E_p) e erros de iteração (E_n). Simbolicamente, tem-se:

$$E(\phi) = E(E_T, E_\pi, E_p, E_n), \quad (3.2)$$

onde ϕ é a variável de interesse podendo ser local ou global, primária ou secundária; dependendo do problema. Essas quatro fontes de erro podem ter magnitudes e sinais diferentes, o que pode acarretar em cancelamentos parciais ou totais entre esses erros. A definição e a origem de cada uma destas quatro fontes de erro é explicado a seguir.

- ✓ Erros de Truncamento: Dado um modelo matemático, é comum substituí-lo por um modelo numérico. O erro que ocorre ao se truncar um processo infinito é chamado erro de truncamento (E_T), ou seja, é proveniente do fato de se aproximar um problema contínuo com informação num conjunto infinito por um problema discreto com informação num conjunto finito (ROACHE, 1998).

- ✓ Erros de Arredondamento: É também um erro de truncamento na representação que ocorre devido à representação finita dos números no computador. Não pode ser evitado, mas, pela utilização de precisão dupla nas operações aritméticas e na representação dos números pelo computador, pode ter seu efeito reduzido (FORTUNA, 2000). Em alguns tipos de cálculos, a magnitude dos erros de arredondamento é proporcional ao número de pontos da malha no domínio do problema. Nestes casos, refinando-se a malha podem-se diminuir os erros de truncamento, mas serão incrementados os erros de arredondamento (TANNEHILL *et al.* 1997).
- ✓ Erros de Programação: Diz-se, freqüentemente, que todos os códigos de computador têm erros, o que é provavelmente verdade. É de responsabilidade do autor do código tentar estimá-los, sendo que é difícil encontrar os erros de programação estudando o código. A acurácia de uma solução não depende somente do método discretizado e do código, mas também do uso do código (TANNEHILL *et al.* 1997).
- ✓ Erros de Iteração: Saber quando parar o processo de iteração é crucial do ponto de vista da eficiência computacional. O erro de iteração é definido como sendo a diferença entre a solução exata das equações discretizadas e a solução numérica em uma determinada iteração (FERZIGER e PERIC, 2002).
- ✓ Erros de Discretização: Quando o erro da solução numérica é gerado apenas por erros de truncamento, ele é denominado de erro de discretização.

3.3 Tipos de estimativas de erro de discretização

As estimativas do erro de discretização, geradas por erro de truncamento, podem ser divididas em dois tipos básicos (SZÁBO e BABUSKA, 1991): estimativas *a priori* ou *a posteriori* da solução numérica.

- ✓ Estimativas *a priori*: Proporcionam uma análise qualitativa do erro de discretização antes mesmo de se obter uma solução numérica. O objetivo de uma estimativa *a priori* é

obter a ordem assintótica da equação diferencial discretizada. Com esta estimativa, antes de se obter qualquer solução numérica, é possível prever o comportamento assintótico do erro de discretização com relação ao refinamento da malha e à ordem aparente. Também é possível avaliar qual é o efeito da redução do tamanho dos elementos da malha sobre o erro de discretização (E) da solução numérica.

- ✓ Estimativas de erro *a posteriori*: As estimativas de erro *a posteriori* são usadas para estimar a magnitude do erro de discretização. Existem vários métodos que podem ser empregados. Eles podem ser divididos em dois grandes conjuntos. No primeiro as estimativas de erro são baseadas na solução numérica obtida numa única malha, em geral, o método dos Elementos Finitos se enquadram neste conjunto. No segundo conjunto, as estimativas de erro são baseadas nas soluções numéricas obtidas em malhas múltiplas, em geral, os métodos de diferenças finitas e de volumes finitos se enquadram neste conjunto. Alguns estimadores deste tipo são: delta, Richardson, GCI, multicoeficientes e convergente (MARCHI, 2001).

Para o desenvolvimento deste trabalho serão utilizados os estimadores de Richardson e GCI, sendo que ambos se baseiam em soluções numéricas sobre três malhas, podendo ser, portanto classificados como estimadores *a posteriori* baseados em diversas malhas.

A incerteza de uma solução numérica é calculada com os estimadores de erro, dos quais se deseja que tenham as seguintes características (MARCHI, 2001):

- ✓ Confiabilidade: a magnitude da incerteza deve ser maior que a magnitude do erro de discretização e ambos tem o mesmo sinal.
- ✓ Acurácia: quando a magnitude da incerteza é aproximadamente igual à magnitude do erro de discretização. Quanto maior é a acurácia da estimativa de erro, mais próximas estão as magnitudes da incerteza do erro.

Assim, os melhores estimadores são aqueles que fornecem uma incerteza confiável e acurada, ou seja, uma incerteza com magnitude apenas um pouco maior que a magnitude do erro de discretização. Neste trabalho será considerado que incerteza e erro estimado possuem o mesmo significado.

3.4 Estimador de Richardson

3.4.1 Baseado na ordem assintótica

Segundo Marchi (2001), o erro de truncamento de uma equação diferencial ou de uma aproximação numérica qualquer pode ser expresso da seguinte forma:

$$\varepsilon(\phi) = c_1 h^{p_L} + c_2 h^{p_2} + c_3 h^{p_3} + \dots \quad (3.3)$$

onde os coeficientes c_i podem variar com a coordenada x mas independem do tamanho h dos elementos da malha, esta equação é conhecida como equação geral do erro de truncamento. Por definição as ordens verdadeiras p_V são os expoentes de h dos elementos não-nulos de Eq. (3.3), e o menor expoente de h é chamado de ordem assintótica p_L , que satisfaz a condição $p_L \geq 1$. Quando o tamanho h dos elementos da malha tende a zero, o primeiro termo do erro de truncamento é o principal componente, ou seja, é ele quem determina o valor de ε .

De acordo com o estimador de Richardson (ROACHE, 1994), a incerteza U_{Ri} de uma solução numérica ϕ é calculada através de:

$$U_{Ri} = \phi_\infty - \phi, \quad (3.4)$$

onde ϕ representa a solução numérica de qualquer variável de interesse e o símbolo ϕ_∞ designa a estimativa do valor da solução analítica. O valor de ϕ_∞ é obtido através da extrapolação de Richardson, generalizada (ROACHE, 1994), que é dada por

$$\phi_{\infty}(p_L) = \phi_1 + \frac{(\phi_1 - \phi_2)}{(q^{p_L} - 1)}, \quad (3.5)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são as soluções numéricas obtidas com malhas fina e grossa, isto é, com malhas cujo tamanho h dos elementos é h_1 e h_2 , respectivamente; p_L é a ordem assintótica do erro de discretização; e q é a razão de refino da malha, definida por

$$q = \frac{h_2}{h_1}. \quad (3.6)$$

Com a substituição da Eq. (3.5) na Eq. (3.4), o estimador de Richardson resulta em:

$$U_{Ri}(\phi_1) = \frac{(\phi_1 - \phi_2)}{(q^{p_L} - 1)}. \quad (3.7)$$

Caso haja interesse, a substituição da Eq. (3.5) e de ϕ_2 na Eq. (3.4) fornece a incerteza da solução numérica obtida na malha grossa h_2 .

A utilização da Eq. (3.7), para estimar a solução analítica ϕ_{∞} e por conseguinte o estimador de Richardson, pode levar a uma sub ou sobre-estimativa da estimativa numérica, dependendo se onde o algoritmo de refinamento da malha atuou é crítico ou não.

O estimador de Richardson fornece, além da magnitude da incerteza, o seu sinal, isto é, se ϕ_{∞} é maior ou menor que ϕ_1 . A diferença entre ϕ_1 e ϕ_2 define o sinal de U_{Ri} pois a razão de refino da malha q e p_L sempre são maiores do que a unidade, fazendo com que o denominador da Eq. (3.7) seja sempre positivo.

3.4.2 Baseado na ordem aparente

Para o caso em que a ordem assintótica não é conhecida, pode-se aproximar o valor da estimativa da solução analítica do problema através da chamada ordem aparente p_U .

Segundo Marchi e Silva (2002), a ordem aparente p_U é definida como a inclinação local na curva da incerteza da solução numérica versus o espaçamento da malha h em um gráfico logarítmico. Seu cálculo permite verificar na prática, isto é, *a posteriori* das soluções numéricas, se à medida que h é reduzido, a ordem de incerteza das soluções numéricas tende à ordem assintótica dos erros de truncamento, ordem esta que é um resultado teórico, obtido *a priori* das soluções numéricas.

O cálculo da ordem aparente é feito a partir da solução numérica do problema em três diferentes malhas (h_1, h_2, h_3) , denominadas de fina, grossa e supergrossa respectivamente, cujas soluções numéricas são ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 .

Matematicamente, a ordem aparente p_U é obtida a partir de

$$K_U h^{p_U} = U(\phi), \quad (3.8)$$

onde K_U é um coeficiente que é admitido ser independente de h .

A incerteza U da solução numérica é calculada pela diferença entre a solução analítica estimada ϕ_∞ para a variável de interesse e sua solução numérica ϕ , conforme já foi mostrado na Eq. (3.4),

Assim, com a Eq. (3.8) em (3.4), tem-se

$$K_U h^{p_U} = \phi_\infty - \phi. \quad (3.9)$$

Aplicando-se a Eq. (3.9) a três malhas diferentes (h_1, h_2, h_3) , cujas soluções numéricas são ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 , obtém-se

$$\phi_\infty - \phi_1 = K_U h_1^{p_U}, \quad (3.10)$$

$$\phi_\infty - \phi_2 = K_U h_2^{p_U}, \quad (3.11)$$

$$\phi_\infty - \phi_3 = K_U h_3^{p_U}, \quad (3.12)$$

Nestas três equações são conhecidos os valores de $\phi_1, \phi_2, \phi_3, h_1, h_2$ e h_3 , e as incógnitas são ϕ_∞, K_U e p_U .

Considerando-se a razão de refino constante, a solução das Eqs. (3.10) à (3.12) resulta em

$$\phi_\infty(p_U) = \phi_1 + \frac{(\phi_1 - \phi_2)}{(q^{p_U} - 1)}, \quad (3.13)$$

onde q é dado pela Eq. (3.6) e

$$p_U = \frac{\log\left(\frac{\phi_2 - \phi_3}{\phi_1 - \phi_2}\right)}{\log(q)}. \quad (3.14)$$

A expressão para ϕ_∞ dada na Eq. (3.13), é a própria extrapolação de Richardson, já apresentada na Eq. (3.7), apenas trocando-se nesta p_L por p_U . Para o estimador de Richardson U_{Ri} dado na Eq. (3.4), e com a Eq. (3.13), a incerteza da solução numérica ϕ_1 obtida na malha fina h_1 é

$$U_{Ri}(\phi_1) = \frac{(\phi_1 - \phi_2)}{(q^{p_U} - 1)}. \quad (3.15)$$

A ordem aparente p_U pode ser calculada para qualquer problema e variável de interesse, o mesmo vale para ϕ_∞ calculado com a Eq. (3.13). Porém, para calcular ϕ_∞ e p_U são necessárias três soluções numéricas.

A ordem aparente só é igual à ordem assintótica, em qualquer h , se a equação geral do erro de truncamento, Eq. (3.16) for constituída por um único termo. Porém, geralmente existem vários ou infinitos termos para $h \neq 0$, então p_U geralmente é diferente de p_L . Mas para $h \rightarrow 0$, $p_U \rightarrow p_L$ porque o primeiro termo do erro passa a dominar o seu valor total (MARCHI, 2001).

$$E(\phi) = c_1 h^{p_L} + c_2 h^{p_2} + c_3 h^{p_3} + \dots \quad (3.16)$$

A aplicação exata destes estimadores generalizados do erro da malha, baseado em Richardson requer que a taxa de convergência da malha observada se iguale à taxa de convergência formal. Este requerimento implica que a ordem conduzida do termo do erro de truncamento na série de Taylor verdadeiramente domine o erro (ROACHE, 1997).

De acordo com as Eqs. (3.4) e (3.5), a representação correta da solução numérica ϕ e sua incerteza U_{Ri} obtida com o estimador de Richardson é

$$\phi = \phi_1 + U_{Ri}(\phi_1). \quad (3.17)$$

Existe pelo menos uma alternativa à representação dada na Eq. (3.17). Considerando-se que U_{Ri} seja acurado, em princípio se poderia admitir que a solução numérica fosse igual à solução extrapolada ϕ_∞ , dada na Eq. (3.5), em vez da solução obtida na malha fina ϕ_1 ,

eliminando-se assim o erro estimado U_{Ri} . Mas com este procedimento não se teria previsão de erro de ϕ_∞ , caindo-se no mesmo problema de obter uma solução numérica e apresentá-la como resposta sem qualquer incerteza. Para resolver esta dificuldade, uma possibilidade é considerar a solução numérica igual à solução extrapolada ϕ_∞ e a incerteza igual ao módulo de U_{Ri} , isto é,

$$\phi = \phi_\infty \pm |U_{Ri}(\phi_1)|. \quad (3.18)$$

3.5 Estimador GCI

Geralmente em cálculos da engenharia, o que é procurado não é um “erro verdadeiro limitado”, mas apenas uma “faixa do erro”, isto é, uma tolerância na exatidão da solução, que de fato pode ser excedida, mas em qual o usuário pode ter algum nível prático de confiança (ROACHE, 1998).

A motivação para a proposta do Índice de Convergência da Malha (GCI) é a inconsistência e a confusão relatada no estudo do refinamento da malha na engenharia e na literatura científica. O GCI é baseado em um estimador de erro do refinamento da malha derivado da teoria da extrapolação generalizada de Richardson (ROACHE, 1994).

Apresentado primeiramente por Roache (1994 e 1997) o *Grid Convergence Index – GCI* tem como idéia principal relacionar o valor do erro numérico entre duas malhas ($\phi_1 - \phi_2$) obtido com um estudo de refinamento qualquer, não importando quais sejam os valores para a razão de refino e da ordem aparente (ou assintótica) usadas com o valor do erro numérico para o mesmo problema com a mesma malha fina usando os valores de ordem aparente (ou assintótica) e de razão de refino iguais a dois (ROACHE, 1994).

Este valor equivalente é proposto pelo GCI, para a solução da malha mais fina como sendo (ROACHE, 1998)

$$U_{GCI}(\phi_1) = F_S \frac{|\phi_1 - \phi_2|}{(q^{p_L} - 1)}, \quad (3.19)$$

onde F_S é um fator de segurança com valor igual a três, para aplicações em geral, os demais parâmetros da Eq. (3.19) seguem as definições dadas anteriormente. Este estimador também pode ser empregado com a ordem aparente p_U . Neste caso,

$$U_{GCI}(\phi_1) = F_S \frac{|\phi_1 - \phi_2|}{(q^{p_U} - 1)}. \quad (3.20)$$

O resultado das Eqs. (3.19) ou (3.20) representa uma banda ou um intervalo de incerteza em torno da solução numérica ϕ_1 . Esta incerteza numérica apresenta uma confiança em torno de 94% (ROACHE, 1998).

Quaisquer que sejam a razão de refino de malha q e a ordem assintótica p_L do erro de discretização, a razão entre o valor de incerteza calculada pelo estimador GCI e o erro de discretização tende ao valor do fator de segurança F_S quando $h \rightarrow 0$. Portanto, para o valor recomendado por Roache (1994) para F_S , a acurácia do modelo numérico calculada pelo estimador GCI , mesmo para $h \rightarrow 0$, nunca é muito boa, pois tende a três.

De acordo com a Eq. (3.20), a representação correta da solução numérica ϕ e sua incerteza U_{GCI} obtida com o estimador GCI é

$$\phi = \phi_1 \pm U_{GCI}(\phi_1), \quad (3.21)$$

onde ϕ_1 é a solução numérica obtida com a malha mais fina, isto é, com a malha cujo tamanho h dos elementos é h_1 ; e lembrando-se que o cálculo da incerteza U_{GCI} também envolve ϕ_2 que é a

solução obtida com a malha grossa, isto é, obtida com a malha cujo tamanho h dos elementos da malha é h_2 .

3.6 Ordem Efetiva

De acordo com Marchi (2001), para os problemas cuja solução analítica é conhecida, a ordem efetiva pode ser usada para verificar *a posteriori* se, à medida que $h \rightarrow 0$, obtém-se a ordem assintótica p_L do erro de discretização, que é um resultado teórico obtido *a priori*. A ordem efetiva do erro verdadeiro é definida por (Marchi, 2001):

$$P_E = \frac{\log \left[\frac{E(\phi_2)}{E(\phi_1)} \right]}{\log(q)}. \quad (3.22)$$

3.7 Estimador Convergente

Segundo Marchi e Silva (2002, 2005), a solução analítica de uma variável de interesse é limitada por $\phi_\infty(p_L)$ e por $\phi_\infty(p_u)$ quando a ordem aparente p_u é convergente. Baseado nisto, a solução numérica convergente ϕ_C pode ser definida como sendo uma média dos valores $\phi_\infty(p_L)$ e $\phi_\infty(p_u)$, isto é:

$$\phi_C = \frac{[\phi_\infty(p_L) + \phi_\infty(p_u)]}{2}, \quad (3.23)$$

onde $\phi_\infty(p_L)$ e $\phi_\infty(p_u)$ são obtidos pela extrapolação de Richardson, Eqs. (3.5) e (3.13), respectivamente. A incerteza de ϕ_C é dada por:

$$U_C = \frac{|\phi_\infty(p_u) - \phi_\infty(p_L)|}{2}, \quad (3.24)$$

onde U_C é chamado de Estimador Convergente de Erro.

Para o uso de ϕ_C e U_C , uma representação aceitável de uma solução numérica ϕ é

$$\phi = \phi_C \pm U_C. \quad (3.25)$$

4 Problema de Shih para $Re=1$

4.1 Definição do Problema

O enfoque deste capítulo é a resolução do problema que trata do escoamento recirculante descrito por Shih *et al.* (1989), para o qual a solução analítica é conhecida. Por brevidade, no texto subsequente, este problema será referenciado apenas por Problema de Shih. Este problema consiste em uma cavidade quadrada (figura 4.1), na qual a parede superior movimenta-se com velocidade conhecida e um termo fonte atua sobre o escoamento. As variáveis de interesse são: a força que a placa superior exerce sobre o fluido devido ao seu movimento (F); o fluxo de massa, que será obtido através das linhas de corrente (\dot{M}) e por integração, os perfis de velocidades u e v , onde será fixado o centro do domínio de cálculo em cada uma das direções, e variadas as coordenadas na outra. Também será analisada a velocidade central em cada uma das direções.

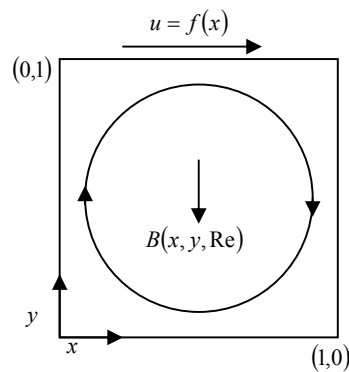


Figura 4.1: Domínio de cálculo para o problema da cavidade quadrada (Shih *et al.* 1989)

O problema em questão é governado pelas seguintes equações adimensionais:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (4.1)$$

$$\bar{u} \cdot \nabla u = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (4.2)$$

$$\bar{u} \cdot \nabla v = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 v - \frac{\partial p}{\partial y} - B(x, y, \text{Re}). \quad (4.3)$$

As condições de contorno para as velocidades u e v são do tipo Dirichlet, assumindo zero em todos os contornos, exceto no superior onde:

$$u(x,1) = 16(x^4 - 2x^3 + x^2). \quad (4.4)$$

A Eq. (4.4) também indica que $u(0,1) = 0$ e $u(1,1) = 0$, o que elimina a ambigüidade de especificar velocidades diferentes nos cantos superiores da placa.

Uma força de corpo existe na direção y e é prescrita como

$$B(x, y, \text{Re}) = -\frac{8}{\text{Re}} [24FF(x) + 2f'(x)g''(y) + f'''(x)g(y)] - 64[F_2(x)G_1(y) - g(y)F_1(x)], \quad (4.5)$$

onde

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2, \quad (4.6)$$

$$g(y) = y^4 - y^2, \quad (4.7)$$

$$FF(x) = \int f(x)dx = 0,2x^5 - 0,5x^4 + \frac{x^3}{3}, \quad (4.8)$$

$$F_1(x) = f(x)f''(x) - [f'(x)]^2 = -4x^6 + 12x^5 - 14x^4 + 8x^3 - 2x^2, \quad (4.9)$$

$$F_2(x) = \int f(x)f'(x)dx = 0,5[f(x)]^2, \quad (4.10)$$

$$G_1(y) = g(y)g''(y) = -24y^5 + 8y^3 - 4y, \quad (4.11)$$

sendo que os apóstrofes indicam as derivadas totais das funções com respeito a x e y conforme o caso.

As variáveis de interesse, neste caso as variáveis globais, já foram definidas no capítulo 2: a força da placa é representada pela Eq. (2.68) e o fluxo de massa pelas Eqs. (2.70) e (2.73).

A forma de obtenção das variáveis locais, neste caso, os perfis de velocidade e as velocidades centrais nas duas direções, já foi descrita no capítulo 2. O domínio de cálculo bem como a condição de contorno aplicada a este problema, estão representadas esquematicamente na figura 4.1.

Os dados fixos para a resolução do problema, ou seja, que não são função dos parâmetros variáveis podem ser observados na tabela 4.1:

Tabela 4.1: Dados fixos para o problema de Shih

Número de Reynolds	1
Comprimento do domínio de cálculo	1m
Largura do domínio de cálculo	1m
Massa específica do fluido (ρ)	1kg/m ³
Viscosidade (μ)	1Pa.s

4.2 Solução Analítica

A solução analítica para este problema é conhecida e é dada por (Shih *et al.* 1989)

$$u(x, y) = 8f(x)g'(y) = 8(x^4 - 2x^3 + x^2)(4y^3 - 2y), \quad (4.12)$$

$$v(x, y) = -8f'(x)g(y) = -8(4x^3 - 6x^2 + 2x)(y^4 - y^2), \quad (4.13)$$

$$p(x, y) = \frac{8}{\text{Re}} [F(x)g'''(y) + f'(x)g'(y)] + 64F_2(x) \{g(y)g''(y) - [g'(y)]^2\}. \quad (4.14)$$

As variáveis de interesse também possuem solução analítica, conforme pode ser observado no capítulo 2.

$$F = \mu \int_0^{L_x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\text{tampa}} z dx \quad (4.15)$$

$$\dot{M}_u = -\rho \psi_{\min}, \quad (4.16)$$

$$\dot{M}_v = \int_0^{x/2} \rho v dx, \quad (4.17)$$

O valor da solução analítica para os perfis das velocidades u e v foram obtidos através da substituição das coordenadas desejadas nas Eqs. (4.12) e (4.13). A solução analítica para todas as variáveis de interesse pode ser observada na tabela 4.2, inclusive para as velocidades centrais ($u(0,5;0,5)$ e $v(0,5;0,5)$).

Tabela 4.2: Solução analítica das variáveis de interesse para o problema de Shih

Variável de interesse	Solução analítica
Força da placa	$\frac{8}{3} N \cong 2,6666666667 N$
Fluxo de massa que escoo na cavidade (total)	$\frac{1}{8} kg/s = 0,125 kg/s$
Fluxo de massa que escoo em $y = 0,5$ e $x[0,0,5]$ (com v_n)	$\frac{3}{32} kg/s = 0,09375 kg/s$
$u(0,5;0,5)$	$-0,25 m/s$
$v(0,5;,5)$	$0 m/s$

4.3 Solução Numérica

Para a obtenção da solução numérica foi utilizado o Método dos Volumes Finitos, cujo modelo numérico foi descrito no capítulo 2. As aproximações que foram utilizadas na discretização das Eqs. (4.1), (4.2) e (4.3) foram: CDS (Central Differencing Scheme) com correção adiada para os termos advectivos e CDS para os termos difusivos e de pressão (MARCHI e SCHNEIDER, 2004). Dessa forma, chegou-se às Eq. (2.5) à (2.61 f) para os coeficientes e termo fontes, sendo que para este problema, para Eq. (2.21), representada neste capítulo pela Eq. (4.18) tem-se:

$$b_p^\phi = b_t^\phi + b_p^\phi + b^{S_\phi} \quad (4.18)$$

$$b_t^\phi = \frac{\rho \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta t} \phi_p, \quad (4.19)$$

onde ϕ é a variável de interesse.

$$b_p^u = -\frac{(p_E - p_W)}{2} \Delta y \Delta z, \quad (4.20)$$

$$b_p^v = -\frac{(p_N - p_S)}{2} \Delta x \Delta z, \quad (4.21)$$

$$b^{S_u} = 0, \quad (4.22)$$

$$b^{S_v} = L[S^v]_p \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (4.23)$$

onde $L[S^v]_p$ é dado pela Eq. (4.5).

Para se resolver o sistema de equações que surge da discretização das equações diferenciais envolvidas foi utilizado o método MSI (SCHNEIDER e ZEDAN, 1981) já descrito no capítulo 2.

Para monitorar o processo iterativo, foi utilizado o critério de convergência baseado no resíduo, sendo que o procedimento foi iterado até que o erro de máquina fosse atingido, ou seja, foi fixado um número de iterações conforme o tamanho da malha. Neste trabalho, foi calculada uma norma que tem como base os resultados obtidos em iterações anteriores, com seus respectivos coeficientes utilizados na obtenção das soluções, conforme descrito no capítulo 2.

O programa computacional foi implementado na linguagem FORTRAN/95, sendo que os arquivos de resultados foram gerados do dia 13/10/2005 ao dia 28/10/2005, com o software Compaq Visual Fortran 6.6. O programa tem o nome Stokes_1p3.exe, versão release, projeto tipo QuickWin Application. Este programa computacional se encontra disponível no endereço ftp://ftp.demec.ufpr.br/cfd/monografias/2006_ROBERTA_SUERO_MESTRADO e para a obtenção dos resultados das variáveis globais e locais foi utilizada precisão dupla. O computador empregado para a resolução deste trabalho foi o CFD4 do LENA 2 (Laboratório de Experimentação Numérica - UFPR), que possui um processador Intel Pentium 4 com 3,4 GHz, com memória de 4 GB RAM. Os dados numéricos fixos do problema podem ser observados na tabela 4.3:

Tabela 4.3: Dados numéricos fixos do problema de Shih

Tolerância do MSI para u e v	0,1
Tolerância do MSI para p'	0,01
Número de iterações internas no MSI para u e v	5
Número de iterações internas no MSI para p'	10

A memória computacional utilizada na resolução deste problema foi observada através do gerenciador de tarefas do Windows, que foi acessado durante a resolução do problema. O tempo de processamento foi medido usando-se a função TIMEF da biblioteca PORTLIB do FORTRAN/95, e corresponde ao ciclo iterativo externo, ou seja, dos passos 2 ao 17 do algoritmo computacional descrito no capítulo 2. Através de testes realizados no dia 31/10/2005, sem conexão com a internet, para malhas com 16, 32 e 64 nós, verificou-se que a incerteza desta função é aproximadamente de 0,31 %.

Para a obtenção da incerteza do tempo computacional, foram realizadas dez simulações, que tiveram seus tempos anotados, para cada uma das malhas citadas, sendo que foi feita uma média aritmética simples para cada malha. Foram obtidas também as diferenças entre o máximo e o mínimo tempo obtido para cada uma das malhas. Para a obtenção da percentagem foi considerada a maior diferença entre as três malhas com relação à sua média correspondente.

Para a análise do problema da cavidade quadrada (Shih *et al.* 1989) foram realizadas as seguintes simulações, sendo que o número de volumes de controle referenciados nas tabelas 4.4 e 4.5 correspondem a cada direção (x e y):

Tabela 4.4: Identificação das simulações realizadas para o problema do Shih

Nome da simulação	Caso 0002	Caso 0004	Caso 0008	Caso 0016	Caso 0032
Número de volumes de controle	02	04	08	16	32
Incremento de tempo Δt (s)	0,05	0,05	0,05	0,05	0,02
Memória computacional (MB)	1,56	1,58	1,58	1,60	1,80
Número total de iterações externas	1000	1000	1000	3000	5000
Tempo de processamento	0,06s	0,09s	0,19s	1,55s	9,28s
Tamanho dos volumes $-h$ (m)	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125

Tabela 4.5: Identificação das simulações realizadas para o problema do Shih

Nome da simulação	Caso 0064	Caso 0128	Caso 0256	Caso 0512	Caso 1024
Número de volumes de controle	64	128	256	512	1024
Incremento de tempo Δt (s)	0,01	0,005	0,002	0,001	0,0005
Memória computacional (MB)	2,66	5,8	18,3	62,1	266
Número total de iterações externas	7000	12000	20000	30000	100000
Tempo de processamento	46,20s	6min 26s	1h 49min	13h 32min	5dias 20h
Tamanho dos volumes $-h$ (m)	0,015625	0,0078125	0,00390625	0,001953125	0,0009765625

As simulações descritas nas tabelas 4.4 e 4.5 geraram os resultados evidenciados a seguir para cada variável de interesse. Para a força da placa (obtida com UDS-2 e com UDS) e o fluxo de massa (total e com v_n) que são as duas variáveis globais analisadas neste problema, a identificação e os resultados estão dispostos nas tabelas 4.6 a 4.9 respectivamente. Nestas tabelas, o número de algarismos significativos corresponde ao número de algarismos sem erro de máquina, a coluna que diz respeito à iteração corresponde à iteração em que foi atingido o erro de máquina, aproximadamente. A coluna do resíduo corresponde ao resíduo obtido com as Eqs. (2.65) a (2.67). Neste trabalho não será adotada notação científica para apresentar os erros numéricos, bem como os seus estimadores de erros, devido ao enfoque do trabalho e também à facilidade em se observar como o erro numérico diminui a cada refinamento da malha com a representação aqui adotada.

Tabela 4.6: Solução e erros numéricos para a força da placa com UDS para o problema de Shih

Nome da simulação	h (m)	Solução Numérica	Número de algarismos significativos	Erro numérico	Iteração (erro de máquina)	Resíduo
Caso 0002	0,5	1,2272132095161	16	1,43945345715056	100	2,93E-14
Caso 0004	0,25	1,8505675564558	16	0,81609911021084	150	1,89E-14
Caso 0008	0,125	2,4079945083651	16	0,25867215830153	550	2,11E-14
Caso 0016	0,0625	2,6190546061892	16	0,04761206047738	2000	4,56E-14
Caso 0032	0,03125	2,6632824721797	16	0,00338419448688	3000	1,97E-13
Caso 0064	0,015625	2,6683742687000	15	-0,00170760203342	5500	7,94E-13
Caso 0128	0,0078125	2,6677759320424	15	-0,00110926537582	10000	3,19E-12
Caso 0256	0,00390625	2,6671197557460	15	-0,00045308907930	15000	1,31E-11
Caso 0512	0,001953125	2,6668245379028	15	-0,00015787123620	25000	5,12E-11
Caso 1024	0,0009765625	2,6667173686170	13	-0,00005070195037	40000	2,04E-10

Tabela 4.7: Solução e erros numéricos para a força da placa com UDS-2 para o problema de Shih

Nome da simulação	h (m)	Solução Numérica	Número de algarismos significativos	Erro numérico	Iteração (erro de máquina)	Resíduo
Caso 0002	0,5	1,2953553491935	16	1,37131131747315	100	2,93E-14
Caso 0004	0,25	1,9924824875369	16	0,67418417912970	150	1,89E-14
Caso 0008	0,125	2,5977367031883	16	0,06892996347828	550	2,11E-14
Caso 0016	0,0625	2,7464463478815	16	-0,07977968121493	2000	4,56E-14
Caso 0032	0,03125	2,7315261153258	16	-0,06485944865918	3000	1,97E-13
Caso 0064	0,015625	2,7026578394867	15	-0,03599117282004	5500	7,94E-13
Caso 0128	0,0078125	2,6847720334051	15	-0,01810536673844	10000	3,19E-12
Caso 0256	0,00390625	2,6755498410623	15	-0,00888317439562	15000	1,31E-11
Caso 0512	0,001953125	2,6710175652793	15	-0,00435089861269	25000	5,12E-11
Caso 1024	0,0009765625	2,6688076111326	13	-0,00214094446603	40000	2,04E-10

Para a força da placa tem-se que $|E_{UDS}| < |E_{UDS-2}|$, isto pode estar ocorrendo devido a aproximação UDS (com ordem 1), que parece se comportar como CDS, que possui ordem 2. Este fato pode ser decorrente do uso de volumes fictícios para a aplicação das condições de contorno. A ordem aparente de aproximações de problemas unidimensionais pode apresentar um comportamento diferente em problemas bidimensionais.

Tabela 4.8: Solução e erros numéricos para o fluxo de massa total para o problema de Shih

Nome da simulação	h (m)	Solução Numérica	Número de algarismos significativos	Erro Numérico	Iteração (erro de máquina)	Resíduo
Caso 0002	0,5	0,12784834881048	16	-0,00284834881048	100	2,93E-14
Caso 0004	0,25	0,12286868458004	16	0,00213131541995	150	1,89E-14
Caso 0008	0,125	0,12131118218761	16	0,00368881781238	550	2,11E-14
Caso 0016	0,0625	0,12422833833307	16	0,00077166166692	2000	4,56E-14
Caso 0032	0,03125	0,12471083677141	16	0,00028916322858	3000	1,97E-13
Caso 0064	0,015625	0,12494972306246	16	0,00005027693753	5500	7,94E-13
Caso 0128	0,0078125	0,12497598751872	16	0,00002401248127	10000	3,19E-12
Caso 0256	0,00390625	0,12499774510843	16	0,00000225489156	15000	1,31E-11
Caso 0512	0,001953125	0,12499943170196	16	0,00000056829803	25000	5,12E-11
Caso 1024	0,0009765625	0,12499985362679	15	0,00000014637320	40000	2,04E-10

Tabela 4.9: Solução e erros numéricos para o fluxo de massa obtido com v_n para o problema de Shih

Nome da simulação	h (m)	Solução Numérica	Número de algarismos significativos	Erro Numérico	Iteração (erro de máquina)	Resíduo
Caso_0002	0,5	0,12784834881048	16	-0,03409834881048	100	2,93E-14
Caso_0004	0,25	0,10340080517883	16	-0,00965080517883	150	1,89E-14
Caso_0008	0,125	0,09540545610956	16	-0,00165545610956	550	2,11E-14
Caso_0016	0,0625	0,09406663996636	16	-0,00031663996636	2000	4,56E-14
Caso_0032	0,03125	0,09382161248018	16	-0,00007161248018	3000	1,97E-13
Caso_0064	0,015625	0,09376741151262	16	-0,00001741151262	5500	7,94E-13
Caso_0128	0,0078125	0,09375432101247	16	-0,00000432101247	10000	3,19E-12
Caso_0256	0,00390625	0,09375107810414	16	-0,00000107810414	15000	1,31E-11
Caso_0512	0,001953125	0,09375026937299	16	-0,00000026937299	25000	5,12E-11
Caso_1024	0,0009765625	0,09375006733147	15	-0,00000006733147	40000	2,04E-10

Para as variáveis locais, pode-se observar nas tabelas 4.10 e 4.11 a identificação e os resultados para as velocidades centrais em cada uma das direções, ou seja, para $u(0,5;0,5)$ e $v(0,5;5)$. Nas tabelas 4.12 e 4.14 observam-se os resultados obtidos para cada um dos perfis, sendo que serão analisadas as velocidades em coordenadas pré-determinadas para cada uma das direções. Nas tabelas 4.13 e 4.15, pode-se observar os erros numéricos obtidos para cada um dos perfis de velocidade.

Tabela 4.10: Solução e erros numéricos para a velocidade u central para o problema de Shih

Nome da simulação	h (m)	Solução Numérica	Número de algarismos significativos	Erro Numérico	Iteração (erro de máquina)	Resíduo
Caso_0002	0,5	0,00000000000000	16	-0,25000000000000	100	2,93E-14
Caso_0004	0,25	-0,17304285982132	16	-0,07695714017867	150	1,89E-14
Caso_0008	0,125	-0,22691056257610	16	-0,02308943742389	550	2,11E-14
Caso_0016	0,0625	-0,24364185557330	16	-0,00635814442669	2000	4,56E-14
Caso_0032	0,03125	-0,24836332388702	16	-0,00163667611298	3000	1,97E-13
Caso_0064	0,015625	-0,24958773553883	16	-0,00041226446116	5500	7,94E-13
Caso_0128	0,0078125	-0,24989674184557	15	-0,00010325815442	10000	3,19E-12
Caso_0256	0,00390625	-0,24997417375195	15	-0,00002582624804	15000	1,31E-11
Caso_0512	0,001953125	-0,24999354274304	15	-0,00000645725695	25000	5,12E-11
Caso_1024	0,0009765625	-0,24999838564713	15	-0,00000161435286	40000	2,04E-10

Tabela 4.11: Solução e erros numéricos para a velocidade v central para o problema de Shih

Nome da simulação	h (m)	Solução Numérica	Número de algarismos significativos	Erro Numérico	Iteração (erro de máquina)	Resíduo
Caso_0002	0,5	0,000000000000000	16	0,000000000000000	100	2,93E-14
Caso_0004	0,25	-0,00006928055115	16	0,00006928055115	150	1,89E-14
Caso_0008	0,125	0,00015009012952	16	-0,00015009012952	550	2,11E-14
Caso_0016	0,0625	0,00009096493298	16	-0,00009096493298	2000	4,56E-14
Caso_0032	0,03125	0,00002718654767	16	-0,00002718654767	3000	1,97E-13
Caso_0064	0,015625	0,00000709096185	16	-0,00000709096185	5500	7,94E-13
Caso_0128	0,0078125	0,00000179145154	16	-0,00000179145154	10000	3,19E-12
Caso_0256	0,00390625	0,00000044903909	16	-0,00000044903909	15000	1,31E-11
Caso_0512	0,001953125	0,00000011233357	16	-0,00000011233357	25000	5,12E-11
Caso_1024	0,0009765625	0,00000002808803	16	-0,00000002808803	40000	2,04E-10

Tabela 4.12: Solução numérica para o perfil de velocidade u para o problema de Shih

	Caso_0256 Solução Numérica	Caso_0512 Solução Numérica	Caso_1024 Solução Numérica
$u(0,5;0,0625)$	-0,062014765105421	-0,062012480390124	-0,06201190915619
$u(0,5;0,125)$	-0,12109726957761	-0,12109462998428	-0,12109396999160
$u(0,5;0,1875)$	-0,17431819934251	-0,17431685459056	-0,17431651832915
$u(0,5;0,25)$	-0,21874827070336	-0,21874956765706	-2,18749891905016
$u(0,5;0,3125)$	-0,25145818655069	-0,25146317929733	-2,51464427622838
$u(0,5;0,375)$	-0,26951864415642	-0,26952809822125	-2,69530462035167
$u(0,5;0,4375)$	-0,27000037120712	-0,27001474073747	-2,70018333593717
$u(0,5;0,5)$	-0,24997417375195	-0,24999354274304	-2,49998385647133
$u(0,5;0,5625)$	-0,20651098530207	-0,20653497200689	-2,06540969512880
$u(0,5;0,625)$	-0,13668190976459	-0,13670953891798	-1,36716447166032
$u(0,5;0,6875)$	-0,037558252800236	-0,037587804348796	-0,03759519320814
$u(0,5;0,75)$	0,093788462502444	0,093759616450562	0,09375240416250
$u(0,5;0,8125)$	0,26028650140301	0,26026205545616	0,26025594357168
$u(0,5;0,875)$	0,46486396373117	0,46484880322850	0,46484501328360
$u(0,5;0,9375)$	0,71044889458420	0,71044913676836	0,71044919818489

Tabela 4.13: Erros numéricos para o perfil de velocidade u para o problema de Shih

	Caso_0256 Erro Numérico	Caso_0512 Erro Numérico	Caso_1024 Erro Numérico
$u(0,5;0,0625)$	0,00000304635542	0,00000076164012	0,00000019040619
$u(0,5;0,125)$	0,00000351957761	0,00000087998428	0,00000021999160
$u(0,5;0,1875)$	0,00000179309251	0,00000044834056	0,00000011207915
$u(0,5;0,25)$	-0,00000172929663	-0,00000043234293	-0,00000010809498
$u(0,5;0,3125)$	-0,00000665719930	-0,00000166445266	-0,00000041612716
$u(0,5;0,375)$	-0,00001260584357	-0,00000315177874	-0,00000078796483
$u(0,5;0,4375)$	-0,00001916004287	-0,00000479051252	-0,00000119765628
$u(0,5;0,5)$	-0,00002582624804	-0,00000645725696	-0,00000161435286
$u(0,5;0,5625)$	-0,00003198344792	-0,00000799674310	-0,00000199923712
$u(0,5;0,625)$	-0,00003684023540	-0,00000921108201	-0,00000230283396
$u(0,5;0,6875)$	-0,00003940344976	-0,00000985190120	-0,00000246304185
$u(0,5;0,75)$	-0,00003846250244	-0,00000961645056	-0,00000240416250
$u(0,5;0,8125)$	-0,00003259515301	-0,00000814920616	-0,00000203732168
$u(0,5;0,875)$	-0,00002021373117	-0,00000505322850	-0,00000126328360
$u(0,5;0,9375)$	0,00000032416579	0,00000008198163	0,00000002056510

Tabela 4.14: Solução numérica para o perfil de velocidade v para o problema de Shih

	Caso_0256 Solução Numérica	Caso_0512 Solução Numérica	Caso_1024 Solução Numérica
$v(0,0625;0,5)$	0,15379164615162	0,15380435599395	0,15380753425227
$v(0,125;0,5)$	0,24606631551962	0,24608689021983	0,24609203497092
$v(0,1875;0,5)$	0,28561258630762	0,28563654376866	0,28564253428925
$v(0,25;0,5)$	0,28121862990489	0,28124215636168	0,28124803901214
$v(0,3125;0,5)$	0,24167245142363	0,24169252607746	0,24169754552655
$v(0,375;0,5)$	0,17576202057450	0,17577644213397	0,17578004800347
$v(0,4375;0,5)$	0,09227533620396	0,09228270104902	0,09228454244094
$v(0,5;0,5)$	0,00000044903909	0,00000011233357	0,00000002808803
$v(0,5625;0,5)$	-0,09227454338130	-0,09228250271403	-0,09228449284903
$v(0,625;0,5)$	-0,17576151662425	-0,17577631606708	-0,17578001648165
$v(0,6875;0,5)$	-0,24167234413195	-0,24169249924317	-0,24169753881709
$v(0,75;0,5)$	-0,28121891655325	-0,28124222807899	-0,28124805694479
$v(0,8125;0,5)$	-0,28561314211883	-0,28563668282172	-0,28564256905880
$v(0,875;0,5)$	-0,24606691433094	-0,24608704003011	-0,24609207243041
$v(0,9375;0,5)$	-0,15379202612892	-0,15380445105819	-0,15380755802298

Tabela 4.15: Erros numéricos para o perfil de velocidade v para o problema de Shih

	Caso_0256 Erro Numérico	Caso_0512 Erro Numérico	Caso_1024 Erro Numérico
$v(0,0625;0,5)$	0,00001694759837	0,00000423775604	0,00000105949772
$v(0,125;0,5)$	0,00002743448037	0,00000685978016	0,00000171502907
$v(0,1875;0,5)$	0,00003194494237	0,00000798748134	0,00000199696074
$v(0,25;0,5)$	0,00003137009510	0,00000784363831	0,00000196098785
$v(0,3125;0,5)$	0,00002676732636	0,00000669267253	0,00000167322345
$v(0,375;0,5)$	0,00001922942550	0,00000480786603	0,00000120199652
$v(0,4375;0,5)$	0,00000982004603	0,00000245520097	0,00000061380905
$v(0,5;0,5)$	-0,00000044903909	-0,00000011233357	-0,00000002808803
$v(0,5625;0,5)$	-0,00001061286869	-0,00000265353596	-0,00000066340096
$v(0,625;0,5)$	-0,00001973337574	-0,00000493393291	-0,00000123351834
$v(0,6875;0,5)$	-0,00002687461804	-0,00000671950683	-0,00000167993291
$v(0,75;0,5)$	-0,00003108344674	-0,00000777192100	-0,00000194305520
$v(0,8125;0,5)$	-0,00003138913117	-0,00000784842827	-0,00000196219119
$v(0,875;0,5)$	-0,00002683566906	-0,00000670996988	-0,00000167756958
$v(0,9375;0,5)$	-0,00001656762107	-0,00000414269180	-0,00000103572701

Para este problema podem-se ainda fazer comparações com Morais (2004), que em seu trabalho utiliza malhas não-estruturadas e resolve este mesmo problema com o software CFX-5, conseguindo resultados para malhas com 160 nós em cada direção. Na tabela 4.16 se pode comparar os erros numéricos:

Tabela 4.16: Comparação entre os erros numéricos

Variável de interesse	Morais (2004)	Presente trabalho (Caso 1024)	Presente trabalho (Caso 128)
Força da placa	0,012397823269340	0,0000507019503799	0,0011092653758200
Fluxo de massa	0,000046435300192	0,0000001463732010	0,0000240124812710

Na tabela 4.16 observa-se que os erros numéricos obtidos para a força da placa por Morais na malha com 160 nós em cada direção é uma ordem de grandeza maior que o apresentado pelo presente trabalho na malha com 128 nós em cada direção. Para o fluxo de massa a diferença não é tão significativa, mas o erro apresentado no presente trabalho é menor.

Para cada variável de interesse podem ser observados os resultados obtidos numericamente, quando comparados às suas soluções analíticas obtidas de Shih *et al.* (1989) através das figuras 4.2 a 4.7.

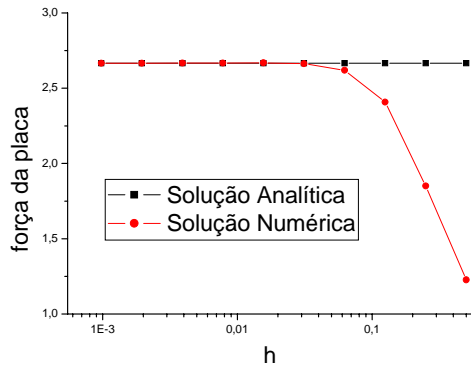


Figura 4.2: Soluções analítica e numérica para a força da placa com UDS

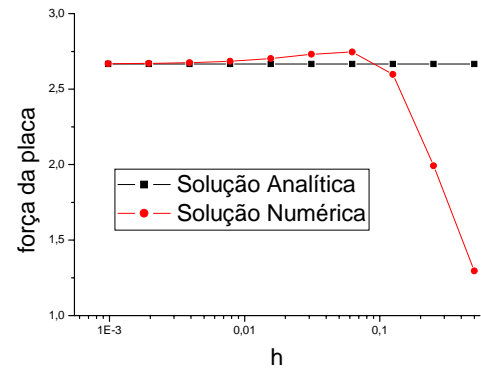


Figura 4.3: Soluções analítica e numérica para a força da placa com UDS-2

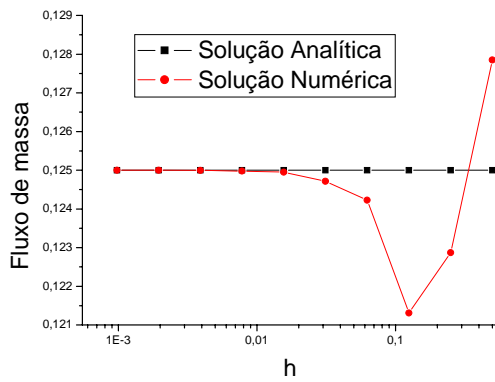


Figura 4.4: Soluções analítica e numérica para o fluxo de massa total

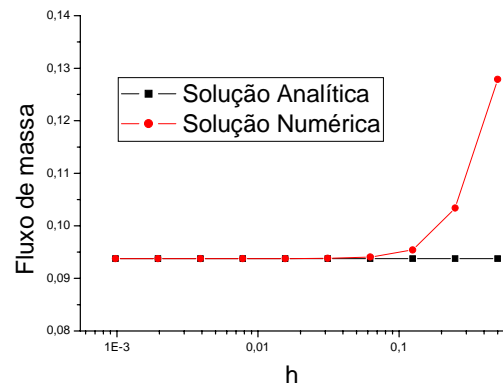


Figura 4.5: Soluções analítica e numérica para o fluxo de massa obtido com v_n

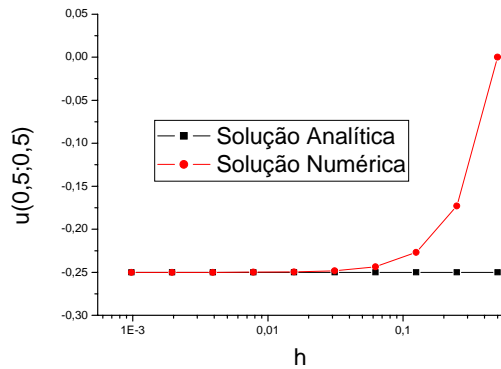


Figura 4.6: Velocidade u central

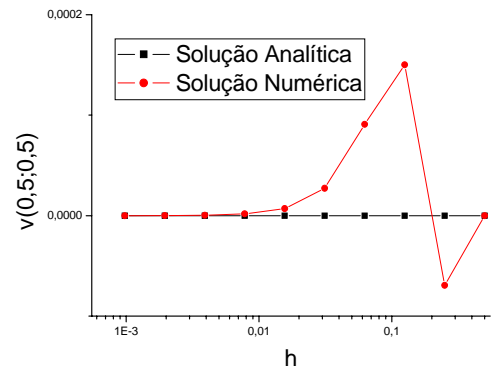


Figura 4.7: Velocidade v central

Nas figuras 4.8 a 4.10 podem-se observar as linhas de corrente e o campo de velocidades para o problema de Shih. Estes gráficos foram gerados a partir dos resultados obtidos na malha com 128 nós em cada direção. Estas figuras foram obtidas com o uso do software Matlab, sendo que mais detalhes sobre sua obtenção podem ser observados no Apêndice B.

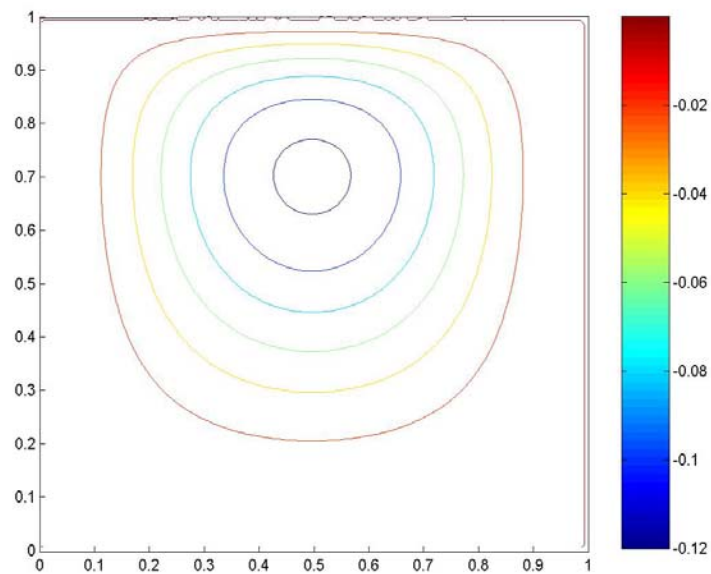


Figura 4.8: Linhas de corrente para o problema de Shih

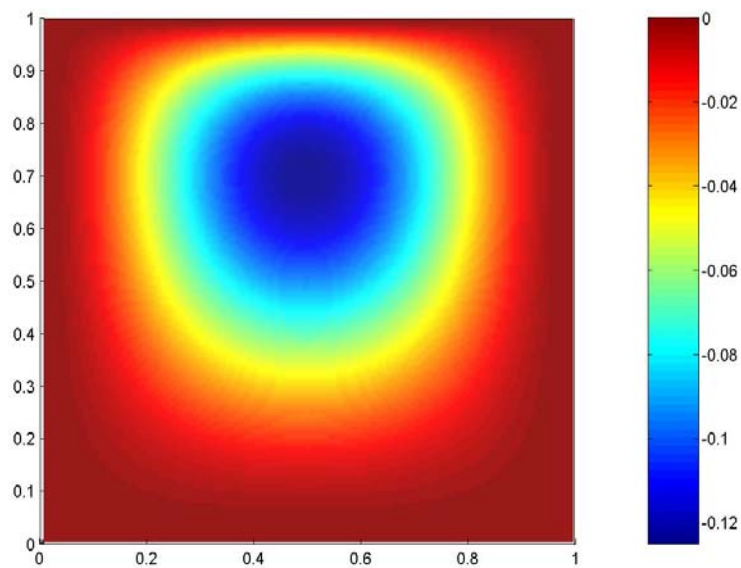


Figura 4.9: Linhas de corrente para o problema de Shih

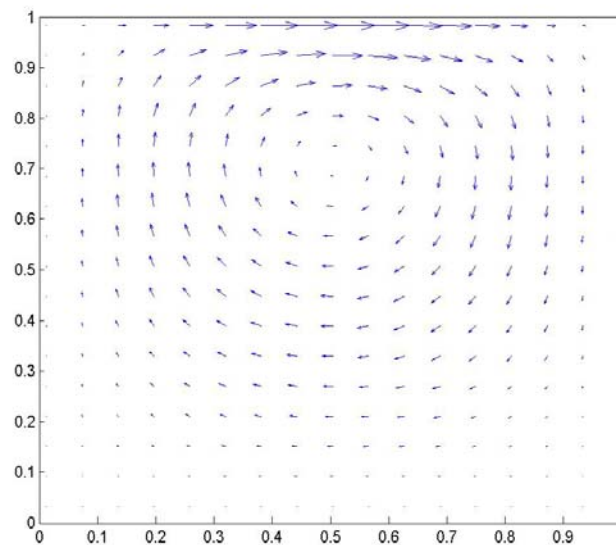


Figura 4.10: Campo de velocidades para o problema de Shih

Nas tabelas 4.17 a 4.24, a ordem efetiva é calculada com base em duas malhas: uma grossa e outra fina. Por exemplo, o valor que aparece para o Caso_0004, é o valor correspondente à ordem efetiva obtida com as malhas fina (4X4 nós) e grossa (2X2 nós). Já a ordem aparente, é obtida com base em três malhas. Por exemplo, o valor correspondente

ao Caso_0008, foi obtido com as seguintes malhas: malha fina (8X8 nós), malha grossa (4X4 nós) e malha supergrossa (2X2 nós).

Tabela 4.17: Ordens práticas da solução numérica para a força de placa obtido com UDS (problema de Shih)

Nome da simulação	h (m)	Razão de refino	Ordem efetiva p_E	Ordem aparente p_U
Caso_0002	0,5	2	-----	-----
Caso_0004	0,25	2	0,81870486761690	-----
Caso_0008	0,125	2	1,65761958869291	0,16126973986390
Caso_0016	0,0625	2	2,44172581060152	1,40112890492736
Caso_0032	0,03125	2	3,81444267839981	2,25462631581972
Caso_0064	0,015625	2	-----	3,11870896124065
Caso_0128	0,0078125	2	0,62236723479361	-----
Caso_0256	0,00390625	2	1,29173792743048	-0,13312602576343
Caso_0512	0,001953125	2	1,52104637912306	1,15230355821861
Caso_1024	0,0009765625	2	1,63863518885149	1,46188842530176

Tabela 4.18: Ordens práticas da solução numérica para a força da placa obtido com UDS-2 (problema de Shih)

Nome da simulação	h (m)	Razão de refino	Ordem efetiva p_E	Ordem aparente p_U
Caso_0002	0,5	2	-----	-----
Caso_0004	0,25	2	1,02434145387353	-----
Caso_0008	0,125	2	3,28993961640980	0,20388056838191
Caso_0016	0,0625	2	-----	2,02504300509820
Caso_0032	0,03125	2	0,29870459854185	-----
Caso_0064	0,015625	2	0,84967364499029	-0,95221492254685
Caso_0128	0,0078125	2	0,99122571512535	0,69066980552165
Caso_0256	0,00390625	2	1,02727018023103	0,95563347873796
Caso_0512	0,001953125	2	1,02976191598408	1,02487410576229
Caso_1024	0,0009765625	2	1,02306602457042	1,03621921379661

Tabela 4.19: Ordens práticas da solução numérica para o fluxo de massa total (problema de Shih)

Nome da simulação	h (m)	Razão de refino	Ordem efetiva p_E	Ordem aparente p_U
Caso_0002	0,5	2	-----	-----
Caso_0004	0,25	2	-----	-----
Caso_0008	0,125	2	-0,791414141947461	1,67681408798718
Caso_0016	0,0625	2	2,25711819198829	-----
Caso_0032	0,03125	2	1,41608433642648	2,59596643279664
Caso_0064	0,015625	2	2,52391542352237	1,01420020863335
Caso_0128	0,0078125	2	1,06611228649928	3,18514044153394
Caso_0256	0,00390625	2	3,41265452582910	0,27159297321170
Caso_0512	0,001953125	2	1,98833843320749	3,68933451159523
Caso_1024	0,0009765625	2	1,95699627993863	1,99905442754541

Tabela 4.20: Ordens práticas da solução numérica para o fluxo de massa com v_n (problema de Shih)

Nome da simulação	h (m)	Razão de refino	Ordem efetiva p_E	Ordem aparente p_U
Caso_0002	0,5	2	-----	-----
Caso_0004	0,25	2	1,82098066102814	-----
Caso_0008	0,125	2	2,54342055161156	1,61245659071767
Caso_0016	0,0625	2	2,38631349229603	2,57820316976591
Caso_0032	0,03125	2	2,14456042562043	2,44994235297132
Caso_0064	0,015625	2	2,04016949058860	2,17655308300652
Caso_0128	0,0078125	2	2,01060024240809	2,04979838555119
Caso_0256	0,00390625	2	2,00287283975927	2,01316007560955
Caso_0512	0,001953125	2	2,00081940045473	2,00355615305585
Caso_1024	0,0009765625	2	2,00025228380810	2,00100834575215

Tabela 4.21: Ordens práticas da solução numérica para a velocidade central u (problema de Shih)

Nome da simulação	h (m)	Razão de refino	Ordem efetiva p_E	Ordem aparente p_U
Caso_0002	0,5	2	-----	-----
Caso_0004	0,25	2	1,69980100198052	-----
Caso_0008	0,125	2	1,73682216564122	1,68363696720290
Caso_0016	0,0625	2	1,86055532904734	1,68687159982561
Caso_0032	0,03125	2	1,95783693742670	1,82524144800026
Caso_0064	0,015625	2	1,98912684490329	1,94714690919776
Caso_0128	0,0078125	2	1,99731438303929	1,98638049048133
Caso_0256	0,00390625	2	1,99934574407979	1,99663621652596
Caso_0512	0,001953125	2	1,99984472461469	1,99917935499840
Caso_1024	0,0009765625	2	1,99996547966316	1,99980446940140

Tabela 4.22: Ordens práticas da solução numérica para a velocidade central v (problema de Shih)

Nome da simulação	h (m)	Razão de refino	Ordem efetiva p_E	Ordem aparente p_U
Caso_0002	0,5	2	-----	-----
Caso_0004	0,25	2	-----	-----
Caso_0008	0,125	2	-----	-----
Caso_0016	0,0625	2	0,72244670506314	-----
Caso_0032	0,03125	2	1,74241753279493	-0,10929449884575
Caso_0064	0,015625	2	1,93883971983861	1,66618893793807
Caso_0128	0,0078125	2	1,98485231090166	1,92294767423946
Caso_0256	0,00390625	2	1,99621605775934	1,98103105342932
Caso_0512	0,001953125	2	1,99905183549905	1,99526872834889
Caso_1024	0,0009765625	2	1,99976169653197	1,99881508537441

Tabela 4.23: Ordens práticas para o perfil de velocidade u (problema de Shih)

Coordenadas	Ordem efetiva p_E	Ordem aparente p_U
$u(0,5;0,0625)$	2,00002906937845	1,99986081961761
$u(0,5;0,125)$	2,00002931863537	1,99979373225011
$u(0,5;0,1875)$	2,00007709883765	1,99968494844365
$u(0,5;0,25)$	1,99987653593948	1,99995761582574
$u(0,5;0,3125)$	1,99995147825402	1,99983952613189
$u(0,5;0,375)$	1,99996311304817	1,99981829110399
$u(0,5;0,4375)$	1,99996608866854	1,99980979274725
$u(0,5;0,5)$	1,99996547988641	1,99980446902931
$u(0,5;0,5625)$	1,99996294816996	1,99980038396408
$u(0,5;0,625)$	1,99996023978766	1,99979956574794
$u(0,5;0,6875)$	1,99996101368821	1,99981016203434
$u(0,5;0,75)$	1,99997007824499	1,99984494828573
$u(0,5;0,8125)$	1,99998573209312	1,99990610652332
$u(0,5;0,875)$	2,00002686575431	2,00006881012290
$u(0,5;0,9375)$	1,99510218878576	1,97940557497295

Tabela 4.24: Ordens práticas para o perfil de velocidade v (problema de Shih)

Coordenadas	Ordem efetiva p_E	Ordem aparente p_U
$v(0,0625;0,5)$	1,99992004684690	1,99963784165196
$v(0,125;0,5)$	1,99992930551149	1,99969822700911
$v(0,1875;0,5)$	1,99993468152458	1,99972173398407
$v(0,25;0,5)$	1,99994241448286	1,99974583691262
$v(0,3125;0,5)$	1,99995230460092	1,99977417591217
$v(0,375;0,5)$	1,99996396866816	1,99980808685423
$v(0,4375;0,5)$	1,99997929391775	1,99985845201120
$v(0,5;0,5)$	1,99976169059741	1,99881509554903
$v(0,5625;0,5)$	1,99996308615264	1,99978119015731
$v(0,625;0,5)$	1,99995892737835	1,99978404720622
$v(0,6875;0,5)$	1,99995173353333	1,99977207501782
$v(0,75;0,5)$	1,99994434647481	1,99975634064857
$v(0,8125;0,5)$	1,99993814398682	1,99973984191819
$v(0,875;0,5)$	1,99993368498670	1,99972031199050
$v(0,9375;0,5)$	1,99992469626862	1,99965983858893

Pode-se observar que as ordens aparente e efetiva não foram calculadas em alguns casos: para a força da placa obtida com UDS (Caso_0064 e Caso_0128) e UDS-2 (Caso_0016 e Caso_0032), para o fluxo de massa total (Caso_0016) e velocidade central v (Caso_0008 e Caso_0016). Isto ocorre devido a uma inversão de sinal dos resultados numéricos, o que ocasiona em um logaritmo negativo na obtenção destas ordens. Maiores detalhes sobre esta inversão de sinais podem ser obtidos no Apêndice A.

Para os perfis de velocidade u e v são consideradas apenas as três malhas mais finas, ou seja, com 256X256, 512X512 e 1024X1024 nós para o cálculo da ordem aparente, já para o cálculo da ordem efetiva são consideradas apenas as duas malhas mais finas.

Nas tabelas 4.25 e 4.26, pode-se comparar as ordens práticas para a força da placa e para o fluxo de massa obtidas por Morais (2004) e neste trabalho.

Tabela 4.25: Comparação entre as ordens práticas para a força da placa

	Morais (2004)	Presente trabalho (Caso 1024)	Presente trabalho (Caso 128)
Ordem aparente	2,126847464917900	1,4618884283017600	Inexistente
Ordem efetiva	Inexistente	1,6386351888514900	0,6223672347936160

Na tabela 4.25 pode-se observar que a ordem aparente que foi obtida por Morais (2004) está mais próxima do valor teórico, enquanto que a ordem efetiva apresentada neste trabalho é mais coerente do que a obtida por Morais (2004).

Tabela 4.26: Comparação das ordens práticas para o fluxo de massa

	Morais (2004)	Presente trabalho (Caso 1024)	Presente trabalho (Caso 128)
Ordem aparente	2,469301631896430	1,9990544275454100	3,1851404415339400
Ordem efetiva	1,594232589816090	1,9569962799386300	1,0661122864992800

Na tabela 4.26 para o fluxo de massa, as ordens práticas obtidas no presente trabalho mostraram-se bem mais próximas do valor teórico do que o obtido por Morais (2004).

As ordens práticas para cada uma das variáveis de interesse também podem ser observadas nas figuras 4.11 a 4.16, que estão dispostas a seguir, sendo que para as variáveis globais e para as velocidades centrais (variáveis locais), foram considerados os resultados obtidos em todas as malhas. Conforme se pode observar nas figuras 4.11 e 4.12, as ordens aparente e efetiva para a força da placa não estão tendendo para a ordem assintótica (teórica) à medida que a malha está sendo refinada, o que pode ser entendido levando-se em conta as considerações do Apêndice A.

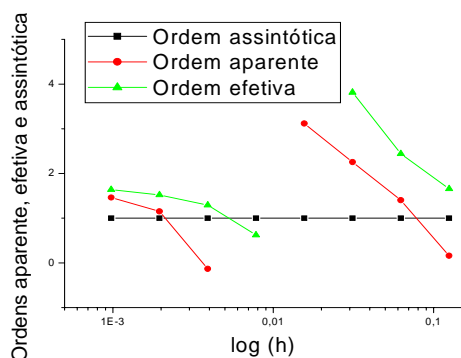


Figura 4.11: Ordens aparente, assintótica e efetiva por h para a força da placa com UDS

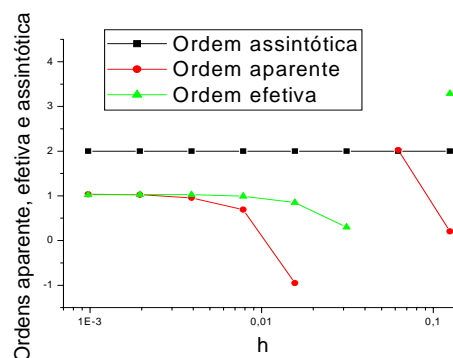


Figura 4.12: Ordens aparente, assintótica e efetiva por h para a força da placa com UDS-2

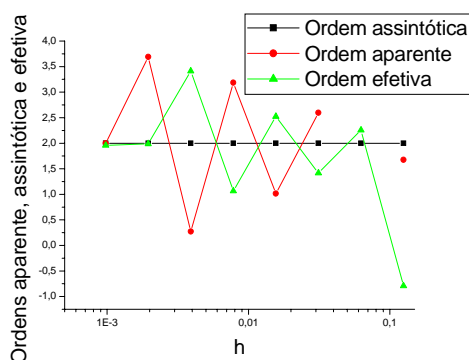


Figura 4.13: Ordens aparente, assintótica e efetiva por h para o fluxo de massa total

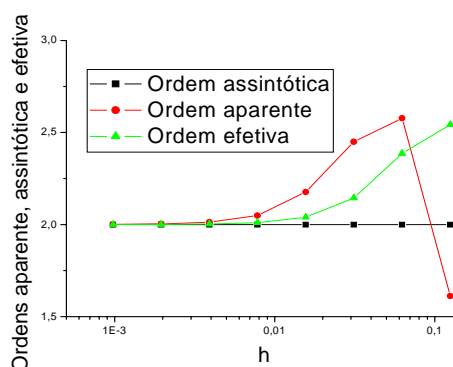


Figura 4.14: Ordens aparente, assintótica e efetiva por h para o fluxo de massa com v_n

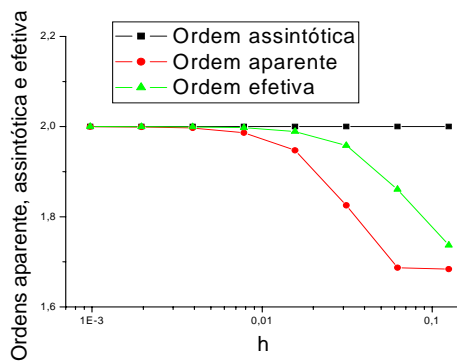


Figura 4.15: Ordens aparente, assintótica e efetiva para a velocidade u central

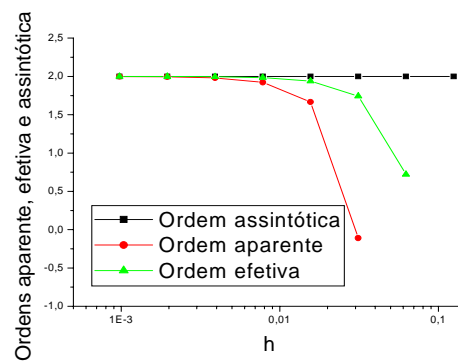


Figura 4.16: Ordens aparente, assintótica e efetiva para a velocidade v central

Na figura 4.13, para o fluxo de massa total, não se pode concluir a que valor as ordens práticas estão tendendo, pois tanto a ordem aparente, quanto a ordem efetiva estão oscilando.

Nas figuras 4.14, 4.15 e 4.16, as ordens aparente e efetiva têm um comportamento esperado, ou seja, estão tendendo para a ordem assintótica.

As ordens assintóticas práticas (valor a que a ordem aparente está tendendo) e ordem assintótica teórica (valor obtido com análises *a priori*) para cada uma das variáveis de interesse podem ser observadas na tabela 4.27, onde estão listados os valores de $p_L^{\text{teórico}}$ (ordem assintótica teórica) e $p_L^{\text{prático}}$ (ordem assintótica prática).

Tabela 4.27: Ordens práticas para as variáveis de interesse para o problema de Shih

Variável de interesse	Ordem assintótica prática	Ordem assintótica (teórica)
Força da placa com UDS	2 ? (inconclusivo)	1
Força da placa com UDS-2	1	2
Fluxo de massa total	2 ? (inconclusivo)	2
Fluxo de massa com v_n	2	2
Velocidade central u	2	2
Velocidade central v	2	2

Na tabela 4.27, para a força da placa obtida com UDS e o fluxo de massa total, a ordem assintótica prática resultou em valores “inconclusivos”, pois não se aproximam de um valor, estes valores estão oscilando, conforme pode ser visto na figura 4.11 para a força da placa com UDS, e na figura 4.13 para o fluxo de massa.

Para o fluxo de massa obtido com UDS-2, observa-se na figura 4.12 que suas ordens práticas estão tendendo para um valor diferente ao da ordem assintótica, o que pode ser entendido com as análises feitas no apêndice A.

4.4 Verificação da solução numérica

Para cada variável de interesse foi estimado o erro da solução numérica e foi também avaliada a acurácia e a confiabilidade do erro estimado, sendo que, cada estimador foi obtido com base nas três malhas mais finas, ou seja, 256X256, 512X512 e 1024X1024 nós. Na tabela 4.28, a variável força sobre a placa foi analisada com as duas aproximações numéricas utilizadas neste trabalho, e também foi avaliada com a ordem aparente e com o $p_L^{prático}$, que é o valor a que a ordem aparente está tendendo.

Tabela 4.28: Estimativa do erro da solução numérica para as variáveis de interesse (problema de Shih)

Variável de interesse	Erro verdadeiro (malha mais fina)	$\frac{U_{Ri}(\phi_1, p_L)}{E}$	$\frac{U_{Ri}(\phi_1, p_U)}{E}$	$\frac{U_{GCI}(\phi_1, p)}{E}$
Força da placa com UDS ($p_L^{teórico}$)	-0,0000507019503	2,1137113073022	1,2046087165514	6,3411339219066
Força da placa com UDS-2 ($p_L^{teórico}$)	-0,0021409444660	0,3440777628323	0,9822878108730	2,9468634326192
Força da placa com UDS ($p_L^{prático}$)	-0,0000507019503	0,7045704339251	1,2046087165514	6,3411339219066
Força da placa com UDS-2 ($p_L^{prático}$)	-0,0021409444660	1,0322332883337	0,9822878108730	3,0966998650011
Fluxo de massa total	0,0000001463732	0,9608426225909	0,9616827565194	2,8850482695584
Fluxo de massa com v_n	-0,0000000673314	1,0002331801345	0,9993015961111	3,0006995404036
$u(0,5;0,5)$	-0,0000016143528	0,9999680968161	1,0001488201062	3,0004464603188
$v(0,5;0,5)$	-0,0000000280880	0,9997797790191	1,0008753813045	3,0026261439135

Na tabela 4.28, a força da placa com UDS-2 ($p_L^{prático}$), o fluxo de massa obtido com v_n , e as velocidades centrais, $u(0,5;0,5)$ e $v(0,5;0,5)$, já estão na faixa convergente de p_U , ou seja, para a força da placa com UDS-2 ($p_L^{prático}$) e o fluxo de massa obtido com v_n tem-se que $U_{Ri}(p_U)/E < 1 < U_{Ri}(p_L)/E$, e para as velocidades centrais tem-se que $U_{Ri}(p_L)/E < 1 < U_{Ri}(p_U)/E$.

As estimativas obtidas com o extrapolador de Richardson obtidas por Morais (2004) para o fluxo de massa, tanto para a ordem aparente quanto para a ordem assintótica, estão oscilando, e não tendendo para a unidade como deveriam. Comportamento diferente ao obtido neste trabalho, onde estes valores se aproximam de 1 (Tabela 4.28). Para o estimador GCI, as estimativas obtidas também oscilam nos resultados obtidos por Morais (2004). Já os descritos neste trabalho tendem a um valor fixo.

Para a força da placa, as estimativas obtidas com o estimador de Richardson por Morais (2004) não apresentam um comportamento esperado, pois também estão oscilando. Comportamento parecido ao observado neste trabalho, onde estes valores não estão próximos da unidade. Para o estimador GCI, os resultados obtidos neste trabalho também não são satisfatórios, pois dependem do estimador de Richardson, o mesmo ocorrendo para os resultados obtidos por Morais (2004).

Nas tabelas 4.29 e 4.30, para os perfis de velocidade u e v , foram analisadas as estimativas do erro da solução numérica.

Tabela 4.29: Estimativa do erro da solução numérica para o perfil de velocidade u (problema de Shih)

Nome da simulação	Erro verdadeiro	$\frac{U_{Ri}(\phi_1, p_L)}{E}$	$\frac{U_{Ri}(\phi_1, p_U)}{E}$	$\frac{U_{GCI}(\phi_1, p)}{E}$
$u(0,5;0,0625)$	0,00000019040619	1,0000268660809	1,0001555098649	3,0004665295949
$u(0,5;0,125)$	0,00000021999160	1,0000270964479	1,0002177562082	3,0006532686246
$u(0,5;0,1875)$	0,00000011207915	1,0000712563599	1,0003624995711	3,0010874987134
$u(0,5;0,25)$	-0,00000010809498	0,9998858998617	0,9999250676457	2,9997752029371
$u(0,5;0,3125)$	-0,00000041612716	0,9999551571388	1,0001034735816	3,0003104207450
$u(0,5;0,375)$	-0,00000078796483	0,9999659096535	1,0001338562345	3,0004015687036
$u(0,5;0,4375)$	-0,00000119765628	0,9999686596432	1,0001444622767	3,0004333868303
$u(0,5;0,5)$	-0,00000161435286	0,9999680970224	1,0001488201062	3,0004464619697
$u(0,5;0,5625)$	-0,00000199923712	0,9999657572776	1,0001502566234	3,0004507698702
$u(0,5;0,625)$	-0,00000230283396	0,9999632542675	1,0001485094907	3,0004455284722
$u(0,5;0,6875)$	-0,00000246304185	0,9999639694840	1,0001394299366	3,0004182898098
$u(0,5;0,75)$	-0,00000240416250	0,9999723467132	1,0001156537967	3,0003469613901
$u(0,5;0,8125)$	-0,00000203732168	0,9999868137193	1,0000735932796	3,0002207798390
$u(0,5;0,875)$	-0,00000126328360	1,0000248294603	0,9999612363520	3,0000744883809
$u(0,5;0,9375)$	0,00000002056510	0,9954811361825	1,0146561946948	3,0439685840844

Tabela 4.30: Estimativa do erro da solução numérica para o perfil de velocidade v (problema de Shih)

Nome da simulação	Erro verdadeiro	$\frac{U_{Ri}(\phi_1, p_L)}{E}$	$\frac{U_{Ri}(\phi_1, p_U)}{E}$	$\frac{U_{GCI}(\phi_1, p)}{E}$
$v(0,0625;0,5)$	0,00000105949772	0,9999261096439	1,0002608603213	3,0007825809639
$v(0,125;0,5)$	0,00000171502907	0,9999346660202	1,0002135938816	3,0006407816449
$v(0,1875;0,5)$	0,00000199696074	0,9999396342771	1,0001968324979	3,0005904974938
$v(0,25;0,5)$	0,00000196098785	0,9999467807436	1,0001816993004	3,0005450979012
$v(0,3125;0,5)$	0,00000167322345	0,9999559208200	1,0001646446193	3,0004939338579
$v(0,375;0,5)$	0,00000120199652	0,9999667003943	1,0001440795588	3,0004322386766
$v(0,4375;0,5)$	0,00000061380905	0,9999808636539	1,000111689966	3,0003350698984
$v(0,5;0,5)$	-0,00000002808803	0,9997797735353	1,0008753664005	3,0026260992016
$v(0,5625;0,5)$	-0,00000066340096	0,9999658847974	1,0001681266935	3,0005043800805
$v(0,625;0,5)$	-0,00000123351834	0,9999620413778	1,0001616414597	3,0004849243790
$v(0,6875;0,5)$	-0,00000167993291	0,9999553930591	1,0001660588091	3,0004981764275
$v(0,75;0,5)$	-0,00000194305520	0,9999485662133	1,0001737753837	3,0005213261511
$v(0,8125;0,5)$	-0,00000196219119	0,9999428341306	1,0001832936410	3,0005498809231
$v(0,875;0,5)$	-0,00000167756958	0,9999387133225	1,0001972258506	3,0005916775520
$v(0,9375;0,5)$	-0,00000103572701	0,9999304063908	1,0002448221861	3,0007344665584

Conforme pode ser observado na tabela 4.28, para a força da placa obtida com UDS, as incertezas calculadas com o estimador de Richardson, tanto com a ordem aparente como com a assintótica, mostrou-se confiável, mas de baixa acurácia, pois $U_{Ri}/E \gg 1$, o mesmo ocorrendo para o estimador GCI.

Para a força da placa obtida com UDS-2, as incertezas obtidas com o estimador de Richardson mostraram-se inacuradas, pois $U_{Ri}/E \ll 1$, já o estimador GCI é confiável, pois $U_{GCI}/|E| \gg 1$. As razões obtidas com $p_L^{prático}$ para a força da placa obtida com UDS mostraram-se inacuradas pois $U_{Ri}/E \ll 1$, já a força da placa obtida com UDS-2 mostrou-se acurada e confiável pois $U_{Ri}/E \approx 1$.

Para os fluxos de massa, velocidades centrais e os perfis de velocidade, os resultados apresentaram um comportamento semelhante. As incertezas obtidas com o estimador de Richardson, tanto com a ordem assintótica como com a aparente, apresentam-se acuradas e confiáveis, pois $U_{Ri}/E \approx 1$, enquanto a incerteza obtida com o estimador GCI, é considerada confiável, mas de acurácia baixa, pois $U_{Ri}/E \gg 1$. Os resultados que estão dispostos nas tabelas 4.28, 4.29 e 4.30 também podem ser observados através das figuras que seguem, sendo que primeiro estão listados os gráficos com as razões dos estimadores pelos erros (figuras 4.17 a 4.24), e na seqüência se encontram os gráficos com os estimadores utilizados neste trabalho (figuras 4.25 a 4.32), sendo que a forma de obtenção destes valores já foi descrita no Capítulo 3.

As razões dos estimadores pelo erro numérico utilizadas para a construção das figuras abaixo relacionadas se encontram listadas no Apêndice C, bem como os estimadores de erros para todas as malhas utilizadas.

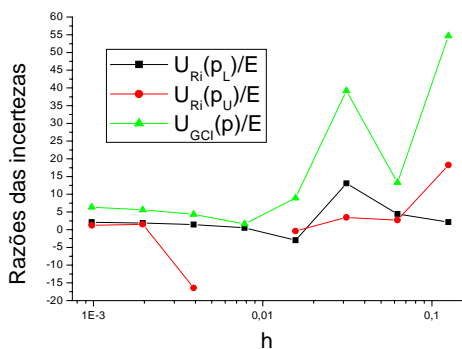


Figura 4.17: Razões dos estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica) e GCI pelo erro numérico para a força da placa com UDS

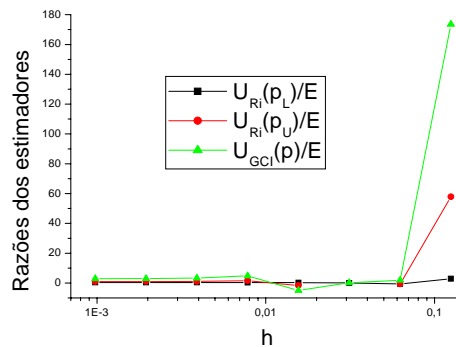


Figura 4.18: Razões dos estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica) e GCI pelo erro numérico para a força da placa com UDS-2

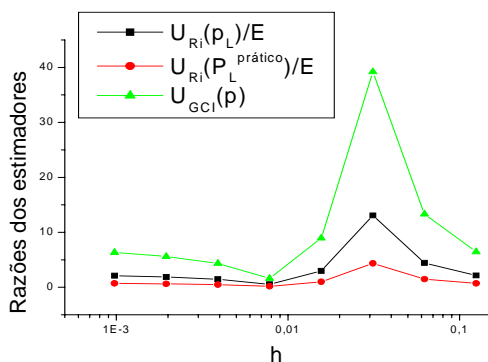


Figura 4.19: Razões dos estimadores de Richardson (ordens assintótica – prática e assintótica) e GCI pelo erro numérico para a força da placa com UDS

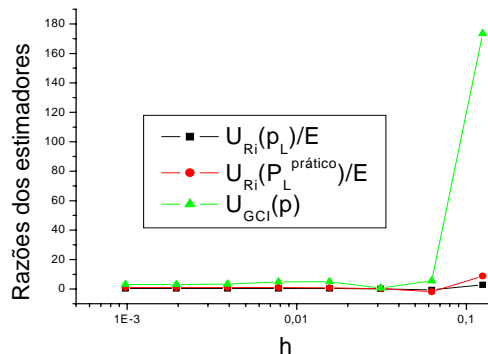


Figura 4.20: Razões dos estimadores de Richardson (ordens assintótica - prática e assintótica) e GCI pelo erro numérico para a força da placa com UDS-2

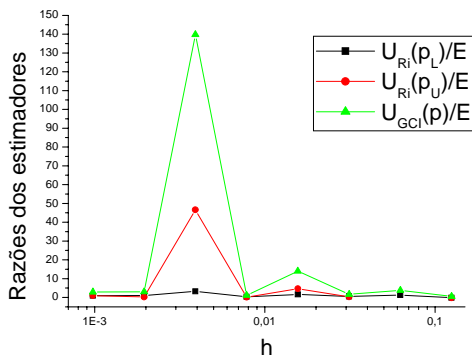


Figura 4.21: Razões dos estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica) e GCI pelo erro numérico para o fluxo de massa total

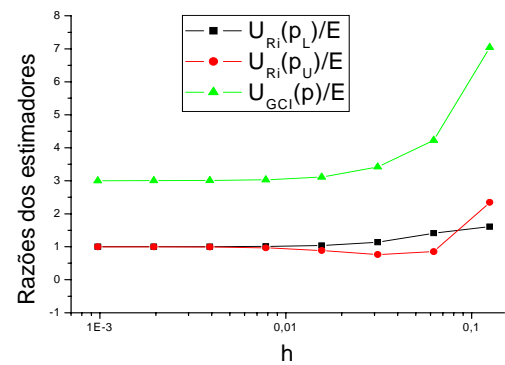


Figura 4.22: Razões dos estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica) e GCI pelo erro numérico para o fluxo de massa com v_n

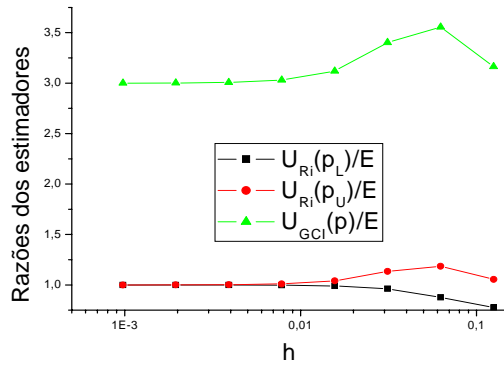


Figura 4.23: Razões do Estimador de Richardson (ordens aparente e assintótica) e GCI pelo erro numérico para a velocidade u central

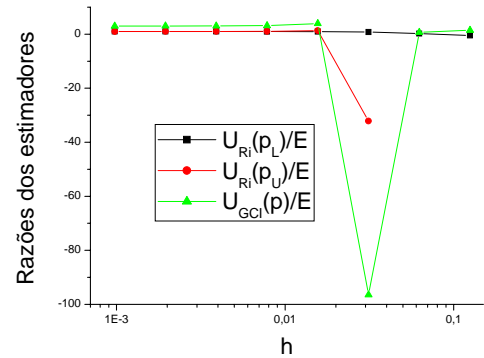


Figura 4.24: Razões do Estimador de Richardson (ordens aparente e assintótica) e GCI pelo erro numérico para a velocidade v central

Da observação das figuras 4.17 a 4.24 pode-se concluir que, as razões do estimador de Richardson (para as ordens aparente e assintótica) e estimador GCI pelo erro numérico para as variáveis globais (força da placa com UDS e UDS-2, e para o fluxo de massa total e com v_n) têm um comportamento semelhante, figuras 4.17 a 4.22. O mesmo ocorre para as velocidades centrais, o que pode ser observado nas figuras 4.23 e 4.24.

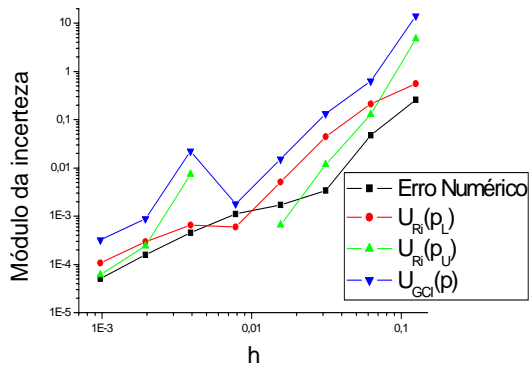


Figura 4.25: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI e erro verdadeiro para a força da placa com UDS

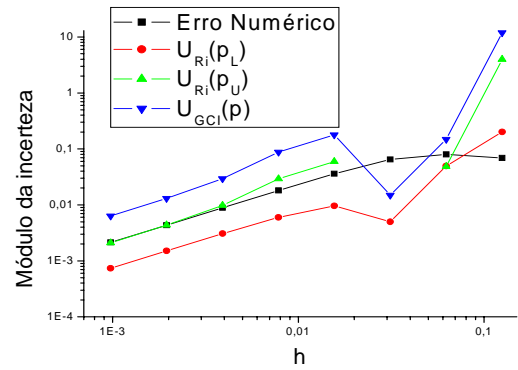


Figura 4.26: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI e erro verdadeiro para a força da placa com UDS-2

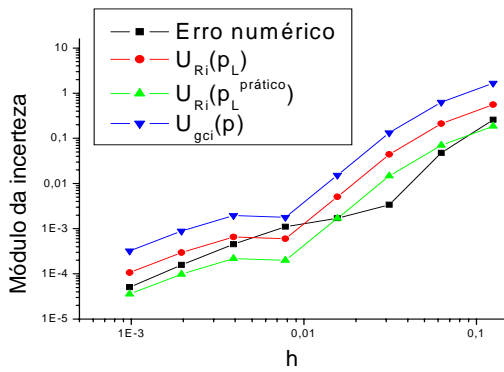


Figura 4.27: Estimadores de Richardson (ordens assintótica –prática e assintótica), GCI e erro verdadeiro para a força da placa com UDS

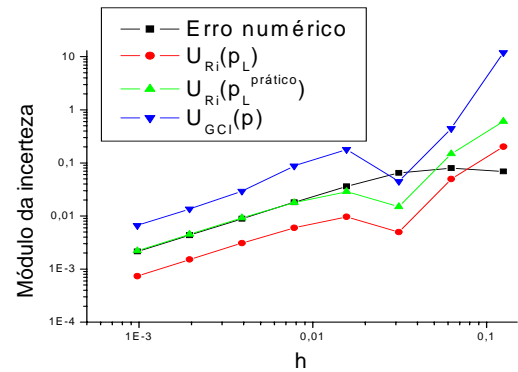


Figura 4.28: Estimadores de Richardson (ordens assintótica –prática e assintótica), GCI e erro verdadeiro para a força da placa com UDS-2

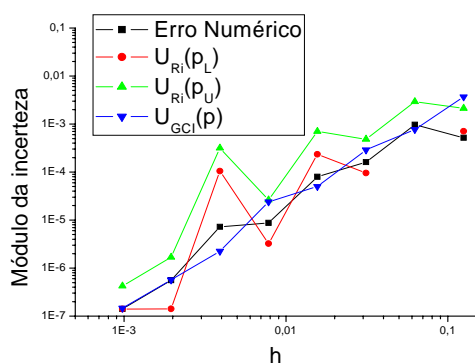


Figura 4.29: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI e erro verdadeiro para o fluxo de massa total

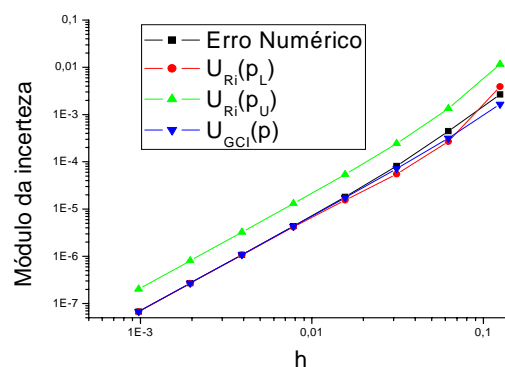


Figura 4.30: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI e erro verdadeiro para o fluxo de massa com v_n

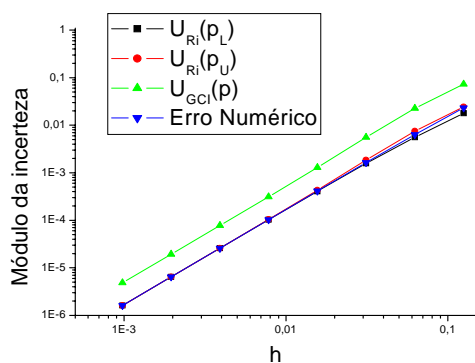


Figura 4.31: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI e erro verdadeiro para a velocidade u central

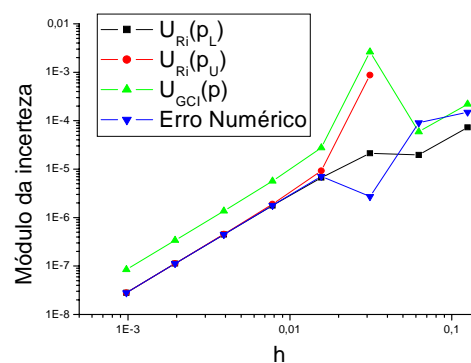


Figura 4.32: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI e erro verdadeiro para a velocidade v central

Da observação das figuras 4.25 a 4.32 se pode concluir que, os estimadores de Richardson (para as ordens aparente, assintótica e prática), estimador GCI e erro numérico para as variáveis globais (força da placa com UDS e UDS-2 e fluxo de massa total e com v_n) têm um comportamento semelhante, figuras 4.25 a 4.30. O mesmo ocorre para as velocidades centrais, o que pode ser observado nas figuras 4.31 e 4.32.

A solução numérica para cada variável de interesse com seu erro estimado, pode ser analisada nas tabelas 4.31 a 4.33, considerando-se ϕ_1 a malha mais fina (1024 nós). Para a

obtenção desta solução foi utilizado o estimador Convergente (MARCHI e SILVA, 2002) descrito no capítulo 3.

Nas tabelas 4.31, a 4.33, a última coluna ressalta se a solução numérica com seu erro estimado com o estimador convergente envolve a solução analítica, ou seja, se a solução analítica pertence ao intervalo indicado.

Tabela 4.31: Solução numérica com seu erro estimado para o problema de Shih

Variável de interesse	$\phi = \phi_c \pm U_c$	Envolve Φ ?
Força da placa com UDS (p_L teórico)	$2,6666332459684 \pm 0,0000230466372$	Não
Força da placa com UDS-2 (p_L teórico)	$2,6673877736152 \pm 0,0006831861352$	Não
Força da placa com UDS (p_L prático)	$2,6666459224266 \pm 0,0000357230951$	Sim
Força da placa com UDS-2 (p_L prático)	$2,6673343083684 \pm 0,0007366513821$	Sim
Fluxo de massa total	$0,1249999943298 \pm 0,0000000000614$	Não
Fluxo de massa com v_n	$0,0937500000156 \pm 0,0000000000313$	Não
$u(0,5;0,5)$	$0,2500000000943 \pm 0,0000000001458$	Sim
$v(0,5;0,5)$	$0,0000000000092 \pm 0,0000000000153$	Sim

Tabela 4.32: Solução numérica com seu erro estimado para o perfil de velocidade u para o problema de Shih

Variável de interesse	$\phi = \phi_c \pm U_c$	Envolve Φ ?
$u(0,5;0,0625)$	$0,0620117187326 \pm 0,0000000000122$	Não
$u(0,5;0,125)$	$0,1210937499730 \pm 0,0000000000209$	Não
$u(0,5;0,1875)$	$0,1743164062256 \pm 0,0000000000163$	Sim
$u(0,5;0,25)$	$0,2187499999897 \pm 0,0000000000021$	Não
$u(0,5;0,3125)$	$0,2514648437621 \pm 0,0000000000308$	Sim
$u(0,5;0,375)$	$0,2695312500393 \pm 0,0000000000661$	Sim
$u(0,5;0,4375)$	$0,2700195313177 \pm 0,0000000001052$	Sim
$u(0,5;0,5)$	$0,2500000000943 \pm 0,0000000001458$	Sim
$u(0,5;0,5625)$	$0,2065429688659 \pm 0,0000000001844$	Sim
$u(0,5;0,625)$	$0,1367187501286 \pm 0,0000000002133$	Sim
$u(0,5;0,6875)$	$0,0375976563773 \pm 0,0000000002160$	Sim
$u(0,5;0,75)$	$0,0937499998942 \pm 0,0000000001722$	Sim
$u(0,5;0,8125)$	$0,2602539061884 \pm 0,0000000000883$	Sim
$u(0,5;0,875)$	$0,4648437500088 \pm 0,0000000000401$	Sim
$u(0,5;0,9375)$	$0,7104492188542 \pm 0,0000000001971$	Sim

Tabela 4.33: Solução numérica com seu erro estimado para o perfil de velocidade v para o problema de Shih

Variável de interesse	$\phi = \phi_c \pm U_c$	Envolve Φ ?
$v(0,0625;0,5)$	$0,1538085938490 \pm 0,0000000001773$	Sim
$v(0,125;0,5)$	$0,2460937501271 \pm 0,0000000002391$	Sim
$v(0,1875;0,5)$	$0,2856445313862 \pm 0,0000000002568$	Sim
$v(0,25;0,5)$	$0,2812500001259 \pm 0,0000000002303$	Sim
$v(0,3125;0,5)$	$0,2416992188508 \pm 0,0000000001746$	Sim
$v(0,375;0,5)$	$0,1757812500665 \pm 0,0000000001066$	Sim
$v(0,4375;0,5)$	$0,0922851562784 \pm 0,0000000000401$	Sim
$v(0,5;0,5)$	$0,0000000000092 \pm 0,0000000000153$	Sim
$v(0,5625;0,5)$	$0,0922851562944 \pm 0,0000000000670$	Sim
$v(0,625;0,5)$	$0,1757812500762 \pm 0,0000000001231$	Sim
$v(0,6875;0,5)$	$0,2416992188520 \pm 0,0000000001769$	Sim
$v(0,75;0,5)$	$0,2812500001188 \pm 0,0000000002187$	Não
$v(0,8125;0,5)$	$0,2856445313737 \pm 0,0000000002359$	Sim
$v(0,875;0,5)$	$0,2460937501140 \pm 0,0000000002168$	Sim
$v(0,9375;0,5)$	$0,1538085938407 \pm 0,0000000001628$	Sim

A solução numérica pode também ser estimada com o uso do estimador GCI, também já descrito no capítulo 3. Esta estimativa da solução numérica pode ser observada nas tabelas 4.34, 4.35 e 4.36. Nestas tabelas também apresentam na última coluna se a solução analítica pertence ou não ao intervalo obtido com o estimador GCI, sendo que esta informação é repassada como a resposta à pergunta feita na última coluna.

Tabela 4.34: Solução numérica com seu erro estimado com estimador GCI para o problema de Shih

Variável de interesse	$\phi = \phi_1 \pm U_{GCI}(\phi_1, p)$	Envolve Φ ?
Força da placa com UDS (p_L teórico)	$2,6667173686170 \pm 0,0003215078566$	Sim
Força da placa com UDS-2 (p_L teórico)	$2,6688076111326 \pm 0,0063090709540$	Sim
Força da placa com UDS (p_L prático)	$2,6667173686170 \pm 0,0001071692855$	Sim
Força da placa com UDS-2 (p_L prático)	$2,6688076111326 \pm 0,0066298624389$	Sim
Fluxo de massa total	$0,124999853626 \pm 0,0000004222937$	Sim
Fluxo de massa com v_n	$0,0937500673314 \pm 0,0000002020415$	Sim
$u(0,5;0,5)$	$-0,2499983856471 \pm 0,000004843779$	Sim
$v(0,5;0,5)$	$0,0000000280880 \pm 0,0000000843378$	Sim

Tabela 4.35: Solução numérica para o perfil de velocidade u com seu erro estimado com estimador GCI para o problema de Shih

Variável de interesse	$\phi = \phi_1 \pm U_{GCI}(\phi_1, p)$	Envolve Φ ?
$u(0,5;0,0625)$	$-0,0620119091561 \pm 0,0000005713074$	Sim
$u(0,5;0,125)$	$-0,1210939699916 \pm 0,0000006601185$	Sim
$u(0,5;0,1875)$	$-0,1743165183291 \pm 0,0000003363593$	Sim
$u(0,5;0,25)$	$-0,2187498919050 \pm 0,0000003242606$	Sim
$u(0,5;0,3125)$	$-0,2514644276228 \pm 0,0000012485106$	Sim
$u(0,5;0,375)$	$-0,2695304620351 \pm 0,0000023642109$	Sim
$u(0,5;0,4375)$	$-0,2700183335937 \pm 0,0000035934878$	Sim
$u(0,5;0,5)$	$-0,2499983856471 \pm 0,0000048437793$	Sim
$u(0,5;0,5625)$	$-0,2065409695128 \pm 0,0000059986125$	Sim
$u(0,5;0,625)$	$-0,1367164471660 \pm 0,0000069095278$	Sim
$u(0,5;0,6875)$	$-0,0375951932081 \pm 0,0000073901558$	Sim
$u(0,5;0,75)$	$0,0937524041625 \pm 0,0000072133216$	Sim
$u(0,5;0,8125)$	$0,2602559435716 \pm 0,0000061124148$	Sim
$u(0,5;0,875)$	$0,4648450132836 \pm 0,0000037899449$	Sim
$u(0,5;0,9375)$	$0,7104491981848 \pm 0,000000625995$	Sim

Tabela 4.36: Solução numérica para o perfil de velocidade v com seu erro estimado com estimador GCI para o problema de Shih

Variável de interesse	$\phi = \phi_1 \pm U_{GCI}(\phi_1, p)$	Envolve Φ ?
$v(0,0625;0,5)$	$0,1538075342522 \pm 0,0000031793223$	Sim
$v(0,125;0,5)$	$0,2460920349709 \pm 0,0000051461861$	Sim
$v(0,1875;0,5)$	$0,2856425342892 \pm 0,0000059920614$	Sim
$v(0,25;0,5)$	$0,2812480390121 \pm 0,0000058840324$	Sim
$v(0,3125;0,5)$	$0,2416975455265 \pm 0,0000050204968$	Sim
$v(0,375;0,5)$	$0,1757800480034 \pm 0,0000036065091$	Sim
$v(0,4375;0,5)$	$0,0922845424409 \pm 0,0000018416328$	Sim
$v(0,5;0,5)$	$0,000000280880 \pm 0,000000843378$	Sim
$v(0,5625;0,5)$	$-0,0922844928490 \pm 0,0000019905375$	Sim
$v(0,625;0,5)$	$-0,1757800164816 \pm 0,0000037011532$	Sim
$v(0,6875;0,5)$	$-0,2416975388170 \pm 0,0000050406356$	Sim
$v(0,75;0,5)$	$-0,2812480569447 \pm 0,0000058301785$	Sim
$v(0,8125;0,5)$	$-0,2856425690588 \pm 0,0000058876525$	Sim
$v(0,875;0,5)$	$-0,2460920724304 \pm 0,0000050337013$	Sim
$v(0,9375;0,5)$	$-0,1538075580229 \pm 0,0000031079417$	Sim

Nas figuras 4.33 e 4.34 podem-se observar os perfis de velocidade nas duas direções, na malha mais fina, com estimador GCI e com barra de erros para a solução numérica.

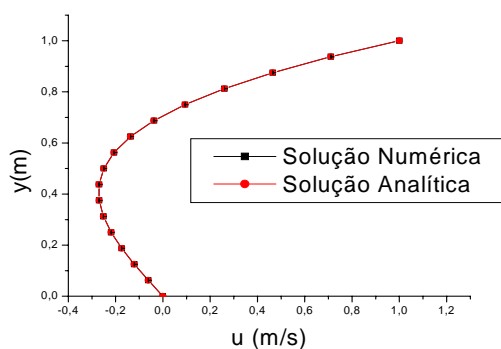


Figura 4.33: Perfil de velocidade u em $x=0,5m$ para a malha com 1024×1024 nós com barra de erros

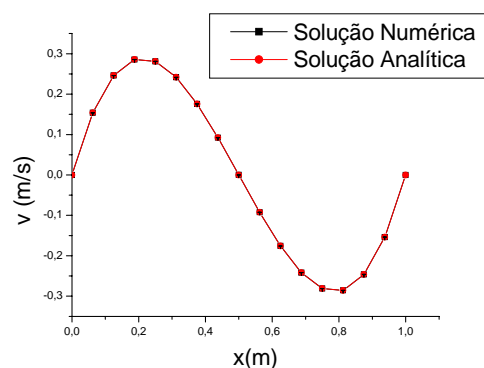


Figura 4.34: Perfil de velocidade v em $y=0,5m$ para a malha com 1024×1024 nós com barra de erros

4.5 Conclusão

Neste capítulo foi estudado o problema do escoamento recirculante em uma cavidade quadrada proposto por Shih *et al.* (1989) descrevendo-se os resultados para duas variáveis globais: o fluxo de massa que escoava dentro da cavidade (tanto o total quanto o obtido com v_n), que foi obtido através das linhas de corrente e por integração, e a força que é aplicada pela placa superior da cavidade ao fluido. Também foram apresentados os resultados para as variáveis locais, que são as velocidades centrais em cada uma das direções, e os perfis de velocidade u e v . Os perfis foram calculados para as três malhas mais finas utilizadas no estudo da incerteza numérica das soluções obtidas para este problema.

As análises das variáveis globais, força da placa e fluxo de massa, mostraram que os resultados obtidos com as malhas escolhidas (2X2, 4X4, 8X8, 16X16, 32X32, 64X64, 128X128, 256X256, 512X512 e 1024X1024 nós) estavam convergindo para a solução analítica do problema. Isto pode ser comprovado para o fluxo de massa, através da análise das ordens obtidas com a solução numérica do problema (ordens aparente e efetiva), que se aproximaram da ordem assintótica (teórica), também através das incertezas obtidas com os estimadores de Richardson (baseado nas ordens aparente e assintótica) e GCI. Também foram analisadas as razões dos estimadores pelo erro numérico, para que a acurácia e a confiabilidade do erro fossem estimadas. Todas estas análises foram feitas através de tabelas e gráficos, que puderam deixar mais clara a visualização dos resultados.

Para a força da placa, as ordens aparente e efetiva não convergiram para o valor teórico (ordem assintótica), o que acabou afetando todas as outras análises (estimadores de Richardson, GCI e Convergente, e também as razões dos estimadores pelos erros numéricos), como pode ser observado na seção 4.4. Espera-se que, quando o tamanho médio do elemento tende a zero, as ordens aparente e efetiva tendam ao valor da ordem assintótica e que, a partir de um determinado valor do tamanho do elemento este comportamento seja monotônico (MARCHI, 2001). Entretanto, os valores demonstrados nas tabelas 4.17, 4.18 e 4.28, não refletem esta situação. Uma explicação para estes resultados pode ser obtida através da apreciação do Apêndice A, onde foram feitas análises para a derivada $\frac{du}{dy}$, presente na discretização da força sobre a placa. Foram obtidos resultados para duas aproximações desta derivada: UDS e UDS-2. Nestes resultados, observou-se que as ordens aparente e efetiva de UDS tendem a 2, quando deveriam tender a 1. Já as ordens aparente e efetiva de UDS-2 tendem a 1, quando deveriam tender a 2. Desta forma, para esta variável de interesse observou-se que a ordem aparente está tendendo a outro valor (diferente da ordem assintótica), valor este chamado de ordem assintótica prática ($p_L^{\text{prático}}$). Também foram feitas análises com o valor da ordem assintótica prática, onde os resultados se mostraram mais coniventes com o esperado.

Para a força da placa tem-se que $|E_{UDS}| < |E_{UDS-2}|$, isto pode estar ocorrendo devido a aproximação UDS (com ordem 1), que parece se comportar como CDS, que possui ordem 2. Este fato pode ser decorrente do uso de volumes fictícios para a aplicação das condições de contorno e também devido ao fato da ordem aparente de aproximações de problemas unidimensionais pode apresentar um comportamento diferente em problemas bidimensionais.

Para as variáveis locais, os perfis de velocidade u e v e as velocidades centrais, pode-se observar que os resultados obtidos numericamente estão convergindo para a solução analítica conforme o tamanho do elemento da malha é reduzido. Isto pode ser comprovado através da análise das ordens efetiva e aparente, que se aproximam do valor teórico (ordem assintótica) conforme a malha é refinada. Esta convergência também pode ser analisada quando se observam as incertezas do erro numérico obtidas com o estimador de Richardson (ordens aparente e assintótica) e com o estimador GCI. Estas variáveis podem ainda ser analisadas com as razões dos estimadores pelos erros numéricos, que estimaram a acurácia e a

confiabilidade dos erros. Estes resultados podem ser observados tanto em tabelas, como em gráficos nas seções anteriores.

O estimador convergente não se mostrou confiável para as forças da placa obtidas com UDS-2 e com $p_L^{teórico}$, também não se mostraram confiáveis para os fluxos de massa total e com v_n (tabela 4.31). Já os perfis de velocidade em algumas coordenadas ($u(0,5;0,0625)$, $u(0,5;0,125)$, $u(0,5;0,25)$ e $v(0,75;0,5)$), não se encontram na faixa convergente. Para o estimador GCI, todas as variáveis de interesse são confiáveis na malha mais fina, pois a solução analítica se encontra dentro do intervalo proposto por este estimador.

Através de gráficos puderam ser observados ainda o campo de velocidades, bem como as linhas de corrente que ilustram o comportamento do escoamento na cavidade quadrada.

Os resultados obtidos para este problema também puderam ser comparados aos de Morais (2004), sendo que os obtidos neste trabalho se mostraram mais acurados do que os obtidos naquele trabalho. As ordens práticas aqui calculadas estão mais próximas dos valores teóricos do que os de Morais (2004), com apenas uma exceção para a ordem aparente calculada para a força da placa (Tabela 4.25). As estimativas de erro obtidas com os resultados deste trabalho também foram melhores que as obtidas por Morais (2004).

5 Problema de Ghia para $Re=100$

5.1 Definição do problema

Neste capítulo será tratado um problema cujo domínio de cálculo é uma cavidade quadrada descrito por Ghia *et al.* (1982), sendo que por brevidade, este problema será intitulado apenas de Problema de Ghia. Para a sua resolução será considerado que a placa superior da cavidade movimenta-se com uma velocidade constante, e as velocidades nos demais contornos são nulas. Para este problema a solução analítica ainda não é conhecida. As variáveis de interesse aqui analisadas serão as mesmas do problema anterior (Capítulo 4, problema de Shih), ou seja: força da placa sobre o fluido F , fluxo de massa \dot{M} , obtido a partir das linhas de corrente e por integração, as velocidades centrais nas duas direções, e os perfis de velocidade u e v . As equações governantes para este problema também já foram descritas anteriormente (Eqs. (4.1), (4.2) e (4.3)), bem como as condições de contorno, com exceção da condição para a velocidade na parede superior, que agora é uma constante, ou seja, $u(x,1)=1$.

As variáveis de interesse globais podem ser expressas pelas Eqs. (2.68), (2.70) e (2.73). A forma de obtenção das variáveis locais, perfis de velocidade e velocidades centrais, também já está descrito no capítulo 2. O domínio de cálculo bem como as condições de contorno aplicadas a este problema, estão representadas esquematicamente na figura 5.1.

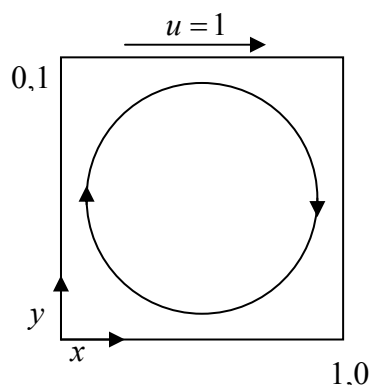


Figura 5.1: Domínio de cálculo para o problema de Ghia

Os dados fixos para a resolução do problema, ou seja, que não são variáveis podem ser observados na tabela 5.1. Os parâmetros variáveis estão listados na tabela 5.2.

Tabela 5.1: Dados fixos para o problema de Ghia com Re=100

Comprimento do domínio de cálculo	1m
Largura do domínio de cálculo	1m
Massa específica do fluido (ρ)	1kg/m ³

Tabela 5.2: Parâmetros variáveis para o problema de Ghia com Re=100

Número de Reynolds	100
Viscosidade	0,01 Pa.s

5.2 Solução Numérica

O modelo numérico utilizado para a obtenção de cada variável de interesse é o mesmo descrito no capítulo 2. Naquele capítulo também foram apresentadas a discretização do domínio de cálculo, os tipos de aproximações numéricas utilizadas e, as hipóteses simplificativas consideradas.

As expressões para os coeficientes e termos fontes já estão descritas no capítulo 2. O termo fonte para as velocidades dado pela Eq. (2.21), assumem os mesmos valores já descritos pelas Eqs. (4.19) a (4.22), assumindo apenas que:

$$b^{S_v} = 0 \quad (5.1)$$

As condições iniciais consideradas para este problema são:

$$u = v = p = 0 \quad (5.2)$$

As variáveis de interesse globais foram obtidas numericamente a partir das Eqs. (2.74) a (2.77), e a obtenção das variáveis locais também já foi descrita no capítulo 2. Na tabela 2.1 podem ser observadas as ordens assintóticas para todas as variáveis de interesse.

Para se resolver o sistema de equações que surge da discretização das equações diferenciais envolvidas também foi utilizado o método MSI, já descrito anteriormente. O critério de convergência utilizado para a resolução deste problema também foi baseado no resíduo (quando o resíduo atinge o erro de máquina o processo iterativo pára), o mesmo critério utilizado para o problema resolvido anteriormente, e o algoritmo computacional também foi o mesmo.

O programa computacional também foi implementado na linguagem FORTRAN/95, sendo que os arquivos de resultados foram gerados do dia 01/11/2005 ao dia 09/11/2005, com o software Compaq Visual Fortran 6.6. O programa utilizado para se obter os resultados descritos ao longo deste capítulo foi o mesmo utilizado anteriormente (Stokes_1p3.exe) e para a obtenção dos resultados das variáveis globais e locais foi utilizada precisão dupla. O computador empregado para a resolução deste problema também foi o CFD4 do LENA 2. Os dados numéricos fixos para este problema podem ser observados na tabela 5.3.

Tabela 5.3: Dados numéricos fixos do problema de Ghia com $Re=100$

Tolerância do MSI para u e v	0,1
Tolerância do MSI para p'	0,01
Número de iterações internas no MSI para u e v	5
Número de iterações internas no MSI para p'	10

A forma de obtenção da memória computacional para cada simulação, bem como a obtenção do tempo de processamento com sua incerteza, são as mesmas já descritas no capítulo anterior, sendo que para este problema, a incerteza do tempo de processamento é de 0,35%. As identificações de cada simulação realizada para cada um dos casos, com suas respectivas características podem ser observadas nas Tabelas 5.4 e 5.5.

Tabela 5.4: Identificação das simulações para o problema de Ghia com Re=100

Nome da simulação	ST_0002_Re10E2	ST_0004_Re10E2	ST_0008_Re10E2	ST_0016_Re10E2	ST_0032_Re10E2
Número de volumes de controle	02	04	08	16	32
Incremento de tempo Δt (s)	4	1	0,5	0,2	0,2
Memória computacional (MB)	1,6	1,6	1,6	1,63	1,8
Número total de iterações externas	500	500	500	1000	1000
Tempo de processamento	0,03 s	0,06 s	0,09 s	0,66 s	1,86 s
Tamanho dos volumes $-h$ (m)	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125

Tabela 5.5: Identificação das simulações para o problema de Ghia com Re=100

Nome da simulação	ST_0064_Re10E2	ST_0128_Re10E2	ST_0256_Re10E2	ST_0512_Re10E2	ST_1024_Re10E2
Número de volumes de controle	64	128	256	512	1024
Incremento de tempo Δt (s)	0,1	0,2	0,1	0,1	0,05
Memória computacional (MB)	2,6	5,4	16,8	61,6	241,6
Número total de iterações externas	2000	10000	15000	50000	85000
Tempo de processamento	16,80s	5min 39s	51min 50s	9h 43min	4dias 20h
Tamanho dos volumes $-h$ (m)	0,015625	0,0078125	0,00390625	0,001953125	0,0009765625

As simulações descritas nas tabelas 5.4 e 5.5 geraram os resultados abaixo relacionados, que são mostrados para cada variável de interesse. Para a força da placa e fluxo de massa que são as duas variáveis globais analisadas neste problema, a identificação e os resultados são mostrados nas tabelas 5.6 a 5.9.

Tabela 5.6: Solução numérica para a força da placa com UDS para o problema de Ghia com Re=100

Nome da simulação	h (m)	Solução Numérica	Número de algarismos significativos	Iteração que convergiu (aproximada)	Resíduo
ST 0002 Re10E2	0,5	0,03741574166526	16	100	1,80E-16
ST 0004 Re10E2	0,25	0,06383481394674	16	120	1,40E-15
ST 0008 Re10E2	0,125	0,09677694948112	16	170	6,14E-15
ST 0016 Re10E2	0,0625	0,12995162071434	16	320	1,56E-15
ST 0032 Re10E2	0,03125	0,16090966968548	15	450	7,82E-16
ST 0064 Re10E2	0,015625	0,19093680106982	15	800	1,09E-15
ST 0128 Re10E2	0,0078125	0,22066955327498	15	5500	1,27E-15
ST 0256 Re10E2	0,00390625	0,25033170747212	14	11000	2,31E-15
ST 0512 Re10E2	0,001953125	0,27998806312165	14	40000	3,95E-15
ST 1024 Re10E2	0,0009765625	0,30965161977172	15	81000	7,54E-15

Tabela 5.7: Solução numérica para a força da placa com UDS-2 para o problema de Ghia com Re=100

Nome da simulação	h (m)	Solução Numérica	Número de algarismos significativos	Iteração que convergiu (aproximada)	Resíduo
ST 0002 Re10E2	0,5	0,04902623610878	16	100	1,80E-16
ST 0004 Re10E2	0,25	0,08169743985192	16	120	1,40E-15
ST 0008 Re10E2	0,125	0,11960287871000	16	170	6,14E-15
ST 0016 Re10E2	0,0625	0,15432972091187	16	320	1,56E-15
ST 0032 Re10E2	0,03125	0,18467559041021	15	450	7,82E-16
ST 0064 Re10E2	0,015625	0,21391086157897	15	800	1,09E-15
ST 0128 Re10E2	0,0078125	0,24312745886087	15	5500	1,27E-15
ST 0256 Re10E2	0,00390625	0,27250266476827	14	11000	2,31E-15
ST 0512 Re10E2	0,001953125	0,30200880685185	14	40000	3,95E-15
ST 1024 Re10E2	0,0009765625	0,33159564307183	15	81000	7,54E-15

Tabela 5.8: Solução numérica para o fluxo de massa total para o problema de Ghia com Re=100

Nome da simulação	h (m)	Solução Numérica	Número de algarismos significativos	Iteração que convergiu (aproximada)	Resíduo
ST 0002 Re10E2	0,5	0,03230322918414	16	100	1,80E-16
ST 0004 Re10E2	0,25	0,06291292405226	16	120	1,40E-15
ST 0008 Re10E2	0,125	0,08719178831988	15	170	6,14E-15
ST 0016 Re10E2	0,0625	0,09734925065060	16	320	1,56E-15
ST 0032 Re10E2	0,03125	0,10174500127117	15	450	7,82E-16
ST 0064 Re10E2	0,015625	0,10307952098565	15	800	1,09E-15
ST 0128 Re10E2	0,0078125	0,10340918349807	15	5500	1,27E-15
ST 0256 Re10E2	0,00390625	0,10349410729643	14	11000	2,31E-15
ST 0512 Re10E2	0,001953125	0,10351373507335	15	40000	3,95E-15
ST 1024 Re10E2	0,0009765625	0,10351925062477	14	81000	7,54E-15

Tabela 5.9: Solução numérica para o fluxo de massa com v_n para o problema de Ghia com $Re=100$

Nome da simulação	h (m)	Solução Numérica	Número de algarismos significativos	Iteração que convergiu (aproximada)	Resíduo
ST_0002_Re10E2	0,5	0,03230322918414	16	100	1,80E-16
ST_0004_Re10E2	0,25	0,04728503273406	16	120	1,40E-15
ST_0008_Re10E2	0,125	0,05698981660069	15	170	6,14E-15
ST_0016_Re10E2	0,0625	0,06139743953161	16	320	1,56E-15
ST_0032_Re10E2	0,03125	0,06517847663203	15	450	7,82E-16
ST_0064_Re10E2	0,015625	0,06622090559329	15	800	1,09E-15
ST_0128_Re10E2	0,0078125	0,06646803523801	15	5500	1,27E-15
ST_0256_Re10E2	0,00390625	0,06652766708857	14	11000	2,31E-15
ST_0512_Re10E2	0,001953125	0,06654240915014	15	40000	3,95E-15
ST_1024_Re10E2	0,0009765625	0,06654610247135	14	81000	7,54E-15

Para as variáveis locais, pode-se observar nas tabelas 5.10 e 5.11 a identificação e os resultados para as velocidades centrais em cada uma das direções, ou seja, para $u(0,5;0,5)$ e $v(0,5;0,5)$. Nas tabelas 5.12 e 5.13 observam-se os resultados obtidos para cada um dos perfis, sendo que serão analisadas as velocidades em coordenadas pré-determinadas para cada uma das direções.

Tabela 5.10: Solução numérica para a velocidade central u para o problema de Ghia com $Re=100$

Nome da simulação	h (m)	Solução Numérica	Número de algarismos significativos	Iteração que convergiu (aproximada)	Resíduo
ST_0002_Re10E2	0,5	0,000000000000000	16	100	1,80E-16
ST_0004_Re10E2	0,25	-0,08265953421520	16	120	1,40E-15
ST_0008_Re10E2	0,125	-0,14775503986908	16	170	6,14E-15
ST_0016_Re10E2	0,0625	-0,18599184922538	16	320	1,56E-15
ST_0032_Re10E2	0,03125	-0,20271082879894	16	450	7,82E-16
ST_0064_Re10E2	0,015625	-0,20752063270068	15	800	1,09E-15
ST_0128_Re10E2	0,0078125	-0,20874213629771	15	5500	1,27E-15
ST_0256_Re10E2	0,00390625	-0,20904748276028	14	11000	2,31E-15
ST_0512_Re10E2	0,001953125	-0,20912374038320	14	40000	3,95E-15
ST_1024_Re10E2	0,0009765625	-0,20914279243244	14	81000	7,54E-15

Tabela 5.11: Solução numérica para a velocidade central v para o problema de Ghia com $Re=100$

Nome da simulação	h (m)	Solução Numérica	Número de algarismos significativos	Iteração que convergiu (aproximada)	Resíduo
ST_0002_Re10E2	0,5	0,000000000000000	16	100	1,80E-16
ST_0004_Re10E2	0,25	0,03124145297949	16	120	1,40E-15
ST_0008_Re10E2	0,125	0,05857122921597	16	170	6,14E-15
ST_0016_Re10E2	0,0625	0,05661778171741	15	320	1,56E-15
ST_0032_Re10E2	0,03125	0,05740662812276	15	450	7,82E-16
ST_0064_Re10E2	0,015625	0,05753612601009	15	800	1,09E-15
ST_0128_Re10E2	0,0078125	0,05754220026813	13	5500	1,27E-15
ST_0256_Re10E2	0,00390625	0,05753885652081	13	11000	2,31E-15
ST_0512_Re10E2	0,001953125	0,05753721323251	14	40000	3,95E-15
ST_1024_Re10E2	0,0009765625	0,05753672803395	14	81000	7,54E-15

Tabela 5.12: Solução numérica para o perfil de velocidade u para o problema de Ghia com $Re=100$

Coordenadas	Solução Numérica ST_0256_Re_10E2	Solução Numérica ST_0512_Re_10E2	Solução Numérica ST_1024_Re_10E2
$u(0,5;0,0625)$	-0,04197633301196	-0,04197529869714	-0,041975065241690
$u(0,5;0,125)$	-0,07712330342709	-0,07712483483044	-0,077125254094323
$u(0,5;0,1875)$	-0,10980263701232	-0,10981277866582	-0,10981535130203
$u(0,5;0,25)$	-0,14189596838259	-0,14192150714727	-0,14192792120853
$u(0,5;0,3125)$	-0,17265102118877	-0,17269703122073	-0,17270854911735
$u(0,5;0,375)$	-0,19838229743587	-0,19844871882987	-0,19846532355941
$u(0,5;0,4375)$	-0,21285728063053	-0,21293612711281	-0,21295582641888
$u(0,5;0,5)$	-0,20904748276028	-0,20912374038320	-0,20914279243244
$u(0,5;0,5625)$	-0,18200398483219	-0,18206144006274	-0,18207580622916
$u(0,5;0,625)$	-0,13121854250906	-0,13124683547849	-0,13125393312251
$u(0,5;0,6875)$	-0,06024885730078	-0,06024637188393	-0,060245786478353
$u(0,5;0,75)$	0,02783784182101	0,02786531868927	0,027872166533954
$u(0,5;0,8125)$	0,14037120713983	0,14041176637207	0,14042193268030
$u(0,5;0,875)$	0,31050114152731	0,31054299597883	0,31055355928543
$u(0,5;0,9375)$	0,59740687075693	0,59745162859063	0,59746291933824

Tabela 5.13: Solução numérica para o perfil de velocidade v para o problema de Ghia com $Re=100$

Coordenadas	Solução Numérica ST 0256 Re 10E2	Solução Numérica ST 0512 Re 10E2	Solução Numérica ST 1024 Re 10E2
$v(0,0625;0,5)$	0,09475996248435	0,09479563804095	0,094804616323632
$v(0,125;0,5)$	0,14917155942756	0,14922505807904	0,14923850961627
$v(0,1875;0,5)$	0,17426394347680	0,17432311574463	0,17433797311365
$v(0,25;0,5)$	0,17916662945471	0,17922411266688	0,17923852068350
$v(0,3125;0,5)$	0,16906457263639	0,16911518423585	0,16912784273024
$v(0,375;0,5)$	0,14567847843906	0,14571729746052	0,14572697670471
$v(0,4375;0,5)$	0,10874714552072	0,10876874150389	0,10877408745699
$v(0,5;0,5)$	0,05753885652081	0,05753721323251	0,057536728033959
$v(0,5625;0,5)$	-0,00770728383469	-0,00773809325059	-0,007745893908300
$v(0,625;0,5)$	-0,08398143625826	-0,08404530760081	-0,084061356579756
$v(0,6875;0,5)$	-0,16288784622627	-0,16297952254091	-0,16300248425479
$v(0,75;0,5)$	-0,22770074981449	-0,22779567937183	-0,22781940411171
$v(0,8125;0,5)$	-0,25369176865446	-0,25374941600404	-0,25376378831912
$v(0,875;0,5)$	-0,21868684427433	-0,21868986246218	-0,21869057624222
$v(0,9375;0,5)$	-0,12334285224341	-0,12332437999827	-0,12331972427638

Os resultados obtidos neste trabalho puderam ser comparados com os resultados obtidos por Ghia *et al.* (1982) e também com os resultados obtidos por Nishida *et al.* (1992) para algumas variáveis de interesse, conforme pode ser observado na tabela 5.14 e nas figuras 5.2 e 5.3 (para os perfis de velocidade nas duas direções). Estes resultados serão comparados com a malha de 128 nós em cada direção.

Tabela 5.14: Resultados obtidos no presente trabalho, por Ghia *et al.* (1982) e por Nishida *et al.* (1992)

Variável de interesse	Presente trabalho	Ghia <i>et al.</i> (1982)	Nishida <i>et al.</i> (1992)
Fluxo de massa total mínimo	-0,1034091834980703	-0,103423	-0,103512
$u(0,5;0,0625)$	-0,0419800272490462	-0,04192	-----
$u(0,5;0,5)$	-0,2087421362977199	-0,20581	-----
$v(0,0625;0,5)$	0,0946176116863936	0,09233	-----
$v(0,5;0,5)$	0,0575422002681319	0,05454	-----

Os perfis de velocidade também podem ser comparados através das figuras 5.2 e 5.3, onde estão dispostos os resultados obtidos por Ghia *et al.* (1982) e o atual, obtido com o programa no presente trabalho.

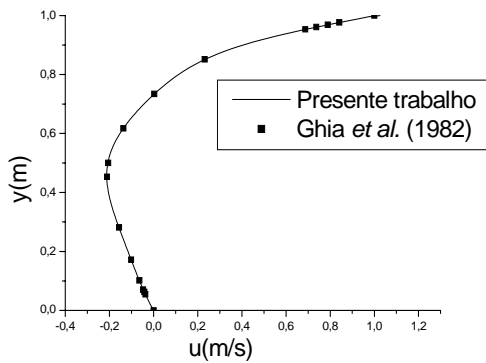


Figura 5.2: Soluções para o perfil de velocidade u em $x=0,5m$

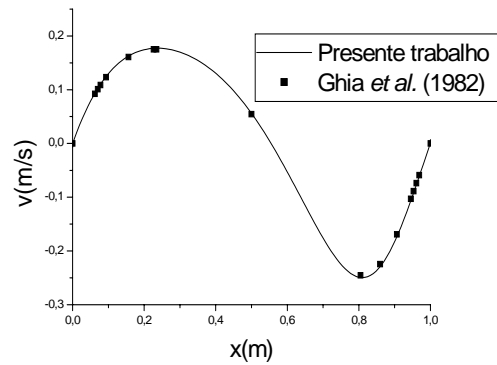


Figura 5.3: Soluções para o perfil de velocidade v em $y=0,5m$

Na resolução deste problema também se podem visualizar as curvas de nível para as linhas de corrente assim como os campos de velocidades, conforme pode ser observado nas figuras 5.4 e 5.5 (linhas de corrente) e na figura 5.6 (campo de velocidades). Estes gráficos foram gerados a partir dos resultados obtidos na malha com 128 nós em cada direção.

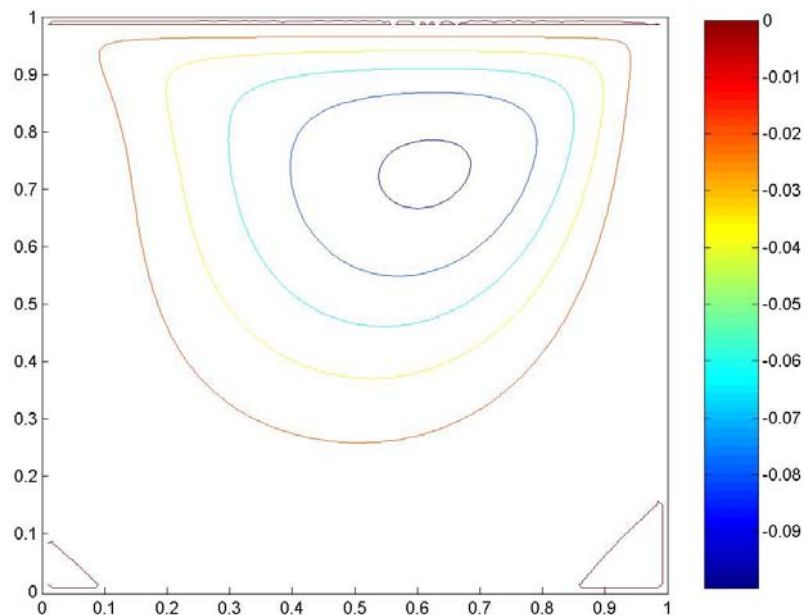


Figura 5.4: Linhas de corrente para o problema de Ghia com $Re=100$

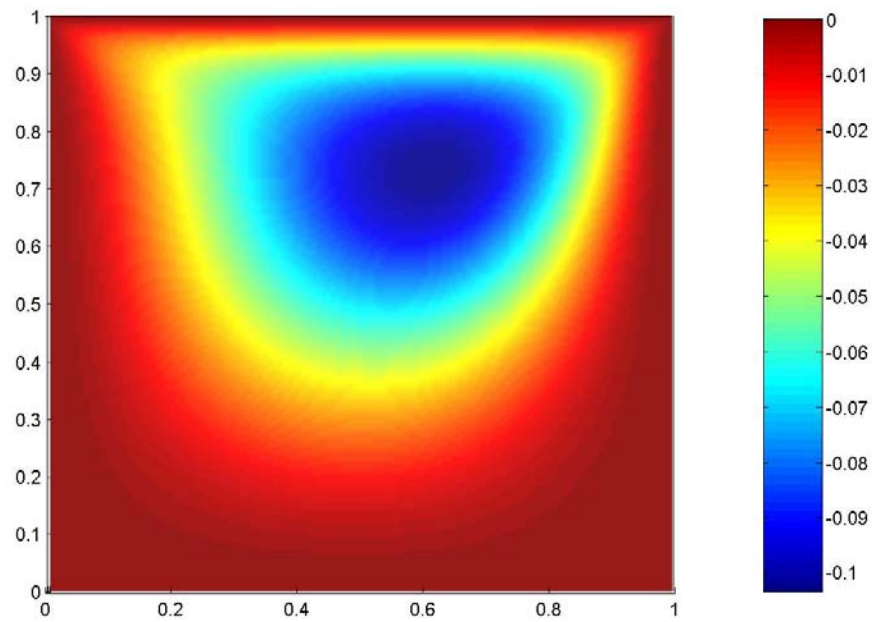


Figura 5.5: Linhas de corrente para o problema de Ghia com $Re=100$

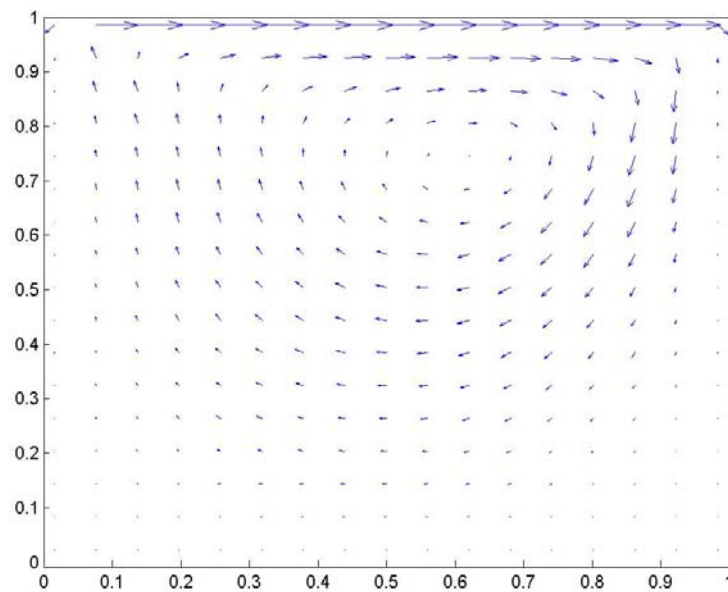


Figura 5.6: Campo de velocidades para o problema de Ghia com $Re=100$

Nas tabelas 5.15 a 5.20, pode-se observar que a ordem aparente é calculada com base em três malhas, sendo que o valor correspondente ao ST_0008_Re10E2, foi obtido com as seguintes malhas: 8X8 nós (malha fina), 4X4 nós (malha grossa) e 2X2 nós (malha supergrossa), para $Re=100$. O valor correspondente a ST_0016_Re10E2 foi obtido com as malhas: 16X16 (malha fina), 8X8 (malha grossa) e 4X4 (malha supergrossa), também para

Re=100, e assim sucessivamente. Nestas tabelas estão listadas as ordens práticas obtidas para todas as variáveis de interesse.

Tabela 5.15: Ordem aparente para a força da placa com UDS para o problema de Ghia com Re=100

Nome da simulação	h (m)	Razão de refino	Ordem aparente p_U
ST 0002 Re10E2	0,5	2	-----
ST 0004 Re10E2	0,25	2	-----
ST 0008 Re10E2	0,125	2	-0,31835427691047
ST 0016 Re10E2	0,0625	2	-0,01014808485734
ST 0032 Re10E2	0,03125	2	0,09976761505251
ST 0064 Re10E2	0,015625	2	0,04404789838139
ST 0128 Re10E2	0,0078125	2	0,01421364272129
ST 0256 Re10E2	0,00390625	2	0,00342963564403
ST 0512 Re10E2	0,001953125	2	0,00028205482349
ST 1024 Re10E2	0,0009765625	2	-0,00035026511059

Tabela 5.16: Ordem aparente para a força da placa com UDS-2 para o problema de Ghia com Re=100

Nome da simulação	h (m)	Razão de refino	Ordem aparente p_U
ST 0002 Re10E2	0,5	2	-----
ST 0004 Re10E2	0,25	2	-----
ST 0008 Re10E2	0,125	2	-0,21438525755558
ST 0016 Re10E2	0,0625	2	0,12635363936584
ST 0032 Re10E2	0,03125	2	0,19455107017348
ST 0064 Re10E2	0,015625	2	0,05379018571352
ST 0128 Re10E2	0,0078125	2	0,00092180885163
ST 0256 Re10E2	0,00390625	2	-0,00781080027945
ST 0512 Re10E2	0,001953125	2	-0,00641633691744
ST 1024 Re10E2	0,0009765625	2	-0,00394013319729

Tabela 5.17: Ordem aparente para o fluxo de massa total para o problema de Ghia com Re=100

Nome da simulação	h (m)	Razão de refino	Ordem aparente p_U
ST 0002 Re10E2	0,5	2	-----
ST 0004 Re10E2	0,25	2	-----
ST 0008 Re10E2	0,125	2	0,33428772761942
ST 0016 Re10E2	0,0625	2	1,25716092155404
ST 0032 Re10E2	0,03125	2	1,20835856745788
ST 0064 Re10E2	0,015625	2	1,71978892356381
ST 0128 Re10E2	0,0078125	2	2,01725887283224
ST 0256 Re10E2	0,00390625	2	1,95674903533407
ST 0512 Re10E2	0,001953125	2	2,11327212044181
ST 1024 Re10E2	0,0009765625	2	1,83131974651167

Tabela 5.18: Ordem aparente para o fluxo de massa com v_n para o problema de Ghia com $Re=100$

Nome da simulação	h (m)	Razão de refino	Ordem aparente p_U
ST_0002_Re10E2	0,5	2	-----
ST_0004_Re10E2	0,25	2	-----
ST_0008_Re10E2	0,125	2	0,62644332134542
ST_0016_Re10E2	0,0625	2	1,13869527568086
ST_0032_Re10E2	0,03125	2	0,22121880217930
ST_0064_Re10E2	0,015625	2	1,85883293423014
ST_0128_Re10E2	0,0078125	2	2,07660908492602
ST_0256_Re10E2	0,00390625	2	2,05111306725677
ST_0512_Re10E2	0,001953125	2	2,01614482013904
ST_1024_Re10E2	0,0009765625	2	1,99694764434941

Tabela 5.19: Ordem aparente para a velocidade central u para o problema de Ghia com $Re=100$

Nome da simulação	h (m)	Razão de refino	Ordem aparente p_U
ST_0002_Re10E2	0,5	2	-----
ST_0004_Re10E2	0,25	2	-----
ST_0008_Re10E2	0,125	2	0,34462329439220
ST_0016_Re10E2	0,0625	2	0,76759579611917
ST_0032_Re10E2	0,03125	2	1,19347534703037
ST_0064_Re10E2	0,015625	2	1,79743681577314
ST_0128_Re10E2	0,0078125	2	1,97731996375193
ST_0256_Re10E2	0,00390625	2	2,00013907522643
ST_0512_Re10E2	0,001953125	2	2,00149366602513
ST_1024_Re10E2	0,0009765625	2	2,00093537752960

Tabela 5.20: Ordem aparente para a velocidade central v para o problema de Ghia com $Re=100$

Nome da simulação	h (m)	Razão de refino	Ordem aparente p_U
ST_0002_Re10E2	0,5	2	-----
ST_0004_Re10E2	0,25	2	-----
ST_0008_Re10E2	0,125	2	0,19298790420119
ST_0016_Re10E2	0,0625	2	-----
ST_0032_Re10E2	0,03125	2	-----
ST_0064_Re10E2	0,015625	2	2,60681586188467
ST_0128_Re10E2	0,0078125	2	4,41407655508732
ST_0256_Re10E2	0,00390625	2	-----
ST_0512_Re10E2	0,001953125	2	1,02488022101967
ST_1024_Re10E2	0,0009765625	2	1,75993844375597

Nas tabelas 5.15 e 5.16, as ordens aparentes obtidas para a força da placa, tanto com UDS quanto com UDS-2, estão tendendo à zero. Isto ocorre quando a variação entre as soluções obtidas com diferentes malhas tende a um valor constante, ao invés de tender a zero como o esperado. No caso deste problema, este fato pode ser devido às velocidades aplicadas nos contornos, que encontram uma grande descontinuidade quando a malha é refinada, pois

em um pequeno espaço a velocidade passa de zero (condição de contorno nas paredes direita e esquerda) à unidade (condição de contorno na parede superior).

Para as outras variáveis de interesse (fluxo de massa total e com v_n , e velocidades centrais) pode-se observar que o valor da ordem aparente se aproxima da ordem assintótica, conforme é esperado.

Pode-se observar que a ordem aparente não foi calculada em alguns casos para a velocidade central v (ST_0016_Re10E2, ST_0032_Re10E2 e ST_0256_Re10E2). Isto ocorre devido a uma inversão de sinal dos resultados numéricos, o que ocasiona em um logaritmo negativo na obtenção destas ordens. Maiores detalhes sobre esta inversão de sinais podem ser obtidos no Apêndice A. Assim como no problema anterior, os perfis de velocidade u e v aqui calculados são obtidos considerando apenas as três malhas mais finas, ou seja, com 256X256, 512X512 e 1024X1024 nós para a obtenção da ordem aparente, que pode ser observada nas tabelas 5.21 e 5.22.

Tabela 5.21: Ordem aparente para o perfil de velocidade u para o problema de Ghia com $Re=100$

Coordenadas	Ordem aparente p_U
$u(0,5;0,0625)$	2,14745613834848
$u(0,5;0,125)$	1,86892387173953
$u(0,5;0,1875)$	1,97897352047672
$u(0,5;0,25)$	1,99337870457507
$u(0,5;0,3125)$	1,99807118064874
$u(0,5;0,375)$	2,00005377719049
$u(0,5;0,4375)$	2,00090158152444
$u(0,5;0,5)$	2,00093537752960
$u(0,5;0,5625)$	1,99976310388684
$u(0,5;0,625)$	1,99503147799770
$u(0,5;0,6875)$	2,08597943495667
$u(0,5;0,75)$	2,00449569324235
$u(0,5;0,8125)$	1,99623446671872
$u(0,5;0,875)$	1,98631956351773
$u(0,5;0,9375)$	1,98699919458849

Tabela 5.22: Ordem aparente para o perfil de velocidade v para o problema de Ghia com $Re=100$

Coordenadas	Ordem aparente p_U
$v(0,0625;0,5)$	1,99042451434355
$v(0,125;0,5)$	1,99173147431533
$v(0,1875;0,5)$	1,99374252648631
$v(0,25;0,5)$	1,99626893181074
$v(0,3125;0,5)$	1,99936224746160
$v(0,375;0,5)$	2,00379744926095
$v(0,4375;0,5)$	2,01424390977107
$v(0,5;0,5)$	1,75993844375597
$v(0,5625;0,5)$	1,98170365837671
$v(0,625;0,5)$	1,99268726192970
$v(0,6875;0,5)$	1,99731871917435
$v(0,75;0,5)$	2,00046508641566
$v(0,8125;0,5)$	2,00396181049056
$v(0,875;0,5)$	2,08013114530521
$v(0,9375;0,5)$	1,98828243925457

As ordens práticas para cada uma das variáveis de interesse também podem ser observadas nas figuras 5.10 a 5.15 que estão dispostas a seguir, sendo que para as variáveis globais e para as velocidades centrais (variáveis locais), foram considerados os resultados obtidos em todas as malhas.

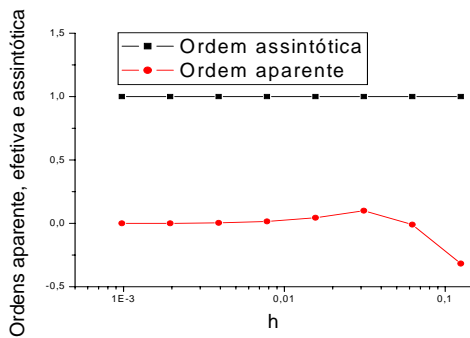


Figura 5.7: Ordens aparente e assintótica por h para a força da placa com UDS

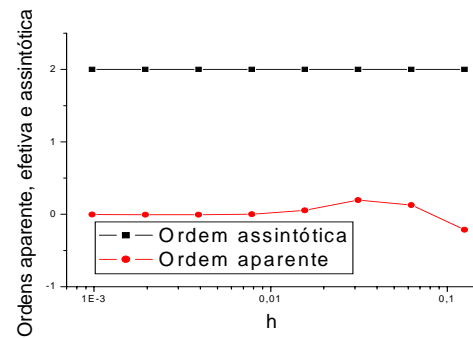


Figura 5.8: Ordens aparente e assintótica por h para a força da placa com UDS-2

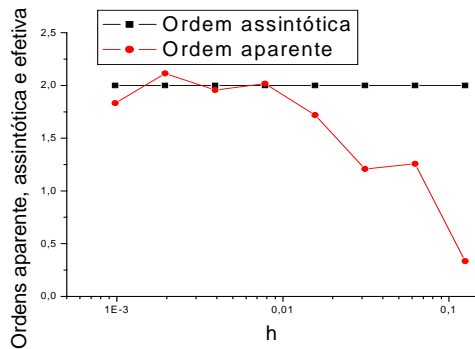


Figura 5.9: Ordens aparente e assintótica por h para o fluxo de massa total

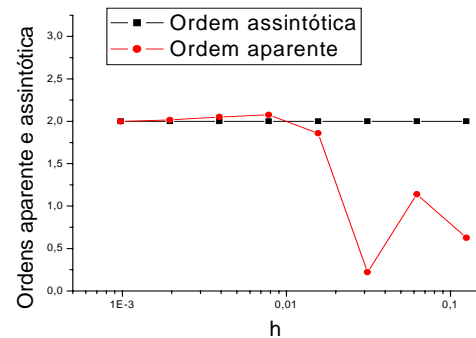


Figura 5.10: Ordens aparente e assintótica por h para o fluxo de massa com v_n

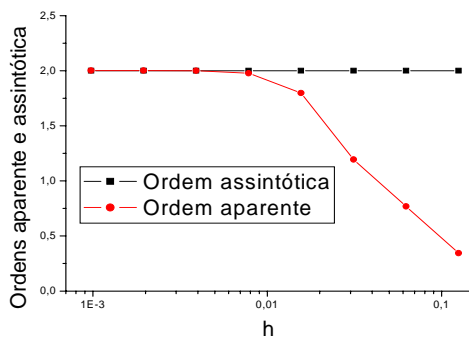


Figura 5.11: Ordens aparente e assintótica por h para a velocidade u central

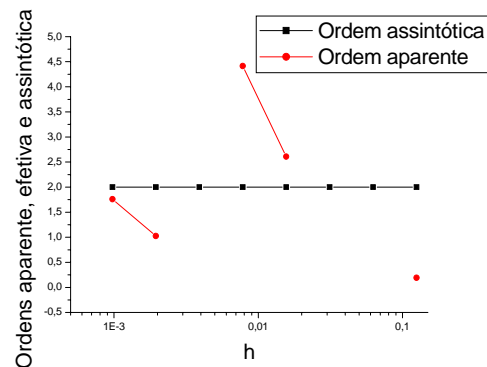


Figura 5.12: Ordens aparente e assintótica por h para a velocidade v central

Conforme se pode observar nas figuras 5.7 e 5.8, a ordem aparente não está tendendo para a ordem teórica (assintótica) à medida que a malha está sendo refinada. Nas figuras 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12, a ordem aparente apresenta um comportamento esperado, ou seja, se aproxima da ordem assintótica conforme a malha é refinada.

5.3 Verificação da solução numérica

Nas tabelas 5.23, 5.24 e 5.25, para cada variável de interesse foi estimado o erro da solução numérica, sendo que, cada estimador foi obtido com base nas três malhas mais finas, ou seja, 256X256, 512X512 e 1024X1024 nós.

Tabela 5.23: Estimativa do erro numérico para as variáveis de interesse para o problema de Ghia com $Re=100$

Variável de interesse	$U_{Ri}(\phi_1, p_L)$	$\frac{U_{Ri}(\phi_1, p_U)}{U_{Ri}(\phi_1, p_L)}$	$\frac{U_{GCI}(\phi_1, p)}{U_{Ri}(\phi_1, p_L)}$
Força da placa com UDS	0,0296635566500	-----	-12358,09793984460
Força da placa com UDS-2	0,0098622787399	-----	-3299,886929451160
Fluxo de massa total	0,0000018385171	1,1725049513309	3,5175148539929
Fluxo de massa com v_n	0,0000012311070	1,0028259570359	3,0084778711079
$u(0,5;0,5)$	-0,0000063506830	0,9991359944518	-2,9974079833554
$v(0,5;0,5)$	-0,0000001617328	1,2568936751113	-3,7706810253341

Tabela 5.24: Estimativa do erro numérico para o perfil de velocidade u para o problema de Ghia com $Re=100$

Coordenadas	$U_{Ri}(\phi_1, p_L)$	$\frac{U_{Ri}(\phi_1, p_U)}{U_{Ri}(\phi_1, p_L)}$	$\frac{U_{GCI}(\phi_1, p)}{U_{Ri}(\phi_1, p_L)}$
$u(0,5;0,0625)$	0,0000000778184	0,8745185668059	2,6235557004177
$u(0,5;0,125)$	-0,0000001397546	1,1309657364389	-3,3928972093169
$u(0,5;0,1875)$	-0,0000008575454	1,0196711586460	-3,0590134759381
$u(0,5;0,25)$	-0,0000021380204	1,0061428596015	-3,0184285788044
$u(0,5;0,3125)$	-0,0000038392988	1,0017845955987	-3,0053537867962
$u(0,5;0,375)$	-0,0000055349098	0,9999503008665	-2,9998509025995
$u(0,5;0,4375)$	-0,0000065664353	0,9991671954743	-2,9975015864230
$u(0,5;0,5)$	-0,0000063506830	0,9991359944518	-2,9974079833554
$u(0,5;0,5625)$	-0,0000047887221	1,0002189684596	-3,0006569053788
$u(0,5;0,625)$	-0,0000023658813	1,0046051011267	-3,0138153033803
$u(0,5;0,6875)$	0,0000001951351	0,9243191182219	2,7729573546657
$u(0,5;0,75)$	0,0000022826148	0,9958558621156	2,9875675863469
$u(0,5;0,8125)$	0,0000033887694	1,0034876756173	3,0104630268520
$u(0,5;0,875)$	0,0000035211022	1,0127440173564	3,0382320520694
$u(0,5;0,9375)$	0,0000037635825	1,0121061252332	3,0363183756997

Tabela 5.25: Estimativa do erro numérico para o perfil de velocidade v para o problema de Ghia com $Re=100$

Coordenadas	$U_{Ri}(\phi_1, p_L)$	$\frac{U_{Ri}(\phi_1, p_U)}{U_{Ri}(\phi_1, p_L)}$	$\frac{U_{GCI}(\phi_1, p)}{U_{Ri}(\phi_1, p_L)}$
$v(0,0625;0,5)$	0,0000029927608	1,0088988146778	3,0266964440334
$v(0,125;0,5)$	0,0000044838457	1,0076783920098	3,0230351760296
$v(0,1875;0,5)$	0,0000049524563	1,0058041030881	3,0174123092643
$v(0,25;0,5)$	0,0000048026722	1,0034556847857	3,0103670543572
$v(0,3125;0,5)$	0,0000042194981	1,0005896256954	3,0017688770862
$v(0,375;0,5)$	0,0000032264147	0,9964980950933	2,9894942852801
$v(0,4375;0,5)$	0,0000017819843	0,9869433630481	2,9608300891444
$v(0,5;0,5)$	-0,0000001617328	1,2568936751113	3,7706810253341
$v(0,5625;0,5)$	-0,0000026002192	1,0170897925404	3,0512693776212
$v(0,625;0,5)$	-0,0000053496596	1,0067870590614	3,0203611771843
$v(0,6875;0,5)$	-0,0000076539046	1,0024818727915	3,0074456183746
$v(0,75;0,5)$	-0,0000079082466	0,9995702843274	2,9987108529824
$v(0,8125;0,5)$	-0,0000047907716	0,9963468718672	2,9890406156016
$v(0,875;0,5)$	-0,0000002379266	0,9292366112278	3,0000000000000
$v(0,9375;0,5)$	0,0000015519072	1,0109030611545	3,0327091834636

Conforme pode ser observado na tabela 5.23, para a força da placa o erro estimado (U) se aplica apenas para a ordem assintótica, pois a ordem aparente é negativa. O mesmo pode ser observado nas figuras 5.13 e 5.14, onde os gráficos apresentam descontinuidades nestes pontos.

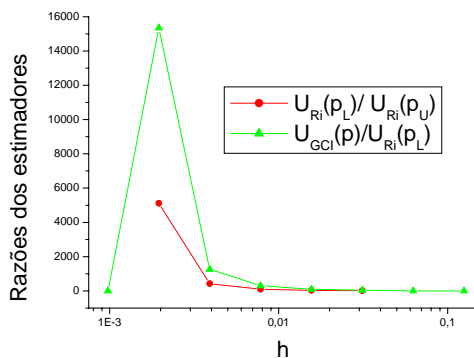


Figura 5.13: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a força da placa com UDS

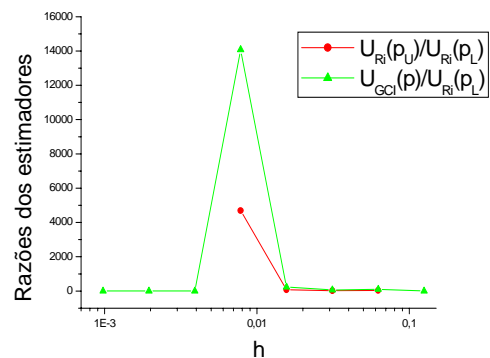


Figura 5.14: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a força da placa com UDS-2

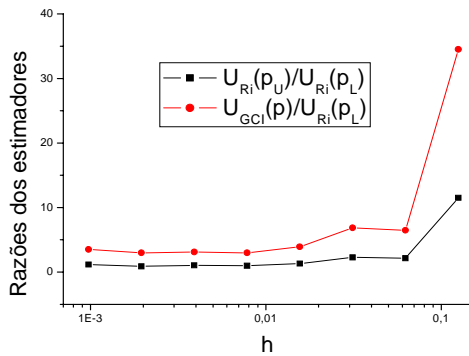


Figura 5.15: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para o fluxo de massa total

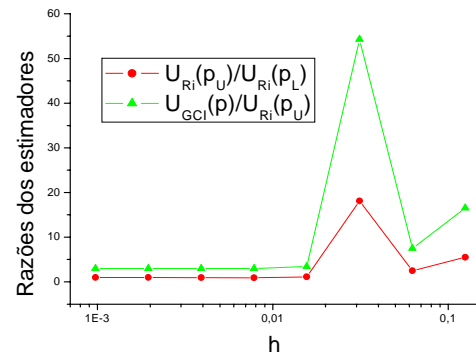


Figura 5.16: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para o fluxo de massa com v_n

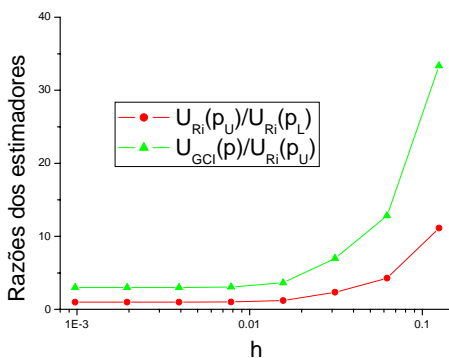


Figura 5.17: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a velocidade u central

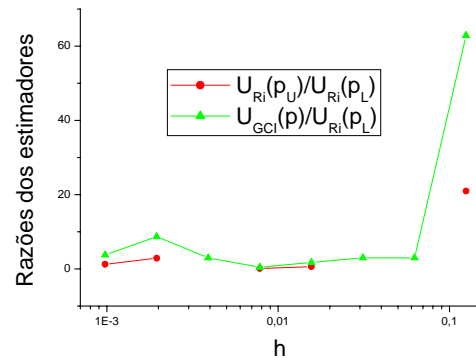


Figura 5.18: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a velocidade v central

Observa-se nas figuras 5.15, 5.17 e 5.18 o comportamento semelhante dos estimadores apresentado para o fluxo de massa total e para as velocidades centrais. Na figura 5.16, que ilustra as razões dos estimadores para o fluxo de massa com v_n , pode-se observar que o valor que se destaca na figura corresponde à ordem aparente que se afasta do valor da ordem assintótica, ou seja, para a ordem obtida com as malhas 32X32, 16X16 e 8X8 nós (malhas fina, grossa e supergrossa), conforme pode ser observado na tabela 5.18.

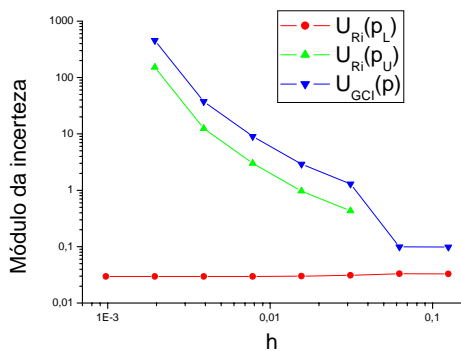


Figura 5.19: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI para a força da placa com UDS

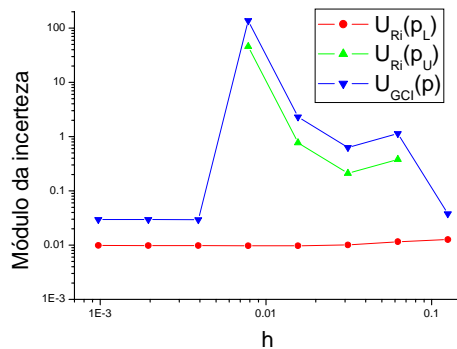


Figura 5.20: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI para a força da placa com UDS-2

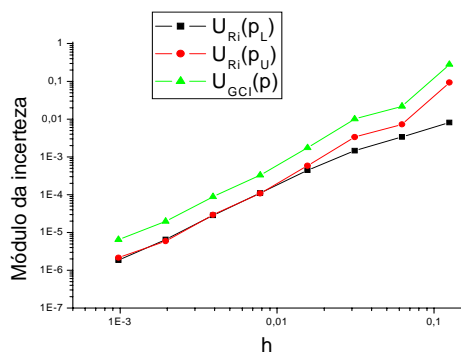


Figura 5.21: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI para o fluxo de massa total

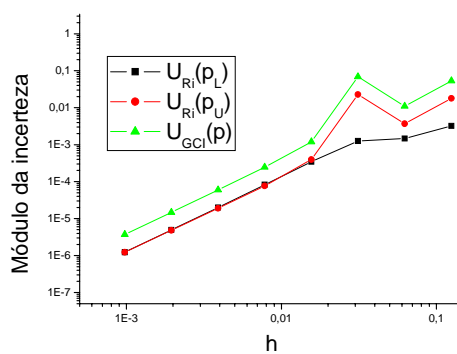


Figura 5.22: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI para o fluxo de massa com v_n

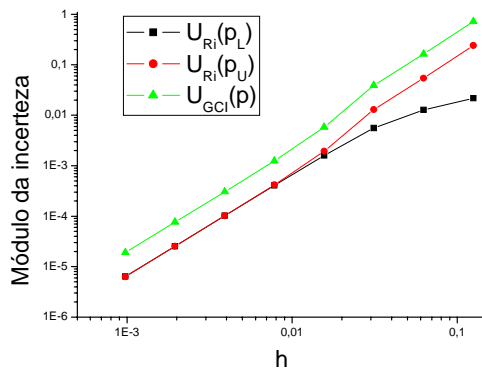


Figura 5.23: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI para a velocidade u central

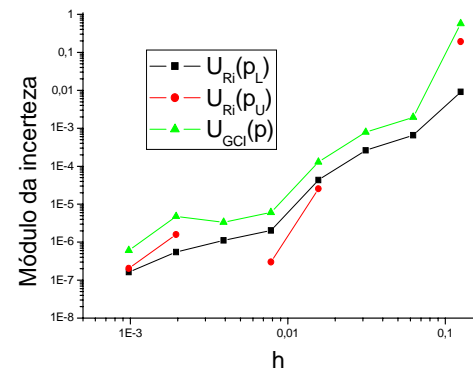


Figura 5.24: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI para a velocidade v central

Da observação das figuras 5.19 a 5.24 pode-se concluir que as variáveis de interesse (fluxo de massa total e obtido com v_n e as velocidades centrais) apresentam um comportamento semelhante. A força da placa obtida com UDS e com UDS-2 (figuras 5.19 e 5.20) não apresentam um comportamento esperado, pois a ordem aparente não se aproxima da ordem assintótica, o que acaba comprometendo todas as análises que seguem. Na figura 5.24, os valores para a ordem aparente que não puderam ser obtidos devido a uma inversão de sinal dos resultados, estão representados pela descontinuidade existente nos gráficos, conforme se pode observar para três pontos.

Os dados utilizados na construção das figuras 5.13 a 5.24 podem ser observados no Apêndice C, no formato de tabelas com todas as malhas aqui utilizadas.

A solução numérica para cada variável de interesse com seu erro estimado, podem ser analisadas nas tabelas 5.26, 5.27 e 5.28, considerando-se ϕ_1 a malha mais fina (1024 nós). Para a obtenção desta solução estimada foi utilizado o estimador Convergente (MARCHI e SILVA, 2002) descrito no capítulo 3.

Tabela 5.26: Solução numérica com seu erro estimado com estimador Convergente para o problema de Ghia com $Re=100$

Variável de interesse	$\phi = \phi_c \pm U_c$	Envolve solução de Ghia <i>et al</i> (1982)
Força da placa com UDS	-----	-----
Força da placa com UDS-2	-----	-----
Fluxo de massa total	0,1035212477180 \pm 0,0000001585766	Não
Fluxo de massa com v_n	0,0665473353179 \pm 0,0000000017395	-----
$u(0,5;0,5)$	0,2091491403720 \pm 0,0000000027435	Não
$v(0,5;0,5)$	0,0575365455270 \pm 0,0000000207740	Não

Tabela 5.27: Solução numérica para o perfil de velocidade u com seu erro estimado com estimador Convergente para o problema de Ghia com $Re=100$

Coordenadas	$\phi = \phi_c \pm U_c$
$u(0,5;0,0625)$	0,0419749923055 \pm 0,0000000048823
$u(0,5;0,125)$	0,0771254030004 \pm 0,0000000091515
$u(0,5;0,1875)$	0,1098162172818 \pm 0,0000000084344
$u(0,5;0,25)$	0,1419300657957 \pm 0,0000000065667
$u(0,5;0,3125)$	0,1727123918420 \pm 0,0000000034257
$u(0,5;0,375)$	0,1984708583317 \pm 0,000000001375
$u(0,5;0,4375)$	0,2129623901199 \pm 0,0000000027342
$u(0,5;0,5)$	0,2091491403720 \pm 0,0000000027435
$u(0,5;0,5625)$	0,1820805954755 \pm 0,000000005242
$u(0,5;0,625)$	0,1312563044514 \pm 0,0000000054475
$u(0,5;0,6875)$	0,0602455987271 \pm 0,0000000073840
$u(0,5;0,75)$	0,0278744444191 \pm 0,0000000047297
$u(0,5;0,8125)$	0,1404253273591 \pm 0,0000000059094
$u(0,5;0,875)$	0,3105571028241 \pm 0,0000000224364
$u(0,5;0,9375)$	0,5974667057019 \pm 0,0000000227812

Tabela 5.28: Solução numérica para o perfil de velocidade v com seu erro estimado com estimador Convergente para o problema de Ghia com $Re=100$

Coordenadas	$\phi = \phi_c \pm U_c$
$v(0,0625;0,5)$	$0,0948076224005 \pm 0,0000000133160$
$v(0,125;0,5)$	$0,1492430106763 \pm 0,0000000172143$
$v(0,1875;0,5)$	$0,1743429399422 \pm 0,0000000143722$
$v(0,25;0,5)$	$0,1792433316539 \pm 0,0000000082982$
$v(0,3125;0,5)$	$0,1691320634723 \pm 0,0000000012439$
$v(0,375;0,5)$	$0,1457301974701 \pm 0,0000000056492$
$v(0,4375;0,5)$	$0,1087758578080 \pm 0,0000000116333$
$v(0,5;0,5)$	$0,0575365455270 \pm 0,0000000207740$
$v(0,5625;0,5)$	$0,0077485163461 \pm 0,0000000222186$
$v(0,625;0,5)$	$0,0840667243936 \pm 0,0000000181542$
$v(0,6875;0,5)$	$0,1630101476574 \pm 0,0000000094980$
$v(0,75;0,5)$	$0,2278273106591 \pm 0,0000000016991$
$v(0,8125;0,5)$	$0,2537685703401 \pm 0,0000000087506$
$v(0,875;0,5)$	$0,2186908057506 \pm 0,0000000084182$
$v(0,9375;0,5)$	$0,1233181639088 \pm 0,0000000084602$

Na tabela 5.26, o estimador convergente não se aplica à variável de interesse, força da placa sobre o fluido, pois seu resultado numérico não se apresentou convergente conforme análise feita com base nas ordens práticas.

A solução numérica pode também ser estimada com o uso do estimador GCI. Esta estimativa da solução numérica pode ser observada nas tabelas 5.29, 5.30 e 5.31. Na tabela 5.29, o estimador $U_{GCI}(\phi_1, p)$, para a força da placa com as duas aproximações numéricas foi obtido com base na ordem assintótica. Para as outras variáveis de interesse este estimador é obtido com a menor ordem entre a aparente e a assintótica.

Tabela 5.29: Solução numérica com seu erro estimado com estimador GCI para o problema de Ghia com $Re=100$

Variável de interesse	$\phi = \phi_1 \pm U_{GCI}(\phi_1, p)$	Envolve solução de Ghia <i>et al.</i> (1982)
Força da placa com UDS	$0,3096516197717 \pm 0,0889906699502$	-----
Força da placa com UDS-2	$0,3315956430718 \pm 0,0295868362199$	-----
Fluxo de massa total	$0,1035192506247 \pm 0,0000064670113$	Não
Fluxo de massa com v_n	$0,0665461024713 \pm 0,0000037037583$	-----
$u(0,5;0,5)$	$-0,2091427924324 \pm 0,0000190520492$	Não
$v(0,5;0,5)$	$0,0575367280339 \pm 0,0000006098429$	Não

Tabela 5.30: Solução numérica para o perfil de velocidade u com seu erro estimado com estimador GCI para o problema de Ghia com $Re=100$

Coordenadas	$\phi = \phi_1 \pm U_{GCI}(\phi_1, p)$
$u(0,5;0,0625)$	$-0,0419750652416 \pm 0,0000002334554$
$u(0,5;0,125)$	$-0,0771252540943 \pm 0,0000004741730$
$u(0,5;0,1875)$	$-0,1098153513020 \pm 0,0000026232429$
$u(0,5;0,25)$	$-0,1419279212085 \pm 0,0000064534619$
$u(0,5;0,3125)$	$-0,1727085491173 \pm 0,0000115384514$
$u(0,5;0,375)$	$-0,1984653235594 \pm 0,0000166047295$
$u(0,5;0,4375)$	$-0,2129558264188 \pm 0,0000196993060$
$u(0,5;0,5)$	$-0,2091427924324 \pm 0,0000190520492$
$u(0,5;0,5625)$	$-0,1820758062291 \pm 0,0000143693121$
$u(0,5;0,625)$	$-0,1312539331225 \pm 0,0000071303293$
$u(0,5;0,6875)$	$-0,0602457864783 \pm 0,0000005854055$
$u(0,5;0,75)$	$0,0278721665339 \pm 0,0000068478446$
$u(0,5;0,8125)$	$0,1404219326803 \pm 0,0000102017650$
$u(0,5;0,875)$	$0,3105535592854 \pm 0,0000106979255$
$u(0,5;0,9375)$	$0,5974629193382 \pm 0,0000114274348$

Tabela 5.31: Solução numérica para o perfil de velocidade v com seu erro estimado com estimador GCI para o problema de Ghia com $Re=100$

Coordenadas	$\phi = \phi_1 \pm U_{GCI}(\phi_1, p)$
$v(0,0625;0,5)$	$0,0948046163236 \pm 0,0000090581787$
$v(0,125;0,5)$	$0,1492385096167 \pm 0,0000135548234$
$v(0,1875;0,5)$	$0,1743379731136 \pm 0,0000149436027$
$v(0,25;0,5)$	$0,1792385206835 \pm 0,0000144578061$
$v(0,3125;0,5)$	$0,1691278427302 \pm 0,0000126659581$
$v(0,375;0,5)$	$0,1457269767047 \pm 0,0000096792441$
$v(0,4375;0,5)$	$0,1087740874569 \pm 0,0000053459531$
$v(0,5;0,5)$	$0,0575367280339 \pm 0,0000006098429$
$v(0,5625;0,5)$	$-0,0077458939083 \pm 0,0000079339693$
$v(0,625;0,5)$	$-0,0840613565797 \pm 0,0000161579043$
$v(0,6875;0,5)$	$-0,1630024842547 \pm 0,0000230187019$
$v(0,75;0,5)$	$-0,2278194041117 \pm 0,0000237247398$
$v(0,8125;0,5)$	$-0,2537637883191 \pm 0,0000143723150$
$v(0,875;0,5)$	$-0,2186905762422 \pm 0,0000007137800$
$v(0,9375;0,5)$	$-0,1233197242763 \pm 0,0000047064835$

5.4 Conclusão

Neste capítulo foi estudado o problema do escoamento recirculante em uma cavidade quadrada proposto por Ghia *et al.* (1982), considerando $Re=100$ (número de Reynolds), descrevendo-se os resultados para duas variáveis de interesse globais: fluxo de massa que escoar na cavidade (tanto o total quanto o obtido com v_n) que foi obtido através das linhas de corrente e por integração e a força que é aplicada sobre a placa superior da cavidade. Também foram expostos os resultados para as variáveis de interesse locais, que são as velocidades centrais em cada uma das direções, e os perfis de velocidade u e v . Os perfis foram calculados para as três malhas mais finas utilizadas no estudo da incerteza numérica das soluções obtidas para este problema.

A variável de interesse força sobre a placa não apresentou um comportamento esperado, pois tanto a ordem aparente obtida com a aproximação UDS quanto a obtida com a aproximação UDS-2, não se aproximaram da ordem assintótica, nem apresentaram um comportamento parecido ao obtido no capítulo 4 (problema de Shih). A ordem obtida a partir das simulações numéricas está tendendo à zero, isto ocorre quando o erro existente entre as soluções numéricas tende a um valor constante, ao invés de tender a zero. Isto pode ser explicado devido à descontinuidade que há nas condições de contorno aplicadas às paredes da cavidade. Desta forma, as análises dos erros numéricos que foram realizadas para esta variável de interesse estão comprometidas, conforme pode ser observado nos gráficos e tabelas que se referem à força da placa.

Já a outra variável global, fluxo de massa, apresentou um resultado esperado com sua ordem aparente se aproximando da ordem assintótica. O mesmo ocorrendo para as variáveis locais: perfis de velocidade e velocidades centrais. Este comportamento também pode ser analisado quando se observam as incertezas do erro numérico obtidas com o estimador de Richardson (ordens aparente e assintótica) e com o estimador GCI. Estas variáveis podem ainda ser analisadas com as razões dos estimadores pelos erros numéricos, que estimam a acurácia e a confiabilidade dos erros. Todas estas análises foram feitas com base em tabelas e gráficos, que tornaram mais clara a visualização dos resultados.

Os perfis de velocidade e o fluxo de massa mínimo também puderam ser comparados aos resultados obtidos por Ghia *et al.* (1982) e Nishida *et al.* (1992) através de gráficos (perfis de velocidade) e tabelas, onde os resultados obtidos neste trabalho se mostraram muito próximos aos outros presentes na literatura. Neste trabalho também foram gerados resultados com malhas mais refinadas que as encontradas na literatura, com 1024X1024 nós contra 257X257 nós de Ghia *et al.* (1982).

Para todas as variáveis de interesse puderam ser observadas a solução numérica com seu erro estimado pelo estimador Convergente e também pelo estimador GCI, com exceção da força sobre a placa, onde não se pode aplicar o estimador Convergente, pois a solução numérica obtida para esta variável de interesse se mostrou divergente.

Neste capítulo podem-se observar ainda os gráficos para as linhas de corrente e para o campo de velocidades, o que torna mais clara a visualização do escoamento na cavidade quadrada.

6 Problema de Ghia para $Re=1000$

6.1 Definição do problema

O enfoque deste capítulo é o mesmo problema tratado no capítulo anterior, para $Re=1000$. O domínio de cálculo, as variáveis de interesse, as equações governantes e as condições de contorno são as mesmas já descritas no capítulo 5. Os dados fixos para a resolução do problema, ou seja, que não são variáveis são os mesmos que foram considerados no capítulo 5 e podem ser observados na tabela 5.1. Os parâmetros variáveis estão listados na tabela 6.1.

Tabela 6.1: Parâmetros variáveis para o problema de Ghia com $Re=1000$

Número de Reynolds	1000
Viscosidade	0,001 Pa.s

6.2 Solução Numérica

O modelo numérico e a forma de obtenção das variáveis de interesse é o mesmo já descrito para o problema anterior. Para se resolver o sistema de equações que surge da discretização das equações diferenciais envolvidas também foi utilizado o MSI. O critério de convergência utilizado para a resolução deste problema foi o mesmo já utilizado, assim como o algoritmo computacional.

O programa computacional utilizado foi o mesmo do capítulo anterior, sendo que os arquivos de resultados para $Re=1000$ foram gerados do dia 11/11/2005 ao dia 12/12/2005, com o software Compaq Visual Fortran 6.6. Para a obtenção dos resultados das variáveis globais e locais foi utilizada precisão dupla. O computador empregado para a resolução deste problema também foi o CFD4 do LENA 2 (Laboratório de Experimentação Numérica - UFPR). Os dados numéricos fixos para este problema podem ser observados na tabela 6.2.

Tabela 6.2: Dados numéricos fixos do problema de Ghia com Re=1000

Tolerância do MSI para u e v	0,1
Tolerância do MSI para p'	0,01

A forma de obtenção da memória computacional para cada simulação, bem como a obtenção do tempo de processamento com sua incerteza, são as mesmas já descritas nos capítulos anteriores. A incerteza do tempo computacional foi de 3,3%. A identificação de cada simulação realizada para cada um dos casos, com suas respectivas características pode ser observada nas tabelas 6.3 e 6.4.

Tabela 6.3: Identificação das simulações para o problema de Ghia com Re=1000

Nome da simulação	ST_0002_Re10E3	ST_0004_Re10E3	ST_0008_Re10E3	ST_0016_Re10E3	ST_0032_Re10E3
Número de volumes de controle	02	04	08	16	32
Incremento de tempo Δt (s)	4	4	1	0,5	0,2
Memória computacional (MB)	1,54	1,56	1,57	1,63	1,82
Número total de iterações externas	500	700	700	1200	2000
Tempo de processamento	0,02 s	0,06 s	0,14 s	0,88 s	5,88 s
Tamanho dos volumes $-h$ (m)	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125
Iterações internas para u e v	5	5	5	5	5
Iterações internas para p'	10	10	10	10	10
Iterações para o ciclo da massa	2	2	2	2	2

Tabela 6.4: Identificação das simulações para o problema de Ghia com $Re=1000$

Nome da simulação	ST_0064_Re10E3	ST_0128_Re10E3	ST_0256_Re10E3	ST_0512_Re10E3	ST_1024_Re10E3
Número de volumes de controle	64	128	256	512	1024
Incremento de tempo Δt (s)	0,2	0,1	0,05	0,2	0,5
Memória computacional (MB)	2,57	4,66	17,6	61,6	240,62
Número total de iterações externas	4000	10000	8000	10000	90000
Tempo de processamento	45 s	22min 36s	2horas 52min	18horas 13min	5dias 15horas
Tamanho dos volumes $-h$ (m)	0,015625	0,0078125	0,00390625	0,001953125	0,0009765625
Iterações internas para u e v	5	10	50	50	20
Iterações internas para p'	10	50	150	150	80
Iterações para o ciclo da massa	2	2	2	4	2

As simulações descritas nas tabelas 6.3 e 6.4 geraram os resultados abaixo relacionados, que são mostrados para cada variável de interesse. Para a força da placa e fluxo de massa que são as duas variáveis globais analisadas neste problema, a identificação e os resultados são mostrados nas tabelas 6.5 a 6.8.

Tabela 6.5: Solução numérica para a força da placa com UDS para o problema de Ghia com $Re=1000$

Nome da simulação	h (m)	Solução Numérica	Número de algarismos significativos	Iteração que convergiu (aproximada)	Resíduo
ST_0002_Re10E3	0,5	0,0039167836691083	16	400	4,72E-15
ST_0004_Re10E3	0,25	0,0071980989351111	16	450	1,07E-15
ST_0008_Re10E3	0,125	0,012626986645550	16	400	5,87E-15
ST_0016_Re10E3	0,0625	0,020080276617467	16	900	3,92E-15
ST_0032_Re10E3	0,03125	0,026969415573005	15	1800	3,50E-15
ST_0064_Re10E3	0,015625	0,031941933625405	15	2100	1,47E-15
ST_0128_Re10E3	0,0078125	0,035723281299709	15	3500	1,00E-15
ST_0256_Re10E3	0,00390625	0,038970477060095	14	6000	1,01E-15
ST_0512_Re10E3	0,001953125	0,042021408339316	13	7900	1,98E-15
ST_1024_Re10E3	0,0009765625	0,045008410540646	14	83000	1,58E-15

Tabela 6.6: Solução numérica para a força da placa com UDS-2 para o problema de Ghia com Re=1000

Nome da simulação	h (m)	Solução Numérica	Número de algarismos significativos	Iteração que convergiu (aproximada)	Resíduo
ST_0002_Re10E3	0,5	0,005194639448513	16	400	4,72E-15
ST_0004_Re10E3	0,25	0,009447247253488	16	450	1,07E-15
ST_0008_Re10E3	0,125	0,016409769793799	16	400	5,87E-15
ST_0016_Re10E3	0,0625	0,025462620518719	16	900	3,92E-15
ST_0032_Re10E3	0,03125	0,032612308291837	15	1800	3,50E-15
ST_0064_Re10E3	0,015625	0,036585460473031	15	2100	1,47E-15
ST_0128_Re10E3	0,0078125	0,039377484332947	15	3500	1,00E-15
ST_0256_Re10E3	0,00390625	0,041972748332230	14	6000	1,01E-15
ST_0512_Re10E3	0,001953125	0,044640407432213	13	7900	1,98E-15
ST_1024_Re10E3	0,0009765625	0,047417469415402	14	83000	1,58E-15

Tabela 6.7: Solução numérica para o fluxo de massa total para o problema de Ghia com Re=1000

Nome da simulação	h (m)	Solução Numérica	Número de algarismos significativos	Iteração que convergiu (aproximada)	Resíduo
ST_0002_Re10E3	0,5	0,01040204136145	16	400	4,72E-15
ST_0004_Re10E3	0,25	0,02934160105063	16	450	1,07E-15
ST_0008_Re10E3	0,125	0,05826099817735	15	400	5,87E-15
ST_0016_Re10E3	0,0625	0,08289694835611	16	900	3,92E-15
ST_0032_Re10E3	0,03125	0,10095887790377	15	1800	3,50E-15
ST_0064_Re10E3	0,015625	0,11321643465899	15	2100	1,47E-15
ST_0128_Re10E3	0,0078125	0,11742002245802	15	3500	1,00E-15
ST_0256_Re10E3	0,00390625	0,11855383585883	14	6000	1,01E-15
ST_0512_Re10E3	0,001953125	0,11884077404332	13	7900	1,98E-15
ST_1024_Re10E3	0,0009765625	0,11891271125629	15	83000	1,58E-15

Tabela 6.8: Solução numérica para o fluxo de massa com v_n para o problema de Ghia com Re=1000

Nome da simulação	h (m)	Solução Numérica	Número de algarismos significativos	Iteração que convergiu (aproximada)	Resíduo
ST_0002_Re10E3	0,5	0,01040204136145	16	400	4,72E-15
ST_0004_Re10E3	0,25	0,02867124668449	16	450	1,07E-15
ST_0008_Re10E3	0,125	0,05692302908903	15	400	5,87E-15
ST_0016_Re10E3	0,0625	0,08049639796452	16	900	3,92E-15
ST_0032_Re10E3	0,03125	0,09842301411976	15	1800	3,50E-15
ST_0064_Re10E3	0,015625	0,11078091695906	15	2100	1,47E-15
ST_0128_Re10E3	0,0078125	0,11499605327653	15	3500	1,00E-15
ST_0256_Re10E3	0,00390625	0,11613004260024	14	6000	1,01E-15
ST_0512_Re10E3	0,001953125	0,11641833967668	13	7900	1,98E-15
ST_1024_Re10E3	0,0009765625	0,11649031239182	15	83000	1,58E-15

Para as variáveis locais, pode-se observar nas tabelas 6.9 e 6.10 a identificação e os resultados para as velocidades centrais em cada uma das direções, ou seja, para $u(0,5;0,5)$ e

$v(0,5;0,5)$. Nas tabelas 6.11 e 6.12 observam-se os resultados obtidos para cada um dos perfis, sendo que serão analisadas as velocidades em coordenadas pré-determinadas para cada uma das direções.

Tabela 6.9: Solução numérica para a velocidade central u para o problema de Ghia com $Re=1000$

Nome da simulação	h (m)	Solução Numérica	Número de algarismos significativos	Iteração que convergiu (aproximada)	Resíduo
ST_0002_Re10E3	0,5	0,000000000000000	16	400	4,72E-15
ST_0004_Re10E3	0,25	-0,016588359841350	16	450	1,07E-15
ST_0008_Re10E3	0,125	-0,007216368600800	16	400	5,87E-15
ST_0016_Re10E3	0,0625	-0,032958346511087	16	900	3,92E-15
ST_0032_Re10E3	0,03125	-0,057151965470088	16	1800	3,50E-15
ST_0064_Re10E3	0,015625	-0,060363212984396	15	2100	1,47E-15
ST_0128_Re10E3	0,0078125	-0,061630263778068	15	3500	1,00E-15
ST_0256_Re10E3	0,00390625	-0,061956259478163	14	6000	1,01E-15
ST_0512_Re10E3	0,001953125	-0,062032159342255	13	7900	1,98E-15
ST_1024_Re10E3	0,0009765625	-0,062050214128755	13	83000	1,58E-15

Tabela 6.10: Solução numérica para a velocidade central v para o problema de Ghia com $Re=1000$

Nome da simulação	h (m)	Solução Numérica	Número de algarismos significativos	Iteração que convergiu (aproximada)	Resíduo
ST_0002_Re10E3	0,5	0,000000000000000	16	400	4,72E-15
ST_0004_Re10E3	0,25	0,018723750193627	16	450	1,07E-15
ST_0008_Re10E3	0,125	0,039746624085269	16	400	5,87E-15
ST_0016_Re10E3	0,0625	0,046584064314220	15	900	3,92E-15
ST_0032_Re10E3	0,03125	0,027880604918396	15	1800	3,50E-15
ST_0064_Re10E3	0,015625	0,026109225598893	15	2100	1,47E-15
ST_0128_Re10E3	0,0078125	0,025876040510088	13	3500	1,00E-15
ST_0256_Re10E3	0,00390625	0,025814577503661	13	6000	1,01E-15
ST_0512_Re10E3	0,001953125	0,025802544970193	13	7900	1,98E-15
ST_1024_Re10E3	0,0009765625	0,025800177249004	13	83000	1,58E-15

Tabela 6.11: Solução numérica para o perfil de velocidade u para o problema de Ghia com $Re=1000$

Coordenadas	Solução Numérica ST_0256_Re_10E3	Solução Numérica ST_0512_Re_10E3	Solução Numérica ST_1024_Re_10E3
$u(0,5;0,0625)$	-0,20144996870739	-0,20210717009503	-0,20227414251665
$u(0,5;0,125)$	-0,34605045960080	-0,34739488701430	-0,34773247248510
$u(0,5;0,1875)$	-0,38296982279157	-0,38405055862808	-0,38431980532655
$u(0,5;0,25)$	-0,31820871456981	-0,31876335268577	-0,31890051375112
$u(0,5;0,3125)$	-0,24510782758067	-0,24554845622705	-0,24565749053590
$u(0,5;0,375)$	-0,18325441742130	-0,18361387645712	-0,18370266142907
$u(0,5;0,4375)$	-0,12311741207205	-0,12333832560638	-0,12339251459746
$u(0,5;0,5)$	-0,06195625947816	-0,06203215934225	-0,06205021412875
$u(0,5;0,5625)$	0,00047002548947	0,00053798809710	0,00055578695859
$u(0,5;0,625)$	0,06495981341353	0,06517576929936	0,06523045068290
$u(0,5;0,6875)$	0,13307951429673	0,13344872308622	0,13354157641745
$u(0,5;0,75)$	0,20719729602242	0,20773489798021	0,20786966742894
$u(0,5;0,8125)$	0,28742217431443	0,28818729811136	0,28837863631692
$u(0,5;0,875)$	0,36113489130571	0,36219325644896	0,36245740908046
$u(0,5;0,9375)$	0,42152958979945	0,42258356388195	0,42284517896081

Tabela 6.12: Solução numérica para o perfil de velocidade v para o problema de Ghia com $Re=1000$

Coordenadas	Solução Numérica ST_0256_Re_10E3	Solução Numérica ST_0512_Re_10E3	Solução Numérica ST_1024_Re_10E3
$v(0,0625;0,5)$	0,27931777878848	0,28035985819331	0,28061936460845
$v(0,125;0,5)$	0,36338161486230	0,36462776662598	0,36493840037067
$v(0,1875;0,5)$	0,36652923857890	0,36752249865431	0,36777020518767
$v(0,25;0,5)$	0,30631170239046	0,30690624687142	0,30705478907756
$v(0,3125;0,5)$	0,23073625708267	0,23113507771815	0,23123505007071
$v(0,375;0,5)$	0,16019387066608	0,16047121079345	0,16054094036928
$v(0,4375;0,5)$	0,09278750264657	0,09292331586805	0,09295777695567
$v(0,5;0,5)$	0,02581457750366	0,02580254497019	0,02580017724900
$v(0,5625;0,5)$	-0,04163362370606	-0,04178971354944	-0,04182800429854
$v(0,625;0,5)$	-0,11039859840603	-0,11069920433610	-0,11077357025687
$v(0,6875;0,5)$	-0,18107140592572	-0,18152854273459	-0,18164201514712
$v(0,75;0,5)$	-0,25256189596684	-0,25317738969381	-0,25333053767224
$v(0,8125;0,5)$	-0,33076007724774	-0,33136614260639	-0,33151664396664
$v(0,875;0,5)$	-0,46638938722355	-0,46742994409168	-0,46768927606096
$v(0,9375;0,5)$	-0,45428072226179	-0,45568121557874	-0,45603449594607

Os resultados obtidos a partir do programa Stokes_1p3.exe, puderam ser comparados com os resultados obtidos por Ghia *et al.* (1982) e por Nishida *et al.* (1992) para algumas variáveis de

interesse, conforme pode ser observado na tabela 6.13 e nas figuras 6.1 e 6.2 (para os perfis de velocidade nas duas direções). Os resultados da tabela 6.13 serão comparados na malha com 128 nós.

Tabela 6.13: Resultados obtidos com Stokes_1p3, por Ghia *et al.* (1982) e por Nishida *et al.* (1992)

Variável de interesse	Stokes_1p3	Ghia <i>et al.</i> (1982)	Nishida <i>et al.</i> (1992)
Fluxo de massa total mínimo	-0,11742002245802	-0,117929	-0,119004
$u(0,5;0,0625)$	-0,19896425414669	-0,20196	-----
$u(0,5;0,5)$	-0,06163026377806	-0,06080	-----
$v(0,0625;0,5)$	0,27521739853401	0,27485	-----
$v(0,5;0,5)$	0,02587604051008	0,02526	-----

Os perfis de velocidade também podem ser comparados através das figuras 6.1 e 6.2, onde estão dispostos os resultados obtidos por Ghia *et al.* (1982) e o atual, obtido com o programa Stokes_1p3.

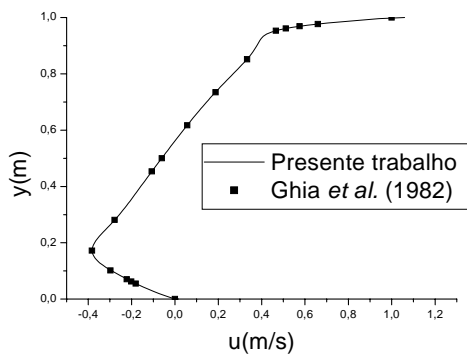


Figura 6.1: Soluções para o perfil de velocidade u em $x=0,5m$

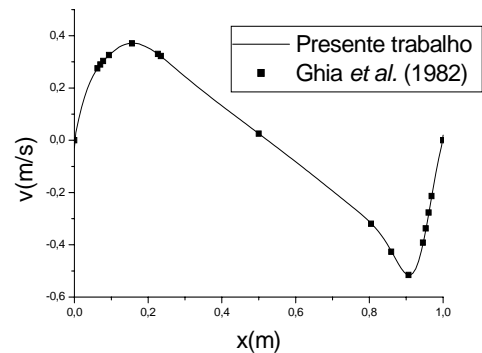


Figura 6.2: Soluções para o perfil de velocidade v em $y=0,5m$

Com os resultados obtidos também pode-se visualizar as curvas de nível para as linhas de corrente assim como os campos de velocidades, conforme pode ser observado nas figuras 6.3 e 6.4 (linhas de corrente) e na figura 6.5 (campo de velocidades). Estes gráficos foram gerados a partir dos resultados obtidos na malha com 128 nós em cada direção.

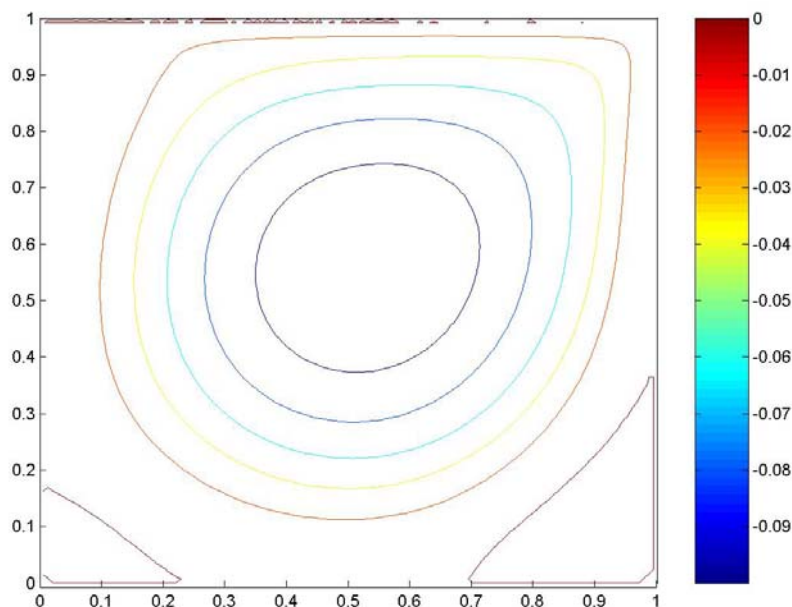


Figura 6.3: Linhas de corrente para o problema de Ghia com $Re=1000$

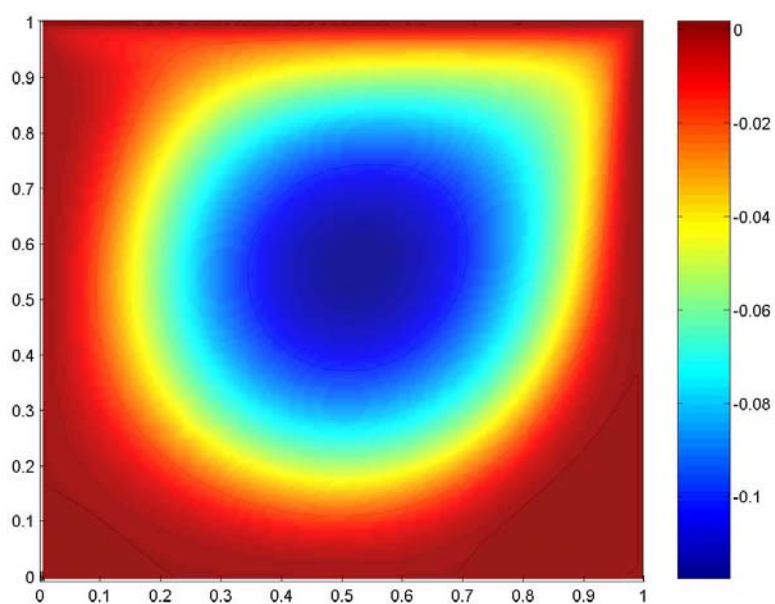


Figura 6.4: Linhas de corrente para o problema de Ghia com $Re=1000$

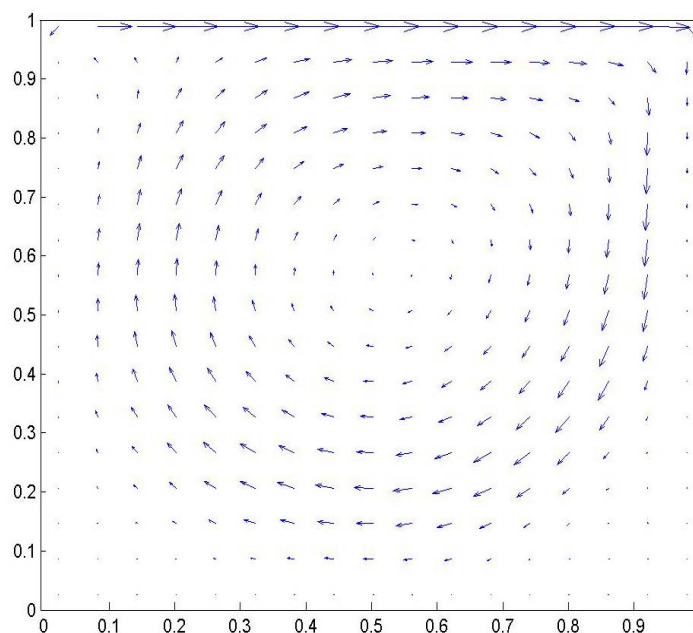


Figura 6.5: Campo de velocidades para o problema de Ghia com $Re=1000$

Nas tabelas 6.14 a 6.19, pode-se observar que a ordem aparente é calculada com base em três malhas, sendo que o valor correspondente ao ST_0008_Re10E3, foi obtido com as seguintes malhas: 8X8 nós (malha fina), 4X4 nós (malha grossa) e 2X2 nós (malha supergrossa), para $Re=1000$. O valor correspondente a ST_0016_Re10E3 foi obtido com as malhas: 16X16 (malha fina), 8X8 (malha grossa) e 4X4 (malha supergrossa), também para $Re=1000$, e assim sucessivamente. Nestas tabelas estão listadas as ordens obtidas para todas as variáveis de interesse.

Tabela 6.14: Ordem aparente para a força da placa com UDS para o problema de Ghia com $Re=1000$

Nome da simulação	h (m)	Razão de refino	Ordem aparente p_U
ST_0002_Re10E3	0,5	2	-----
ST_0004_Re10E3	0,25	2	-----
ST_0008_Re10E3	0,125	2	-0,72638243044585
ST_0016_Re10E3	0,0625	2	-0,45722074524113
ST_0032_Re10E3	0,03125	2	0,11355371130475
ST_0064_Re10E3	0,015625	2	0,47034706914223
ST_0128_Re10E3	0,0078125	2	0,39507610531086
ST_0256_Re10E3	0,00390625	2	0,21970614183366
ST_0512_Re10E3	0,001953125	2	0,08994467727255
ST_1024_Re10E3	0,0009765625	2	0,03055138338915

Tabela 6.15: Ordem aparente para a força da placa com UDS-2 para o problema de Ghia com Re=1000

Nome da simulação	h (m)	Razão de refino	Ordem aparente p_U
ST_0002_Re10E3	0,5	2	-----
ST_0004_Re10E3	0,25	2	-----
ST_0008_Re10E3	0,125	2	-0,71126228387285
ST_0016_Re10E3	0,0625	2	-0,37876207256830
ST_0032_Re10E3	0,03125	2	0,34049192480559
ST_0064_Re10E3	0,015625	2	0,84759618762923
ST_0128_Re10E3	0,0078125	2	0,50897278264152
ST_0256_Re10E3	0,00390625	2	0,10542996849336
ST_0512_Re10E3	0,001953125	2	-0,03969301437068
ST_1024_Re10E3	0,0009765625	2	-0,05798506165878

Tabela 6.16: Ordem aparente para o fluxo de massa total para o problema de Ghia com Re=1000

Nome da simulação	h (m)	Razão de refino	Ordem aparente p_U
ST_0002_Re10E3	0,5	2	-----
ST_0004_Re10E3	0,25	2	-----
ST_0008_Re10E3	0,125	2	-0,61063468608558
ST_0016_Re10E3	0,0625	2	0,23127236148402
ST_0032_Re10E3	0,03125	2	0,44781309222155
ST_0064_Re10E3	0,015625	2	0,55928058186399
ST_0128_Re10E3	0,0078125	2	1,54397832998767
ST_0256_Re10E3	0,00390625	2	1,89043798061280
ST_0512_Re10E3	0,001953125	2	1,98237135231679
ST_1024_Re10E3	0,0009765625	2	1,99592979634972

Tabela 6.17: Ordem aparente para o fluxo de massa com v_n para o problema de Ghia com Re=1000

Nome da simulação	h (m)	Razão de refino	Ordem aparente p_U
ST_0002_Re10E3	0,5	2	-----
ST_0004_Re10E3	0,25	2	-----
ST_0008_Re10E3	0,125	2	-0,62892800926886
ST_0016_Re10E3	0,0625	2	0,26118394081126
ST_0032_Re10E3	0,03125	2	0,39505475975115
ST_0064_Re10E3	0,015625	2	0,53666925365098
ST_0128_Re10E3	0,0078125	2	1,55178274201808
ST_0256_Re10E3	0,00390625	2	1,89417223101726
ST_0512_Re10E3	0,001953125	2	1,97577894569421
ST_1024_Re10E3	0,0009765625	2	2,00203421715257

Tabela 6.18: Ordem aparente para a velocidade central u para o problema de Ghia com Re=1000

Nome da simulação	h (m)	Razão de refino	Ordem aparente p_U
ST_0002_Re10E3	0,5	2	-----
ST_0004_Re10E3	0,25	2	-----
ST_0008_Re10E3	0,125	2	-----
ST_0016_Re10E3	0,0625	2	-----
ST_0032_Re10E3	0,03125	2	0,08949632031129
ST_0064_Re10E3	0,015625	2	2,91342081489444
ST_0128_Re10E3	0,0078125	2	1,34165950784072
ST_0256_Re10E3	0,00390625	2	1,95854952010625
ST_0512_Re10E3	0,001953125	2	2,10268372790563
ST_1024_Re10E3	0,0009765625	2	2,07171594199603

Tabela 6.19: Ordem aparente para a velocidade central v para o problema de Ghia com $Re=1000$

Nome da simulação	h (m)	Razão de refino	Ordem aparente p_U
ST_0002_Re10E3	0,5	2	-----
ST_0004_Re10E3	0,25	2	-----
ST_0008_Re10E3	0,125	2	-0,16709048133092
ST_0016_Re10E3	0,0625	2	1,62043168221544
ST_0032_Re10E3	0,03125	2	-----
ST_0064_Re10E3	0,015625	2	3,40036004995883
ST_0128_Re10E3	0,0078125	2	2,92532573851741
ST_0256_Re10E3	0,00390625	2	1,92368529492698
ST_0512_Re10E3	0,001953125	2	2,35277790115203
ST_1024_Re10E3	0,0009765625	2	2,34536932448822

Nas tabelas 6.14 e 6.15, as ordens aparentes obtidas para a força da placa, tanto com UDS quanto com UDS-2, estão tendendo à zero. Isto ocorre quando o erro tende a um valor constante, ao invés de cair como o esperado, mesmo comportamento observado para $Re=100$. No caso deste problema da cavidade, este fato pode ser devido às velocidades nos contornos, que encontram uma descontinuidade muito grande quando a malha é refinada, pois em um pequeno espaço a velocidade passa de zero (condição de contorno nas paredes direita e esquerda) à unidade (condição de contorno da parede superior).

Para as outras variáveis de interesse (fluxo de massa total e com v_n , e velocidades centrais) pode-se observar que as ordens aparente obtidas estão tendendo para o valor teórico, da ordem assintótica, apresentando assim, o mesmo comportamento observado para $Re=100$.

Pode-se observar que a ordem aparente não foi calculada em alguns casos para a velocidade central u (ST_0008_Re10E3, ST_0016_Re10E3), e também para a velocidade central v (ST_0032_Re10E3). Isto ocorre devido a uma inversão de sinal dos resultados numéricos, o que ocasiona em um logaritmo negativo na obtenção destas ordens. Maiores detalhes sobre esta inversão de sinais podem ser obtidos no Apêndice A. Assim como no problema anterior, os perfis de velocidade u e v aqui calculados são obtidos considerando apenas as três malhas mais finas, ou seja, com 256X256, 512X512 e 1024X1024 nós para a obtenção da ordem aparente.

Tabela 6.20: Ordem aparente para o perfil de velocidade u para o problema de Ghia com $Re=1000$

Coordenadas	Ordem aparente p_U
$u(0,5;0,0625)$	1,97672569009937
$u(0,5;0,125)$	1,99366714636081
$u(0,5;0,1875)$	2,00501336969788
$u(0,5;0,25)$	2,01567574993358
$u(0,5;0,3125)$	2,01478112491573
$u(0,5;0,375)$	2,01743996258306
$u(0,5;0,4375)$	2,02741011686505
$u(0,5;0,5)$	2,07171594199603
$u(0,5;0,5625)$	1,93295624595261
$u(0,5;0,625)$	1,98161498604168
$u(0,5;0,6875)$	1,99141132393745
$u(0,5;0,75)$	1,99604490707199
$u(0,5;0,8125)$	1,99956822123076
$u(0,5;0,875)$	2,00239376579006
$u(0,5;0,9375)$	2,01032178934967

Tabela 6.21: Ordem aparente para o perfil de velocidade v para o problema de Ghia com $Re=1000$

Coordenadas	Ordem aparente p_U
$v(0,0625;0,5)$	2,00562310457634
$v(0,125;0,5)$	2,00419331307990
$v(0,1875;0,5)$	2,00353960205289
$v(0,25;0,5)$	2,00091183917877
$v(0,3125;0,5)$	1,99613898204665
$v(0,375;0,5)$	1,99181375933081
$v(0,4375;0,5)$	1,97858379342956
$v(0,5;0,5)$	2,34536932448822
$v(0,5625;0,5)$	2,02730887584889
$v(0,625;0,5)$	2,01515992715217
$v(0,6875;0,5)$	2,01028439862395
$v(0,75;0,5)$	2,00681782971216
$v(0,8125;0,5)$	2,00969685727388
$v(0,875;0,5)$	2,00448384167962
$v(0,9375;0,5)$	1,98704961657451

As ordens práticas para cada uma das variáveis de interesse podem também ser observadas nas figuras 6.3 a 6.8 que estão dispostas a seguir, sendo que para as variáveis globais e para as velocidades centrais (variáveis locais), foram considerados os resultados obtidos em todas as malhas.

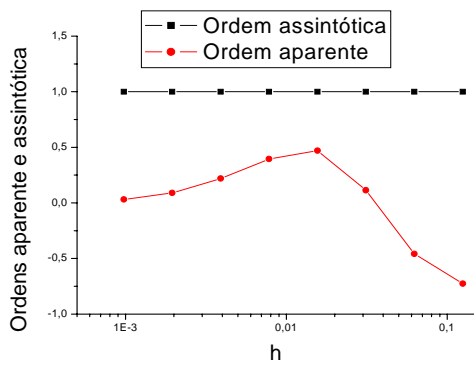


Figura 6.6: Ordens aparente e assintótica por h para a força da placa com UDS

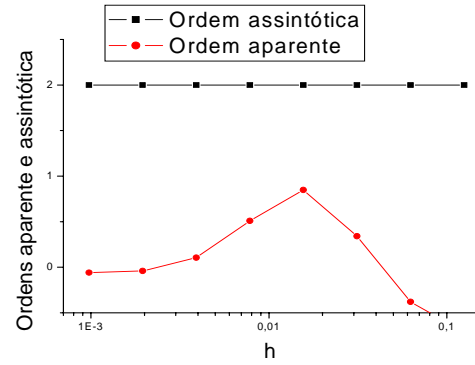


Figura 6.7: Ordens aparente e assintótica por h para a força da placa com UDS-2

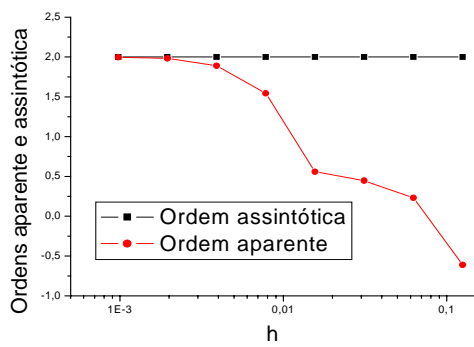


Figura 6.8: Ordens aparente e assintótica para o fluxo de massa total

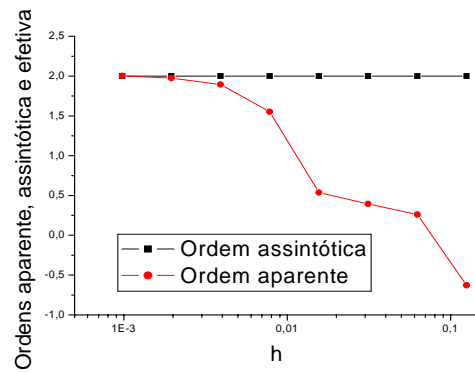


Figura 6.9: Ordens aparente e assintótica para o fluxo de massa com v_n

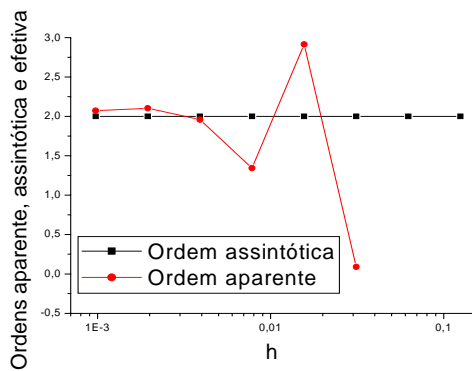


Figura 6.10: Ordens aparente e assintótica para a velocidade u central

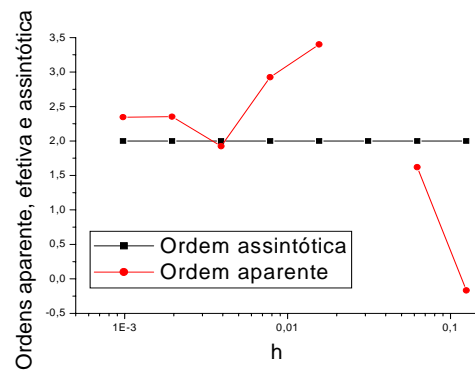


Figura 6.11: Ordens aparente e assintótica para a velocidade v central

Conforme se pode observar nas figuras 6.6 e 6.7, a ordem aparente não está tendendo para a ordem teórica (assintótica) à medida que a malha está sendo refinada. Nas figuras 6.8, 6.9, 6.10 e 6.11, a ordem aparente apresenta um comportamento esperado, ou seja, se aproxima da ordem assintótica conforme a malha é refinada.

6.3 Verificação da solução numérica

Nas tabelas 6.22, 6.23 e 6.24, para cada variável de interesse foi estimado o erro da solução numérica, sendo que, cada estimador foi obtido com base nas três malhas mais finas, ou seja, 256X256, 512X512 e 1024X1024 nós.

Tabela 6.22: Estimativa do erro numérico para as variáveis de interesse para o problema de Ghia com $Re=1000$

Variável de interesse	$U_{Ri}(\phi_1, p_L)$	$\frac{U_{Ri}(\phi_1, p_U)}{U_{Ri}(\phi_1, p_L)}$	$\frac{U_{GCI}(\phi_1, p)}{U_{Ri}(\phi_1, p_L)}$
Força da placa com UDS	0,0029870022013	46,7236866218910	140,1710598656730
Força da placa com UDS-2	0,0009256873277	-----	-----
Fluxo de massa total	0,0000239790709	1,0037705290832	3,0113115872498
Fluxo de massa com v_n	0,0000239909050	0,9981221909101	2,9943665727303
$u(0,5;0,5)$	-0,0000060182621	0,9363693810035	-2,8091081430105
$v(0,5;0,5)$	-0,0000007892403	0,7349510122363	3,0000000000000

Tabela 6.23: Estimativa do erro numérico para o perfil de velocidade u para o problema de Ghia com $Re=1000$

Coordenadas	$U_{Ri}(\phi_1, p_L)$	$\frac{U_{Ri}(\phi_1, p_U)}{U_{Ri}(\phi_1, p_L)}$	$\frac{U_{GCI}(\phi_1, p)}{U_{Ri}(\phi_1, p_L)}$
$u(0,5;0,0625)$	-0,0000556574738	1,0218026668654	3,0654080005962
$u(0,5;0,125)$	-0,0001125284902	1,0058742782020	3,0176228346061
$u(0,5;0,1875)$	-0,0000897488994	0,9953800458498	3,0000000000000
$u(0,5;0,25)$	-0,0000457203551	0,9856426729271	3,0000000000000
$u(0,5;0,3125)$	-0,0000363447696	0,9864551035442	3,0000000000000
$u(0,5;0,375)$	-0,0000295949906	0,9840429928399	3,0000000000000
$u(0,5;0,4375)$	-0,0000180629970	0,9750632395080	3,0000000000000
$u(0,5;0,5)$	-0,0000060182621	0,9363693810035	3,0000000000000
$u(0,5;0,5625)$	0,0000059329538	1,0644457120043	3,1933371360131
$u(0,5;0,625)$	0,0000182271278	1,0171735041289	3,0515205123868
$u(0,5;0,6875)$	0,0000309511104	1,0079771734380	3,0239315203140
$u(0,5;0,75)$	0,0000449231495	1,0036636495164	3,0109909485493
$u(0,5;0,8125)$	0,0000637794018	1,0003991478619	3,0011974435858
$u(0,5;0,875)$	0,0000880508771	0,9977907458834	3,0000000000000
$u(0,5;0,9375)$	0,0000872050262	0,9905172188181	3,0000000000000

Tabela 6.24: Estimativa do erro numérico para o perfil de velocidade v para o problema de Ghia com $Re=1000$

Coordenadas	$U_{Ri}(\phi_1, p_L)$	$\frac{U_{Ri}(\phi_1, p_U)}{U_{Ri}(\phi_1, p_L)}$	$\frac{U_{GCI}(\phi_1, p)}{U_{Ri}(\phi_1, p_L)}$
$v(0,0625;0,5)$	0,0000865021383	0,9948199793228	3,0000000000000
$v(0,125;0,5)$	0,0001035445815	0,9961339227661	3,0000000000000
$v(0,1875;0,5)$	0,0000825688444	0,9967353894002	3,0000000000000
$v(0,25;0,5)$	0,0000495140687	0,9991577253120	3,0000000000000
$v(0,3125;0,5)$	0,0000333241175	1,0035763120754	3,0107289362262
$v(0,375;0,5)$	0,0000232431919	1,0076016171441	3,0228048514324
$v(0,4375;0,5)$	0,0000114870292	1,0200403180691	3,0601209542075
$v(0,5;0,5)$	-0,0000007892403	0,7349510122363	3,0000000000000
$v(0,5625;0,5)$	-0,0000127635830	0,9751539093110	3,0000000000000
$v(0,625;0,5)$	-0,0000247886402	0,9861110021447	3,0000000000000
$v(0,6875;0,5)$	-0,0000378241375	0,9905513670848	3,0000000000000
$v(0,75;0,5)$	-0,0000510493261	0,9937237159311	3,0000000000000
$v(0,8125;0,5)$	-0,0000501671200	0,9910881508864	3,0000000000000
$v(0,875;0,5)$	-0,0000864439897	0,9958667586675	3,0000000000000
$v(0,9375;0,5)$	-0,0001177601224	1,0120588199214	3,0361764597643

Conforme pode ser observado na tabela 6.22, para força da placa obtida com UDS-2 o erro estimado (U) se aplica apenas para a ordem assintótica, pois a ordem aparente é negativa. O mesmo pode ser observado nas figuras 6.13 e 6.19, onde o valor obtido com a ordem aparente é representado por uma descontinuidade.

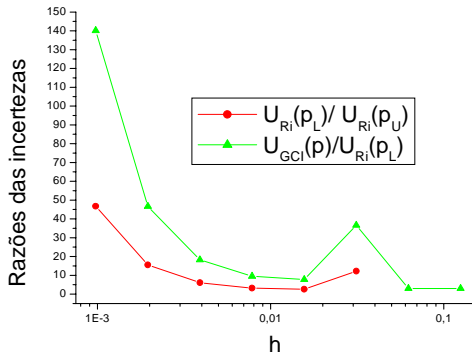


Figura 6.12: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a força da placa com UDS

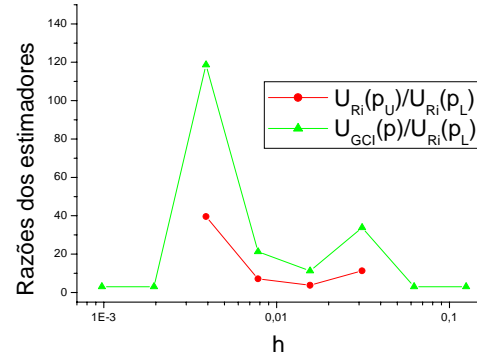


Figura 6.13: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a força da placa com UDS-2

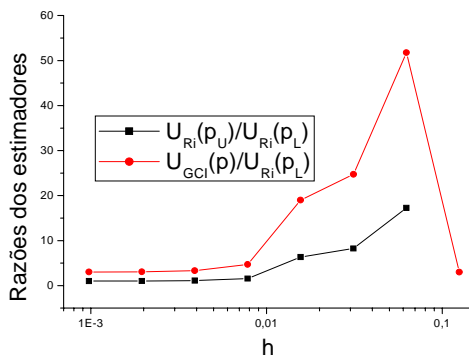


Figura 6.14: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para o fluxo de massa total

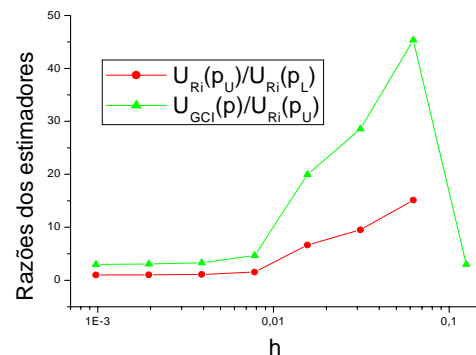


Figura 6.15: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para o fluxo de massa com v_n

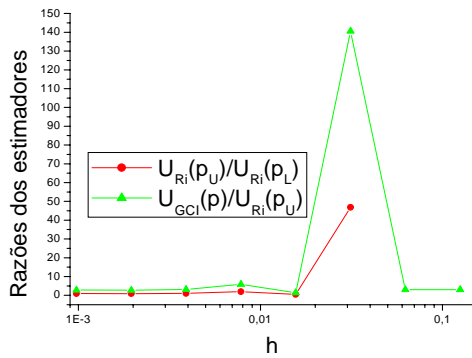


Figura 6.16: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a velocidade u central

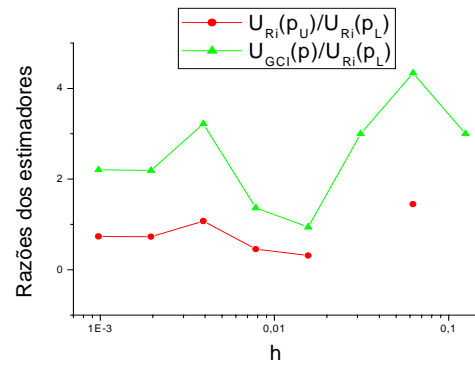


Figura 6.17: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a velocidade v central

Observa-se nas figuras 6.17 a 6.17 o comportamento semelhante apresentado para o fluxo de massa total e o obtido também com v_n , o mesmo ocorrendo para as velocidades centrais.

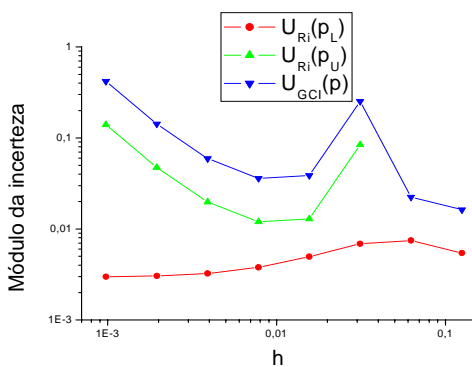


Figura 6.18: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI para a força da placa com UDS

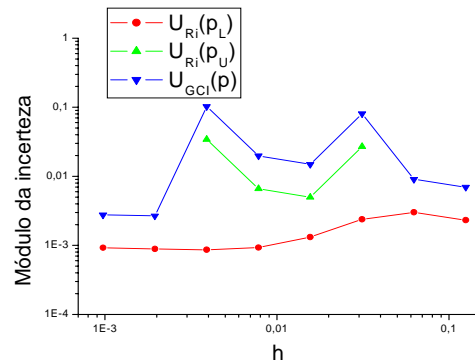


Figura 6.19: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI para a força da placa com UDS-2

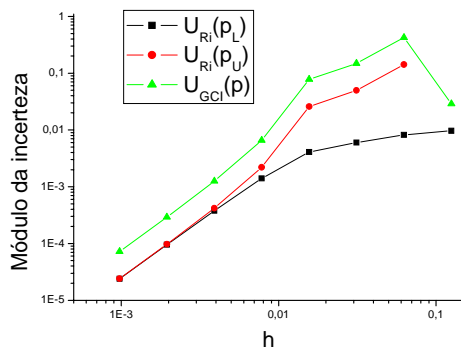


Figura 6.20: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI para o fluxo de massa total

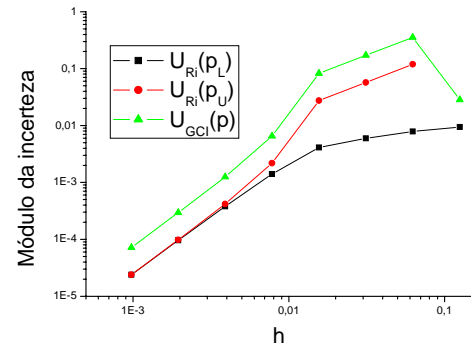


Figura 6.21: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI para o fluxo de massa com v_n

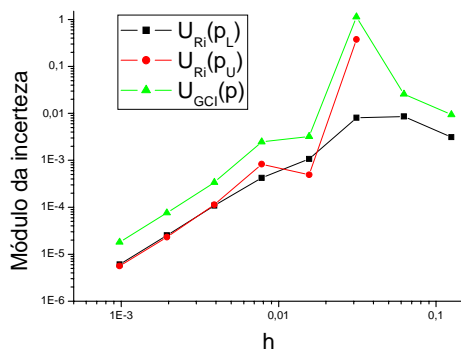


Figura 6.22: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI para a velocidade u central

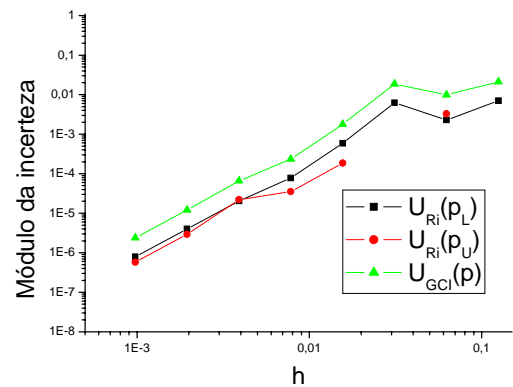


Figura 6.23: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI para a velocidade v central

Da observação das figuras 6.20 a 6.23 pode-se concluir que as variáveis de interesse (fluxo de massa total e obtido com v_n e as velocidades centrais) apresentam um comportamento semelhante. A força da placa obtida com UDS e com UDS-2 não apresenta um comportamento esperado, pois a ordem aparente não se aproxima da ordem assintótica, o que acaba comprometendo todas as análises que seguem.

Os dados utilizados na construção das figuras 6.12 a 6.23 podem ser observados no Apêndice C para todas as malhas utilizadas.

A solução numérica para cada variável de interesse com seu erro estimado, pode ser analisado nas tabelas 6.25, 6.26 e 6.27, considerando-se ϕ_1 a malha mais fina (1024X1024 nós). Para a obtenção desta solução estimada foi utilizado o estimador Convergente (MARCHI e SILVA, 2002) descrito no capítulo 3.

Tabela 6.25: Solução numérica com seu erro estimado com estimador Convergente para o problema de Ghia com Re=1000

Variável de interesse	$\phi = \phi_C \pm U_C$	Envolve solução de Ghia <i>et al.</i> (1982)
Força da placa com UDS	-----	-----
Força da placa com UDS-2	-----	-----
Fluxo de massa total	0,1189367355341 \pm 0,0000000452068	Não
Fluxo de massa com v_n	0,1165142807717 \pm 0,0000000225251	-----
$u(0,5;0,5)$	0,0620560409180 \pm 0,0000001914728	Não
$v(0,5;0,5)$	0,0257994926022 \pm 0,0000001045936	Não

Tabela 6.26: Solução numérica para o perfil de velocidade u com seu erro estimado com estimador Convergente para o problema de Ghia com Re=1000

Coordenadas	$\phi = \phi_C \pm U_C$
$u(0,5;0,0625)$	0,2023304067312 \pm 0,0000006067406
$u(0,5;0,125)$	0,3478453314871 \pm 0,0000003305118
$u(0,5;0,1875)$	0,3844093469081 \pm 0,0000002073179
$u(0,5;0,25)$	0,3189459058951 \pm 0,0000003282110
$u(0,5;0,3125)$	0,2456935891624 \pm 0,0000002461430
$u(0,5;0,375)$	0,1837320202959 \pm 0,0000002361237
$u(0,5;0,4375)$	0,1234103523781 \pm 0,0000002252163
$u(0,5;0,5)$	0,0620560409180 \pm 0,0000001914728
$u(0,5;0,5625)$	0,0005619110891 \pm 0,0000001911767
$u(0,5;0,625)$	0,0652488343225 \pm 0,0000001565118
$u(0,5;0,6875)$	0,1335726509790 \pm 0,0000001234511
$u(0,5;0,75)$	0,2079146728698 \pm 0,0000000822913
$u(0,5;0,8125)$	0,2884424284474 \pm 0,0000000127287
$u(0,5;0,875)$	0,3625453626942 \pm 0,0000000972633
$u(0,5;0,9375)$	0,4229319705140 \pm 0,0000004134730

Tabela 6.27: Solução numérica para o perfil de velocidade v com seu erro estimado com estimador Convergente para o problema de Ghia com $Re=1000$

Coordenadas	$\phi = \phi_C \pm U_C$
$v(0,0625;0,5)$	$0,2807056427054 \pm 0,0000002240414$
$v(0,125;0,5)$	$0,3650417447965 \pm 0,0000002001556$
$v(0,1875;0,5)$	$0,3678526392545 \pm 0,0000001347775$
$v(0,25;0,5)$	$0,3071042822940 \pm 0,0000000208522$
$v(0,3125;0,5)$	$0,2312684337769 \pm 0,0000000595887$
$v(0,375;0,5)$	$0,1605642719041 \pm 0,0000000883429$
$v(0,4375;0,5)$	$0,0929693790867 \pm 0,0000001151018$
$v(0,5;0,5)$	$0,0257994926022 \pm 0,0000001045936$
$v(0,5625;0,5)$	$0,0418406093190 \pm 0,0000001585625$
$v(0,625;0,5)$	$0,1107981867524 \pm 0,0000001721446$
$v(0,6875;0,5)$	$0,1816796605914 \pm 0,0000001786931$
$v(0,75;0,5)$	$0,2533814267983 \pm 0,0000001602000$
$v(0,8125;0,5)$	$0,3315665875458 \pm 0,0000002235409$
$v(0,875;0,5)$	$0,4677755414037 \pm 0,0000001786469$
$v(0,9375;0,5)$	$0,4561529660925 \pm 0,0000007100240$

Na tabela 6.25, o estimador convergente não se aplica à variável de interesse, força da placa sobre o fluido, pois seu resultado numérico não se apresentou convergente conforme análise feita com base nas ordens práticas.

A solução numérica pode também ser estimada com o uso do estimador GCI, também já descrito no capítulo 3. Esta estimativa da solução numérica pode ser observada nas tabelas 6.28, 6.29 e 6.30. Na tabela 6.28, o estimador $U_{GCI}(\phi_1, p)$, para a força da placa com as duas aproximações numéricas foi obtido com base na ordem assintótica. As outras variáveis de interesse este estimador é obtido com a menor ordem entre a aparente e a assintótica.

Tabela 6.28: Solução numérica com seu erro estimado com estimador GCI para o problema de Ghia com $Re=1000$

Variável de interesse	$\phi = \phi_1 \pm U_{GCI}(\phi_1, p)$	Envolve solução de Ghia <i>et al.</i> (1982)
Força da placa com UDS	$0,0450084105406 \pm 0,4186912643816$	-----
Força da placa com UDS-2	$0,0474174694154 \pm 0,0027770619831$	-----
Fluxo de massa total	$0,1189127112562 \pm 0,0000722084543$	Não
Fluxo de massa com v_n	$0,1164903123918 \pm 0,0000719727151$	-----
$u(0,5;0,5)$	$-0,0620502141287 \pm 0,0000180547864$	Não
$v(0,5;0,5)$	$0,0258001772490 \pm 0,0000023677211$	Não

Tabela 6.29: Solução numérica para o perfil de velocidade u com seu erro estimado com estimador GCI para o problema de Ghia com $Re=1000$

Coordenadas	$\phi = \phi_1 \pm U_{GCI}(\phi_1, p)$
$u(0,5;0,0625)$	$-0,2022741425166 \pm 0,0001706128657$
$u(0,5;0,125)$	$-0,3477324724851 \pm 0,0003395685417$
$u(0,5;0,1875)$	$-0,3843198053265 \pm 0,0002692466984$
$u(0,5;0,25)$	$-0,3189005137511 \pm 0,0001371610653$
$u(0,5;0,3125)$	$-0,2456574905359 \pm 0,0001090343088$
$u(0,5;0,375)$	$-0,1837026614290 \pm 0,0000887849719$
$u(0,5;0,4375)$	$-0,1233925145974 \pm 0,0000541889910$
$u(0,5;0,5)$	$-0,0620502141287 \pm 0,0000180547864$
$u(0,5;0,5625)$	$0,0005557869585 \pm 0,0000189459217$
$u(0,5;0,625)$	$0,0652304506829 \pm 0,0000556204545$
$u(0,5;0,6875)$	$0,1335415764174 \pm 0,0000935940383$
$u(0,5;0,75)$	$0,2078696674289 \pm 0,0001352631967$
$u(0,5;0,8125)$	$0,2883786363169 \pm 0,0001914145777$
$u(0,5;0,875)$	$0,3624574090804 \pm 0,0002641526314$
$u(0,5;0,9375)$	$0,4228451789608 \pm 0,0002616150788$

Tabela 6.30: Solução numérica para o perfil de velocidade v com seu erro estimado com estimador GCI para o problema de Ghia com $Re=1000$

Coordenadas	$\phi = \phi_1 \pm U_{GCI}(\phi_1, p)$
$v(0,0625;0,5)$	$0,2806193646084 \pm 0,0002595064151$
$v(0,125;0,5)$	$0,3649384003706 \pm 0,0003106337446$
$v(0,1875;0,5)$	$0,3677702051876 \pm 0,0002477065333$
$v(0,25;0,5)$	$0,3070547890775 \pm 0,0001485422061$
$v(0,3125;0,5)$	$0,2312350500707 \pm 0,0001003298848$
$v(0,375;0,5)$	$0,1605409403692 \pm 0,0000702596333$
$v(0,4375;0,5)$	$0,0929577769556 \pm 0,0000351516987$
$v(0,5;0,5)$	$0,0258001772490 \pm 0,0000023677211$
$v(0,5625;0,5)$	$-0,0418280042985 \pm 0,0000382907491$
$v(0,625;0,5)$	$-0,1107735702568 \pm 0,0000743659207$
$v(0,6875;0,5)$	$-0,1816420151471 \pm 0,0001134724125$
$v(0,75;0,5)$	$-0,2533305376722 \pm 0,0001531479784$
$v(0,8125;0,5)$	$-0,3315166439666 \pm 0,0001505013602$
$v(0,875;0,5)$	$-0,4676892760609 \pm 0,0002593319692$
$v(0,9375;0,5)$	$-0,4560344959460 \pm 0,0003575405116$

6.4 Conclusão

Neste capítulo foi estudado o problema do escoamento recirculante em uma cavidade quadrada proposto por Ghia *et al.* (1982), descrevendo-se os resultados para duas variáveis de interesse globais: fluxo de massa que escoo na cavidade (tanto o total quanto o obtido com v_n) que foi obtido através das linhas de corrente e integração, e a força que é aplicada sobre a placa superior da cavidade. Também foram expostos os resultados para as variáveis de interesse locais, que são as velocidades centrais em cada uma das direções, e os perfis de velocidade u e v . Os perfis foram calculados para as três malhas mais finas utilizadas no estudo da incerteza numérica das soluções obtidas para este problema.

Para $Re=1000$, a variável de interesse força sobre a placa também não apresentou um comportamento esperado, pois tanto a ordem aparente obtida com a aproximação UDS quanto a obtida com a aproximação UDS-2, não se aproximam da ordem assintótica, apresentando um comportamento parecido ao obtido no capítulo 5 (problema de Ghia com $Re=100$). A ordem

prática obtida a partir das simulações numéricas está tendendo à zero, isto ocorre quando o erro obtido entre as soluções numéricas obtidas com diferentes malhas tende a um valor constante, ao invés de tender a zero.

Já a outra variável global fluxo de massa, apresentou um resultado esperado com sua ordem aparente se aproximando da ordem assintótica. O mesmo ocorrendo para as variáveis locais: perfis de velocidade e velocidades centrais. Todas estas análises foram feitas com base em tabelas e gráficos, que tornaram mais clara a visualização dos resultados.

Neste capítulo pode-se observar também a razão entre o estimador de Richardson obtido com a ordem aparente pelo estimador obtido com a ordem assintótica, e também a razão entre o estimador GCI pelo estimador de Richardson obtido com a ordem assintótica (teórica).

Para todas as variáveis de interesse podem ser observadas as soluções numéricas com seu erro estimado pelo estimador Convergente e também pelo estimador GCI.

Como no capítulo anterior, podem-se comparar também os resultados presentes na literatura, Ghia *et al.* (1989) e Nishida *et al.* (1992), por exemplo, com os obtidos neste trabalho, comparação esta que se mostrou satisfatória. Também foram obtidos resultados com malhas mais refinadas que as presentes na literatura atual, com 1024X1024 nós contra 257X257 nós (Ghia *et al.* 1982).

Neste capítulo podem-se observar ainda os gráficos para as linhas de corrente e para o campo de velocidades, o que tornou mais clara a visualização do escoamento na cavidade quadrada.

7 Conclusão

Este capítulo apresenta as principais constatações deste trabalho e um resumo das contribuições desta dissertação. O escopo deste trabalho era aplicar os seguintes estimadores de erro: Extrapolação de Richardson, GCI e Estimador Convergente, para avaliar a solução numérica para o problema da cavidade quadrada presentes na literatura. O primeiro problema abordado possui solução analítica e a tampa da cavidade se move a uma velocidade variável, descrito por Shih *et al.* (1989), e o segundo problema não possui solução analítica e a tampa da cavidade se move a uma velocidade constante, descrito por Ghia *et al.* (1982). Este problema foi resolvido com diferentes condições de contorno, sendo que os resultados obtidos para ambos os problemas foram comparados aos que existem na literatura.

Primeiramente foi resolvido o problema descrito por Shih *et al.* (1989), que possui solução analítica, sendo que as variáveis de interesse que foram analisadas neste problema foram: força da placa sobre o fluido, fluxo de massa que escoar na cavidade, perfil de velocidade nas duas direções (u e v) e velocidade central também nas duas direções. As duas primeiras variáveis de interesse são globais e as outras duas são variáveis locais. As análises feitas com os estimadores acima citados mostraram-se satisfatórias para o fluxo de massa, velocidades centrais e perfis de velocidade. Constatou-se que as ordens obtidas a partir das soluções numéricas se aproximam da ordem teórica, como era esperado.

As análises feitas com a força da placa não se mostraram tão satisfatórias, pois as ordens práticas não se aproximaram da ordem teórica, o que pode ser explicado pelos testes mostrados no apêndice A. Neste apêndice foi constatado que a derivada que faz parte da equação desta variável de interesse, possui ordem aparente diferente da ordem assintótica, ou seja, o valor da ordem aparente tende a outro número, que para este caso, foi o mesmo valor a que está tendendo a ordem aparente da força da placa. Isto foi demonstrado para a força da placa obtida com duas aproximações numéricas diferentes, ou seja, para duas ordens assintóticas distintas.

Para a força da placa tem-se que $|E_{UDS}| < |E_{UDS-2}|$, isto pode estar ocorrendo devido a aproximação UDS (com ordem 1), que parece se comportar como CDS, que possui ordem 2. Isto

pode estar ocorrendo devido ao uso de volumes fictícios para a aplicação das condições de contorno. A ordem aparente de aproximações de problemas unidimensionais pode apresentar um comportamento diferente em problemas bidimensionais.

Para este primeiro problema se pode observar figuras que ilustram o comportamento dos resultados obtidos neste trabalho comparados à solução analítica, resultados estes que se mostraram muito próximos. Podem-se também observar as curvas de nível, onde se pode notar como o escoamento se comporta com a influência de um termo fonte e da tampa que se move a uma velocidade variável, e os campos de velocidades nas duas direções (u e v), onde se pode notar a magnitude da velocidade em vários pontos da cavidade.

Neste problema de Shih se pode ainda comparar os resultados obtidos para duas variáveis de interesse, fluxo de massa e força da placa, com os resultados obtidos por Morais (2004). Foram confrontadas as ordens aparente e efetiva obtidas nos dois trabalhos, onde os resultados mais satisfatórios foram os apresentados por este trabalho. Mesmo comportamento apresentou os estimadores de erro, com suas incertezas.

Ainda para o Problema de Shih, conforme se pode observar na tabela A.8, a ordem efetiva para a aproximação UDS se aproxima de um, enquanto para a aproximação UDS-2 se aproxima de dois, conforme é esperado. Os resultados aqui obtidos numericamente não condizem com os resultados obtidos a partir das soluções analíticas, isto pode estar ocorrendo devido à aplicação das condições de contorno, feitas a partir de volumes fictícios e também devido aos outros erros inerentes na solução numérica também podem estar interferindo nestes resultados.

O estimador GCI foi aplicado a todas as variáveis de interesse, sendo que se mostrou confiável para todas elas, ou seja, a solução analítica deste problema estava contida no intervalo proposto por este estimador.

O segundo problema abordado foi o descrito por Ghia *et al.* (1982), onde foram variados os valores para o número de Reynolds e a solução analítica não é conhecida. Neste caso, as variáveis de interesse são as mesmas já discutidas no problema anterior. Serão analisados dois números de Reynolds: $Re=100$ e $Re=1000$. Os resultados obtidos para o fluxo de massa, perfis de velocidade e velocidades centrais nas duas direções também foram satisfatórios. Para estas

variáveis de interesse a ordem aparente se aproximou da ordem assintótica à medida que a malha foi sendo refinada, sendo que, desta forma, os estimadores de erros puderam ser aplicados sem restrições, produzindo bons resultados. A força da placa novamente apresentou problemas com a ordem aparente, mas neste caso, a ordem está se aproximando de zero enquanto a malha é refinada. Isto ocorre quando os erros entre as soluções numéricas (entre as malhas) estão tendendo a um valor constante, enquanto deveriam se aproximar de zero. O fato de a ordem aparente estar tendendo a zero pode estar ligado à aplicação das condições de contorno, onde se observa uma descontinuidade.

Para este problema se podem observar os resultados obtidos para os perfis de velocidade comparando com os resultados obtidos por Ghia *et al.* (1982) através de gráficos. Através de tabelas pode-se também comparar os resultados obtidos neste trabalho aos obtidos por Nishida *et al.* (1992) para os dois valores de Re . Observou-se que os resultados obtidos no presente trabalho estão bem próximos (coincidência de pelo menos duas casas decimais para cada variável de interesse) aos obtidos pelos autores acima citados.

Para este problema também se podem comparar os resultados obtidos neste trabalho aos que estão presentes na literatura, através de gráficos e tabelas, sendo que os resultados aqui obtidos mostraram-se coerentes. Também foram gerados resultados com malhas mais refinadas que as presentes na literatura para o problema de Ghia. De forma sintetizada este trabalho apresenta as seguintes contribuições:

- ✓ análise detalhada das ordens aparente e efetiva para as variáveis de interesse propostas;
- ✓ observação do comportamento do erro numérico conforme a malha está sendo refinada;
- ✓ aplicação de diferentes estimadores de erro (Richardson, GCI e Convergente);
- ✓ observação do desempenho dos estimadores de Richardson e GCI conforme o tamanho da malha;
- ✓ comprovou-se que o estimador GCI é confiável para o problema de Shih;
- ✓ comparação dos resultados obtidos com diferentes números de Reynolds;

- ✓ obtenção de resultados em malhas mais refinadas que as presentes na literatura.

O problema da cavidade quadrada aqui abordado é foco de muitos estudos hoje em dia, com base nisso, algumas sugestões para trabalhos futuros:

- ✓ para o problema de Shih fazer uma análise mais aprofundada no estudo da força da placa, com diferentes aproximações numéricas e também com diferentes malhas;
- ✓ utilizar malhas não estruturadas na discretização destes problemas;
- ✓ utilizar o método de Diferenças Finitas para a obtenção da solução numérica;
- ✓ para o problema de Ghia analisar os resultados com outros números de Reynolds.

8 REFERÊNCIAS

FERZIGER, J. H., PERIC, M. **Computational Methods for Fluid Dynamics**. Berlin: Springer-Verlag, 2002.

FORTUNA, A. O., **Técnicas Computacionais para Dinâmica de Fluidos**, Edusp, 2000.

FOX, R. W., MCDONALD, A. T. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**, Guanabara Koogan, 1995.

GHIA, U., GHIA, K. N., SHIN, C. T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. **Journal of Computational Physics**, v. 48, pp. 387-411, 1982.

INCROPERA, F. P., WITT, D. P. **Fundamentos de Transferência de Calor e Massa**, Guanabara Koogan, 1992.

KUNDU, P. K. **Fluid Mechanics**, Academic Press, 1990.

LAGE, P. L. C., Application of the optimized modified strong implicit procedure to nonlinear problems. **Numerical Heat Transfer, Part B**, v. 30, pp. 423-435, 1996.

LAGE, P. L. C., Modified strong implicit procedure with adaptive optimization of its iteration parameter. **Numerical Heat Transfer, Part B**, v. 30, pp. 255-270, 1996.

MALISKA, C. R., **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**, LTC, 2 ed., 2005.

MARCHI, C. H., SCHNEIDER, F. A. **Introdução à Mecânica Computacional**. Curitiba, UFPR, 2004.

MARCHI, C. H., SILVA, A. F. C. Multidimensional discretization error estimation for convergent apparent order. **J. of the Braz. Soc. Of Mech. Sci. & Eng**, v. 27, pp. 432-439, 2005.

MARCHI, C. H., SILVA, A. F. C. Unidimensional numerical solution error for convergent apparent order. **Numerical Heat Transfer, Part B**, v. 42, pp. 167-188, 2002.

MARCHI, C. H. **Verificação de soluções numéricas unidimensionais em dinâmica dos fluidos**. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, Brasil, 2001.

MARTINS, M. A. **Estimativa de erros de iteração em dinâmica dos fluidos computacional**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2002.

MORAIS, L. E. **Verificação de soluções numéricas de escoamentos laminares obtidas com o método dos volumes finitos e malhas não-estruturadas**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2004.

NISHIDA, H., SATOFUKA, N. Higher-order solutions of square driven cavity flow using a variable-order multi-grid method. **International journal for numerical methods in engineering**, v. 36, pp. 637-653, 1992.

OBERKAMPF, W. L., BLOTTNER, F. L. Issues in computational fluid dynamics code verification and validation. **AIAA Journal**, v.36, n. 5, pp. 687-695, 1998.

PERIC, M. Efficient semi-implicit solving algorithm for nine-diagonal coefficient matrix. **Numerical Heat Transfer**, v. 11, pp. 251-279, 1987.

ROACHE, P. J. **Verification and Validation in Computational Science and Engineering**. Albuquerque, USA: Hermosa, 1998.

ROACHE, P. J. Perspective: a method for uniform reporting of grid refinement studies. **ASME Journal of Fluids Engineering**, v.116, pp.405-413, 1994.

ROACHE, P. J. Quantification of uncertainty in computational fluid dynamics. **Annu. Rev. Fluid. Mech.**, vol. 29, pp 123-160, 1997.

SCHNEIDER, G, E., ZEDAN, M. A modified strongly implicit procedure for the numerical solution of field problems. **Numerical Heat Transfer**, v.4, pp. 1-19, 1981.

SHIH, T. M., TAN, C. H., HWANG, B. C. Effects of grid staggering on numerical scheme. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 9, pp. 193-212, 1989.

TANNEHILL, J. C., ANDERSON, D. A., PLETCHER, R. H. **Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer**, Taylor & Francis, 1997.

VERSTEEG, H. K., MALALASEKERA, W. **An introduction to Computational Fluid Dynamics, The Finite Volume Method**, Longman, 1995.

APÊNDICE A – Análise da derivada $\frac{du}{dy}$

A1. Definição do problema

Neste apêndice é feita a análise de erros para a derivada $\frac{du}{dy}$, que é utilizada no cálculo da força da placa sobre o fluido. Esta derivada foi aproximada pelo método de diferenças finitas utilizando duas aproximações numéricas diferentes (MARCHI e SCHNEIDER, 2004): UDS (*Upstream Differencing Scheme*) e UDS-2, para malhas que possuem razão de refinamento 3. Esta variável de interesse é analisada nos dois problemas tratados neste trabalho.

A2. Solução Analítica

A solução analítica para esta variável auxiliar é obtida tomando-se a Eq. (4.12) e derivando-se com relação a y , sendo que as coordenadas que serão analisadas são $x = 0,5; y = 1$ como pode ser observado a seguir:

$$\frac{du}{dy} = 16(x^4 - 2x^3 + x^2)(6y^2 - 1), \quad (A1)$$

resultando em $\frac{du}{dy} = 5$. Esta solução analítica pode ser considerada apenas para o problema de

Shih *et al.* (1989), descrito no capítulo 4.

As ordens assintóticas teóricas para estas duas aproximações podem ser observadas na tabela A.1:

Tabela A.1: Ordem assintótica para cada uma das aproximações utilizadas

Aproximações numéricas	Ordem assintótica p_L
UDS	1
UDS-2	2

A3.Solução Numérica

A derivada $\frac{du}{dy}$ foi obtida numericamente a partir das aproximações obtidas com UDS e UDS-2, sendo que elas foram aplicadas a um ponto específico do domínio de cálculo $x = 0,5, y = 1$, conforme pode ser observado abaixo.

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_{UDS} = \frac{2(1 - u_{p,N_y-1})}{\Delta y} \quad (A2)$$

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_{UDS-2} = \frac{(8 + u_{p,N_y-2} - 9u_{p,y-1})}{3\Delta y} \quad (A3)$$

Com a obtenção da solução numérica, torna-se possível fazer uma análise de erros, da mesma forma que foi feito para as variáveis de interesse do problema de Shih *et al.* (1989). Na tabela A.2 estão identificadas as simulações numéricas que foram realizadas para se analisar estas variáveis auxiliares. Nas tabelas A.3 e A.4, podem ser observados os resultados obtidos para as derivadas com as duas aproximações numéricas. Nas tabelas A.5 e A.6, podem-se observar as ordens práticas para as duas aproximações numéricas utilizadas.

Tabela A.2: Identificação das simulações realizadas

Nome da Simulação	Caso_0003	Caso_0009	Caso_0027	Caso_0081	Caso_0243	Caso_0729
Número de volumes de controle	03	09	27	81	243	729
Incremento de tempo $\Delta t (s)$	0,05	0,05	0,05	0,01	0,005	0,001
Memória computacional (MB)	1,5	1,6	2,2	3,3	16,5	122,9
Número de interações externas	500	1000	7000	15000	35000	80000
Tempo de processamento	0,05s	0,22s	9,55s	5min 54s	3h 35min	1dia 15h
Tamanho dos volumes – h	0,3333	0,1111	0,0370	0,012345	0,00411	0,001371

Tabela A.3: Solução e erro numérico para a derivada com aproximação UDS

Nome da simulação	h (m)	Solução numérica-UDS	Erro numérico-UDS	Número de algarismos significativos	Resíduo
Caso_0003	0,3333	3,1978735145322	1,80212648546773	16	1,21E-14
Caso_0009	0,1111	4,6358152040216	0,36418479597834	15	1,95E-14
Caso_0027	0,0370	4,9598002084924	0,04019979150752	15	1,28E-13
Caso_0081	0,0123	4,9956439497658	0,00435605023420	15	1,26E-12
Caso_0243	0,0041	4,9995209158117	0,00047908418824	15	1,13E-11
Caso_0729	0,0014	4,99994695948399	0,00005304051601	15	1,03E-10

Tabela A.4: Solução e erro numérico com aproximação UDS-2

Nome da simulação	h (m)	Solução numérica-UDS-2	Erro numérico-UDS-2	Número de algarismos significativos	Resíduo
Caso_0003	0,3333	3,6369977351453	1,63300226942927	16	1,21E-14
Caso_0009	0,1111	4,9796233499581	0,02037665004190	15	1,95E-14
Caso_0027	0,0370	5,1020801144271	-0,10208011442715	15	1,28E-13
Caso_0081	0,0123	5,0446050870794	-0,04460508707941	15	1,26E-12
Caso_0243	0,0041	5,0159436139407	-0,01594361394070	15	1,13E-11
Caso_0729	0,0014	5,00543000368923	-0,00543000368922	15	1,03E-10

Tabela A.5: Ordens práticas da solução numérica para a aproximação com UDS

Nome da simulação	h (m)	Razão de refino	Ordem efetiva p_E	Ordem aparente p_u
Caso_0027	0,0370	3	2,00598485340966	1,356502899956210000
Caso_0081	0,0123	3	2,02282105795104	2,003917382016230000
Caso_0243	0,0041	3	2,00930273457161	2,024477691512250000
Caso_0729	0,0729	3	2,00327293667179	2,010050628949680000

Pode-se observar na tabela A.5 que tanto a ordem aparente quanto a ordem efetiva obtidas com UDS não estão tendendo à ordem assintótica ($p_L = 1$), mas sim, ao valor 2.

Tabela A.6: Ordens práticas da solução numérica para a aproximação com UDS-2

Nome da simulação	h (m)	Razão de refino	Ordem efetiva p_E	Ordem aparente p_u
Caso 0027	0,0370	3	-----	2,179681033398010000
Caso 0081	0,0123	3	0,75359618356086	-----
Caso 0243	0,0041	3	0,93644459837668	0,633341472741436000
Caso 0729	0,0014	3	0,98043556121938	0,912863618682387000

Já pela análise da tabela A.6, tem-se que as ordens aparente e efetiva obtidas com UDS-2, também não estão tendendo à ordem assintótica ($p_L = 2$), nota-se que a ordem aparente oscila e depois se aproxima de 1. Estas mesmas observações podem ser feitas tendo como base as figuras A.1 e A.2, que retratam o comportamento das ordens assintótica, aparente e efetiva. Os valores a que as ordens aparentes estão tendendo serão chamadas de $p_L^{prático}$, para que possam ser feitas as análises de erros com base nestes valores também. Os valores de $p_L^{prático}$ podem ser observados na tabela A.7.

Tabela A.7: Ordem prática para cada uma das aproximações utilizadas

Aproximações numéricas	Ordem assintótica prática - $p_L^{prático}$
UDS	2
UDS-2	1

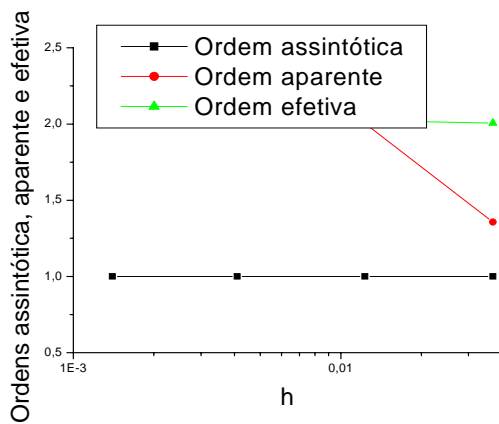


Figura A.1: Ordens aparente, assintótica e efetiva por h para UDS

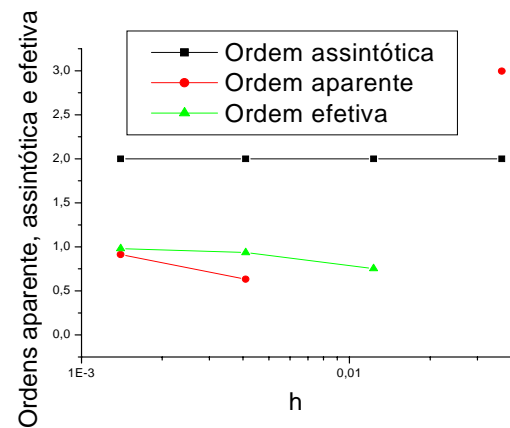


Figura A.2: Ordens aparente, assintótica e efetiva por h para UDS-2

Na figura A.2, as ordens aparente e efetiva não puderam ser obtidas para dois pontos, o que também pode ser comprovado pela tabela A.5. No gráfico, pode-se notar a descontinuidade existente. As ordens aparente e efetiva não puderam ser obtidas nestes casos porque a diferença entre os resultados obtidos com as três últimas malhas sofre uma inversão de sinal, isto é, o valor da variável passa por um ponto de mínimo. Uma consequência imediata desta inversão no sinal é a impossibilidade de cálculo da ordem aparente e, conseqüentemente, da Extrapolação de Richardson e do GCI. Isto porque no cálculo da ordem aparente é feito o logaritmo da divisão da diferença entre as malhas fina e grossa e a diferença entre a malha grossa e supergrossa. Caso haja uma mudança no sinal, a divisão fica negativa gerando como resultado, uma ordem aparente complexa a qual não pode ser usada no cálculo do GCI e da Extrapolação de Richardson. Isto ocorre também para a ordem efetiva.

Para a ordem efetiva foi feita mais uma análise, onde foram substituídos os valores da solução analítica, que existe para o Problema de Shih, nas derivadas aqui analisadas com as duas aproximações utilizadas. Os resultados desta análise podem ser observados na tabela A.8:

Tabela A.8: Análise para a ordem efetiva

Malhas	Ordem efetiva – UDS	Ordem efetiva – UDS-2
243	0,9949779777322	1,9996299464421
729	0,9983321310859	1,9999588922231
2187	0,9994447222134	1,9999954325840
6561	0,9998149797979	1,9999994925106
19683	0,9999383162645	1,9999999436125

Conforme se pode observar na tabela A.8, a ordem efetiva para a aproximação UDS se aproxima de um, enquanto para a aproximação UDS-2 se aproxima de dois, conforme é esperado. Os resultados aqui obtidos numericamente não condizem com os resultados obtidos a partir das soluções analíticas, isto pode estar ocorrendo devido à aplicação das condições de contorno, feitas a partir de volumes fictícios e também devido aos outros erros inerentes na solução numérica também podem estar interferindo nestes resultados.

A4. Verificação da solução numérica

Tabela A.8: Estimativa do erro da solução numérica para as aproximações com UDS e UDS-2

	UDS	UDS-2
h (m)	0,0014	0,0014
Erro verdadeiro	0,00005304051601	-0,00543000368922
$\frac{U_{Ri}(\phi_1, p_L)}{E}$	4,0162097231069	0,2420258542441
$\frac{U_{Ri}(\phi_1, p_U)}{E}$	0,9916657366447	1,1217036487957
$\frac{U_{Ri}(\phi_1, p_L^{prático})}{E}$	1,0040524307767	0,9681034169767
$\frac{U_{GCI}(\phi_1, p)}{E}$	12,0486291693208	3,3651109463872

Pela tabela A.8 observa-se que a estimativa obtida com o estimador de Richardson baseado na ordem aparente com UDS-2 é confiável, pois $U/E \geq 1$, e a estimativa obtida com

UDS é acurada, pois $U/E \approx 1$. Estas estimativas foram calculadas tendo com base a malha mais fina.

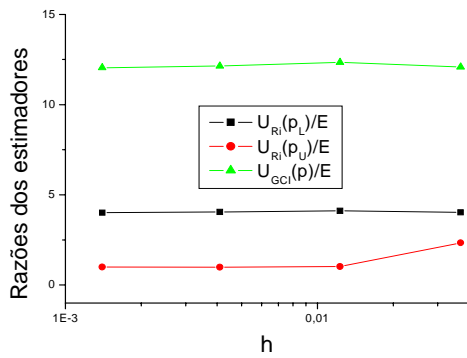


Figura A.3: Razões dos estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica) e GCI pelo erro numérico para UDS

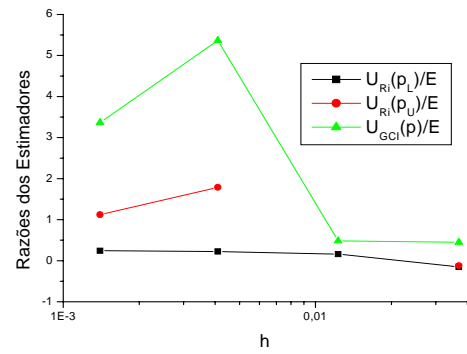


Figura A.4: Razões dos estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica) e GCI pelo erro numérico para UDS-2

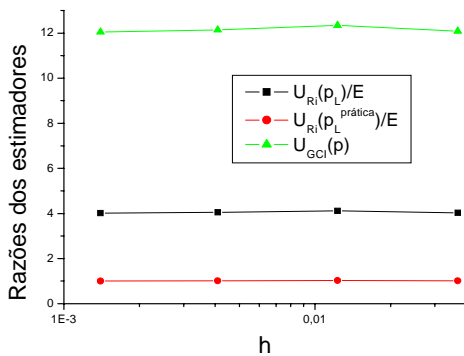


Figura A.5: Razões dos estimadores de Richardson (ordens aparente prática e assintótica) e GCI pelo erro numérico para UDS

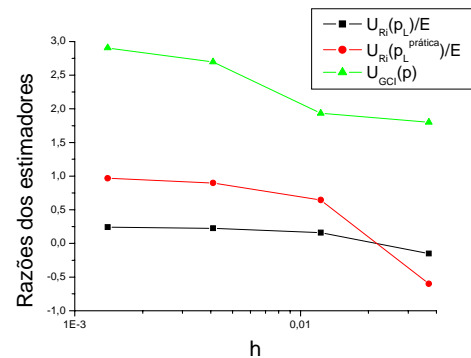


Figura A.6: Razões dos estimadores de Richardson (ordens aparente prática e assintótica) e GCI pelo erro numérico para UDS-2

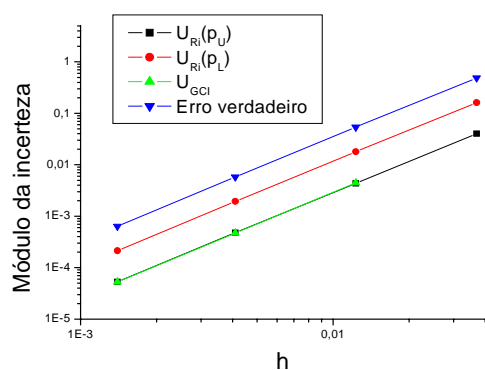


Figura A.7: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI e erro verdadeiro para UDS

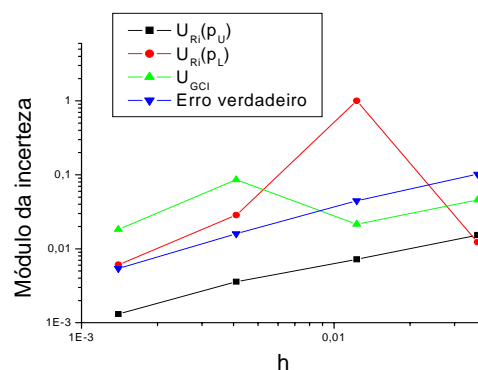


Figura A.8: Estimadores de Richardson (ordens aparente e assintótica), GCI e erro verdadeiro para UDS-2

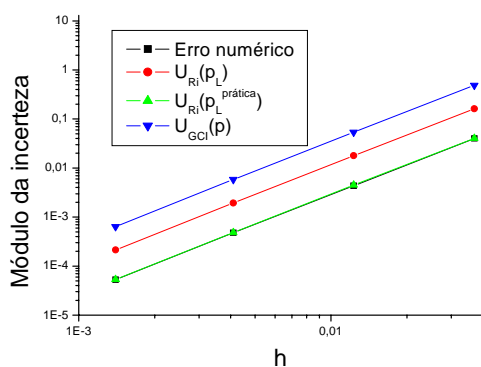


Figura A.9: Estimadores de Richardson (ordens aparente prática e assintótica), GCI e erro verdadeiro para UDS

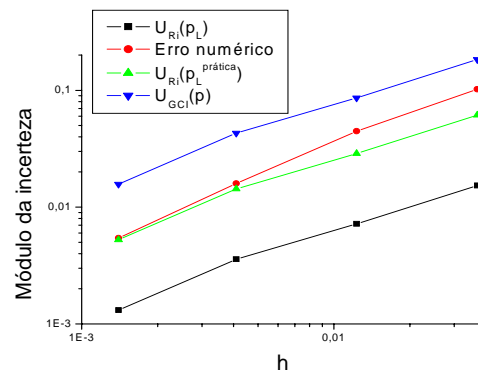


Figura A.10: Estimadores de Richardson (ordens aparente prática e assintótica), GCI e erro verdadeiro para UDS-2

Na figura A.8, o estimador de Richardson que foi obtido para UDS-2, não apresenta ordem aparente em um de seus pontos, pelos motivos já descritos acima. Nestes casos, para a construção desta figura este valor não será representado, surgindo uma descontinuidade.

Na tabela A.9 pode ser analisada a solução numérica para cada uma das aproximações com seu erro estimado obtido com o estimador Convergente (MARCHI e SILVA, 2002) para os dois valores de p_L .

Tabela A.9: Solução numérica com seu erro estimado com estimador Convergente

Aproximação numérica	$\phi = \phi_C \pm U_C$	Envolve Φ ?
UDS ($p_L^{\text{teórico}}$)	$5,0000797696332 \pm 0,0000802116868$	Sim
UDS ($p_L^{\text{prático}}$)	$4,9999998864447 \pm 0,0000003284983$	Não
UDS-2 ($p_L^{\text{teórico}}$)	$5,0017274755729 \pm 0,0023883268348$	Não
UDS-2 ($p_L^{\text{prático}}$)	$4,9997561736507 \pm 0,0004170249127$	Sim

Apresenta-se na última coluna da tabela A.9 se a solução analítica pertence ou não ao intervalo obtido com o estimador Convergente.

Na tabela A.10 podem ser observadas as estimativas das soluções numéricas para cada uma das aproximações com o estimador GCI, sendo que tomar $U_{GCI}(\phi_1, p)$ significa tomar o valor do estimador GCI na malha mais fina, sendo que p é a menor entre as ordens práticas envolvidas na resolução deste problema (ordem assintótica teórica e aparente, ordem assintótica prática e aparente).

Tabela A.10: Solução numérica com seu erro estimado com estimador GCI

Aproximação numérica	$\phi = \phi_1 \pm U_{GCI}(\phi_1, p)$	Envolve Φ ?
UDS ($p_L^{\text{teórico}}$)	$4,9999469594839 \pm 0,0006390655083$	Sim
UDS ($p_L^{\text{prático}}$)	$4,9999469594839 \pm 0,0006390655083$	Sim
UDS-2 ($p_L^{\text{teórico}}$)	$5,0054300036892 \pm 0,0182725648535$	Sim
UDS-2 ($p_L^{\text{prático}}$)	$5,0054300036892 \pm 0,0157704153772$	Sim

Apresenta-se também na última coluna da tabela A.10 se a solução analítica pertence ou não ao intervalo obtido com o estimador GCI.

A5. Conclusão

Apresentou-se um estudo da derivada de uma função em especial, representada na Eq. (A1), onde se pode observar que as ordens aparentes e efetivas obtidas com base nesta derivada não tendem ao valor teórico. Este fato pode comprometer toda uma análise que tenha

como base o cálculo destas ordens e a obtenção dos estimadores de erros, como no foco deste trabalho. Com base nestes resultados, pode-se fazer uma análise da variável de interesse força sobre a placa, que depende desta derivada em questão, com base nas duas aproximações numéricas apresentadas aqui. Podem-se também comparar os resultados obtidos com esta variável de interesse com os resultados aqui descritos.

Para esta variável de interesse tem-se que $|E_{UDS}| < |E_{UDS-2}|$, isto pode estar ocorrendo devido a aproximação UDS que possui ordem 1, que parece se comportar como CDS, que possui ordem 2. Isto pode estar ocorrendo devido ao uso de volumes fictícios para a aplicação das condições de contorno. A ordem aparente de aproximações de problemas unidimensionais pode apresentar um comportamento diferente em problemas bidimensionais.

APÊNDICE B – Uso do Matlab

Neste trabalho puderam ser analisadas figuras que ilustraram as iso- ψ e os vetores na cavidade quadrada. Para a obtenção destas figuras foi utilizado o software Matlab, versão 6.1. Para a construção destas figuras notou-se que o número máximo de nós que pode ser utilizado é limitado pela capacidade do software, sendo então feitos gráficos na malha com 128 nós. Para tanto, foi criada uma matriz com os valores da função de corrente e outra com os valores da velocidade, e em seguida foram dados os seguintes comandos:

- ✓ `contour` – gera linhas de curva de nível;
- ✓ `contourf` – gera áreas de curva de nível
- ✓ `alpha` – configura a intensidade de transparência;
- ✓ `quiver` – gera os campos de velocidades.

APÊNDICE C – Tabelas

Neste apêndice estão concentradas as tabelas com os valores que deram origem aos gráficos das razões dos estimadores, dos estimadores de erros e também dos erros numéricos conforme o refinamento da malha. As tabelas estão ordenadas conforme os gráficos com seus dados que apareceram no texto. Primeiramente são mostradas as tabelas do problema de Shih.

Tabela C.1: Razões dos estimadores de Richardson e GCI pelo erro numérico para a força da placa com UDS

Nome da simulação	$\frac{U_{Ri}(p_L)}{E}$	$\frac{U_{Ri}(p_U)}{E}$	$\frac{U_{GCI}(p)}{E}$
Caso_0008	2,1549553518610	18,2205013975515	54,6615041926545
Caso_0016	4,4329124954458	2,7012138543273	13,2987374900000
Caso_0032	13,0689492468110	3,4646286845876	39,2068477404331
Caso_0064	-2,9818402769828	-0,3879521922360	8,9455208309484
Caso_0128	0,5393990208680	Inexistente	1,6181970626041
Caso_0256	1,4482280118808	-16,4297860619690	4,3446840356424
Caso_0512	1,8699913309443	1,5294137098232	5,6099739928328
Caso_1024	2,1137113073022	1,2046087165514	6,3411339219067

Tabela C.2: Razões dos estimadores de Richardson e GCI pelo erro numérico para a força da placa com UDS-2

Nome da simulação	$\frac{U_{Ri}(p_L)}{E}$	$\frac{U_{Ri}(p_U)}{E}$	$\frac{U_{GCI}(p)}{E}$
Caso_0008	2,9269042813393	57,8468966648803	173,5406899900000
Caso_0016	-0,6213346657886	-0,6071594972058	1,8640039973659
Caso_0032	0,0766798200529	Inexistente	0,2300394601587
Caso_0064	0,2673644079662	-1,6600929582571	-4,9802788747715
Caso_0128	0,3292910575447	1,6088282862660	4,8264848587981
Caso_0256	0,3460546846619	1,1050987356919	3,3152962070757
Caso_0512	0,3472290965144	1,0066733630529	3,0200200891588
Caso_1024	0,3440777628324	0,9822878108731	2,9468634326192

Tabela C.3: Razões dos estimadores de Richardson (ordens assintótica-prática e assintótica) e GCI pelo erro numérico para a força da placa com UDS

Nome da simulação	$\frac{U_{Ri}(p_L)}{E}$	$\frac{U_{Ri}(p_L^{prático})}{E}$	$\frac{U_{GCI}(p)}{E}$
Caso_0008	2,1549553518610	0,7183184506203	6,4648660555829
Caso_0016	4,4329124954458	1,4776374984819	13,2987374863373
Caso_0032	13,0689492468110	4,3563164156037	39,2068477404331
Caso_0064	2,9818402769828	0,9939467589943	8,9455208309484
Caso_0128	0,5393990208680	0,1797996736227	1,6181970626041
Caso_0256	1,4482280118808	0,4827426706269	4,3446840356424
Caso_0512	1,8699913309443	0,6233304436481	5,6099739928328
Caso_1024	2,1137113073022	0,7045704357674	6,3411339219067

Tabela C.4: Razões dos estimadores de Richardson (ordens assintótica-prática e assintótica) e GCI pelo erro numérico para a força da placa com UDS-2

Nome da simulação	$\frac{U_{Ri}(p_L)}{E}$	$\frac{U_{Ri}(p_L^{prático})}{E}$	$\frac{U_{GCI}(p)}{E}$
Caso_0008	2,9269042813393	57,8468966648803	173,5406899946410
Caso_0016	-0,6213346657886	-1,8640039973659	5,5920119920978
Caso_0032	0,0766798200529	0,2300394601587	0,6901183804761
Caso_0064	0,2673644079662	-1,6600929582571	-4,9802788747715
Caso_0128	0,3292910575447	1,6088282862660	4,8264848587981
Caso_0256	0,3460546846619	1,1050987356476	3,3152962069428
Caso_0512	0,3472290965144	1,0416872895431	3,1250618686293
Caso_1024	0,3440777628324	1,0322332884972	3,0966998654915

Tabela C.5: Razões dos estimadores de Richardson e GCI para o fluxo de massa total

Nome da simulação	$\frac{U_{Ri}(p_L)}{E}$	$\frac{U_{Ri}(p_U)}{E}$	$\frac{U_{GCI}(p)}{E}$
Caso_0008	-0,1407408797472	-0,1921629665346	0,5764888996039
Caso_0016	1,2601188104753	Inexistente	3,7803564300000
Caso_0032	0,5562007782557	0,3306822221417	1,6686023347670
Caso_0064	1,5838029837370	4,6592358969187	13,9777076907562
Caso_0128	0,3645945063400	0,1351113794498	1,0937835190200
Caso_0256	3,2163541762219	46,5823296071165	139,7469888213500
Caso_0512	0,9892658652377	0,2493881314630	2,9677975957132
Caso_1024	0,9608426225910	0,9616827565195	2,8850482695584

Tabela C.6: Razões dos estimadores de Richardson e GCI pelo erro numérico para o fluxo de massa com v_n

Nome da simulação	$\frac{U_{Ri}(p_L)}{E}$	$\frac{U_{Ri}(p_U)}{E}$	$\frac{U_{GCI}(p)}{E}$
Caso_0008	1,6098985294886	2,3471094984730	7,0413284954191
Caso_0016	1,4093989866703	0,8504094262838	4,2281969600109
Caso_0032	1,1405250664713	0,7664917390536	3,4215751994138
Caso_0064	1,0376461580552	0,8841762584582	3,1129384741657
Caso_0128	1,0098327832743	0,9646606115027	3,0294983498229
Caso_0256	1,0026577129805	0,9905549797070	3,0079731389416
Caso_0512	1,0007575019169	0,9974751729796	3,0022725057507
Caso_1024	1,0002331801345	0,9993015961111	3,0006995404036

Tabela C.7: Razões do estimador de Richardson e GCI pelo erro numérico para a velocidade u central

Nome da simulação	$\frac{U_{Ri}(p_L)}{E}$	$\frac{U_{Ri}(p_U)}{E}$	$\frac{U_{GCI}(p)}{E}$
Caso_0008	0,7776673198489	1,0545272955923	3,1635818867769
Caso_0016	0,8771580655389	1,1855741059943	3,5567223179829
Caso_0032	0,9615969578561	1,1341088700455	3,4023266101365
Caso_0064	0,9899888438464	1,0398635133160	3,1195905399479
Caso_0128	0,9975202716586	1,0101756234401	3,0305268703201
Caso_0256	0,9993954762229	1,0025084399938	3,0075253199813
Caso_0512	0,9998565027950	1,0006151906020	3,0018455718059
Caso_1024	0,9999680968162	1,0001488201063	3,0004464600000

Tabela C.8: Razões do estimador de Richardson e GCI pelo erro numérico para a velocidade v central

Nome da simulação	$\frac{U_{Ri}(p_L)}{E}$	$\frac{U_{Ri}(p_U)}{E}$	$\frac{U_{GCI}(p)}{E}$
Caso_0008	-0,4871976622316	Inexistente	1,4615929866949
Caso_0016	0,2166593015597	Inexistente	0,6499779046792
Caso_0032	0,7819846058856	-32,1545404564067	-96,4636213692201
Caso_0064	0,9446572615674	1,3037242091485	3,9111726300000
Caso_0128	0,9860738002261	1,0595461469775	3,1786384409324
Caso_0256	0,9965074769533	1,0141705565573	3,0425116696720
Caso_0512	0,9991239978261	1,0035047590833	3,0105142772501
Caso_1024	0,9997797790192	1,0008753813045	3,0026261439135

Tabela C.9: Estimadores de Richardson, GCI e erros verdadeiros para a força da placa com UDS

Nome da simulação	E	$U_{Ri}(p_L)$	$U_{Ri}(p_U)$	$U_{GCI}(p)$
Caso_0008	0,2586721583015	0,5574269519093	4,7131364218407	14,1394092655221
Caso_0016	0,0476120604774	0,2110600978241	0,1286103573946	0,6331802934724
Caso_0032	0,0033841944869	0,0442278659905	0,0117249772935	0,1326835979715
Caso_0064	0,0017076020334	0,0050917965203	0,0006624679500	0,0152753895609
Caso_0128	0,0011092653758	0,000598336657	Inexistente	0,0017950099728
Caso_0256	0,0004530890793	0,000656176296	0,0074441566390	0,0223324699198
Caso_0512	0,0001578712362	0,000295217843	0,0002414504330	0,0008856535292
Caso_1024	0,0000507019503	0,000107169285	0,0000610760110	0,000321507857

Tabela C.10: Estimadores de Richardson, GCI e erros verdadeiros para a força da placa com UDS-2

Nome da simulação	E	$U_{Ri}(p_L)$	$U_{Ri}(p_U)$	$U_{GCI}(p)$
Caso_0008	0,0689299634783	0,2017514052171	3,9873844744420	11,9621534233261
Caso_0016	0,0797796812149	0,0495698815644	0,0484389911337	0,1487096446932
Caso_0032	0,0648594486592	0,0049734108519	Inexistente	0,0149202325557
Caso_0064	0,0359911728200	0,0096227586130	0,0597486925580	0,1792460776739
Caso_0128	0,0181053667384	0,0059619353605	0,0291284261420	0,0873852784261
Caso_0256	0,0088831743956	0,0030740641143	0,0098167847935	0,0294503543806
Caso_0512	0,0043508986127	0,0015107585943	0,0043799337387	0,0131398012162
Caso_1024	0,0021409444660	0,000736651380	0,0021030236527	0,0063090709582

Tabela C.11: Estimadores de Richardson (ordens assintótica-prática e assintótica), GCI e erro verdadeiro para a força da placa com UDS

Nome da simulação	E	$U_{Ri}(p_L)$	$U_{Ri}(p_L^{prático})$	$U_{GCI}(p)$
Caso_0008	0,2586721583015	0,5574269519093	0,1858089839698	1,6722808557279
Caso_0016	0,0476120604774	0,2110600978241	0,0703533659414	0,6331802934724
Caso_0032	0,0033841944869	0,0442278659905	0,0147426219968	0,1326835979715
Caso_0064	0,0017076020334	0,0050917965203	0,0016972655068	0,0152753895609
Caso_0128	0,0011092653758	0,000598336657	0,0001994455525	0,0017950099728
Caso_0256	0,0004530890793	0,000656176296	0,0002187254323	0,0019685288896
Caso_0512	0,0001578712362	0,000295217843	0,0000984059472	0,0008856535292
Caso_1024	0,0000507019500	0,000107169285	0,0000357230958	0,0003215078577

Tabela C.12: Estimadores de Richardson (ordens assintótica-prática e assintótica), GCI erro verdadeiro para a força da placa com UDS-2

Nome da simulação	E	$U_{Ri}(p_L)$	$U_{Ri}(p_L^{prático})$	$U_{GCI}(p)$
Caso 0008	0,0689299634783	0,2017514052171	0,6052542156514	11,9621534233261
Caso 0016	0,0797796812149	0,0495698815644	0,1487096446932	0,4461289340796
Caso 0032	0,0648594486592	0,0049734108519	0,0149202325557	0,0447606976672
Caso 0064	0,0359911728200	0,0096227586130	0,0288682758391	0,1792460776739
Caso 0128	0,0181053667384	0,0059619353605	0,0178858060816	0,0873852784261
Caso 0256	0,0088831743956	0,0030740641143	0,0092221923428	0,0294503543806
Caso 0512	0,0043508986127	0,0015107585943	0,0045322757829	0,0135968273488
Caso 1024	0,0021409444660	0,000736651380	0,0022099541467	0,0066298624400

Tabela C.13: Estimadores de Richardson, GCI e erro verdadeiro para o fluxo de massa total

Nome da simulação	E	$U_{Ri}(p_L)$	$U_{Ri}(p_U)$	$U_{GCI}(p)$
Caso 0008	0,0036888178124	0,00051916746414	0,00070885417383	0,00212656252150
Caso 0016	0,00077166166692	0,00097238538181	Inexistente	0,00291715614555
Caso 0032	0,00028916322858	0,00016083281278	0,00009562113898	0,00048249843834
Caso 0064	0,00005027693753	0,00007962876368	0,00023425211215	0,00007027563364
Caso 0128	0,00002401248127	0,00000875481875	0,00000324435946	0,00002626445626
Caso 0256	0,00000225489156	0,00000725252990	0,00010503810210	0,00031511430632
Caso 0512	0,00000056829803	0,00000056219784	0,00000014172678	0,00000168659353
Caso 1024	0,00000014637320	0,00000014064167	0,00000014076458	0,00000004222937

Tabela C.14: Estimadores de Richardson, GCI e erro verdadeiro para o fluxo de massa com v_n

Nome da simulação	E	$U_{Ri}(p_L)$	$U_{Ri}(p_U)$	$U_{GCI}(p)$
Caso 0008	0,0016554561096	0,0026651163564	0,0038855367591	0,0116566102772
Caso 0016	0,0003166399663	0,0004462720477	0,0002692736121	0,0013388161432
Caso 0032	0,0000716124801	0,0000816758287	0,0000548903744	0,0002450274861
Caso 0064	0,0000174115126	0,0000180669891	0,0000153948460	0,0000542009675
Caso 0128	0,0000004321012	0,0000043635000	0,0000041683105	0,0000130905001
Caso 0256	0,0000001078104	0,0000010809694	0,0000001067921	0,0000032429083
Caso 0512	0,0000000269372	0,0000002695770	0,0000002686928	0,0000008087311
Caso 1024	0,0000000673314	0,000000067344	0,0000000672845	0,0000002020415

Tabela C.15: Estimadores de Richardson, GCI e erro verdadeiro para a velocidade u central

Nome da simulação	E	$U_{Ri}(p_L)$	$U_{Ri}(p_U)$	$U_{GCI}(p)$
Caso 0008	0,0230894374239	0,0179559009183	0,0243484420034	0,0730453260101
Caso 0016	0,0063581444267	0,0055770976657	0,0075380513945	0,0226141541834
Caso 0032	0,0016366761130	0,0015738227712	0,0018561688971	0,0055685066914
Caso 0064	0,0004122644611	0,0004081372172	0,0004286987710	0,0012860963130
Caso 0128	0,0001032581544	0,0001030021022	0,0001043088705	0,0003129266115
Caso 0256	0,0000258262480	0,0000258106354	0,0000258910316	0,0000776730949
Caso 0512	0,0000064572569	0,0000006456330	0,0000064612294	0,0000193836882
Caso 1024	0,0000016143528	0,0000016143013	0,0000016145931	0,0000048437793

Tabela C.16: Estimadores de Richardson, GCI e erro verdadeiro para a velocidade v central

Nome da simulação	E	$U_{Ri}(p_L)$	$U_{Ri}(p_U)$	$U_{GCI}(p)$
Caso_0008	0,00015009012952	0,0000731235602	Inexistente	0,0002193706806
Caso_0016	0,00009096493298	0,0000197083988	Inexistente	0,0000591251965
Caso_0032	0,00000027186547	0,0000212594617	0,0008741709470	0,0026225128413
Caso_0064	0,00000709096185	0,0000066985286	0,0000092446586	0,0000277339759
Caso_0128	0,00000179145154	0,0000017665034	0,0000018981255	0,0000056943767
Caso_0256	0,00000004490390	0,0000004474708	0,0000004554022	0,0000013662066
Caso_0512	0,00000001123333	0,0000001122351	0,0000000112727	0,0000003381818
Caso_1024	0,00000002808803	0,0000000280818	0,0000000281126	0,0000000843378

As tabelas que estão na sequência dizem respeito ao problema de Ghia com $Re=100$.

Tabela C.17: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a força da placa com UDS

Nome da simulação	$\frac{U_{Ri}(p_U)}{U_{Ri}(p_L)}$	$\frac{U_{GCI}(p)}{U_{Ri}(p_L)}$
ST_0008 Re10E2	-5,05010211570307	3,00000000000000
ST_0016 Re10E2	-142,6648527513030	3,00000000000000
ST_0032 Re10E2	13,9663169051715	41,8989507155144
ST_0064 Re10E2	32,2554131641892	96,7662394925676
ST_0128 Re10E2	101,0015459958700	303,0046379876100
ST_0256 Re10E2	420,1556818417620	1260,4670455252799
ST_0512 Re10E2	5114,4454833773898	15343,3364501321990
ST_1024 Re10E2	-4119,3659799482100	3,00000000000000

Tabela C.18: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a força da placa com UDS-2

Nome da simulação	$\frac{U_{Ri}(p_U)}{U_{Ri}(p_L)}$	$\frac{U_{GCI}(p)}{U_{Ri}(p_L)}$
ST_0008 Re10E2	-21,72548883976960	3,00000000000000
ST_0016 Re10E2	32,7756358774807	98,3269076324422
ST_0032 Re10E2	20,7802272819137	62,3406818457410
ST_0064 Re10E2	78,9716778513822	236,9150335541470
ST_0128 Re10E2	4693,7090579627802	14081,127173888301
ST_0256 Re10E2	-555,6168049109070	3,00000000000000
ST_0512 Re10E2	-676,0425485694960	3,00000000000000
ST_1024 Re10E2	-1099,9623098170500	3,00000000000000

Tabela C.19: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para o fluxo de massa total

Nome da simulação	$\frac{U_{Ri}(p_U)}{U_{Ri}(p_L)}$	$\frac{U_{GCI}(p)}{U_{Ri}(p_L)}$
ST 0008 Re10E2	11,5050610889960	34,5151832669880
ST 0016 Re10E2	2,1578868109810	6,4736604300000
ST 0032 Re10E2	2,2887732890947	6,8663198672841
ST 0064 Re10E2	1,3078265790073	3,9234797370219
ST 0128 Re10E2	0,9842070447559	3,0000000000000
ST 0256 Re10E2	1,0409934369843	3,1229803109529
ST 0512 Re10E2	0,9017904833939	3,0000000000000
ST 1024 Re10E2	1,1725049513310	3,5175148539929

Tabela C.20: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para o fluxo de massa com v_n

Nome da simulação	$\frac{U_{Ri}(p_U)}{U_{Ri}(p_L)}$	$\frac{U_{GCI}(p)}{U_{Ri}(p_L)}$
ST 0008 Re10E2	5,5171959452926	16,5515878358778
ST 0016 Re10E2	2,4962180596922	7,4886541790767
ST 0032 Re10E2	18,1030447048382	54,3091341145146
ST 0064 Re10E2	1,1419256516042	3,4257769548127
ST 0128 Re10E2	0,9322137197123	2,7966411591370
ST 0256 Re10E2	0,9541208337728	2,8623625013184
ST 0512 Re10E2	0,9852170324417	2,9556510973251
ST 1024 Re10E2	1,0028259570360	3,0084778711079

Tabela C.21: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a velocidade u central

Nome da simulação	$\frac{U_{Ri}(p_U)}{U_{Ri}(p_L)}$	$\frac{U_{GCI}(p)}{U_{Ri}(p_L)}$
ST 0008 Re10E2	11,1185492713039	33,3556478139117
ST 0016 Re10E2	4,2708859282656	12,8126577847969
ST 0032 Re10E2	2,3309478338256	6,9928435014769
ST 0064 Re10E2	1,2116213668213	3,6348641004639
ST 0128 Re10E2	1,0212386032156	3,0637158096468
ST 0256 Re10E2	0,9998714775232	2,9996144325697
ST 0512 Re10E2	0,9986207495811	2,9958622487432
ST 1024 Re10E2	0,9991359944518	2,9974079833555

Tabela C.22: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a velocidade v central

Nome da simulação	$\frac{U_{Ri}(p_U)}{U_{Ri}(p_L)}$	$\frac{U_{GCI}(p)}{U_{Ri}(p_L)}$
ST_0008_Re10E2	20,9601493415536	62,8804480246606
ST_0016_Re10E2	Inexistente	3,0000000000000
ST_0032_Re10E2	Inexistente	3,0000000000000
ST_0064_Re10E2	0,5892083645880	1,7676250937640
ST_0128_Re10E2	0,1476441279264	0,4429323837793
ST_0256_Re10E2	Inexistente	3,0000000000000
ST_0512_Re10E2	2,8991377235297	8,6974131705891
ST_1024_Re10E2	1,2568936751114	3,7706810253341

Tabela C.23: Estimadores de Richardson e GCI para a força da placa com UDS

Nome da simulação	$U_{Ri}(p_L)$	$U_{Ri}(p_U)$	$U_{GCI}(p)$
ST_0008_Re10E2	0,0329421355344	-0,16636114835796	0,0988264066032
ST_0016_Re10E2	0,0331746712332	-4,73285958655953	0,0995240136996
ST_0032_Re10E2	0,0309580489711	0,4323699226968	1,2971097680904
ST_0064_Re10E2	0,0300271313843	0,9685375289371	2,9056125868113
ST_0128_Re10E2	0,0297327522052	3,0030539394338	9,0091618183013
ST_0256_Re10E2	0,0296621541971	12,4627226215961	37,3881678647883
ST_0512_Re10E2	0,0296563556495	151,6758142051720	455,0274426155170
ST_1024_Re10E2	0,0296635566501	-122,195046108569	-366,585138325707

Tabela C.24: Estimadores de Richardson e GCI para a força da placa com UDS-2

Nome da simulação	$U_{Ri}(p_L)$	$U_{Ri}(p_U)$	$U_{GCI}(p)$
ST_0008_Re10E2	0,0126351462860	-0,27450472962593	0,0379054388581
ST_0016_Re10E2	0,0115756140673	0,3793981117277	1,1381943351830
ST_0032_Re10E2	0,0101152898328	0,2101980217476	0,6305940652428
ST_0064_Re10E2	0,0097450903896	0,7695861388790	2,3087584166369
ST_0128_Re10E2	0,0097388657606	45,7114024349824	137,1342073049470
ST_0256_Re10E2	0,0097917353025	-0,00781080027945	0,0293752059074
ST_0512_Re10E2	0,0098353806945	-6,64913583087925	0,0295061420836
ST_1024_Re10E2	0,0098622787400	-0,00394013319729	0,0295868362200

Tabela C.25: Estimadores de Richardson e GCI para o fluxo de massa total

Nome da simulação	$U_{Ri}(p_L)$	$U_{Ri}(p_U)$	$U_{GCI}(p)$
ST_0008_Re10E2	0,0080929547559	0,0931099388568	0,2793298165704
ST_0016_Re10E2	0,0033858207769	0,0073062179988	0,0219186539965
ST_0032_Re10E2	0,0014652502069	0,0033536255353	0,0100608766059
ST_0064_Re10E2	0,0004448399048	0,0005817734509	0,0017453203528
ST_0128_Re10E2	0,0001098875041	0,0001081520557	0,0003296625124
ST_0256_Re10E2	0,0000283079327	0,0000294683722	0,0000884051167
ST_0512_Re10E2	0,0000065425923	0,0000059000474	0,0000196277769
ST_1024_Re10E2	0,0000018385171	0,0000021556704	0,0000064670113

Tabela C.26: Estimadores de Richardson e GCI para o fluxo de massa com v_n

Nome da simulação	$U_{Ri}(p_L)$	$U_{Ri}(p_U)$	$U_{GCI}(p)$
ST 0008 Re10E2	0,0032349279555	0,0178477313996	0,0535431941989
ST 0016 Re10E2	0,0014692076436	0,0036674626535	0,0110023879605
ST 0032 Re10E2	0,0012603457001	0,0228160945531	0,0684482836594
ST 0064 Re10E2	0,0003474763204	0,0003967921236	0,0011903763708
ST 0128 Re10E2	0,0000823765482	0,0000767925484	0,0002471296447
ST 0256 Re10E2	0,0000198772835	0,0000189653303	0,0000596318505
ST 0512 Re10E2	0,0000049140205	0,0000048413767	0,0000147420615
ST 1024 Re10E2	0,0000012311070	0,0000012345861	0,0000037037583

Tabela C.27: Estimadores de Richardson e GCI para a velocidade u central

Nome da simulação	$U_{Ri}(p_L)$	$U_{Ri}(p_U)$	$U_{GCI}(p)$
ST 0008 Re10E2	0,0216985018846	0,2412558623177	0,7237675869531
ST 0016 Re10E2	0,0127456031188	0,0544350170072	0,1633050510216
ST 0032 Re10E2	0,0055729931912	0,0129903564069	0,0389710692208
ST 0064 Re10E2	0,0016032679672	0,0019425537259	0,0058276611776
ST 0128 Re10E2	0,0004071678656	0,0004158155424	0,0012474466273
ST 0256 Re10E2	0,0001017821541	0,0001017690728	0,0003053464625
ST 0512 Re10E2	0,0000254192076	0,0000253841481	0,0000762576229
ST 1024 Re10E2	0,0000063506830	0,0000063451960	0,0000190520492

Tabela C.28: Estimadores de Richardson e GCI para a velocidade v central

Nome da simulação	$U_{Ri}(p_L)$	$U_{Ri}(p_U)$	$U_{GCI}(p)$
ST 0008 Re10E2	0,0091099254122	0,1909453971293	0,5728361913878
ST 0016 Re10E2	0,0006511491661	Inexistente	0,0019534474986
ST 0032 Re10E2	0,0002629488017	Inexistente	0,0007888464053
ST 0064 Re10E2	0,0000431659624	0,0000254337461	0,0001294978873
ST 0128 Re10E2	0,0000020247526	0,0000002989428	0,0000060742580
ST 0256 Re10E2	0,0000011145824	Inexistente	0,0000033437473
ST 0512 Re10E2	0,0000005477627	0,0000015880396	0,0000047641190
ST 1024 Re10E2	0,0000001617328	0,0000002032809	0,0000006098429

Neste momento serão apresentadas as tabelas correspondentes ao problema de Ghia com $Re=1000$:

Tabela C.29: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a força da placa com UDS

Nome da simulação	$\frac{U_{Ri}(p_U)}{U_{Ri}(p_L)}$	$\frac{U_{GCI}(p)}{U_{Ri}(p_L)}$
ST 0008 Re10E2	-2,5279183128392	3,0000000000000
ST 0016 Re10E2	-3,6817237926193	3,0000000000000
ST 0032 Re10E2	12,2115156323898	36,6345468971694
ST 0064 Re10E2	2,5944191907016	7,7832575721047
ST 0128 Re10E2	3,1744809506967	9,5234428520900
ST 0256 Re10E2	6,0791615190063	18,2374845570188
ST 0512 Re10E2	15,5449995897812	46,6349987693436
ST 1024 Re10E2	46,7236866218910	140,1710598656730

Tabela C.30: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a força da placa com UDS-2

Nome da simulação	$\frac{U_{Ri}(p_U)}{U_{Ri}(p_L)}$	$\frac{U_{GCI}(p)}{U_{Ri}(p_L)}$
ST_0008_Re10E2	-7,707832039350750	3,00000000000000
ST_0016_Re10E2	-12,992482412433500	3,00000000000000
ST_0032_Re10E2	11,2702190314454	33,8106570943363
ST_0064_Re10E2	3,7523447160136	11,2570341480408
ST_0128_Re10E2	7,0915847404970	21,2747542214910
ST_0256_Re10E2	39,5700219181123	118,7100657543370
ST_0512_Re10E2	-110,54584112153800	3,00000000000000
ST_1024_Re10E2	-76,15142951801310	3,00000000000000

Tabela C.31: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para o fluxo de massa total

Nome da simulação	$\frac{U_{Ri}(p_U)}{U_{Ri}(p_L)}$	$\frac{U_{GCI}(p)}{U_{Ri}(p_L)}$
ST_0008_Re10E2	-8,69334715351213	3,00000000000000
ST_0016_Re10E2	17,2542934310101	51,7628802930304
ST_0032_Re10E2	8,2424123201895	24,7272369605684
ST_0064_Re10E2	6,3353391624867	19,0060174874600
ST_0128_Re10E2	1,5657824689529	4,6973474068587
ST_0256_Re10E2	1,1080424035067	3,3241272105201
ST_0512_Re10E2	1,0164597297103	3,0493791891310
ST_1024_Re10E2	1,0037705290833	3,0113115872498

Tabela C.32: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para o fluxo de massa com v_n

Nome da simulação	$\frac{U_{Ri}(p_U)}{U_{Ri}(p_L)}$	$\frac{U_{GCI}(p)}{U_{Ri}(p_L)}$
ST_0008_Re10E2	-8,49032734950957	3,00000000000000
ST_0016_Re10E2	15,1162581476167	45,3487744428501
ST_0032_Re10E2	9,5240310900995	28,5720932702985
ST_0064_Re10E2	6,6574999312251	19,9724997936752
ST_0128_Re10E2	1,5529622418230	4,6588867254691
ST_0256_Re10E2	1,1041238791976	3,3123716375929
ST_0512_Re10E2	1,0227020906412	3,0681062719235
ST_1024_Re10E2	0,9981221909101	2,9943665727304

Tabela C.33: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a velocidade u central

Nome da simulação	$\frac{U_{Ri}(p_U)}{U_{Ri}(p_L)}$	$\frac{U_{GCI}(p)}{U_{Ri}(p_L)}$
ST_0008_Re10E2	Inexistente	3,00000000000000
ST_0016_Re10E2	Inexistente	3,00000000000000
ST_0032_Re10E2	46,8759888117330	140,6279664351990
ST_0064_Re10E2	0,4591350681365	1,3774052044095
ST_0128_Re10E2	1,9551274522123	5,8653823566369
ST_0256_Re10E2	1,0392453183231	3,1177359549693
ST_0512_Re10E2	0,9104493537951	2,7313480613854
ST_1024_Re10E2	0,9363693810035	2,8091081430106

Tabela C.34: Razões dos estimadores de Richardson (ordem aparente) e GCI pelo estimador de Richardson (ordem assintótica) para a velocidade v central

Nome da simulação	$\frac{U_{Ri}(p_U)}{U_{Ri}(p_L)}$	$\frac{U_{GCI}(p)}{U_{Ri}(p_L)}$
ST 0008 Re10E2	-27,4315913186300	82,2947739558900
ST 0016 Re10E2	1,4460129436015	4,3380388308045
ST 0032 Re10E2	Inexistente	3,0000000000000
ST 0064 Re10E2	0,3138502732420	0,9415508197259
ST 0128 Re10E2	0,4547899429432	1,3643698288297
ST 0256 Re10E2	1,0737641701433	3,2212925104299
ST 0512 Re10E2	0,7302701803686	2,1908105411057
ST 1024 Re10E2	0,7349510122363	2,2048530367089

Tabela C.35: Estimadores de Richardson e GCI para a força da placa com UDS

Nome da simulação	$U_{Ri}(p_L)$	$U_{Ri}(p_U)$	$U_{GCI}(p)$
ST 0008 Re10E2	0,0054288877104	-0,013723784661	0,0162866631313
ST 0016 Re10E2	0,0074532899719	-0,027440955022	0,0223598699158
ST 0032 Re10E2	0,0068891389555	0,0841268280493	0,2523804841478
ST 0064 Re10E2	0,0049725180524	0,0129007962613	0,0387023887838
ST 0128 Re10E2	0,0037813476743	0,0120038161600	0,0360114484801
ST 0256 Re10E2	0,0032471957604	0,0197402275112	0,0592206825337
ST 0512 Re10E2	0,0030509312792	0,0474267254839	0,1422801764518
ST 1024 Re10E2	0,0029870022013	0,1395637547939	0,4186912643816

Tabela C.36: Estimadores de Richardson e GCI para a força da placa com UDS-2

Nome da simulação	$U_{Ri}(p_L)$	$U_{Ri}(p_U)$	$U_{GCI}(p)$
ST 0008 Re10E2	0,0023208408468	-0,017888651436	0,0069625225403
ST 0016 Re10E2	0,0030176169083	-0,039206334608	0,0090528507249
ST 0032 Re10E2	0,0023832292577	0,0268595157365	0,0805785472095
ST 0064 Re10E2	0,0013243840604	0,0049695455310	0,0149086365930
ST 0128 Re10E2	0,0009306746199	0,0065999579334	0,0197998738001
ST 0256 Re10E2	0,0008650879997	0,0342315511116	0,1026946533349
ST 0512 Re10E2	0,0008892196999	-0,098299539677	0,0026676591000
ST 1024 Re10E2	0,0009256873277	-0,211477239879	0,0027770619832

Tabela C.37: Estimadores de Richardson e GCI para o fluxo de massa total

Nome da simulação	$U_{Ri}(p_L)$	$U_{Ri}(p_U)$	$U_{GCI}(p)$
ST 0008 Re10E2	0,0096397990422	-0,083802119564	0,0289193971267
ST 0016 Re10E2	0,0082119833929	0,1416919711120	0,4250759133361
ST 0032 Re10E2	0,0060206431826	0,0496246235433	0,1488738706300
ST 0064 Re10E2	0,0040858522517	0,0258852597826	0,0776557793477
ST 0128 Re10E2	0,0014011959330	0,0021939680275	0,0065819040824
ST 0256 Re10E2	0,0003779378000	0,0004187711085	0,0012563133258
ST 0512 Re10E2	0,0000956460611	0,0000972203698	0,0002916611094
ST 1024 Re10E2	0,0000239790704	0,0000240694847	0,0000722084543

Tabela C.38: Estimadores de Richardson e GCI para o fluxo de massa com v_n

Nome da simulação	$U_{Ri}(p_L)$	$U_{Ri}(p_U)$	$U_{GCI}(p)$
ST 0008 Re10E2	0,0094172608015	-0,079955626940	0,0282517824045
ST 0016 Re10E2	0,0078577896252	0,1187803764436	0,3563411293309
ST 0032 Re10E2	0,0059755387184	0,0569112165343	0,1707336496028
ST 0064 Re10E2	0,0041193009464	0,0274242457676	0,0822727373027
ST 0128 Re10E2	0,0014050454392	0,0021819825151	0,0065459475452
ST 0256 Re10E2	0,0003779964410	0,0004173548970	0,0012520646911
ST 0512 Re10E2	0,0000960990254	0,0000982806742	0,0002948420228
ST 1024 Re10E2	0,0000239909053	0,0000239458547	0,0000719727151

Tabela C.39: Estimadores de Richardson e GCI para a velocidade u central

Nome da simulação	$U_{Ri}(p_L)$	$U_{Ri}(p_U)$	$U_{GCI}(p)$
ST 0008 Re10E2	0,0031239970802	Inexistente	0,0093719912406
ST 0016 Re10E2	0,0085806593034	Inexistente	0,0257419779103
ST 0032 Re10E2	0,0080645396530	0,3780332705458	1,1340998116375
ST 0064 Re10E2	0,0010704158381	0,0004914654487	0,0032112475143
ST 0128 Re10E2	0,0004223502645	0,0008257485966	0,0024772457901
ST 0256 Re10E2	0,0001086652333	0,0001129298350	0,0003387895051
ST 0512 Re10E2	0,0000252999546	0,0000230343274	0,0000758998640
ST 1024 Re10E2	0,0000060182621	0,0000056353164	0,0000180547864

Tabela C.40: Estimadores de Richardson e GCI para a velocidade v central

Nome da simulação	$U_{Ri}(p_L)$	$U_{Ri}(p_U)$	$U_{GCI}(p)$
ST 0008 Re10E2	0,0070076246305	-0,192230294979	0,0210228738916
ST 0016 Re10E2	0,0022791467430	0,0032956756907	0,0098870270722
ST 0032 Re10E2	0,0062344864653	Inexistente	0,0187034593958
ST 0064 Re10E2	0,00059045977316	0,0001853159611	0,0017713793195
ST 0128 Re10E2	0,0000772836293	0,0000353500777	0,0002331850888
ST 0256 Re10E2	0,00002048766880	0,0000219989246	0,0000659967740
ST 0512 Re10E2	0,00000401084448	0,0000029290001	0,0000120325334
ST 1024 Re10E2	0,00000078924039	0,0000005800530	0,0000023677211