UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE TECNOLOGIA
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

**DANIEL PINI BOUABSI**

# ESTUDO NUMÉRICO DE ESCOAMENTO EM MANCAIS DESLIZANTES

CURITIBA
2009

DANIEL PINI BOUABSI

# ESTUDO NUMÉRICO DE ESCOAMENTO EM MANCAIS DESLIZANTES

Relatório do Trabalho de Graduação IV, para aprovação na disciplina Trabalho de Graduação do curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Paraná

**Orientador: Prof. Dr. Carlos Henrique Marchi**

CURITIBA
2009

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ**
**SETOR DE TECNOLOGIA**
**CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**ESTUDO NUMÉRICO DE ESCOAMENTO EM MANCAIS DESLIZANTES**

Trabalho referente à disciplina TRABALHO DE GRADUAÇÃO IV – TM-202 defendido pelo aluno

**DANIEL PINI BOUABSI**

e aprovado em 17 de dezembro de 2009 pela banca examinadora:

Prof. CARLOS HENRIQUE MARCHI, Dr. Eng.
Professor Orientador

Prof. MARCIO AUGUSTO VILLELA PINTO, Dr. Sc.

LEANDRO ALBERTO NOVAK, M. Eng.

A meus pais, pelo incansável apoio e incentivo em todos os momentos, possibilitando minha trajetória até aqui, dedico este trabalho.

**AGRADECIMENTOS**

A Deus, por ter-me dado a condição humana de pensar, trabalhar e discernir,

ao Professor Orientador Carlos Henrique Marchi, por ter demonstrado interesse, sempre esclarecendo dúvidas, incentivando e fornecendo supervisão à altura do trabalho proposto,

ao Prof. Andrew Torrance, por ter-se mostrado solícito, mesmo não nos conhecendo, bem como pelo excelente material enviado, permitindo o enriquecimento do presente trabalho,

o meu agradecimento.

## RESUMO

Os mancais hidrodinâmicos são elementos de máquinas utilizados entre partes móveis e fixas de um sistema rotativo e sua finalidade é substituir o atrito metálico columbiano, gerado por seus esforços compartilhados e suas rugosidades, pelo atrito viscoso de um fluido, a partir da correta utilização de um elemento lubrificante. O lubrificante atua não só como preventivo de desgastes e erosão, como também serve de amortecedor quando as máquinas estão sujeitas a choques ou variações bruscas de carga, aumentando a eficiência e a vida útil desses equipamentos. O objetivo do presente trabalho é desenvolver um programa computacional, que possibilite a solução aproximada dos campos de pressão e velocidade, utilizando-se para isso, o Método de Volumes Finitos na resolução das equações governantes do problema. Condições de Contorno comumente encontradas na literatura puderam ser aplicadas através da técnica dos volumes fictícios. Dois problemas foram estudados no transcorrer do trabalho. No primeiro, apenas uma das equações governantes foi resolvida, obtendo-se resultados numéricos muito próximos dos analíticos exatos, que eram previamente conhecidos. Um estimador de erro numérico foi utilizado neste caso e conduziu a resultados confiáveis, uma vez que em todos os casos, a estimativa do erro foi superior ao próprio erro encontrado. No segundo problema tratado, duas equações foram resolvidas, de forma que a solução numérica não necessitasse agora de parâmetros obtidos por meio da solução analítica exata, exceto de uma estimativa inicial, que somente por conveniência, foi escolhida como sendo a da própria solução exata. Para este caso, houve malhas em que a convergência verificou-se e, em outras, o algoritmo numérico mostrou-se instável. Neste trabalho também foram apontadas as principais prováveis causas responsáveis por este fenômeno, assim como algumas técnicas que poderiam contornar estes obstáculos em trabalhos posteriores.

**PALAVRAS-CHAVE**: Lubrificação Hidrodinâmica, mancais, atrito, modelo computacional, volumes finitos.

## LISTA DE FIGURAS

# LISTA DE TABELAS

# LISTA DE SÍMBOLOS

| | | |
|---|---|---|
| a, b, c | constantes | |
| $c$ | folga radial do mancal | [m] |
| $c_p$ | capacidade térmica do lubrificante | [Btu/lbm °F], [J/kg°C] |
| D | diâmetro do mancal | [m] |
| $e$ | excentricidade do mancal, face leste | [m] |
| $f$ | coeficiente de fricção | |
| $\vec{g}$ | vetor aceleração da gravidade | |
| $h$ | espessura do filme | [m] |
| $\bar{h}$ | altura do filme de óleo nos pontos de pressão máxima e mínima (nula) | [m] |
| $h_0$ | comprimento característico na direção z | [m] |
| J | calor equivalente em joules, 9336 in lbf/Btu | |
| L | comprimento do mancal | [m] |
| $l_0$ | comprimento característico na direção x | [m] |
| $M_x$ | fluxo de massa por unidade de comprimento na direção x | [kg/s] |
| $M_z$ | fluxo de massa por unidade de comprimento na direção z | [kg/s] |
| $N$ | rotação do eixo | [rev/s] |
| $p$ | pressão | [N/m²] |
| $p_0$ | pressão característica | [N/m²] |
| $P_m$ | pressão adimensional | |
| $p_m$ | pressão máxima no filme de lubrificante | [N/m²] |
| $Q$ | taxa de fluxo volumétrico de óleo para o mancal | [in³/s] |
| $Q_s$ | taxa volumétrica de vazamento lateral para fora do mancal e para o reservatório | [in³/s] |
| $Q_x$ | vazão de lubrificante na direção x | [m³/s] |
| $r_b$ | raio do eixo | [m] |
| $\mathcal{Re}_c$ | número de Reynolds de transição | |
| $\mathcal{Re}_x$ | número de Reynolds-modificado na direção x | |
| $T$ | temperatura | [°C, °F] |
| $t$ | tempo | [seg.] |
| $T_0$ | temperatura de referência, 15°C | [°C] |
| U | velocidade do eixo na direção x | [m/s] |
| $u$ | velocidade na direção x | [m/s] |
| $u_0$ | velocidade característica na direção x | [m/s] |
| V | velocidade do eixo na direção y | [m/s] |
| $v$ | velocidade na direção y | [m/s] |
| $\vec{v}$ | vetor velocidade | |
| $\bar{V}_x$ | velocidade média na direção x | [m/s] |
| $\bar{V}_z$ | velocidade média na direção z | [m/s] |
| $x$ | direção circunferencial | [m] |

| | | |
|---|---|---|
| $y$ | direção radial | [m] |
| $w$ | velocidade na direção z, face oeste | [m/s] |
| $z$ | direção axial | [m] |

**Letras gregas**

| | | |
|---|---|---|
| $\Delta T$ | aumento de temperatura no óleo entre a entrada e saída no ânulo do mancal | [°F] |
| $\Delta\tau_{xy}$, $\Delta\tau_{zy}$ | Variação da tensão de cisalhamento nas paredes inferior e superior | [N/m²] |
| $\varepsilon$ | razão de excentricidade, erro de troncamento | |
| $\varsigma$ | variável genérica | |
| $\theta$ | coordenada angular medida a partir do ponto de espessura máxima do filme | [rad] |
| $\bar{\theta}$ | coordenada correspondente do ponto de pressão máxima | [rad] |
| $\theta^*$ | coordenada correspondente do ponto de altura $\bar{h}$ | [rad] |
| $\mu$ | viscosidade dinâmica (absoluta) | [Pa.s, μReyn] |
| $\mu_0$ | viscosidade absoluta de referência | [μReyn] |
| $\rho$ | densidade | [kg/m³] |
| $\rho_A$ | densidade média ao longo da espessura do filme de lubrificante | [kg/m³] |
| $\rho_{t_0}$ | densidade à temperatura de 15°C | [kg/m³] |
| $\tau$ | tensão de cisalhamento viscosa | [N/m²] |
| $\Phi$ | solução analítica | |
| $\phi$ | ângulo em coordenadas cilíndricas ao longo do mancal (Equação de Reynolds em coordenadas polares), solução numérica | [rad] |
| $\phi_m$ | ponto em que $\frac{dp}{d\phi} = 0$ | [rad] |
| $\omega_b$ | velocidade angular da superfície do eixo | [rad/s] |
| $\vec{\nabla}$ | divergente (operador nabla) | |
| $\nabla^2$ | laplaciano | |

**Subscritos**

| | |
|---|---|
| 1,2 | componentes da velocidade ambas na direção x |
| b | do mancal |
| m | ponto de máximo |
| x, y, z | coordenadas cartesianas |
| xy | no plano perpendicular a x, na direção y |
| zy | no plano perpendicular a z, na direção y |

**SUMÁRIO**

# 1 INTRODUÇÃO

A engenhosidade do homem pré-histórico possibilitou experimentos que ao longo do tempo mereceram estudos importantes e que, nos dias atuais, ainda despertam interesse por parte de muitos pesquisadores. Os eventos sem cunho científico, que culminaram com a descoberta do fogo, são exemplos onde os fenômenos de atrito entre duas superfícies foram aproveitados de maneira positiva para gerar calor e provocar faíscas. Por sua vez, a invenção da roda, que revolucionou os transportes há milênios, passou por exaustivos ensaios até chegar-se à conclusão de que a supressão progressiva do atrito entre as superfícies, facilitava cada vez mais o deslocamento de pessoas e bens pelas diversas regiões.

Historicamente, Leonardo da Vinci (1452-1519) com seus primeiros estudos sobre lubrificação, Galileu (1564-1642) ao estabelecer o Princípio da Inércia e Newton (1642-1727), com a formulação das Leis Básicas da Mecânica Clássica, contribuíram de forma inquestionável para o estudo científico da dinâmica dos movimentos e dos fenômenos do atrito.

Entretanto, com a Revolução Industrial ocorrida a partir do século XVIII, a máquina a vapor substituiu a força humana, animal, do vento e das águas e fábricas foram construídas para produção em massa de produtos manufaturados, trazendo profundas mudanças na organização da economia e do trabalho, aumentando a divisão e especialização da mão-de-obra. A industrialização criou uma demanda por máquinas e ferramentas, fato que estimulou a mecanização, sobretudo no setor têxtil e de transportes. Uma extensa malha viária como canais, estradas de rodagem e ferrovias foi implementada para que nela pudessem transitar navios, automóveis e locomotivas. Este sistema industrial exigiu aprofundamento teórico e técnico sobre a adequada e eficiente manutenção dessas novas máquinas.

O estudo do escoamento de fluidos e da transferência de calor tem contribuído para o desenvolvimento de equipamentos cada vez mais sofisticados e com melhores níveis de eficiência. A adequada seleção de elementos lubrificantes neste contexto, é de fundamental importância, uma vez que as perdas energéticas nos processos industriais são minimizadas, bem como observa-se uma diminuição na temperatura dos acoplamentos, visto que diminui o nível de atrito. O lubrificante atua não só como preventivo de desgastes e erosão, como também serve de amortecedor quando as máquinas estão sujeitas a choques ou variações bruscas de carga, aumentando a eficiência e a vida útil desses equipamentos.

Pode-se listar alguns exemplos da aplicação de mancais de deslizamento:

a) nas usinas hidrelétricas, largamente utilizadas em nosso país para a conversão da energia hidráulica em energia elétrica, as diferentes máquinas rotativas utilizam projetos específicos de mancais de lubrificação hidrodinâmica;

b) nos compressores herméticos utilizados nos sistemas de refrigeração comercial e doméstico, que junto a demais componentes, realizam o processo de conversão de energia elétrica em energia térmica. O uso de mancais hidrodinâmicos, neste caso, é indicado por produzir um menor nível de ruídos;

c) no campo de motores automotivos, visto que sistemas de mancais hidrodinâmicos apresentam melhor performance e relativa longa vida de operação, qualificando-os para integrar estes motores que convertem energia térmica em energia mecânica.

## 1.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

O mancal de deslizamento é uma categoria especial de mancal, no quais suas superfícies são paralelas à linha de rotação do eixo. Este tipo de mancal é empregado visando suportar os eixos e seus carregamentos radiais com um mínimo de perdas de energia e com o menor grau de desgaste possível.

A Fig. 1 mostra esquematicamente um mancal de deslizamento, o qual tem a configuração cilíndrica que envolve o eixo. Na realidade, os mancais podem possuir diversos formatos, como o elíptico, por exemplo.

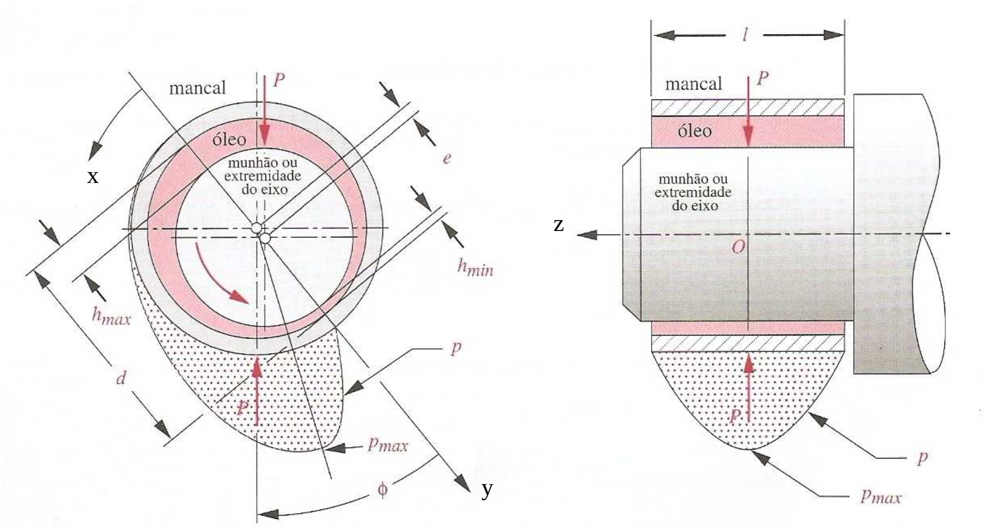



FIGURA 1- Mancal de deslizamento em figura esquemática [16]

O regime de lubrificação necessário para suportar o eixo e suas cargas é denominado lubrificação hidrodinâmica e depende da velocidade de rotação do eixo. A lubrificação hidrodinâmica é um efeito da dinâmica dos fluidos, em que há a formação de um filme fluido de lubrificante, que separa completamente as superfícies deslizantes. Tal filme está compreendido numa pequena folga entre duas superfícies que possuem movimento relativo entre si.

O efeito da hidrodinâmica gera no fluido uma "onda" de pressão hidrodinâmica que resulta na capacidade de carregamento do mancal, uma vez que o fluido passa a ter pressão suficiente para resistir aos carregamentos externos impostos pelo eixo girante.

Apenas os eixos girantes não carregados por forças externas, conseguem manter concentricidade com o mancal. Quando o eixo é submetido a um carregamento, a configuração do conjunto apresenta então excentricidade, onde o deslocamento do eixo na folga que possui dentro do mancal, é diretamente proporcional ao carregamento externo, pois o ajuste da posição do eixo dá-se até que haja o equilíbrio entre os carregamentos impostos e a pressão gerada no filme de óleo na porção convergente do mancal, conforme é mostrado na Fig. 2.

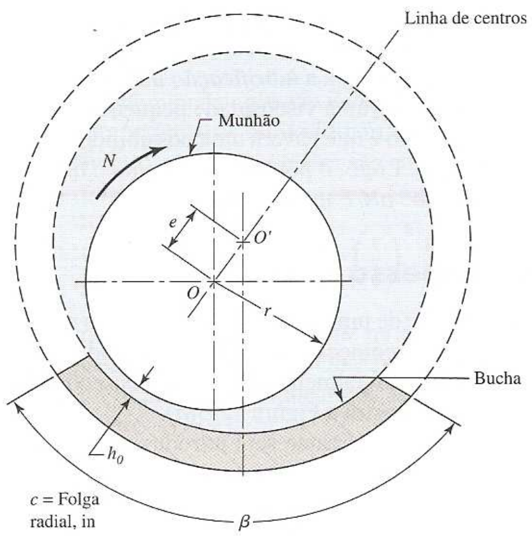



FIGURA 2 – Excentricidade do eixo devido a seu carregamento [20]

Há porém, um limite prático sobre quanto o projetista de mancais pode reduzir a espessura do filme. Sempre que o filme hidrodinâmico fica muito fino, as peças metálicas do acoplamento acabam sofrendo contato, resultando em severo desgaste. O mesmo verifica-se nos eixos submetidos a vibrações mecânicas. A escolha da adequada espessura de filme é uma importante decisão do projetista e deve-se buscar sempre a espessura ótima de filme para cada caso em questão.

A teoria clássica da lubrificação, quando resolvida pelas vias da matemática exata, utiliza uma série de hipóteses simplificadoras adotadas para permitir a resolução do modelo matemático. Estas hipóteses, muitas vezes não condizem com a realidade por serem consideradas imprecisas. Dessa forma, o uso do computador permite que se utilizem modelos complexos que descrevem melhor a realidade, não sendo mais necessária a utilização das referidas simplificações.

## 1.2 IMPORTÂNCIA DO PROBLEMA

O adequado projeto e a correta seleção dos mancais de deslizamento são de fundamental importância na sociedade moderna, tendo em vista o imenso campo de aplicações destes elementos de máquinas.

Na indústria, os mancais figuram no topo da lista dentre os elementos mais suscetíveis a manutenções e substituições, quando se apresentam danificados ou desgastados.

Até mesmo um mancal de deslizamento corretamente projetado e operando adequadamente dentro de sua faixa de velocidade, apresenta elevados níveis de atrito e desgaste, quando o eixo é colocado em operação e acelera a partir de sua velocidade zero. Neste momento, a velocidade do eixo não é grande o suficiente para manter o filme de lubrificante entre as superfícies acoplantes, ficando estas, sujeitas ao atrito estático, que no caso, é muito maior que o dinâmico.

Muitos avanços na tecnologia dos mancais, como o desenvolvimento de novos materiais e lubrificantes, vêm permitindo uma redução dos níveis de atrito, do desgaste e, consequentemente, a diminuição dos custos de manutenção. Isto traduz-se como um aumento do tempo de vida útil das máquinas e equipamentos mecânicos.

Na área da simulação computacional, com base na teoria da lubrificação hidrodinâmica e suas equações, o projetista pode prever como se comportará o escoamento do fluido (seu campo de velocidades), a determinação do seu campo de pressões e temperaturas, bem como a resultante capacidade de carga. Estas informações são de vital importância para ter-se o conhecimento de como o mancal comportar-se-á ao longo do tempo, ou seus possíveis desvios operacionais.

Sabe-se que o atrito friccional entre o fluido e os acoplantes dissipa calor. Calor este, que irá aumentar a temperatura do fluido. Para que as temperaturas não atinjam os limites dos materiais, é necessário que o lubrificante seja sempre renovado, ou que o mancal seja refrigerado externamente para que se evite o superaquecimento.

A seleção do melhor fluido lubrificante e a determinação das espessuras seguras do filme de lubrificante, de modo a não permitir contato entre os materiais, são pontos de extrema importância no anteprojeto de um sistema hidrodinâmico, pois sua seleção determinará a vida útil do equipamento, podendo então viabilizar ou não o projeto.

Todos estes pontos podem e devem ser explorados pelo analista numérico, permitindo um melhor aproveitamento dos recursos físico-financeiros, dos materiais utilizados e das fontes de energia disponíveis, para o adequado desenvolvimento e manutenção dos equipamentos mecânicos.

## 1.3 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é construir um algoritmo computacional com base no método dos Volumes Finitos que permita a solução das equações diferenciais governantes para problemas de lubrificação em mancais deslizantes.

Com isso, pode-se desenvolver uma metodologia de projeto que permita uma ágil e fácil análise e seleção dos elementos de mancais, bem como a definição de seus parâmetros fundamentais, como suas dimensões, seus materiais, etc.

Os objetivos específicos desta análise numérica são:

a) aplicar as leis físicas do movimento dos fluidos para o problema em questão;

b) determinar a distribuição de pressão no filme de lubrificante;

c) obter os campos de velocidade do fluido lubrificante;

d) descobrir a capacidade de carga do mancal;

e) avaliar as tensões cisalhantes e o torque viscoso.

Desta forma espera-se contribuir com um recurso computacional eficiente aos engenheiros de lubrificação, que lhes permita o cálculo preciso dos já citados parâmetros. A grande vantagem deste recurso é tornar desnecessária a utilização das vias de soluções analíticas, nas quais as simplificações distanciam os resultados práticos.

## 1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

O capítulo 2 apresenta a revisão bibliográfica que serve de suporte ao trabalho desenvolvido.

O capítulo 3 descreve a metodologia utilizada no trabalho, enfatizando os modelos matemáticos, analítico e numérico, discorrendo sobre as hipóteses da Teoria da Lubrificação Hidrodinâmica, as equações governantes, suas condições de contorno, a apresentação de algumas soluções exatas para o problema, bem como a questão das tensões de cisalhamento nas superfícies do mancal e do eixo. Trata ainda neste capítulo a verificação da solução numérica com a introdução do estimador de erro GCI (*Grid Convergence Index*).

O capítulo 4 descreve o problema 1, onde buscou-se a solução de apenas uma das equações governantes do modelo matemático. Este capítulo está ainda dividido em várias seções que descrevem a metodologia particular utilizada para este problema, os resultados obtidos e as conclusões a seu respeito.

O capítulo 5 trata de um problema mais elaborado matematicamente (problema 2), pois foram solucionadas duas equações ao invés de uma. Este capítulo segue a mesma estrutura feita para o capítulo 4.

No capítulo 6 são relatadas as conclusões gerais sobre o trabalho apresentado. Nele também encontram-se sugestões para abordagens futuras a respeito do mesmo tema.

As referências bibliográficas listam todos os livros, teses e demais documentos citados no desenvolvimento do trabalho.

Os apêndices contêm o material adicional produzido durante a realização do estudo aqui relatado, do qual a parte essencial está apresentada no corpo do trabalho.

# 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Os mancais de lubrificação hidrodinâmica deslizantes são, dentre todos os mancais lubrificados, os que possuem a mais longa história de estudos científicos. Cameron [2], diz que a história desses mancais evidencia a importância de se correlacionar a experimentação com a análise teórica, pois quando estas duas vertentes não são analisadas conjuntamente, pode-se chegar a conclusões errôneas, as quais retardam o avanço do assunto como um todo, fato este que ocorreu com os mancais de deslizamento.

O conceito inicial da lubrificação hidrodinâmica deu-se a partir das pesquisas do russo Nikolai Petroff (1836-1920), que analisou o problema do atrito em um mancal sob a ótica da Tribologia. Dando ênfase às propriedades dos fluidos e dos materiais, chegou à inédita conclusão de que o atrito em mancais deveria ser explicado pelo fenômeno hidrodinâmico, ao invés da interferência entre as rugosidades, como acreditavam os pesquisadores da época. Para seus estudos, Petroff baseou-se na teoria de Margules citado em [2], utilizando um aparato similar ao viscosímetro de Poiseuille, como vê-se na Fig. 3.

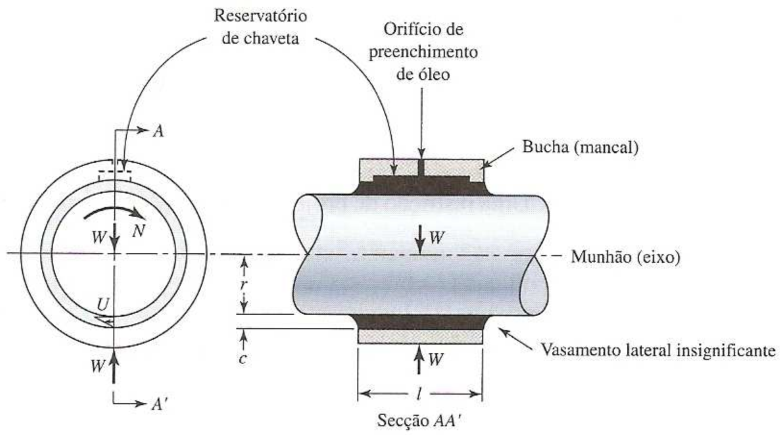



FIGURA 3 – Mancal de deslizamento de Petroff [20]

Os experimentos de Petroff foram de extrema importância, pois permitiram chegar-se a duas relevantes conclusões sobre o atrito. A primeira, indica que a densidade não é a principal propriedade que rege o fenômeno do atrito e sim, a viscosidade do fluido. A segunda, demonstrou que não havendo contato direto entre as superfícies do eixo e do mancal, a fonte de atrito deve-se a uma força cisalhante viscosa do fluido existente entre as superfícies.

As conclusões de Petroff foram evidenciadas experimentalmente por Beauchamp Tower (1845-1904), um engenheiro que fora designado para integrar um comitê, cujo objetivo era estudar o atrito em mancais deslizantes de ferrovias.

Segundo Shigley [20], foi um acidente ou erro, durante o curso dessa investigação, que o levou a olhar mais detalhadamente o problema. Tower, após realizar um orifício na parte superior de um mancal para abastecê-lo com óleo, verificou que o mesmo começava a vazar sempre que o eixo era posto em movimento. Nas várias tentativas de bloquear o orifício com tampões de cortiça ou madeira, verificou que os mesmos eram expelidos. Isto levou-o a concluir que existia uma grande pressão interna, que não poderia ser explicada pela teoria tradicional.

Tower, em seu trabalho publicado em 1883, conseguiu comprovar experimentalmente as suas hipóteses. Por meio de diversas tomadas de pressão ao longo do mancal, provou que o eixo estava “mergulhado” num filme de óleo e, que neste meio, onde fora feito o orifício acidental, a pressão chegava a ser mais que o dobro da carga unitária. A grande contribuição do trabalho deste autor, segundo Cameron [2], foi o fato de ter quebrado a tradição de simplesmente medir o atrito do fluido, como haviam feito todos os pesquisadores até então.

Os resultados obtidos por Tower, permitiram ao Professor Osborne Reynolds (1842-1912), do *Manchester College of Technology*, publicar seu trabalho em 1886, fornecendo a fundamentação teórica que a Teoria da Lubrificação Hidrodinâmica precisava. Reynolds desenvolveu a equação diferencial que hoje leva o seu nome. Nela, ele conseguiu predizer a distribuição de pressão no filme de fluido lubrificante e seus resultados foram comparados com os obtidos por Tower (1883). Em seus estudos porém, a análise ficou restrita ao escoamento isoviscoso e incompressível, o que mais tarde foi generalizado por Harrison, citado em [2].

Segundo Santos [19] e Garcez [7], Petroff, Tower e Reynolds, são considerados os pais do conceito de lubrificação hidrodinâmica, pois todos chegaram às mesmas conclusões, com trabalhos independentes. Os dois primeiros, pelas vias experimentais, enquanto que Reynolds optou pelo caminho da fundamentação teórica.

O trabalho de Reynolds, mesmo servindo-se de certas hipóteses simplificadoras, como ignorar os gradientes de pressão na direção axial (hipótese válida no caso de mancais longos), apresentou uma concordância com a prática, antes nunca vista em estudos de mancais. Reynolds introduziu ainda no seu trabalho novos conceitos, como o de folga radial que possibilitou o desenvolvimento dos mancais, bem como a observação do fenômeno da cavitação nas partes divergentes do mancal.

A fase seguinte verificada no estudo da lubrificação hidrodinâmica, foi marcada pelas tentativas de encontrar solução para a equação de Reynolds. Em 1904, o matemático e físico Arnold Sommerfeld (1868-1951), a partir de um engenhoso artifício matemático, conseguiu integrar de forma exata o termo $d\theta/(1+\varepsilon\, cos\theta)^3$ . Isto, ainda não tinha sido conseguido por Reynolds, que havia aproximado a integral por uma expansão de série de termos [2].

Sommerfeld introduziu novas condições de contorno para o problema e obteve para sua solução, uma distribuição de pressões negativas na parte divergente do escoamento onde, segundo Reynolds, o filme de lubrificação não conseguiria manter-se contínuo, havendo ruptura do fluido numa fase gasosa, devido à cavitação. Sommerfeld, porém, ignorou os comentários de Reynolds e acreditou estar correto quando, por uma incrível coincidência, encontrou em seus experimentos um valor mínimo de pressão, condizente com o obtido em sua formulação matemática, conforme citado por Cameron [2]. Entretanto, este valor não se devia ao efeito hidrodinâmico, mas sim, ao escoamento bifásico.

Andrés [1] estudou o problema da cavitação em mancais e defende que a equação de Reynolds não é válida para a porção em que este fenômeno ocorre, uma vez que nenhuma consideração sobre mudança de fase foi tomada por Reynolds quando deduziu sua equação.

O grande prestígio que teve a solução de Sommerfeld, tornou usual entre os pesquisadores a aplicação de suas condições de contorno modificadas, nas quais a cavitação é desprezada, por considerar-se a pressão nula na parte divergente do mancal, conforme exposto em [22].

Outra importante contribuição à Teoria da Hidrodinâmica deu-se com os trabalhos de Ocvirk e DuBois [16], em 1952. Ambos propuseram uma solução completa e detalhada, que leva em consideração as perdas de lubrificante pelas extremidades do mancal. Esta solução desconsidera, entretanto, o termo na equação de Reynolds que leva em conta o fluxo circunferencial de lubrificante ao redor do mancal. Esta solução parte da premissa de que este é pequeno em relação ao fluxo axial.

Karamzin [11] coloca que a solução de Ocvirk é baseada na hipótese de que os gradientes de pressão na direção axial do mancal, são uma ordem de magnitude maiores do que os gradientes de pressão na direção radial. Este pressuposto teórico é válido para mancais de comprimento finito que apresentem razões *L/D* (comprimento por diâmetro do mancal) inferior a 0,5.

Outras soluções analíticas para a equação de Reynolds foram desenvolvidas ao longo dos anos e merecem destaque. Porém, suas formas mais complexas tornam difícil sua aplicação direta. Dentre estas soluções, cabe mencionar os trabalhos de Michell citados em [5], que em 1905, com o auxilio das funções de Bessel, conseguiu obter uma forma fechada de solução para o problema de escoamento em um mancal de comprimento finito, que considerava os fluxos de lubrificante nas direções circunferencial e axial. O mesmo foi feito anos mais tarde por Tao citado em [11], que em 1959 obteve uma solução exata para o problema, utilizando-se das pouco conhecidas funções de Heun.

Conforme Castro [3], o primeiro uso dos computadores modernos na solução da equação de Reynolds, levando em conta as condições de contorno, foi feito por Pinkus (1956), um engenheiro ligado à indústria. Nestas simulações, Pinkus obteve resultados não só para mancais cilíndricos, como também para mancais elípticos. Para isso, utilizou o método de diferenças finitas para resolver as pressões de sustentação dos mancais hidrodinâmicos.

Em seu trabalho clássico, Pinkus [18] disponibiliza os resultados numéricos encontrados por ele, para diversas geometrias complexas, como os mancais de formato tri-lombado. Seu livro serve portanto, como fonte para verificação e validação de resultados computacionais.

Raimondi e Boyd citados em [20] também contribuíram de maneira importante para com todos os engenheiros ligados à área de projetos de mancais, no campo da simulação numérica. Em seus trabalhos (1958), publicados em três partes, constam um grande número de gráficos e diagramas que definem as diferentes variáveis de interesse para o projetista, em função de razões conhecidas para *L/D*. Shigley disponibiliza em seu livro [20], parte dos gráficos de Raimondi e Boyd, para os casos em que o mancal é considerado de comprimento infinito.

O campo de estudo da hidrodinâmica que relaciona os efeitos da temperatura com a variação da viscosidade recebe o nome de termohidrodinâmica e, neste trabalho, seus conceitos básicos estão sendo amplamente utilizados.

Segundo Harnoy [9], as perdas de energia dissipadas pelo atrito viscoso, são responsáveis pela diminuição da viscosidade do lubrificante, pois este, ao absorver o calor liberado pelo mancal, eleva sua temperatura normal de operação.

Modelos reológicos que consideram a viscosidade do fluido dependendo apenas da temperatura, podem ser encontrados nas referências bibliográficas [2] e [4]. Para a avaliação da propriedade inercial ($\rho$) e capacidade térmica do lubrificante ($c_p$), Mauk [15], coloca no seu trabalho correlações empíricas. As faixas de pressão, temperatura dos lubrificantes e níveis de atrito para as diferentes aplicações são também encontradas nesta fonte de consulta.

Segundo Fortuna [6], a Dinâmica dos Fluidos Computacional é a área da computação científica em que métodos computacionais são utilizados para simular fenômenos que envolvem fluidos em movimento, podendo haver transferência de calor entre os corpos. Para Fortuna, o usuário de CFD (*Computational Fluid Dynamics*) está basicamente interessado em determinar as distribuições de velocidade, pressões e temperaturas na região do escoamento.

Maliska [12] aponta em seu livro, a existência de três métodos tradicionais para a solução numérica de equações diferenciais, os quais são: o Método de Diferenças Finitas (MDF), o Método de Volumes Finitos (MVF) e o Método de Elementos Finitos (MEF). Historicamente, o Método de Diferenças Finitas foi sempre empregado na solução de problemas na área de Mecânica dos Fluidos, ou seja, problemas fortemente influenciados pelas não-linearidades causadas pelos termos advectivos. O Método de Elementos Finitos (MEF), por sua vez, teve seu desenvolvimento fundamental na área estrutural, mais especificamente, no campo da elasticidade, cuja formulação matemática mais simples permitiu um maior desenvolvimento deste método, na solução de problemas com geometria complexa.

Maliska [12] define ainda, que o Método dos Volumes Finitos (MVF), ao utilizar uma formulação onde as equações aproximadas são obtidas por meio de balanços de conservação da propriedade ao longo de volumes de controles elementares, permite chegar a resultados conservativos, mesmo em nível discreto, o que já não é possível para os métodos MDF e MEF, uma vez que estes não trabalham com volumes, mas sim, apenas com pontos da malha.

Para Patankar [17], o aspecto mais atraente do MVF, é que para qualquer volume da malha, as quantidades das propriedades (como massa, momentum, energia, etc.), são satisfeitas integralmente, ou seja, não existe a possibilidade de haver gerações ou sumidouros dessas quantidades. Como isto ocorre para qualquer volume genérico da malha, conclui-se que a conservação das quantidades é mantida para todo o domínio da malha. Desta forma, é possível observar que mesmo para malhas grosseiras, suas soluções apresentam um balanço correto das propriedades listadas.

# 3 METODOLOGIA GERAL

O objetivo deste trabalho é desenvolver um código computacional em linguagem Fortran 90, que se respalde nos conceitos da Teoria dos Volumes Finitos e que permita resolver as equações governantes do fenômeno em estudo.

As equações resolvidas neste trabalho são a Equação de Conservação da Massa e a Equação da Quantidade de Movimento Linear, escritas em formas mais convenientes para a solução do problema. Estas equações são resolvidas conjuntamente por meio de um processo iterativo.

Neste trabalho, são fixados alguns dos parâmetros geométricos e operacionais básicos de um mancal, tais como seu diâmetro, sua folga radial e a velocidade angular do eixo girante. Estes dados geométricos e operacionais são estipulados a partir dos valores usuais encontrados em uma das aplicações de mancais em Engenharia Mecânica.

A região por onde escoa o fluido lubrificante, entre o mancal e o eixo, é discretizada por meio de uma malha quase unidimensional, ou seja, na qual a área da seção de escoamento varia ponto a ponto. Para isto são empregadas malhas uniformes na direção radial e também na direção circunferencial.

As simulações numéricas são então comparadas com as formas fechadas de solução, que já estão amplamente difundidas na literatura. Isto permite a verificação dos resultados numéricos.

A cada simulação, o programa computacional apresenta como resultado, o campo de pressão e os perfis de velocidades, pois estes são as variáveis primárias. São também controladas a cada simulação, as seguintes variáveis secundárias:

a) a capacidade de carga do mancal, obtida a partir da integração numérica do campo de pressão;

b) tensões de cisalhamento máximas e tensões normais máximas, que devem satisfazer os limites impostos pelos materiais da aplicação em questão;

c) a velocidade média do campo de velocidades na seção de interesse.

Com a finalidade de analisar o efeito que a viscosidade e o gradiente de pressão exercem sobre o campo de temperaturas, no capítulo 4 é feita uma comparação entre as soluções exatas dos campos de temperatura de Couette e Couette-Poiseuille.

Nos capítulos 4 e 5 busca-se simular o mesmo problema em diversas malhas, de forma que no final possam ser determinadas as ordens de erros efetivas das diversas variáveis.

## 3.1 HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS

Uma importante hipótese da teoria da lubrificação hidrodinâmica é que o escoamento dá-se de forma laminar, ou seja, as forças viscosas de cisalhamento tendem a amortecer qualquer instabilidade que possa levar à turbulência. Na maioria dos casos práticos, o número de Reynolds é suficientemente pequeno e o seu cálculo será mostrado posteriormente.

A relação entre tensão e deformação dos fluidos usados em lubrificação é linear. Tais fluidos são também denominados fluidos Newtonianos. Esta hipótese é uma aproximação bastante válida para um grande número de lubrificantes, como os óleos minerais, sintéticos, o ar e a água utilizada em casos excepcionais, como certas aplicações em mancais de bombas e barcos.

Porém, para certos fluidos como as graxas ou óleos minerais contendo aditivos poliméricos pesados, o modelo Newtoniano não consegue descrever adequadamente o comportamento do fluido. Outros modelos reológicos, que levam em consideração a dependência da viscosidade com taxa de cisalhamento, devem então ser adotados para estes casos. Neste estudo, os fluidos podem ser admitidos ainda como incompressíveis, pois a variação de suas massas específicas é desprezível para as pressões usuais de trabalho.

O fluido é considerado ainda como sendo contínuo em todo o domínio de cálculo, o que significa que as variáveis físicas de interesse do escoamento, como as tensões e o campo de pressões, são representadas por meio de funções contínuas.

Há que se considerar, porém, que sempre existem pequenas bolhas de ar misturadas ao fluido que escoa, causando descontinuidade na fase líquida. Este efeito, no entanto, foi desprezado, pois torna-se significativo somente quando há acentuada formação de espumas ou cavitação do fluido.

### 3.1.1 Lista de Hipóteses Utilizadas

Nesta subseção estão listadas dez hipóteses simplificadoras para o problema de escoamento em filmes finos. Estas hipóteses mostram-se justificáveis, pois os desvios observados entre a teoria e a experimentação prática, são desprezíveis:

a) o escoamento é laminar e se dá em regime permanente;

b) o fluido lubrificante é contínuo, de Newton e incompressível;

c) o fluido adere às superfícies do volume de controle (paredes do eixo e do mancal) e não há escorregamento do fluido nestas fronteiras;

d) a componente da velocidade na direção radial ($v$) ao longo do filme fino é desprezível se comparada com as outras duas componentes do vetor velocidade $\vec{v}$;

e) os gradientes de velocidade ao longo do filme de fluido nas direções $x$ e $z$ são pequenos e desprezíveis, se comparados aos gradientes ao longo de uma seção, ou seja: $du/dy >> du/dx$ e $dw/dy >> dw/dz$. Isto decorre do fato do filme ser muito fino;

f) o efeito da curvatura do eixo e do mancal pode ser desprezado, uma vez que o filme de espessura $h$ é muito menor que o raio de curvatura destes elementos;

g) a pressão ao longo do filme (na direção $y$) é constante, o que faz com que suas variações ao longo desta direção sejam pequenas e seu efeito seja desprezado nas equações do movimento;

h) as forças de gravidade no fluido são desprezadas, se comparadas às forças viscosas;

i) os efeitos inerciais também podem ser desprezados, quando comparados às forças viscosas;

j) a viscosidade do fluido não varia com a temperatura.

Verifica-se na prática que a viscosidade dinâmica ($\mu$) diminui com o aumento da temperatura, desta forma para a sua avaliação, são utilizados modelos reológicos que levam em consideração a influência da temperatura.

## 3.2 NÚMERO DE REYNOLDS

A importância relativa entre as forças inerciais e as forças viscosas, pode ser descrita através da definição do número de Reynolds, onde $u_0$ é uma velocidade característica e $L_k$ é um comprimento característico:

$$\mathcal{R}e_{L_k} = \frac{\rho\, u_0\, L_k}{\mu} \tag{1}$$

A forma desta expressão é usualmente encontrada em livros de Dinâmica dos Fluidos, porém para estudos de lubrificação, a seguinte modificação na expressão se faz necessária, onde $h_0$ é um comprimento característico na direção $z$ e $l_0$ é um comprimento característico na direção $x$:

$$\mathcal{R}e_x = \frac{\rho\, u_0\, h_0^{\ 2}}{\mu\, l_0} \tag{2}$$

Na prática, estima-se que a transição entre o escoamento laminar e o turbulento para problemas hidrodinâmicos em mancais, inicie por volta de $Re$ = 1000, e atinja a completa turbulência com $Re$ = 1600. Estes limites são valores de referência, uma vez que o número de transição pode ser menor, caso as superfícies do mancal apresentem rugosidade elevada, ou mesmo em casos que os níveis de vibração durante a operação sejam elevados. A hipótese de escoamento laminar é geralmente verificada, uma vez que as espessuras do filme são muito pequenas.

## 3.3 EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

As equações empregadas para resolver o problema do escoamento no mancal de deslizamento são respectivamente, a Equação de Conservação de Massa (3) e a Equação da Quantidade de Movimento Linear (4), conforme vê-se a seguir :

$$\vec{\nabla}\left(\rho\vec{v}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

$$\rho\,\frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\left(\vec{v}\right) \tag{4}$$

Neste trabalho, são analisados somente os casos em que o regime é permanente. Assim, eliminando-se os termos transientes da Equação da Conservação de Massa, tem-se:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \tag{5}$$

Fazendo-se a mesma simplificação para a eq. 4, desprezando-se o escoamento ao longo de *y* (observar eixos de referência na fig. 1), chega-se a:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{dp}{dx} = 0 \quad (6)$$

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{dp}{dz} = 0 \quad (7)$$

### 3.3.1 Equação de Reynolds

A Equação de Reynolds dá suporte teórico e fundamenta a Teoria da Lubrificação Hidrodinâmica. Esta equação é um caso particular da Equação de Navier-Stokes e em seu caso geral, pode-se chegar a sua dedução combinando as equações (5), (6) e (7) (ver APÊNDICE A):

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial(\rho h U)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\rho h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\rho h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\right\} \quad (8)$$

A Equação de Reynolds é uma equação diferencial elíptica de difícil solução exata. Uma vez obtido seu campo de pressão, é possível obter os perfis de velocidade por meio da seguinte expressão, onde *U* é a velocidade do eixo na direção *x*:

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left\{y^2 - yh\right\} + \frac{y}{h}U \quad (9)$$

$$w = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\left\{y^2 - yh\right\} \quad (10)$$

### 3.3.2 Equação de Reynolds 1-D

Para os casos em que a relação *L/D* for muito maior que a unidade, os gradientes de pressão na direção axial (direção *z*) são desprezíveis e o escoamento ao longo do eixo pode ser considerado bidimensional. Assim, fazendo-se as devidas simplificações (listadas na seção 3.1.1) na eq. 8, chega-se a:

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{11}$$

Aplicando-se as condições de contorno de não escorregamento do fluido, chega-se ao campo de velocidades do filme de lubrificante:

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx}\left(y^2 - hy\right) + \frac{U}{h}\, y \tag{12}$$

A obtenção da eq. 12 pode ser vista no APÊNDICE B, onde é demonstrado que este campo de velocidades é a combinação de dois outros importantes campos de velocidade atribuídos a Poiseuille e Couette.

Substituindo a solução (12) na equação da continuidade, é possível chegar à forma integrada da Equação de Reynolds 1-D, onde $\bar{h}$ é a altura de filme no ponto de pressão máxima:

$$\frac{dp}{dx} = 6\mu U \left(\frac{h - \bar{h}}{h^3}\right) \tag{13}$$

A eq. 13, quando também combinada com a Equação de Conservação de Massa, permite chegar-se a uma nova forma para a Equação de Reynolds:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{h^3}{\mu} \frac{dp}{dx}\right) = 6 \frac{d(Uh)}{dx} \tag{14}$$

Reynolds, ao resolver sua clássica equação, utilizou-se de condições de contorno que também receberam seu nome. Porém, é possível chegar-se a soluções exatas, utilizando-se de outras condições de contorno, além da que foi por ele proposta, como mostra-se a seguir.

## 3.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Uma limitação para a resolução da Equação de Reynolds, por muito tempo, foi o desconhecimento das condições de contorno necessárias para sua integração, que estão relacionadas ao conhecimento da pressão do filme de lubrificante nas extremidades do mancal.

Reynolds propôs inicialmente, que a pressão fosse nula na seção de entrada do fluido lubrificante do mancal (ponto de alimentação), aumentava seu valor na porção do escoamento convergente e voltava a diminuir na parte divergente.

No ponto em que a derivada $\frac{dp}{dx}$ se igualava a zero, a altura $\bar{h}$ foi definida e, a este ponto, corresponde a coordenada $\bar{\theta}$. O ponto na parte divergente que possui a mesma altura $\bar{h}$ (condição necessária devido à simetria do problema) possui ainda a coordenada $\theta^*$. As condições de contorno de Reynolds consideram que, a partir do ponto $\theta^*$, a pressão do filme retorna a zero e se mantém nula em toda a parte divergente restante do mancal, conforme observa-se na Fig. 4.

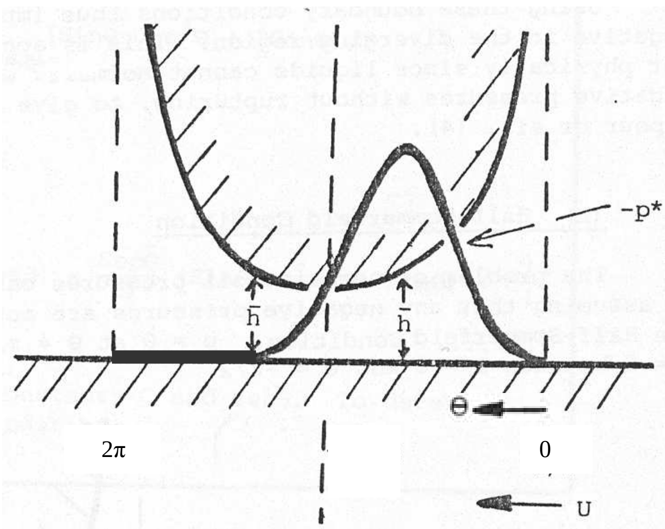



FIGURA 4 – Distribuição de pressão resultante das condições de contorno de Reynolds [22]

A solução para a equação de Reynolds, usando estas condições de contorno, conduzem a excelentes resultados, em conformidade com os dados experimentais. Do ponto de vista teórico, porém, observa-se a descontinuidade da conservação de massa no ponto em que a pressão retorna a seu valor zero.

Sommerfeld, contextualizado historicamente no capítulo 2, propôs, anos após os trabalhos de Reynolds, uma solução exata para o problema de lubrificação no mancal deslizante. Esta foi a primeira solução analítica exata para o problema, onde Sommerfeld, apoiando-se em novas condições de contorno, admite que a pressão do fluido é nula na entrada do mancal $(\theta = 0)$ e, retorna a zero neste mesmo ponto $(\theta = 2\pi)$, após ter aumentado seu valor no fim da parte divergente, de acordo com a Fig. 5.

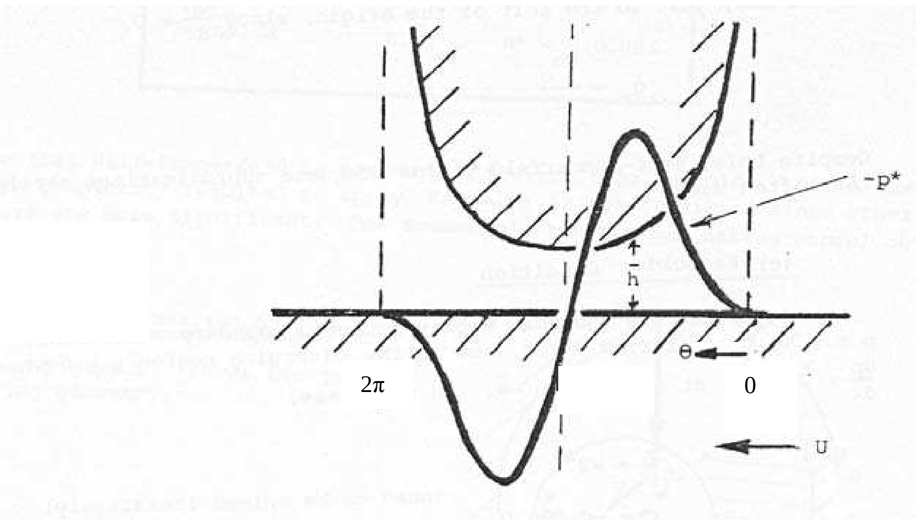



FIGURA 5 – Distribuição de pressão resultante das condições de contorno de Sommerfeld [22]

Apesar da solução de Sommerfeld ser facilmente aplicada, apresenta uma grande desvantagem do ponto de vista físico, uma vez que os fluidos não conseguem resistir a grandes tensões trativas sem que se rompam numa fase de vapor.

O grande prestígio da solução de Sommerfeld levou, no entanto, à adoção de suas condições de contorno modificadas. A meia condição de Sommerfeld, como é chamada, é mais condizente com a realidade, ao admitir que a pressão mantém-se nula na região divergente do mancal, ou seja, inicia-se em $\theta = 0$ e termina em $\theta = \pi$, conforme mostra a Fig. 6.

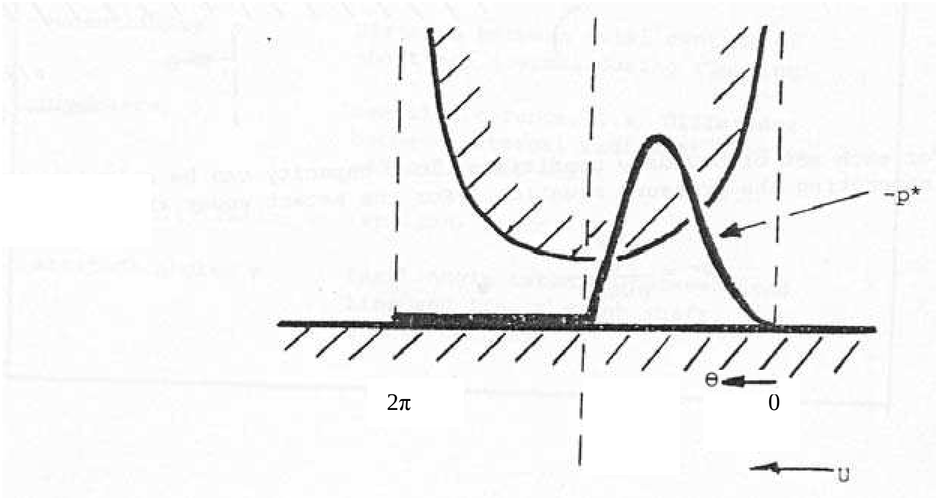



FIGURA 6 – Distribuição de pressão resultante da meia condição de contorno de Sommerfeld [22]

Desta forma, ao desprezar-se o problema da cavitação, obtém-se soluções para o campo de pressão muito próximas das obtidas por meio das condições de Reynolds. A meia condição de Sommerfeld apresenta, em relação às condições de contorno de Reynolds, a vantagem de ser facilmente implementada, uma vez que não há a necessidade de realizar cálculos iterativos para sua determinação.

Neste trabalho, as simulações são realizadas utilizando-se as condições de contorno de Sommerfeld e a meia condição de contorno de Sommerfeld.

## 3.5 SOLUÇÕES EXATAS

Atualmente os projetos de mancais deslizantes com geometrias cada vez mais complexas são possíveis por meio dos computadores. As soluções numéricas obtidas nestas análises, para escoamentos tridimensionais, conduzem a resultados realísticos e precisos, quando aplicados os procedimentos de verificação numérica adequados.

Porém, para certas condições, é possível o engenheiro utilizar-se de modelos analíticos simplificados que permitem obter uma visão geral do problema e até fornecer boas aproximações para os casos em estudo.

Duas soluções exatas para o problema de lubrificação hidrodinâmica em mancais, encontram-se hoje bem difundidas na literatura, às quais têm acesso engenheiros e projetistas (para conhecimento de outros regimes de lubrificação, consultar APÊNDICE C). Assumindose o mancal como sendo infinitamente longo ou infinitamente curto, consegue-se simplificar a análise do problema tridimensional, para o caso bidimensional. A precisão destas soluções verifica-se para quanto maiores ou menores respectivamente, forem as larguras dos mancais.

Na prática, os mancais longos, em que se verifica a relação $L>D$, são assumidos como infinitamente longos e, os curtos em que $L<D$, são resolvidos como sendo mancais infinitamente curtos. Os casos em que $L \approx D$, resultam em aproximações destoantes nos dois casos, o que serve de motivação para a busca da solução computacional.

### 3.5.1 Solução de Sommerfeld

No início do século XX, somente mancais de deslizamento longos ($L>D$) eram projetados. A vantagem deste tipo de mancal é sua maior capacidade de carga por área de mancal, sendo largamente utilizado no sistema de transporte ferroviário, que estava em pleno desenvolvimento nessa época.

Para o desenvolvimento das soluções apresentadas a seguir, é conveniente “desenrolar” o filme de lubrificante ao longo do eixo, o qual pode ser observado como um perfil periódico de comprimento $2\pi r_b$, em que $r_b$ é o raio do eixo, de acordo com a Fig. 7.

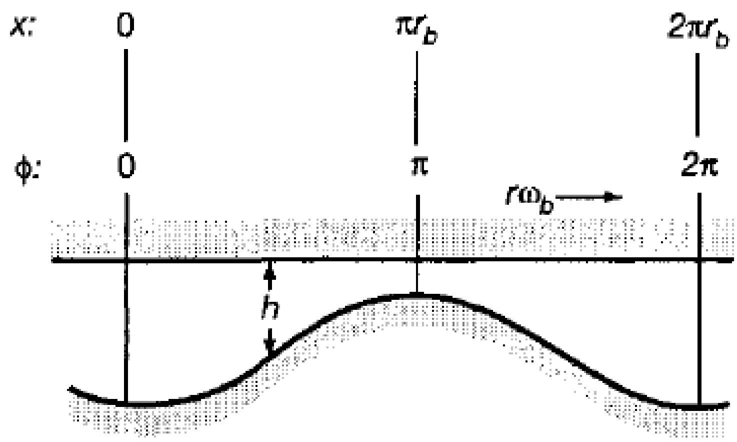



FIGURA 7 – Filme de lubrificante em sua forma desenrolada [8]

A mudança do sistema de coordenadas cartesianas para coordenadas polares, faz-se através da transformação $\phi = \dfrac{x}{r_b}$ (conforme mostrado na Fig. 7). Introduz-se também a variável *razão de excentricidade* ($\varepsilon$) como sendo a razão entre a excentricidade ($e$) e a folga radial ($c$):

$$\varepsilon = \frac{e}{c} \tag{15}$$

Assim, a altura do filme pode ser deduzida como sendo:

$$h = c\,(1 + \varepsilon\, cos\phi) \tag{16}$$

A integração da Equação de Reynolds neste novo sistema de coordenadas (polares), a partir da aplicação das condições de contorno de Sommerfeld, junto com a introdução destas novas variáveis na equação resultante, permitem após várias manipulações, chegar a:

$$p - p_0 = \frac{6\mu\omega_b (r_b/c)^2 \varepsilon\, sen\phi\,(2 + \varepsilon\, cos\phi)}{(2 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon\, cos\phi)^2} \tag{17}$$

onde $p_0$ é a pressão característica de alimentação.

Esta é a solução de Sommerfeld para mancais de comprimento infinito, que pode ser escrita na forma adimensional como sendo:

$$P = \frac{p - p_0}{\mu\omega_b}\left(\frac{c}{r_b}\right)^2 = \frac{6\,\varepsilon\, sen\phi\,(2 + \varepsilon\, cos\phi)}{(2 + \varepsilon^2)(1 + \varepsilon\, cos\phi)^2} \tag{18}$$

A partir da eq. 17 é possível determinar a posição em que $\frac{dp}{dx} = 0$:

$$\phi_m = cos^{-1}\left(\frac{-3\varepsilon}{2 + \varepsilon^2}\right) \tag{19}$$

Substituindo-se a eq. 19 na eq. 18, é possível a avaliação da pressão máxima adimensional.

$$P_m = \frac{3\,\varepsilon\,(4 - 5\varepsilon^2 + \varepsilon^4)^{1/2}\,(4 - \varepsilon^2)}{2\,(2 + \varepsilon^2)(1 - \varepsilon^2)^2} \tag{20}$$

A Fig. 8 mostra a distribuição de pressões simétricas, obtidas por Sommerfeld.

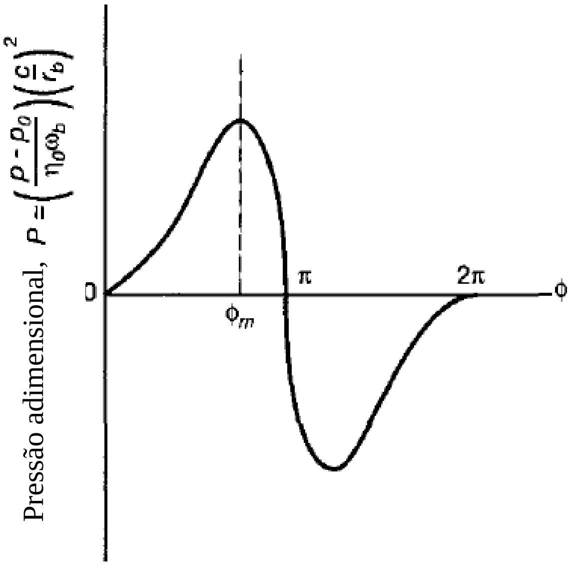



FIGURA 8 – Perfil simétrico de pressões da solução de Sommerfeld [8]

### 3.5.2 Meia solução de Sommerfeld

Segundo [8], os óleos minerais comumente empregados como elementos lubrificantes, apresentam entre 8 a 12 % de ar dissolvido em sua composição. O fato de que, na maioria dos casos, a pressão de vapor dos gases contidos no ar estão situados dentro da faixa de pressão verificada nos mancais, leva à liberação de vapores na parte divergente do escoamento. A solução simétrica de Sommerfeld, portanto, já não satisfaz com precisão a realidade do problema.

A meia solução de Sommerfeld aproveita os resultados que o mesmo obtivera para a região convergente do escoamento (eq. 18) e considera nulas as pressões negativas da parte divergente.

$$P = \frac{6\,\varepsilon\, sen\phi\,(2+\varepsilon\, cos\phi)}{(2+\varepsilon^2)(1+\varepsilon\, cos\phi)^2} \qquad p/\ \ 0 \le \phi \le \pi \tag{21}$$

$$P = 0 \qquad p/\ \ \pi \le \phi \le 2\pi \tag{22}$$

### 3.5.3 Solução de Ocvirk

As máquinas rotativas modernas são geralmente construídas com relação *L/D* < 1, tendo em vista as reconhecidas vantagens que esta configuração possui, em comparação com os mancais longos. Dentre elas pode-se destacar:

a) melhores taxas de resfriamento pela circulação mais rápida de lubrificantes;

b) menor sensibilidade a desalinhamento, seja por montagem ou devido a vibrações;

c) o formato compacto, que facilita sua embalagem, armazenamento e transporte.

Face a esta imposição tecnológica, outras soluções exatas para o problema ainda precisavam ser desenvolvidas, uma vez que a solução de Sommerfeld conduz a resultados pobres para relações $2r_b/L < 0{,}5$.

Coube a Ocvirk e Dubois a resolução de uma parte da Equação de Reynolds, que inclui agora, as perdas nas extremidades:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{h^3 \frac{\partial p}{\partial z}\right\} = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} \tag{23}$$

cuja solução é:

$$p = \frac{3\mu\omega_b\varepsilon}{c^2}\left(\frac{L^2}{4} - z^2\right)\frac{sen\phi}{(1+\varepsilon\, cos\phi)^3} \qquad p/ \quad 0 \le \phi \le \pi \tag{24}$$

onde $\omega_b$ é definida como a velocidade angular do eixo.

Nesta solução proposta por Ocvirk, também conhecida como solução para mancais curtos, pressupõe-se que a pressão seja zero sobre a segunda metade do mancal $(\pi \le \phi \le 2\pi)$. Nela, observa-se que o termo parabólico governa a variação axial da pressão, enquanto o termo trigonométrico, dita o comportamento da pressão na direção circunferencial. A pressão máxima do lubrificante pode ser deduzida a partir da eq. 24, chegando-se a:

$$p_m = \frac{3\mu\omega_b\varepsilon\, L^2 sin\phi_m}{4c^2(1+\varepsilon\, cos\phi_m)^3} \tag{25}$$

onde $\phi_m$ é dado por:

$$\phi_m = cos^{-1}\left(\frac{1-\left(1+24\varepsilon^2\right)^{1/2}}{4\varepsilon}\right) \tag{26}$$

A solução de mancal curto apresentada, pode ser utilizada neste trabalho para comparação dos resultados numéricos obtidos nas simulações com mancais de relação *L/D* <1.

## 3.6 ELEVAÇÃO DA TEMPERATURA

Mediante o cisalhamento do fluido, a temperatura do lubrificante aumenta até que a taxa na qual o trabalho realizado pelo eixo, seja a mesma daquela na qual o calor é transferido para os arredores maiores. Uma análise térmica em que se considerem as temperaturas dos fluidos entrando e saindo do ânulo do mancal (ponto de menor espessura de filme), além da temperatura do fluido que vaza para fora, permite chegar à seguinte equação:

$$\frac{J\ \rho\, c_p\ \Delta T}{4\pi\ p} = \frac{\dfrac{r_b\ f}{c}}{\left(1-0{,}5\dfrac{Q_s}{Q}\right)\left(\dfrac{Q}{r_b\ c\ N\ L}\right)} \tag{27}$$

Nela, *f* é definido como fator de atrito, J é o calor equivalente, *Q* é a vazão do óleo que escoa para o mancal, $Q_s$ é a vazão de óleo que escoa pelas laterais, *N* é a rotação do eixo e $\Delta T$ o aumento de temperatura do lubrificante recebe ao passar pelo ânulo (ponto de filme mínimo).

A vazão de fluido que escapa do mancal pode ainda ser calculada por:

$$Q_s = \int_0^h w\, dy \tag{28}$$

Enquanto que o fator de atrito (*f*) pode ser estimado a partir dos valores experimentais, encontrados para os diversos materiais, conforme mostra a tabela 1.

TABELA 1: Valores experimentais do fator de atrito [15]

| | Materiais | Coeficiente de atrito *f* | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Atrito de partida | Atrito misto | Atrito fluido |
| Mancais radias | | | | |
| Com lubrificação a graxa | Bronze | 0,12 | 0,05 … 0,1 | ---- |
| Com lubrificação por mecha ou almofada | Bronze | 0,14 | 0,04 … 0,07 | 0,014 |
| Mancal para eixo ferroviário | Metal Branco | 0,24 | ---- | 0,006 |
| Mancal com lubrificação por anel | Metal Branco | 0,24 | ---- | 0,0017 … 0,003 |
| " " " " " | Bronze | 0,14 | ---- | 0,003 … 0,005 |
| " " " " " | Ferro fundido cinzento | 0,14 | 0,02 … 0,1 | 0,004 … 0,008 |
| " " " " " | Material prensado | 0,14 | 0,01 … 0,03 | 0,003 … 0,006 |

## 3.7 CÁLCULO DE PROPRIEDADES

Dentre todas as propriedades dos fluidos, a viscosidade requer a maior consideração no estudo dos escoamentos. Segundo Streeter e Wylie [21], a viscosidade é a propriedade pela qual um fluido oferece resistência ao cisalhamento.

O universo de fluidos lubrificantes analisado neste estudo, é o dos óleos minerais. Tais fluidos satisfazem as hipóteses simplificadoras listadas, no que diz respeito à independência que apresentam entre a viscosidade e a tensão de cisalhamento. Para estes fluidos (Newtonianos) verifica-se então que:

$$\tau = -\mu \frac{du}{dy} \tag{29}$$

Entretanto, observa-se na prática, que a viscosidade destes lubrificantes é extremamente sensível às variações de temperatura que surgem durante operação.

Muitos modelos reológicos têm sido propostos, levando em conta esta dependência física. Dentre os mais utilizados, estão:

a) modelo de Reynolds;

b) modelo de Slotte;

c) modelo de Voguel.

O modelo de Reynolds foi um dos primeiros modelos propostos e tem a vantagem de depender apenas de duas constantes a serem avaliadas para determinação da viscosidade (nas equações abaixo, as constantes são designadas pelas variáveis *a*, *b* e *c*). Porém, verifica-se sua precisão deste modelo somente em casos em que há pequenas variações de temperatura do lubrificante. A forma de sua equação é:

$$\mu = b\, e^{-aT} \tag{30}$$

Outro modelo bem difundido na literatura é o de Slotte. A equação deste modelo exige que três constantes sejam determinadas antes de sua aplicação:

$$\mu = \frac{a}{(b+T)^c} \tag{31}$$

O modelo de Vogel é o mais preciso e mais utilizado em cálculos de engenharia. A sua forma, no entanto, leva a um termo exponencial que pode dificultar o cômputo numérico [2]:

$$\mu = a\, e^{\frac{b}{T-c}} \tag{32}$$

Shigley [20] propõe este modelo para alguns lubrificantes do tipo *SAE* (*Society of Automotive Engineers*). Na equação abaixo, a temperatura é dada em [$^oF$] e a viscosidade em [$\mu Reyn$]. As constantes para os lubrificantes são dadas na tabela 2.

$$\mu = \mu_0\, e^{\frac{b}{T+95}} \tag{33}$$

TABELA 2: Constantes de ajustes de curva [20]

| Grau do óleo, SAE | Viscosidade $\mu_0$, *reyn* | Constante $b$, °F |
|---|---|---|
| 10 | 0,0158($10^{-6}$) | 1157,5 |
| 20 | 0,0136($10^{-6}$) | 1271,6 |
| 30 | 0,0141($10^{-6}$) | 1360,0 |
| 40 | 0,0121($10^{-6}$) | 1474,4 |
| 50 | 0,0170($10^{-6}$) | 1509,6 |
| 60 | 0,0187($10^{-6}$) | 1564,0 |

Para este trabalho, é adotado inicialmente o modelo de Vogel. Caso se verifique dificuldades de convergência das soluções, os modelos mais simples já citados, podem ser usados para substituir o modelo de Vogel.

Observa-se que além da viscosidade, a densidade e o calor específico dos óleos minerais são também sensíveis à temperatura. As equações abaixo permitem o cálculo destas propriedades:

$$\rho = \rho_{t_0}\left(1 - 65\times 10^{-5}\left(T - T_0\right)\right) \tag{34}$$

$$c_p = 3856 - 2{,}345\rho + 4{,}605\,T \qquad \left(\rho > 896\ kg/m^3\right) \tag{35}$$

$$c_p = 2910 - 1{,}290\rho + 4{,}605\,T \qquad \left(\rho \leq 896\ kg/m^3\right) \tag{36}$$

nelas, $\rho_{t0}$ é a densidade do lubrificante a temperatura ambiente (15°C).

## 3.8 TENSÕES DE CISALHAMENTO

Streeter e Wylie [21] definem que uma força de cisalhamento é a componente tangencial da força que age sobre uma superfície. Sua divisão pela área da superfície, dá por definição a tensão de cisalhamento média sobre a área.

Uma vez resolvido o escoamento e, de posse das variáveis primárias, é de extrema importância conhecer quais são as tensões cisalhantes ( $\tau_{\mathbf{xy}}$ , $\tau_{\mathbf{zy}}$ ) atuando nas paredes inferior e superior.

A forma geral das tensões cisalhantes que atuam no fluido [1] são:

$$\tau_{\mathbf{xy}} = \mu\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\left(2y - h\right) + \frac{\mu}{h}U \tag{37}$$

$$\tau_{\mathbf{zy}} = \mu\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial z}\left(2y - h\right) \tag{38}$$

Nas paredes em $y = 0$ e $y = h$, estas tensões valem, portanto:

$$\left.\tau_{\mathbf{xy}}\right|_{\mathbf{y=0}} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\mathbf{y=0}} = -\frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{h}U \tag{39}$$

$$\tau_{\mathbf{xy}}\Big|_{\mathbf{y=h}} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\mathbf{y=h}} = \frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{h}U \tag{40}$$

$$\tau_{\mathbf{zy}}\Big|_{\mathbf{y=0}} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{\mathbf{y=0}} = -\frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{41}$$

$$\tau_{\mathbf{zy}}\Big|_{\mathbf{y}=h} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{\mathbf{y}=h} = \frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{42}$$

É possível também obter as variações de tensão ($\Delta\tau_{xy}, \Delta\tau_{zy}$) ao longo de uma seção, desta forma:

$$\Delta\tau_{\mathbf{xy}} = \tau_{\mathbf{xy}}\Big|_{\mathbf{y=0}}^{\mathbf{y=h}} = h\frac{\partial p}{\partial x} \tag{43}$$

$$\Delta\tau_{\mathbf{zy}} = \tau_{\mathbf{zy}}\Big|_{\mathbf{y=0}}^{\mathbf{y=h}} = h\frac{\partial p}{\partial z} \tag{44}$$

## 3.9 VELOCIDADE MÉDIA

A velocidade média em uma dada seção transversal de um escoamento incompressível pode ser definida por meio da integral média da velocidade:

$$\bar{V} = \frac{1}{A}\int_A u\, dA \tag{45}$$

onde A é seção normal ao escoamento do fluido.

No caso do escoamento em um mancal longo, tem-se ainda que a dimensão do comprimento do mancal é muito maior que a altura do filme de óleo e pode, portanto, ser assumida como sendo igual à unidade. Desta forma é possível, neste caso, simplificar a eq. 45, chegando-se a:

$$\overline{V} = \frac{1}{h}\int_0^h u\, dy \tag{46}$$

A velocidade média é uma importante variável secundária, a qual será utilizada neste problema.

## 3.10 VERIFICAÇÃO DA SOLUÇÃO NUMÉRICA

Para a verificação de uma solução numérica, faz-se necessário comparar a solução analítica ($\Phi$) da variável de interesse, com sua respectiva aproximação ($\phi$), por meio da diferença:

$$E_n(\phi) = \Phi - \phi \tag{47}$$

Observa-se que em qualquer aproximação numérica, o erro sempre estará presente, sendo necessário compreender as razões do surgimento do erro, quais são as diversas fontes e o que interfere na sua magnitude.

Segundo Marchi [14], o erro numérico deve-se a componentes de erro de arredondamento ($\varepsilon_\pi$), de erro de iteração ($\varepsilon_n$), de erro do usuário ($\varepsilon_u$), de erro de programação ($\varepsilon_p$) e de erro de truncamento ($\varepsilon_t$). Definições para cada uma destas fontes de erro estão abaixo apresentadas:

a) erro de arredondamento ($\varepsilon_\pi$): é o erro devido à precisão finita dos computadores, pois sua aritmética de ponto fixo e de ponto flutuante, inevitavelmente, trunca a representação numérica, armazenando-a conforme o número de *bits* disponíveis. Este erro pode, entretanto, ser minimizado com a utilização de um maior número de *bits*, ou seja, uma precisão dupla;

b) erro de iteração ($\varepsilon_n$): é definido como a diferença entre a solução exata das equações discretizadas e a solução numérica em uma dada iteração. *Solvers* iterativos contribuem, portanto, como fonte deste tipo de erro. As não-linearidades das equações governantes, como por exemplo, os termos advectivos nas equações de balanço de quantidade de movimento, tornam o sistema de equações discreto mais susceptível ao erro de discretização quando resolvidos pelos métodos iterativos. O desacoplamento das equações a serem resolvidas também contribui da mesma forma. Para diminuir este erro, existem maneiras que vão desde a escolha da norma de erro mais indicada (caso quando se utilizam *solvers* iterativos para sistemas de equações algébricas), até o aumento do número de iterações, de forma a reduzi-lo ao nível de precisão da máquina (se não existirem problemas com o erro de arredondamento). Sabe-se que o refinamento da malha tende a dificultar a redução do erro iterativo e, para contornar este problema relativo à dimensão do sistema de equações a resolver, novas técnicas como o *Multigrid* e o Multibloco têm sido desenvolvidas extensivamente;

c) erro do usuário ($\varepsilon_u$): é aquele introduzido pelo usuário quando os resultados de saída do programa computacional, são mal lidos ou mal interpretados por quem opera o computador;

d) erro de programação ($\varepsilon_p$): pode ter como possíveis causa uma má implementação do modelo computacional, um algoritmo apresentando falhas ou uma discretização incorreta das equações governantes do problema;

e) erro de truncamento ($\varepsilon_t$): é o resíduo que resulta quando se substitui a solução exata da variável dependente, na equação discretizada do modelo matemático. Se a variável dependente (for substituída em termos da série de Taylor, para os nós que estão envolvidos na equação discretizada e levando-se o tamanho dos elementos da malha para $h \to 0$, chega-se a:

$$\varepsilon_t = c\, h^p \tag{48}$$

onde *c* é um coeficiente admitido como constante e "*p*" é definido como sendo a ordem do erro de truncamento.

Tendo em vista que os erros oriundos das diversas fontes já citadas podem assumir valores positivos e negativos, o efeito global do somatório destas fontes pode ser cancelativo, ou seja, ele não é necessariamente acumulativo. Admitindo-se que neste trabalho não existam erros de programação nem do usuário, bem como ao empregar-se o método TDMA (*Tri-Diagonal Matrix Algorithm*), os erros de iteração sejam minimizados e ainda que o uso de uma precisão dupla conduza a erros de arredondamento aceitáveis, chega-se à conclusão de que a fonte de erro dominante é a do tipo de erro de truncamento.

Quando o erro da solução numérica é gerado apenas pelo erro de truncamento ($\varepsilon_t$), ou quando todos os outros são desprezíveis em relação a ele, o erro numérico passa a ser definido como sendo o próprio erro de truncamento e a eq. 47 fica reduzida a:

$$\varepsilon(\phi) = \Phi - \phi \tag{49}$$

notando-se agora a queda do sub-índice referente à fonte do erro. No seguimento deste trabalho, portanto, o erro de truncamento passa a ser definido somente por $\varepsilon$.

Uma vez conhecida a solução analítica exata ($\Phi$) e a solução numérica ($\phi$) da variável de interesse, o erro de truncamento pode ser determinado diretamente por meio da eq. 49, ou então substituindo nesta equação a expressão exata ($\Phi$), obtida da série de Taylor e a expressão usada na aproximação numérica ($\phi$). Obtém-se assim uma expressão onde coeficientes multiplicam potências do tamanho $h$ dos elementos da malha e, a partir dos expoentes de $h$, surgem os conceitos de ordens verdadeiras e assintóticas do erro de truncamento definidas na seção seguinte.

## 3.11 ORDENS DO ERRO DE TRUNCAMENTO

Aplicando-se a série de Taylor sobre o erro de discretização pode-se chegar, portanto, à seguinte equação:

$$\varepsilon(\phi) = c_1 h^{p_L} + c_2 h^{p_2} + c_3 h^{p_3} + c_4 h^{p_4} + \ldots \tag{50}$$

Na eq. 50, os coeficientes $c_i$ (onde $i$ = 1, 2, 3...) podem assumir valores positivos e negativos, podendo ser função da variável independente ou de suas derivadas, mas ela independe do tamanho $h$ dos elementos da malha.

A eq. 50 foi denominada em [13] de equação geral do erro de truncamento e receberá a mesma denominação neste trabalho.

Os expoentes de *h* foram definidos como sendo as ordens verdadeiras ($p_v$). No caso geral, este número de ordens tende ao infinito, uma vez que o erro de truncamento ($\varepsilon$) é constituído por uma quantidade infinita de termos não-nulos.

As ordens verdadeiras obedecem a relação na qual $p_L < p_2 < p_3 < p_4 < \cdots < p_n$. Estes são números inteiros positivos, que geralmente seguem uma progressão do tipo aritmética.

O menor expoente de *h* na equação geral do erro de truncamento (primeiro termo) é chamado, por definição, de ordem assintótica ($p_L$), que por sua vez, deve obedecer à desigualdade $p_L \geq 1$. Geometricamente, $p_L$ pode ser interpretada como sendo a inclinação da curva de erro em um gráfico $log\left|E\right|$ *versus* $log(h)$, quando $h \to 0$. Quanto maior for a inclinação desta reta, maior será a ordem assintótica e, consequentemente, maior será o decaimento do erro com o refinamento da malha.

É possível demonstrar que quando o tamanho das malhas tende a zero ($h \to 0$), a eq. 50 acaba reduzindo-se à eq. 48, uma vez que o termo de ordem assintótica é dominante em relação aos demais, na composição do erro de discretização.

Quando o erro da solução numérica é provocado apenas por erros de truncamento ($\varepsilon$), a diferença entre a solução analítica exata ($\Phi$) de uma variável qualquer e sua correspondente solução numérica ($\phi$) é denominada erro de discretização ($E$), definido por:

$$E(\phi) = \Phi - \phi \qquad (51)$$

É possível também calcular o erro de discretização de forma análoga àquela feita à equação geral do truncamento (eq. 50):

$$E(\phi) = C_1 h^{p_L} + C_2 h^{p_2} + C_3 h^{p_3} + C_4 h^{p_4} + \ldots \qquad (52)$$

Esta equação é definida como sendo a equação geral do erro de discretização [13] e da mesma forma que no caso da equação geral de truncamento, podem ser definidas para a eq. 52, as ordens verdadeiras e assintóticas, assim como foi feito para a eq. 50.

## 3.12 ORDEM EFETIVA E ORDEM APARENTE

Os cálculos feitos até então para a determinação da ordem assintótica dos erros de truncamento, não necessitaram avaliar a solução numérica da variável de interesse, pelo fato de que esta ordem é um resultado puramente teórico. As ordens de erros já apresentadas, permitem estimar o comportamento assintótico do erro de discretização com relação ao refino da malha ($h$), antes mesmo que a solução numérica ($\phi$) seja calculada, significando portanto, que a ordem assintótica do erro numérico é obtida *a priori* das soluções numéricas.

Neste ponto, introduz-se os conceitos e expressões de duas novas ordens de erro, que são: a ordem efetiva do erro de discretização e a ordem aparente da incerteza de soluções numéricas. Estas novas ordens, diferente do que já foi apresentado, são calculadas *a posteriori* da solução numérica, ou seja, sua determinação só é possível partindo-se da solução numérica, previamente calculada. Estas novas ordens têm por objetivo, verificar se a ordem assintótica dos erros de truncamento (obtida teoricamente) é atingida.

### 3.12.1 Ordem Efetiva

A ordem efetiva ($p_E$) é definida como a inclinação local da curva do erro de discretização ($E$) da solução numérica ($\phi$) *versus* o tamanho dos elementos da malha ($h$) num gráfico logaritmico e seu cálculo permite verificar se à medida que $h$ é reduzido, a ordem do erro de discretização das soluções numéricas tende à ordem assintótica dos erros de truncamento. A ordem efetiva pode ser definida matematicamente como sendo:

$$C_E \, h^{p_E} = E(\phi) \tag{53}$$

Nesta, $C_E$ é um coeficiente admitido como sendo independente de $h$.

A partir da definição de ordem de erro efetiva dada pela eq. 53 e conhecendo-se a solução numérica ($\phi$) da variável de interesse em duas malhas distintas ($h_1$ e $h_2$, por exemplo), é possível resolver o sistema não-linear formado pelas duas equações e chegar, portanto a:

$$p_E = \frac{log\left[\dfrac{E(\phi_2)}{E(\phi_1)}\right]}{log(q)} \tag{54}$$

Nesta equação, $E(\phi_1)$ é o erro de discretização na malha $h_1$ mais fina, e $E(\phi_2)$ é o erro de discretização obtido para a malha $h_2$ mais grosseira. Tem-se ainda que $q$ é definido como a razão de refino e sua expressão é dada por:

$$q = \frac{h_2}{h_1} \tag{55}$$

### 3.12.2 Ordem Aparente

Para a definição da ordem aparente ($p_U$) é necessário introduzir antes, o conceito de incerteza ($U$) da solução numérica. Nos casos apresentados até agora, a avaliação do erro de discretização podia ser feita tanto por meio da eq. 51, quanto da eq. 52, sendo necessário o conhecimento da solução analítica da variável de interesse.

Porém, na maioria dos casos práticos (problemas de Engenharia), nos quais busca-se determinar a solução numérica, a solução analítica do problema é desconhecida, o que impossibilita a abordagem feita até então. Quando isto ocorre, faz-se necessário estimar qual é o valor da solução analítica. Assim, o erro de discretização torna-se uma estimativa de erro, uma vez que possui uma incerteza em seu valor. Esta estimativa é definida pois, como incerteza da solução numérica ($U$):

$$U(\phi) = \phi_\infty - \phi \tag{56}$$

sendo que nesta equação, $\phi_\infty$ representa a solução analítica estimada para a variável de interesse.

O cálculo da incerteza numérica pode ser feita por meio de estimadores de erro. Na próxima seção será definido um estimador para este fim.

Uma vez claros os conceitos de incerteza da solução numérica, é possível agora definir a ordem aparente como sendo a inclinação local da curva de incerteza ($U$) da solução numérica $(\phi)$ *versus* o tamanho dos elementos da malha ($h$) num gráfico logaritmico.

Com o seu cálculo, é possível verificar se à medida em que $h$ é reduzido, a ordem da incerteza das soluções tende à ordem assintótica dos erros de truncamento, lembrando que esta ordem é um resultado teórico obtido *a priori* da solução numérica.

Assim como foi feito para a ordem efetiva, é possível introduzir o conceito de ordem aparente como sendo:

$$K_U h^{p_U} = U(\phi) \tag{57}$$

Substituindo-se a eq. 56, na eq. 57 e, definindo-se três soluções numéricas para a variável de interesse ($\phi_1$, $\phi_2$ e $\phi_3$) em um mesmo ponto, sendo elas obtidas por meio de três malhas ($h_1$, $h_2$ e $h_3$) em que a razão de refino é constante, é possível montar um sistema de três equações onde as incógnitas são $\phi_\infty$, $K_U$ e $p_U$. Resolvendo-se este sistema para $p_U$, chega-se portanto:

$$p_U = \frac{log\left[\dfrac{\phi_2 - \phi_3}{\phi_1 - \phi_2}\right]}{log(q)} \tag{58}$$

onde $\phi_1$ é a solução numérica obtida para a malha mais fina ($h_1$), $\phi_2$ é a solução numérica na malha intermediária ($h_2$) e $\phi_3$ é a solução numérica na malha mais grossa ($h_3$). A variável $q$ é razão de refino constante da malha, já definida por meio da eq. 55.

O valor de $p_U$ pode ser interpretado como a inclinação média das incertezas $U_1$, $U_2$ e $U_3$ das soluções $\phi_1$, $\phi_2$ e $\phi_3$, entre $h_1$ e $h_3$, num gráfico logaritmico $U$ *versus* $h$. Observa-se que o cálculo de $p_U$, diferentemente de $p_E$, não necessita do conhecimento da solução analítica, podendo portanto, ser aplicada para qualquer problema e variável de interesse (primária, secundária, local, ou até mesmo global).

Resolvendo agora o mesmo sistema para a variável $\phi_\infty$, é possível chegar à relação:

$$\phi_\infty = \phi_1 + \frac{(\phi_1 - \phi_2)}{(q^{P_U} - 1)} \tag{59}$$

Convém ressaltar que para obter tanto a ordem aparente, quanto a solução analítica estimada ($\phi_\infty$), apresentadas acima, foi necessário o emprego de três malhas diferentes com a mesma razão de refino.

## 3.13 ESTIMADOR GCI

O estimador GCI (*Grid Convergence Index*) permite definir um intervalo em torno da solução numérica, onde a solução analítica tem grande chance de estar contida. Matematicamente, este estimador é definido como sendo:

$$U_{GCI}(\phi_1) = \frac{F_S\,|\phi_1 - \phi_2|}{q^{P_L} - 1} \tag{60}$$

Nesta equação, $F_S$ representa um coeficiente de segurança, que normalmente é adotado com valor igual a três, o que proporciona 95% de confiabilidade de que a solução analítica esteja contida no intervalo de incerteza definido pelo estimador. Este fator portanto, é aceitável para a maioria das aplicações gerais na Engenharia. Para aplicar o estimador, conclui-se através da eq. 60, a necessidade de avaliar a variável de interesse, calculada em duas malhas distintas: $h_1$ mais refinada e $h_2$ grosseira, para que as respectivas soluções numéricas $\phi_1$ e $\phi_2$, possam ser calculadas.

Pode-se definir então, dois limites para a solução numérica por meio do uso do GCI, um inferior e um superior:

$$\phi_{\infty}^{-} = \phi_1 - U_{GCI}\left(\phi_1\right) \tag{61}$$

$$\phi_{\infty}^{+} = \phi_1 + U_{GCI}\left(\phi_1\right) \tag{62}$$

Na Fig. 4 abaixo, extraída de [13], é possível visualizar um exemplo de estimativa confiável feita por meio do GCI, uma vez que a solução analítica da variável de interesse encontra-se contida dentro do intervalo estabelecido por $\phi_{\infty}^{-}$ e $\phi_{\infty}^{+}$.

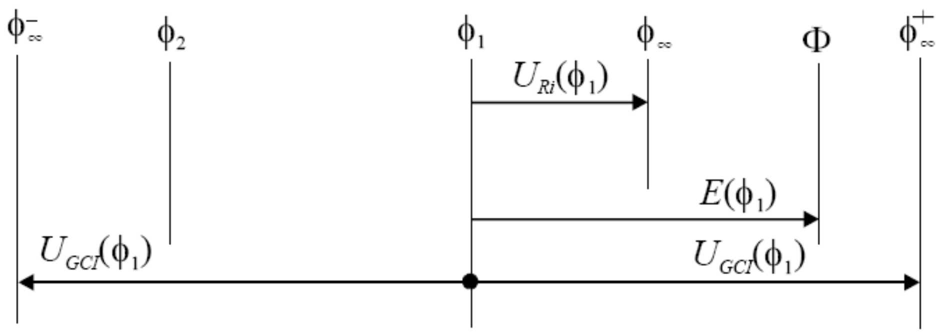



FIGURA 9 – Exemplo de incerteza ($U_{GCI}$) confiável obtida com GCI [13]

Para que a incerteza advinda deste estimador possa ser considerada confiável, é necessário analisar se a razão $\frac{U_{GCI}}{|E|} \geq 1$, sendo esta uma condição necessária para que os limites $\phi_{\infty}^{-}$ e $\phi_{\infty}^{+}$ englobem a solução analítica ($\Phi$), com a confiabilidade desejada para o cálculo.

# 4 PROBLEMA 1

O primeiro problema estudado trata-se do escoamento de um óleo lubrificante em torno de um mancal longo. Nele, admitiu-se a viscosidade do fluido lubrificante como sendo constante e que a equação da velocidade fosse desacoplada da equação da energia, com a finalidade de obter uma solução analítica do problema inicial. O mancal e o eixo foram mantidos a temperaturas constantes e prescritas. Isto permitiu que a viscosidade pudesse ser avaliada numa temperatura média entre estas duas superfícies.

Os resultados numéricos são comparados com a solução analítica desenvolvida por Sommerfeld e os respectivos erros entre as duas soluções permitem determinar as ordens de convergência dos vários parâmetros calculados numericamente, como também a verificação do programa desenvolvido.

## 4.1 MODELO MATEMÁTICO DO PROBLEMA 1

A equação que trata do escoamento unidimensional com viscosidade constante é a eq. 11, a qual é utilizada neste problema. Para uma dada geometria, isto é, para um $\varepsilon$ prescrito (eq. 15), é possível determinar o ângulo $\phi_m$ por meio da eq. 19, cuja posse permite ainda, a determinação da respectiva altura do filme de fluido lubrificante, no ponto de gradiente de pressão nulo por meio da eq. 16.

Para o cálculo das velocidades analíticas e numéricas, o conhecimento do gradiente de pressão faz-se necessário e, para isso, sua determinação se dá por meio da eq. 13. As respectivas soluções analíticas da eq. 11, para o campo de pressão ao redor do eixo e para o perfil de velocidades do óleo escoando em uma dada seção circunferencial do mancal, dão-se por meio das eq. 17 e eq. 12.

A viscosidade global do óleo pode ser calculada utilizando-se o modelo de Vogel, onde a temperatura do fluido considerada é a temperatura média entre a do fluido e a do eixo. A relação reológica entre temperatura-viscosidade dá-se pela eq. 33.

As constantes ($\mu_0$) e ($b$) da eq. 33 podem ser determinadas em função do óleo lubrificante por meio da tabela 2. Foi determinado para este problema a utilização do óleo SAE 20.

A solução para campo de temperaturas no caso do escoamento de um fluido entre placas paralelas em que não há gradiente de pressão, é determinado pela equação abaixo, conforme [10]:

$$T(y) = T_0 + \frac{\mu}{2k} U^2 \left[ \frac{y}{h} - \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right] + (T_L - T_0) \frac{y}{h} \tag{63}$$

A eq. 63 pode ser utilizada como uma boa aproximação para o campo de temperatura quando a viscosidade puder ser considerada constante e o gradiente de pressão for considerado desprezível. Desta forma, este campo de temperatura analítico é calculado e comparado com o campo de temperaturas da eq. 64, em que o gradiente de pressão é não-nulo:

$$\begin{aligned} T(y) = T_1 + \left( \frac{T_1 - T_0}{2} + \frac{\mu U u_{max}}{3k} \right) \left[ 1 + 2 \left( \frac{y}{h} \right) \right] + \ldots \\ + \frac{U^2 \mu}{8k} \left[ 1 - 4 \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right] - \frac{\mu U u_{max}}{3k} \left[ 1 + 8 \left( \frac{y}{h} \right)^3 \right] + \ldots \\ + \frac{\mu u_{max}}{3k} \left[ 1 - 16 \left( \frac{y}{h} \right)^4 \right] \end{aligned} \tag{64}$$

onde $u_{max}$ é dado pela equação:

$$u_{max} = -\frac{h^2}{8\mu} \frac{dp}{dx} \tag{65}$$

A eq. 64 deduzida por Pinkus [18], é a solução analítica para o caso do escoamento de um fluido entre duas placas paralelas em que há gradiente de pressão, caso que se observa no escoamento em um mancal de deslizamento. A eq. 64 tem como eixo de referência o ponto médio da altura *h* e deve-se fazer uma translação de eixos coordenados para que a sua origem coincida com a da eq. 63.

## 4.2 VARIÁVEIS DE INTERESSE

Para o problema 1, a principal variável de interesse cuja avaliação se dá numericamente, é a velocidade do fluido lubrificante escoando por entre o eixo e o mancal. Assim, a eq. 11 foi discretizada (ver APÊNDICE D) considerando que o gradiente de pressão ao redor do eixo foi prescrito por meio de sua solução analítica e a velocidade pôde então ser calculada numericamente de maneira mais simples (sem o acoplamento Pressão-Velocidade) e comparada com a velocidade analítica.

A velocidade média do fluido permite que possa ser feita uma descrição qualitativa de como o escoamento evolui. Para pontos em que há restrições ao escoamento (como menor altura *h*), é de se esperar que a velocidade média do fluido aumente obedecendo a Lei de Conservação de Massa.

O campo de tensões de cisalhamento do fluido é outro parâmetro de extremo interesse prático, uma vez que o seu cálculo permite a avaliação das tensões cisalhantes atuantes no eixo e no mancal devido seu escoamento do fluido. Isto leva portanto ao conhecimento do nível das solicitações mecânicas e do desgaste, aos quais os materiais empregados na seleção do eixo e do mancal estão sujeitos.

## 4.3 PROBLEMA NUMÉRICO

Para a solução da velocidade do fluido, é necessário *a priori*, a determinação do campo de pressão $p$, por meio de sua solução analítica.

O programa calcula então as pressões no fluido em todos os $N_x$ pontos que seccionam o eixo circunferencialmente em uma dada posição longitudinal genérica. Isto porque o modelo do Mancal Infinito de Sommerfeld prevê que a pressão mantém-se invariável no sentido longitudinal do eixo fazendo, portanto, com que os campos de velocidade sejam os mesmos em qualquer seção feita neste sentido. O fato de a pressão variar somente com a direção circunferencial é que torna possível modelar o escoamento como sendo bidimensional (a velocidade varia ao longo da direção radial e circunferencial). Porém para fins de cálculo, as simulações serão realizadas considerando um escoamento quase-unidimensioanal, ou seja, serão resolvidos vários escoamentos unidimensionais ao longo das várias seções do mancal.

O registro das velocidades permite obter a evolução das tensões de cisalhamento no eixo e no mancal ao longo de toda a volta destas superfícies. Esta análise leva à determinação dos pontos circunferenciais mais críticos em termos de tensão atuante.

Para fins de visualização dos dados, é escolhido pelo usuário do programa durante a simulação, um ponto circunferencial $\theta$ (cujo valor está entre 0° e 360°) de modo que neste ponto seja possível observar como estão se comportando os perfis de velocidade, térmico e o cisalhamento no fluido.

O programa utilizado nesta primeira etapa do trabalho de graduação foi denominado *Sommerfeld_1*. Ele foi desenvolvido em linguagem Fortran 90 por meio do aplicativo *Microsoft Power Station 4.0*. O tipo de projeto desenvolvido foi *Console Application*. O algoritmo deste programa é mostrado abaixo, seguindo os passos de 1 a 8:

1) leitura dos dados de entrada;
2) discretização da direção circunferencial e das seções radiais;
3) cálculo das viscosidades nas faces dos volumes (a viscosidade é constante);
4) cálculo do campo de pressão analítico e do gradiente de pressão analítico;
5) cálculo dos campos de velocidade e de temperatura analíticos;
6) resolução numérica da velocidade nos nós, com base nas etapas (2) e (4);
7) cálculo das variáveis secundárias de interesse;
8) visualização dos dados calculados por meio de tabelas e gráficos.

Para o cômputo numérico pelo Método de Volumes Finitos, foi escolhida a técnica dos volumes fictícios para aplicar as condições de contorno e, pelo fato do primeiro problema proposto ser 1D, o *solver* TDMA (*Tri-Diagonal Matrix Algorithm*) foi julgado ser o mais conveniente para a solução do sistema de equações lineares resultantes.

A solução numérica do problema é obtida para cada conjunto de $N_y$ pontos contidos entre o eixo e o mancal em uma dada coordenada circunferencial. Assim, o método numérico é aplicado repetidamente a cada seção circunferencial até que todo o perímetro do eixo seja "percorrido" e, portanto solucionado pelo método.

Para cada novo ponto circunferencial atingido pelo algoritmo, atrela-se: um novo conjunto de pontos radiais e cujas velocidades são objetivos de cálculo, condições de contorno de não-escorregamento (ver seção 3.4) e um novo valor de altura de filme de óleo devido à excentricidade do conjunto eixo-mancal.

Os coeficientes dos termos utilizados pelo Método de Volumes Finitos para os volumes reais e fictícios podem ser observados na tabela 3.

TABELA 3: Coeficientes dos volumes de controle empregados no problema 1

| *Coeficientes* | *Volumes Reais* | *Volumes Fictícios* | |
|---|---|---|---|
| | | Inferiores | Superiores |
| $a_P$ | $a_e + a_w$ | 1 | 1 |
| $a_w$ | $\frac{\mu_w}{Dy_w}$ | 0 | -1 |
| $a_e$ | $\frac{\mu_e}{Dy_e}$ | -1 | 0 |
| $b_P$ | $-Dy \cdot \frac{dp}{dx}$ | 0 | 2.U |

Com base nestes coeficientes é possível resolver o sistema de equações lineares cuja forma geral, para aplicação do método de volumes finitos, é a dada pela eq. 66:

$$a_p\, u_P = a_e\, u_E + a_w\, u_W + b_p \qquad (66)$$

A velocidade média na seção definida pela coordenada $\phi$ foi considerada como sendo uma variável secundária relevante, uma vez que descreve o comportamento global do perfil de velocidades naquela seção. Foi então utilizada a regra do retângulo para integração numérica desta variável secundária, com base nas velocidades locais calculadas pelo programa.

## 4.4 RESULTADOS OBTIDOS

Foram realizadas diversas simulações onde a malha do domínio foi refinada tanto na direção radial quanto na direção circunferencial. Foi adotado portanto, como base para as simulações um conjunto eixo-mancal com características geométricas listadas na tabela 4.

TABELA 4: Parâmetros geométricos do mancal e eixo

| *Propriedades* | *Valor* |
|---|---|
| Razão de excentricidade ($Ep$) | 0,5 |
| Comprimento do mancal ($L$) | 1000 mm |
| Diâmetro do mancal ($D$) | 120 mm |
| Diâmetro do eixo ($D_b$) | 100 mm |
| Temperatura do mancal ($T_o$) | 10 °C |
| Temperatura do eixo ($T_h$) | 30 °C |
| Velocidade ângular ($N$) | 478 rpm |

As propriedades físicas utilizadas para o óleo SAE-20 e comumente encontradas na literatura [9, 20] foram compiladas na tabela 5.

TABELA 5: Propriedades físicas do lubrificante

| *Propriedades (a 20 °C)* | *Valor* |
|---|---|
| Condutividade térmica | 0,145 W/mK |
| Massa específica | 882,8 kg/m³ |
| Viscosidade cinemática | 4,4 cSt |

Para uma malha mais refinada ($N_x = 100$ e $N_y = 100$) as respectivas alturas do filme de óleo e campo de pressão encontram-se ilustrados na Fig. 10.

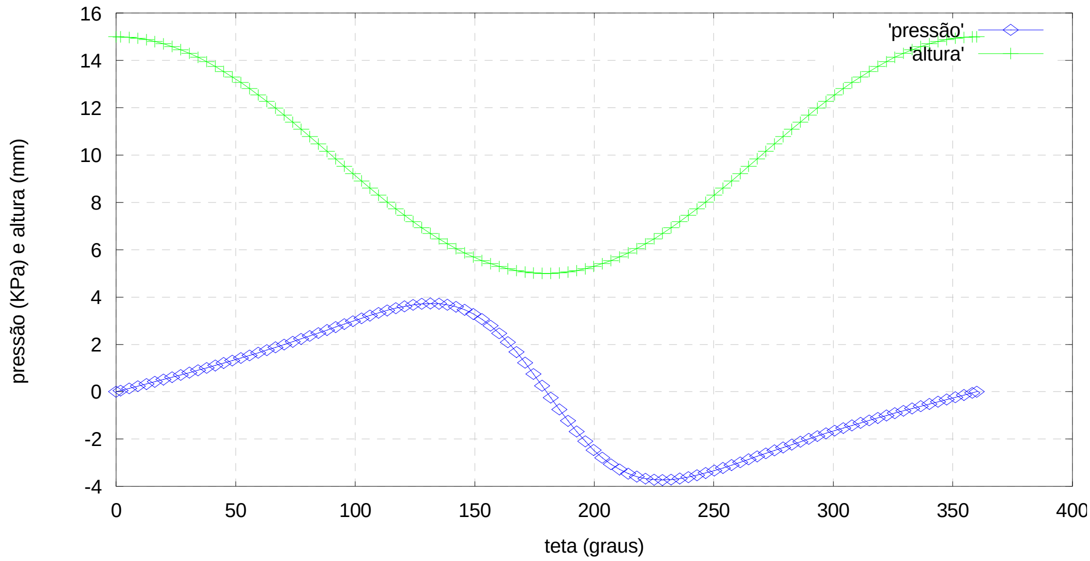



FIGURA 10 - Campo de pressão e altura do filme de óleo

Observa-se na Fig. 10, que o campo de pressões da solução de Sommerfeld pode ser descrito por meio de uma função ímpar, permitindo que apenas uma de suas metades ($\theta$ de 0° a 180°, por exemplo) seja calculada e armazenada na memória do computador.

Desconsiderando-se a pressão negativa na parte divergente do escoamento, como é o caso da meia-solução de Sommerfeld e representando este campo de pressões sobre um corte transversal ao eixo, é possível visualizar na Fig. 11 o comportamento da "onda" de pressão sobre o eixo.

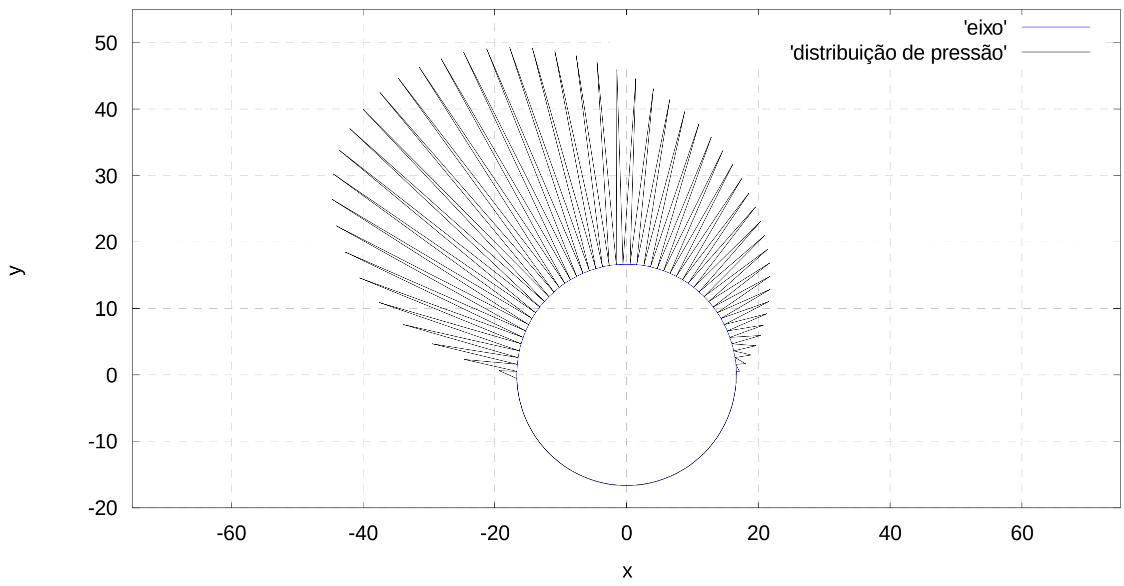



FIGURA 11 - Distribuição de pressão ao longo do eixo

Conforme pode ser observado na Fig. 11, a meia solução de Sommerfeld não se preocupa com a possibilidade do fluido lubrificante sofrer cavitação, já que a pressão é assumida nula na porção divergente do escoamento (de $\theta$ = 180° a $\theta$ = 360°).

Sommerfeld propôs que o gradiente de pressão no mancal fosse calculado pela eq. 13 e na Fig. 12, é possível acompanhar a evolução do gradiente de pressão nas várias seções circunferenciais, obtidas por esta equação.

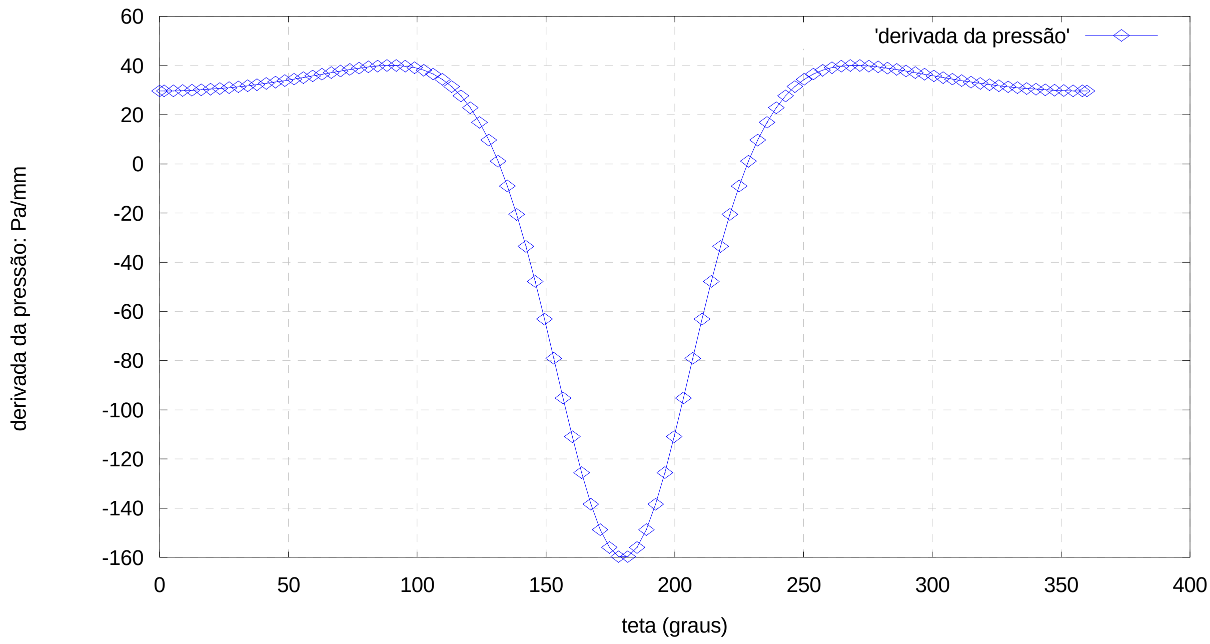



FIGURA 12 - Gradiente de pressão ao longo do mancal ($N_x$ = 100 e $N_y$ = 100)

Ainda na Fig. 12, é possível observar que nos ângulos compreendidos entre 0° a 40°, o gradiente de pressão manteve-se positivo, mas aproximadamente constante, podendo ser interpretado que nesta faixa, a pressão aumentou de maneira mais moderada. Numa segunda parte do escoamento convergente ($\theta$ = 40° a 100°) a pressão cresceu de maneira mais rápida, visto que o gradiente de pressão aumentou seu valor. Finalmente, numa terceira etapa do escoamento convergente ($\theta$ = 100° a 180°), o crescimento da pressão passou a ser “freado” devido ao gradiente de pressão nulo. Verifica-se que isto ocorre até o momento em que o gradiente de pressão atinge seu valor mínimo. Nota-se ainda que pela inércia do sistema, o ponto de pressão máxima ocorreu na coordenada $\theta$ = 140°, ponto este, onde o gradiente é nulo, o que pode ser confirmado por meio da Fig. 10.

As tensões de cisalhamento analíticas e numéricas que atuam no mancal e no eixo estão representadas na Fig. 13 ao longo de todo o perímetro. As variações máximas destas tensões ao longo de uma mesma seção estão mostradas na Fig. 14.

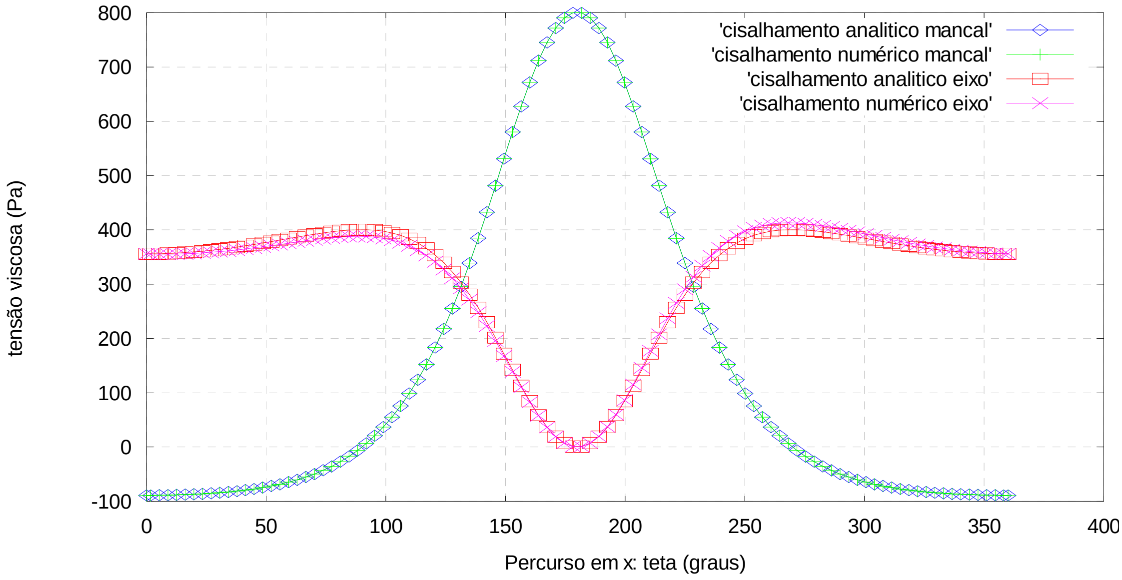



FIGURA 13 - Tensões de cisalhamento nas superfícies do eixo e do mancal ($N_x$= 100 e $N_y$ = 100)

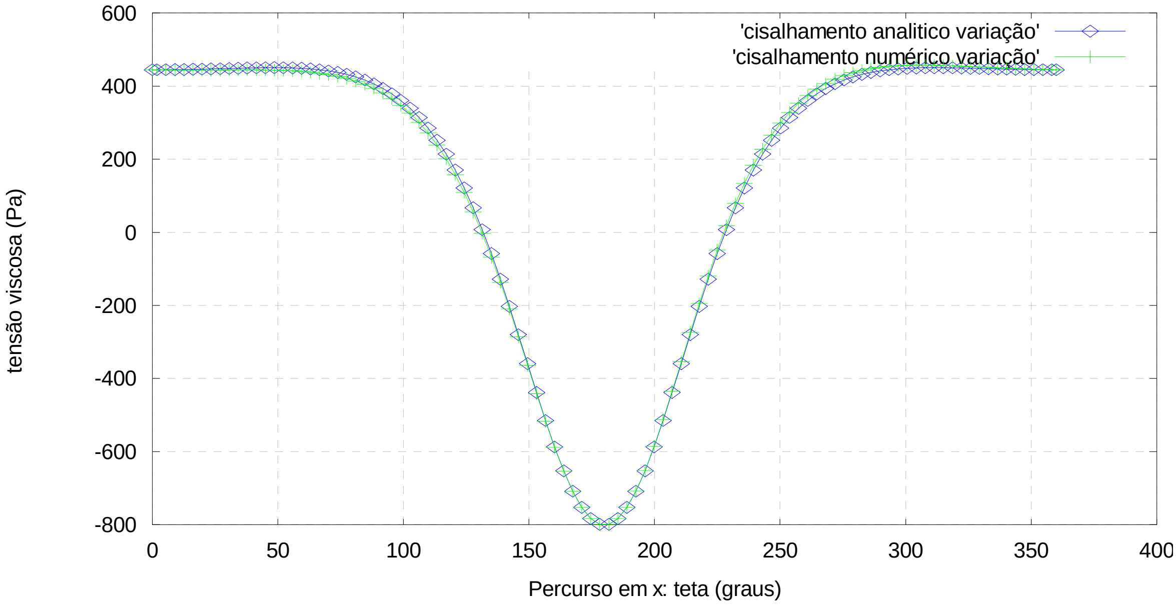



FIGURA 14 - Variação da tensão de cisalhamento no mancal e no eixo ($N_x$ = 100 e $N_y$ = 100)

Nas Fig. 13 e Fig. 14 observa-se que até $\theta$ = 90° as tensões que atuam no eixo e no mancal possuem sentidos contrários e que em $\theta$ = 180° ambas as tensões possuem seus maiores valores em módulo, o que torna a variação das tensões mínima neste ponto.

Para a avaliação das ordens efetivas de erro das diversas variáveis calculadas numericamente, iniciou-se as simulações com uma malha grosseira de 100 volumes ($N_x$ = 10 e $N_y$ = 10), conforme mostrado na Fig. 15.

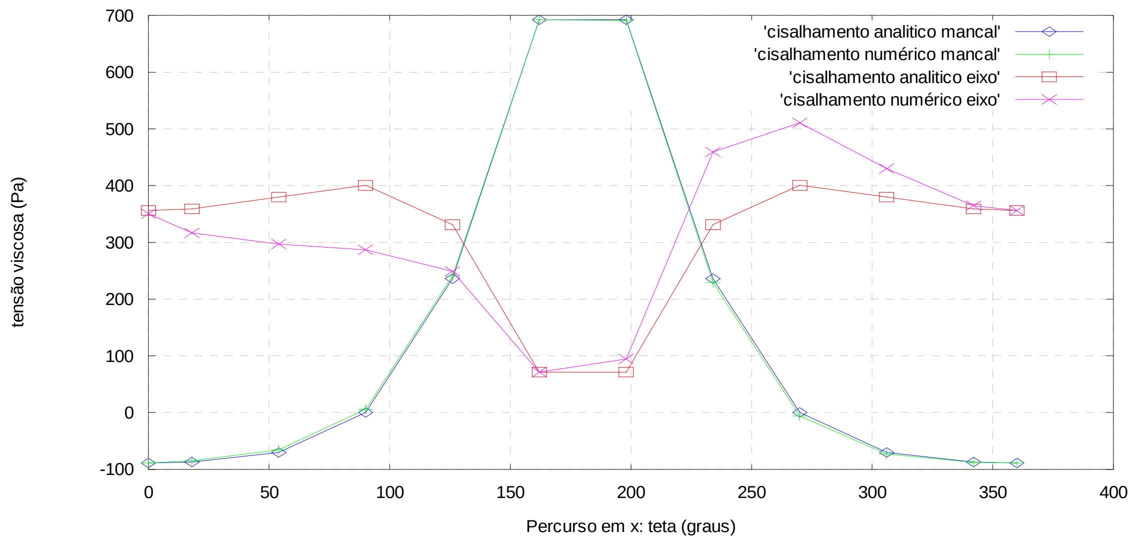



FIGURA 15 - Cisalhamento na malha de base ($N_x$ = 10 e $N_y$ = 10)

Observou-se que para esta malha base, os maiores erros numéricos, tanto para a variável tensão no mancal quanto para a tensão no eixo, ocorriam no nó número 7, ponto este que corresponde à coordenada $\theta$ = 230°. Sabe-se que pelo método do Volumes Finitos, ao se triplicar o número de volumes adotados numa direção, é possível sempre manter um nó do meio discreto, coincidindo com uma determinada posição de interesse do meio contínuo.

Desta forma, a malha base foi refinada até o limite da capacidade de armazenamento de memória *RAM* do sistema utilizado nas simulações. Na tabela 6 foram listadas todas as malhas utilizadas na determinação das variáveis de interesse no problema 1.

TABELA 6: Malhas utilizadas nas simulações do problema 1

| Malha | $N_x$ | $N_y$ |
|---|---|---|
| 1 | 10 | 10 |
| 2 | 30 | 30 |
| 3 | 90 | 90 |
| 4 | 270 | 270 |
| 5 | 810 | 810 |
| 6 | 2430 | 2430 |

O comportamento do erro numérico em função do refinamento da malha é melhor representado num gráfico *bi-log*. Desta forma é apresentada na Fig. 16 a relação do erro *versus* a dimensão da malha (*h*). Nesta figura é apresentada ainda a estimativa do erro numérico que seria utilizada caso não se tivesse à disposição a solução analítica exata.

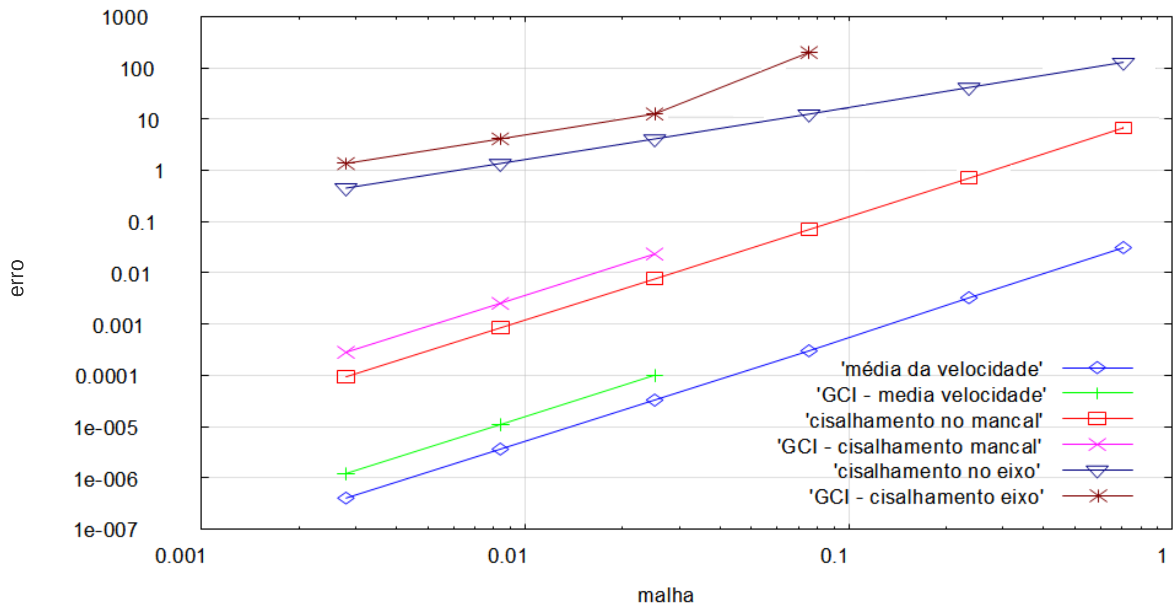



FIGURA 16 - Gráfico de erro *versus* dimensão da malha ($h$)

Com o auxílio do programa *Richardson_3p0*, é possível a partir dos dados de saída numéricos e de seus respectivos erros, determinar a ordem de erro efetiva das diversas variáveis calculadas. Estas ordens do erro podem ser observadas por meio da Fig. 17 para cada uma das variáveis de interesse.

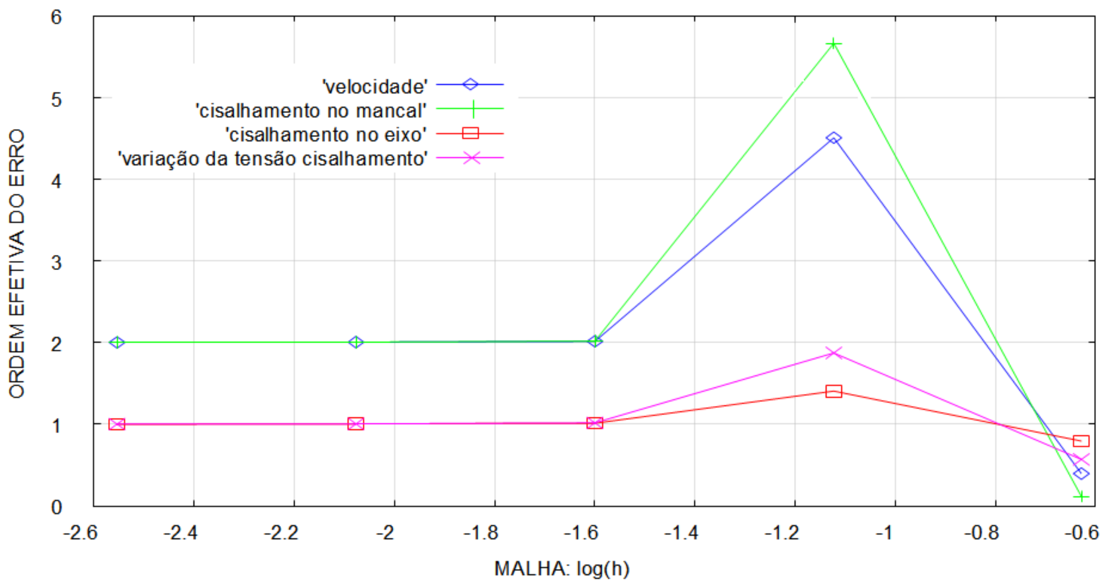



FIGURA 17 - Ordens de convergência do erro

Considerando ainda o mesmo ponto $\theta = 230°$, é possível observar nesta seção, como se comporta o perfil de velocidades. A Fig. 18 mostra este campo de velocidades calculado numericamente para uma malha de 100 volumes ($N_x$ = 10 e $N_y$ = 10) e a sua solução analítica exata.

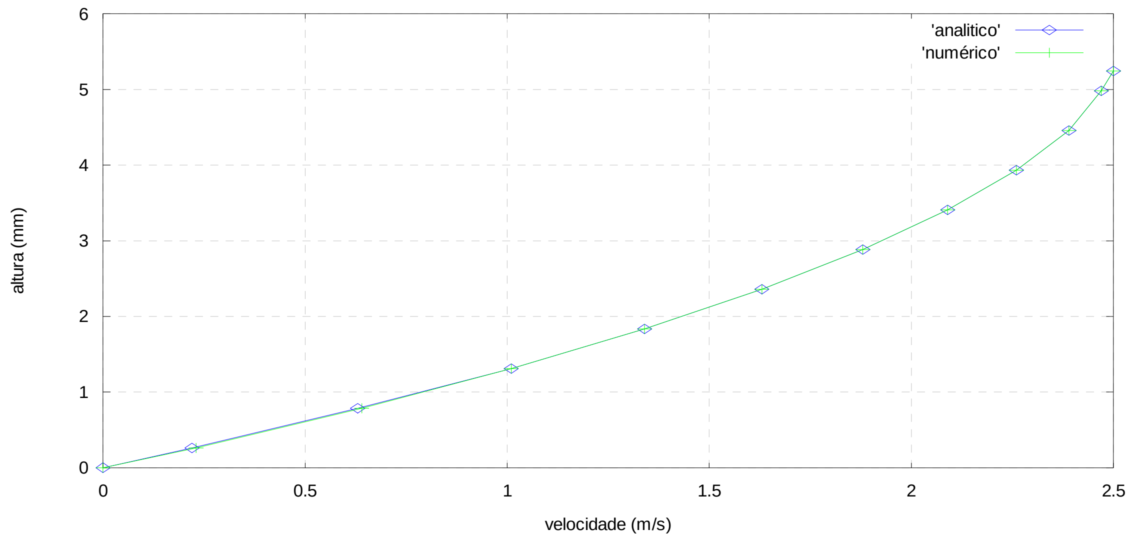



FIGURA 18 - Perfil de velocidades na seção $\theta$ = 230° ($N_x$ = *10 e* $N_y$ = *10*)

Com base nas velocidades calculadas, é possível determinar a tensão de cisalhamento no lubrificante que ocorre neste ponto do escoamento ($\theta$ = 230°), conforme mostrado na Fig. 19.

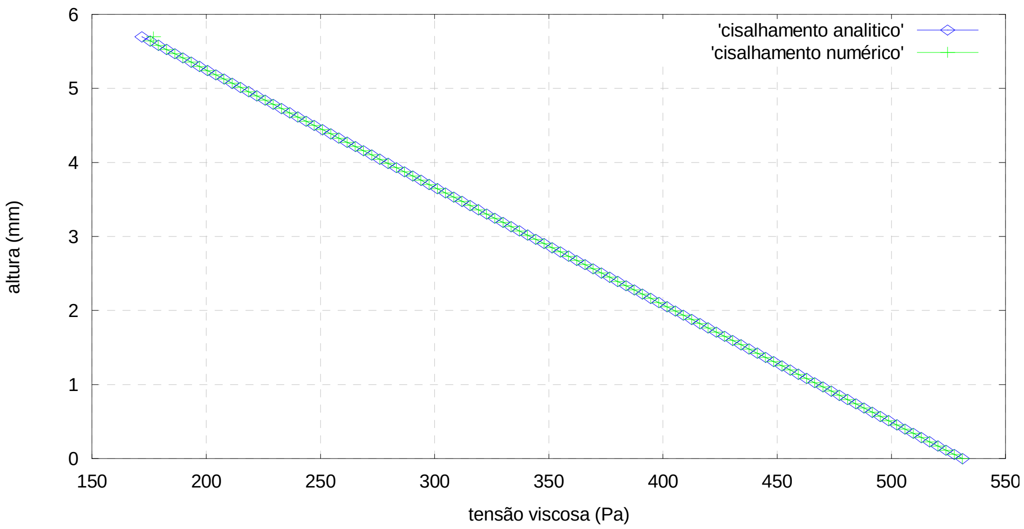



FIGURA 19 - Perfil de velocidades na seção $\theta$ = 230° ($N_x$ = *100 e* $N_y$ = *100*)

A influência do gradiente de pressão sobre o campo de temperaturas foi avaliada por meio da comparação entre as soluções analíticas de Couette sem gradiente de pressão e Couette-Poiseuille, na qual as viscosidades são consideradas constantes. Estas duas soluções podem ser observadas no gráfico da Fig. 20 onde pode-se analisar os perfis de temperatura na seção $\theta = 230°$.

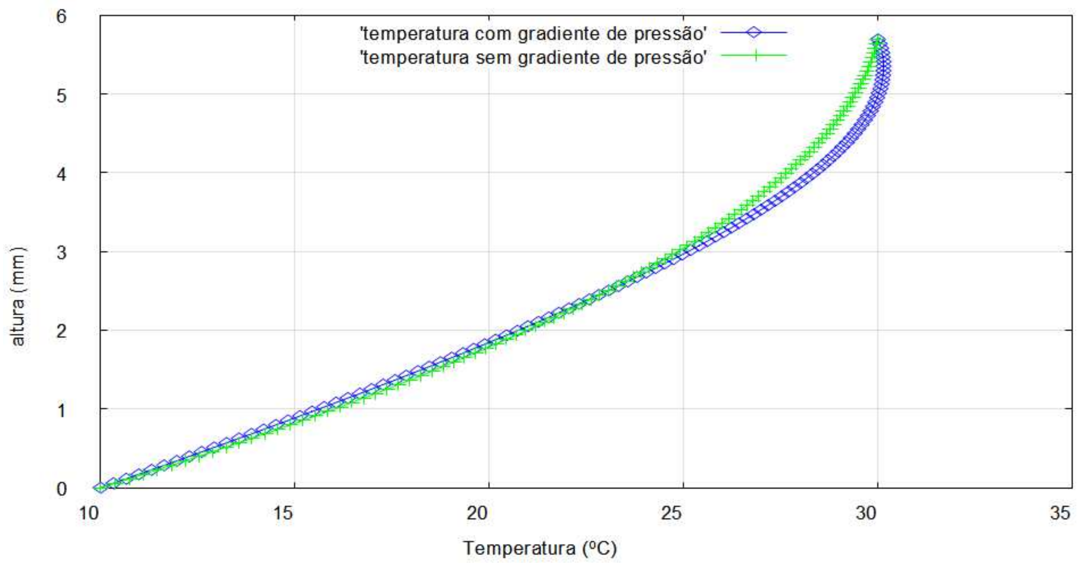



FIGURA 20 - Perfis de temperatura analíticos na seção $\theta = 230°$ ($N_x$ = 100 e $N_y$ = 100)

Para este caso, pode ser observado que próximo do mancal, o fluido que escoa sem gradiente de pressão, ou seja, sem o eixo estar carregado, consegue manter sua temperatura um pouco mais elevada que a de um fluido escoando por gradiente de pressão e movimento de fronteira. Próximo do eixo esta temperatura diminui, já que o gradiente de pressão influi de forma a somar temperatura ao fluido lubrificante.

## 4.5 CONCLUSÃO

Observa-se na malha-base representada na Fig. 15, que o erro numérico está fortemente dependente do gradiente de pressão ao longo da direção circunferencial, uma vez que certos pontos têm erros maiores. Para um adequado refinamento da malha é portanto, preciso um aumento do número de volumes tanto na direção $y$ ($N_y$), quanto na direção $x$ ($N_x$). Este fato mostra que o problema 1, apesar de ser um escoamento 1D (quase-unidimensional), é fortemente influenciado pelos parâmetros de entrada na direção circunferencial.

A Fig. 16 mostra que a estimativa do erro feita pelo estimador GCI, através do programa *Richardson_3p0*, é confiável e pode ser aplicada neste problema, já que em todos os pontos avaliados a estimativa do erro é superior ao próprio erro.

Quanto aos campos de cisalhamento vê-se na Fig. 17, que a aproximação numérica é mais precisa quando avaliada na superfície do mancal, uma vez que o erro numérico é de ordem 2 neste ponto. Conforme o ponto se afasta do mancal e se aproxima do eixo, a ordem efetiva do erro passa a ser de ordem 1. Este fato pode ser explicado pela condição de contorno de não-escorregamento na superfície do eixo ser agora não-nula, ao passo que na superfície do mancal sua velocidade nula levava a erros numéricos menores.

A utilização de apenas seis malhas para a avaliação das ordens efetivas de erro mostra que o número de variáveis armazenadas no programa é muito grande, dificultando que uma análise com refinamento elevado da malha em ambas as direções seja concretizada sem que alguma modificação na estrutura interna do programa seja feita.

Porém mesmo com o pequeno número de malhas empregadas no problema 1, o gráfico da Fig. 16, mostra que o erro diminui conforme refina-se a malha, o que é um forte indicativo de que as previsões de ordem de erros da Fig. 17 estejam corretas.

# 5 PROBLEMA 2

Neste segundo problema, a viscosidade ainda foi admitida como constante e as equações de conservação de massa e de quantidade de movimento desacopladas da equação da energia. Porém, buscou-se neste momento, a resolução numérica de duas equações, uma para a massa e outra para a pressão, sem que fosse necessário prescrever parâmetros de entrada da solução analítica.

O eixo e o mancal foram mantidos sob as mesmas condições iniciais e a geometria do conjunto foi considerada a mesma. A solução dos campos de pressão e velocidade foram ainda comparadas com suas soluções analíticas.

Neste problema será novamente utilizada a estratégia de resolver o escoamento bidimensional do fluido lubrificante como sendo um escoamento quase-unidimensional, onde o perfil de velocidade de cada uma das seções circunferências é resolvido unidimensionalmente.

## 5.1 MODELO MATEMÁTICO DO PROBLEMA 2

A equação da pressão (eq. 11) utilizada no problema anterior, é novamente empregada neste problema. Por meio de algumas manipulações matemáticas, conforme está mostrado no APÊNDICE B, é possível chegar a partir da eq. 11, à eq. 13, que descreve de forma equivalente o problema em questão. Nesta equação, ao substituir-se a altura do filme de lubrificante (eq. 16), calculado em função do ângulo $\phi$, é possível calcular o gradiente de pressão nas várias seções circunferenciais, obtendo desta forma, a segunda equação governante do problema.

Este procedimento é possível graças ao fato da geometria do conjunto eixo-mancal, ser um dos parâmetros prescritos no início do problema. A investigação da eq. 13, leva porém, à conclusão de que este procedimento para o cálculo pressão-velocidade, ocorre de maneira iterativa, uma vez que a coordenada $\overline{h}$ é desconhecida e deve ser corrigida a cada nova iteração.

No dimensionamento de um mancal, é imperativo saber se o conjunto cilindro-mancal conseguirá resistir às cargas impostas. Com a solução de Sommerfeld, pode-se chegar então aos carregamentos ao longo da linha de centro do eixo e do mancal ($W_y$) e na sua direção perpendicular ($W_x$).

$$W_x = 12\pi\, \mu\, \omega_b\, r_b \left(\frac{r_b}{c}\right)^2 \frac{\varepsilon}{\left(2+\varepsilon^2\right)\left(1-\varepsilon^2\right)^{1/2}} \tag{67}$$

$$W_y = 0 \tag{68}$$

A força reacionária devido aos carregamentos (67) e (68) atua na direção oposta à força aplicada sobre eixo e, como $W_y$ é zero, esta força assume o valor:

$$W_r = \sqrt{W_x{}^2 + W_y{}^2} = 12\pi\, \mu\, \omega_b\, r_b \left(\frac{r_b}{c}\right)^2 \frac{\varepsilon}{\left(2+\varepsilon^2\right)\left(1-\varepsilon^2\right)^{1/2}} \tag{69}$$

A solução de Sommerfeld traz como consequência, que um eixo inteiramente lubrificado, quando submetido a um carregamento, deslocar-se-á no sentido perpendicular à direção do carregamento resultante.

A meia solução de Sommerfeld, ao desconsiderar o campo de pressões negativas na região divergente do mancal, determina que $W_y$ não pode mais ser nulo. Assim, para o caso da meia solução de Sommerfeld, viu-se que as componentes do carregamento resultante são:

$$W_x = 6\mu\, \omega_b\, r_b \left(\frac{r_b}{c}\right)^2 \frac{\pi\varepsilon}{\left(2+\varepsilon^2\right)\left(1-\varepsilon^2\right)^{1/2}} \tag{70}$$

$$W_y = 12\mu\, \omega_b\, r_b \left(\frac{r_b}{c}\right)^2 \frac{\varepsilon^2}{\left(2+\varepsilon^2\right)\left(1-\varepsilon^2\right)} \tag{71}$$

A viscosidade global do lubrificante foi calculada da mesma forma que no problema 1, ou seja, pelo modelo de Vogel, considerando-se a temperatura do filme de óleo constante e igual à média das temperaturas do eixo e do mancal.

## 5.2 VARIÁVEIS DE INTERESSE

No problema 2, preocupou-se mais com a determinação dos carregamentos que se devem à configuração do conjunto eixo-mancal, ou seja, pela excentricidade resultante do conjunto e, para tal, fêz-se necessária a determinação do campo de pressão ao longo do eixo.

Uma vez resolvida a eq. 13, partiu-se para a solução da eq. 11 e a velocidade foi assim determinada da mesma forma que no problema 1.

As variáveis de interesse serão portanto, os carregamentos na direção da linha de centro, na direção normal à linha de centro, o carregamento resultante destas duas parcelas, bem como as variáveis de interesse já definidas no problema 1.

Comparou-se as soluções analíticas para o carregamento, com as soluções numéricas, que foram integradas numericamente por meio da regra de Simpson, para os casos da solução de Sommerfeld e da meia solução de Sommerfeld.

## 5.3 PROBLEMA NUMÉRICO

O programa utilizado para resolver o problema 2, atua da mesma maneira daquele utilizado na resolução do problema 1. A diferença é que neste novo problema, o campo de pressão foi calculado e não mais prescrito por sua solução analítica.

O algoritmo abaixo, seguindo os passos de 1 a 11, ilustra o funcionamento do programa:

1) leitura dos dados de entrada;

2) discretização da direção circunferencial e das seções radiais;

3) estimativa da $\bar{h}$ com a eq. 16 (por exemplo com $\phi = \overline{\theta}_{analítico}$);

4) cálculo da variável $pl_P = 6\mu U\left(\frac{h_P - \overline{h}}{h_P{}^3}\right)$;

5) montagem dos coeficientes de $p$ por meio da discretização da equação $\left(\frac{dp}{dx}\right)_P = pl_P$ com esquema híbrido entre CDS e UDS e resolução $p_P$ com o TDMA;

6) verificação da pressão máxima e seu $\phi$;

7) recálculo da $\bar{h}$ com a eq. 16;

8) volta ao item (4), até que a pressão máxima não varie mais com as iterações;

9) cálculo dos coeficientes de $u$ por meio de esquema CDS da equação $\mu\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_P = pl_P$ e resolução de $u_P$ com TDMA;

10) cálculo das variáveis secundárias de interesse;

11) visualização dos dados calculados por meio de tabelas e gráficos.

Para a discretização da eq. 13, pensou-se em três abordagens, as quais conduziram aos seguintes resultados:

a) discretização com CDS-2: levou a um erro fatal, pois no cálculo do último termo do TDMA, ocorreu uma divisão por zero;

b) discretização com UDS: os resultados obtidos logo na primeira iteração, conduziram a dois pontos de máxima pressão global, introduzindo erros para as iterações seguintes e levando portanto à não convergência do método;

c) CDS com correção adiada: esta foi a forma de discretização que conduziu a resultados mais precisos. Observou-se, porém, que para algumas malhas com determinados números de volumes, a solução numérica tornava-se instável, oscilando em torno da solução exata.

Desta forma, com base nas três discretizações, preferiu-se optar pela discretização de CDS com correção adiada. O método dos volumes fictícios foi novamente utilizado para aplicar as condições de contorno nas seções de entrada e saída do mancal. Estas pressões nos contornos foram consideradas nulas, portanto, as pressões calculadas pelo TDMA são pressões efetivas.

Os coeficientes dos termos utilizados pelo Método dos Volumes Finitos para os volumes reais e fictícios, na montagem do sistema de equações lineares do problema 2 podem ser encontrados na tabela 7. Estes coeficientes foram deduzidos a partir da discretização das equações governantes e podem vistas no APÊNDICE E.

TABELA 7: Coeficientes dos volumes de controles empregados no problema 2

| *Coeficientes* | *Volumes Reais* | *Volumes Fictícios* | |
|---|---|---|---|
| | | Inferiores | Superiores |
| $a_P$ | 1 | 1 | 1 |
| $a_w$ | 1 | 0 | -1 |
| $a_e$ | 0 | -1 | 0 |
| $b_P$ | $Dx_P \cdot pl_P - \frac{\beta}{2}\left(p_E^{\ *} - 2p_P^{\ *} + p_W^{\ *}\right)$ | 0 | 0 |

Para a integração numérica da pressão, utilizou-se a regra de Simpson, por julgar-se que esta daria uma maior precisão aos resultados, ao invés de utilizar-se a regra do retângulo.

Em todos os resultados obtidos para este problema foi utilizado um coeficiente $\beta = 1$, pois sabe-se que utilizando este valor, os erros numérico introduzidos pelo esquema são menores do que qualquer outra composição de valores para $\beta$.

## 5.4 RESULTADOS OBTIDOS

Para o problema 2 a geometria do conjunto e os parâmetros operacionais foram considerados os mesmos do problema 1 e para tal as tabelas 4 e 5 devem ser consultadas.

Durante a solução da eq. 13, com o intuito de otimizar a memória do computador a ser alocada pelas variáveis, aproveitou-se da forma anti-simétrica da função para resolver apenas o escoamento na porção convergente do mancal. A parte divergente foi apenas reescrita com a solução numérica de $\phi \in \left[0{,}180^o\right]$.

Observou-se porém, que para o ponto $\phi = 180^o$ estar situado sobre um ponto nodal, o número de volume de controle a ser empregado na discretização da direção circunferencial deveria ser ímpar. Caso contrário, a coordenada $\phi = 180^o$ encontrar-se-ia entre dois pontos nodais e não se conseguiria dividir o domínio de cálculo em duas regiões idênticas entre si.

A malha base adotada para o problema 2 foi escolhida então tendo 15 volumes em ambas as direções discretizadas. Da mesma maneira que no problema 1, as malhas discretizadas tiveram um grau de refinamento constante e igual a três, até que o limite da memória computacional fosse atingido. A tabela 8 mostra as malhas utilizadas neste problema.

TABELA 8: Malhas utilizadas nas simulações do problema 2

| Malha | $N_x$ | $N_y$ |
|---|---|---|
| 1 | 15 | 15 |
| 2 | 45 | 45 |
| 3 | 135 | 135 |
| 4 | 405 | 405 |
| 5 | 1215 | 1215 |
| 6 | 3645 | 3645 |

Com base em alguns resultados obtidos para estas malhas é possível construir a Fig. 21 que mostra a acurácia da solução numérica com o refinamento da malha.

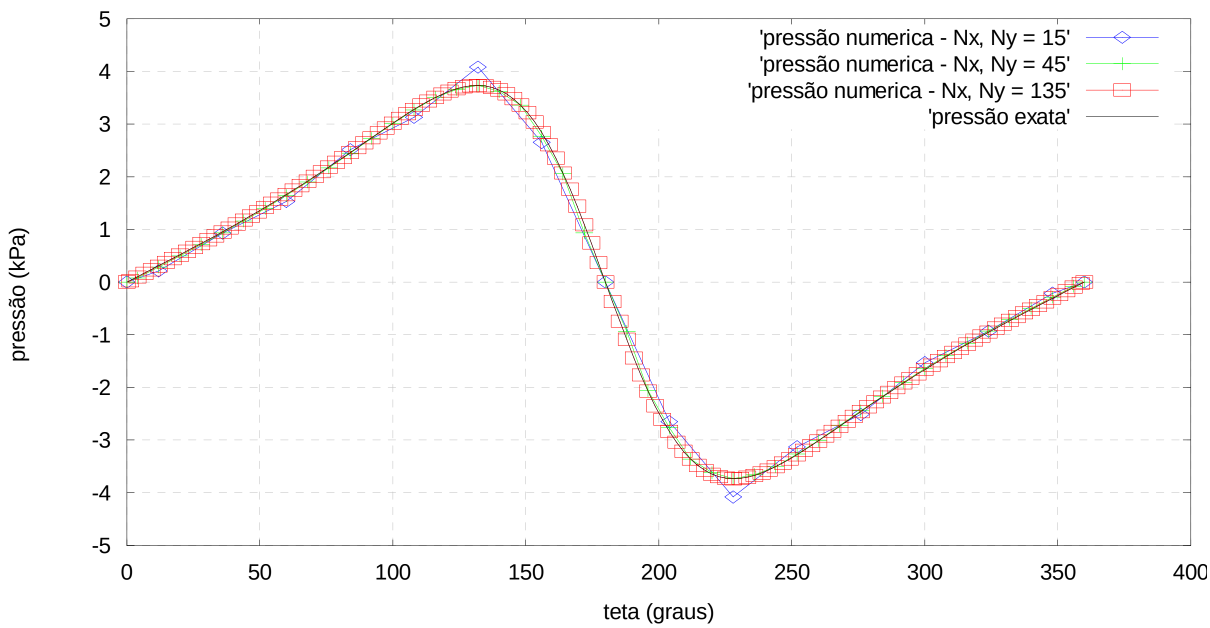



FIGURA 21 - Campos de pressão para várias malhas utilizadas

Mesmo para a malha mais grosseira ($N_x$ = 15 e $N_y$ = 15) é possível observar pela Fig. 22 a concordância entre a velocidade calculada numericamente e a sua solução analítica. O ponto de seção escolhido foi o mesmo definido no problema anterior ($\phi = 230\,°$).

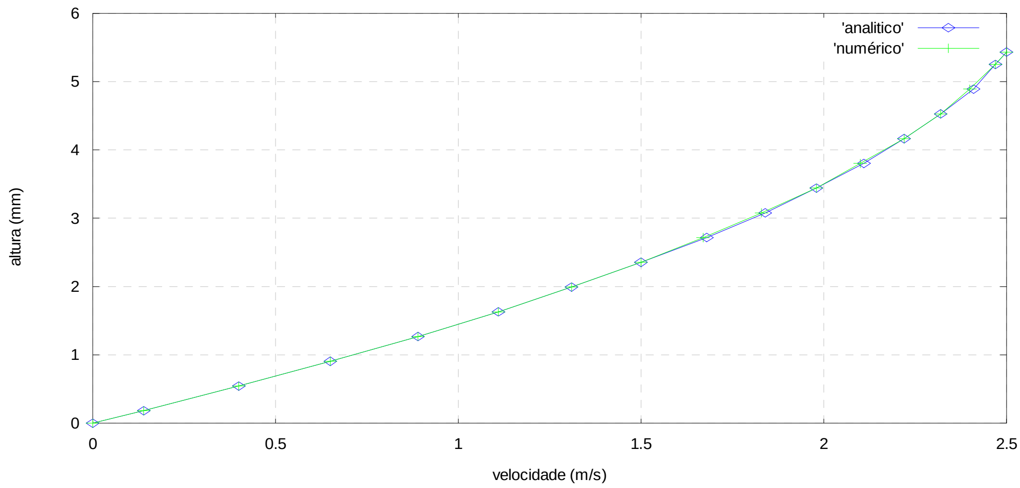



FIGURA 22 - Campo de velocidades na seção $\phi = 230\,°$

Observou-se porém, que excetuadas as malhas já descritas, para muitas outras houve uma instabilidade no método de cálculo, o que levou a não convergência da solução da pressão numérica. A investigação do problema levou à conclusão que esta instabilidade deve-se ao valor de $\overline{h}$, que ao ser re-iterado conduz a soluções com erros cada vez maiores até a completa divergência nas iterações futuras.

Na Fig. 23 é mostrado um exemplo de malha problemática em que a solução numérica é obtida por meio de um $\overline{h}$ estimado como sendo igual ao $\overline{h}$ analítico exato (dado pela eq. 16). Por estar sendo empregado o esquema CDS com correção adiada, para o cálculo da pressão, faz-se necessário estimar uma solução inicial ao problema, dando início ao cálculo iterativo. Neste caso a solução estimada foi considerada igual à solução analítica da pressão.

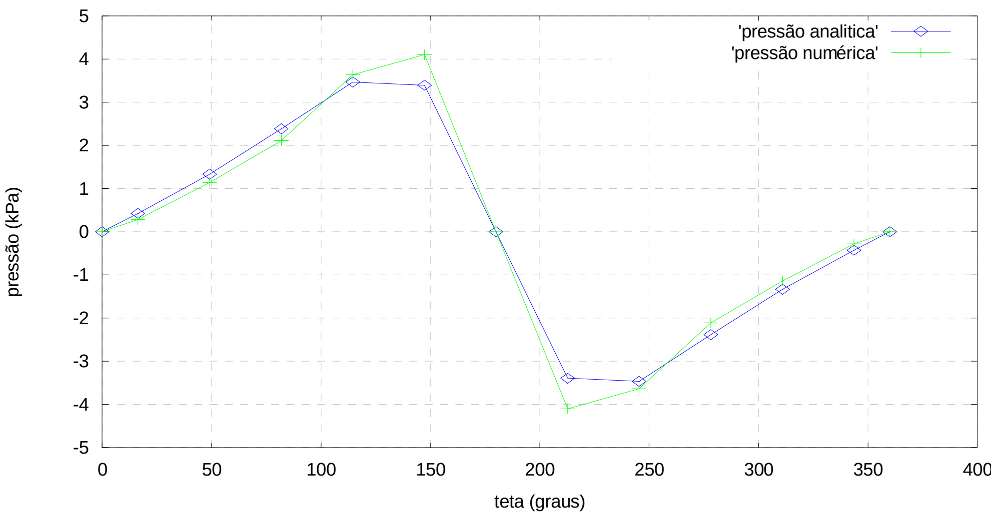



FIGURA 23 - Exemplo de uma malha mal comportada sem iterações

Após algumas iterações com o $h$ correspondente ao ponto de máxima pressão calculada, a solução numérica converge para aquela mostrada na Fig. 24.

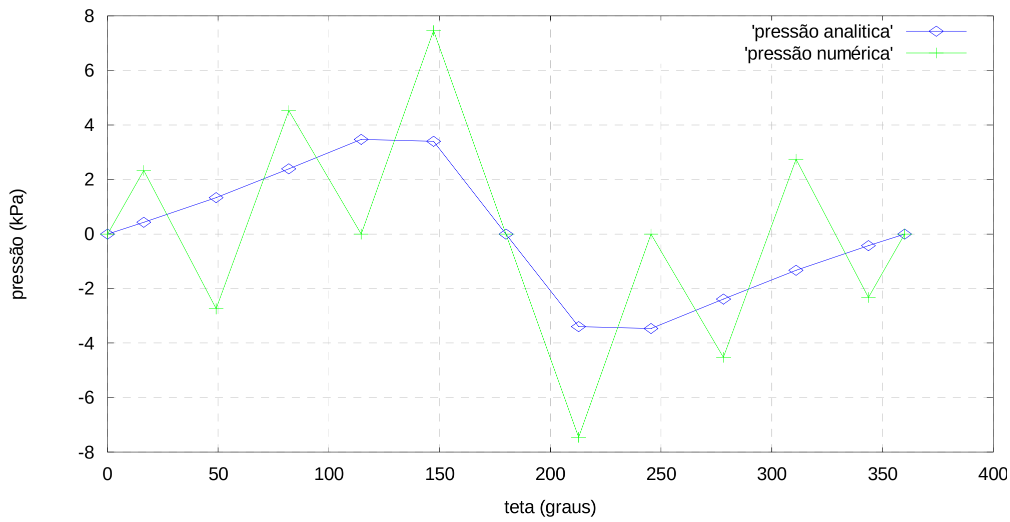



FIGURA 24 - Mesma malha mal comportada após algumas iterações

Este exemplo ilustra o caso em que se partindo de uma estimativa boa, chega-se a um resultado numérico pior. Na Fig. 24 vê-se, no entanto, que a solução numérica oscila em torno da solução analítica, levando a crer que com a introdução de alguma forma de amortecimento à eq. 16, de forma a chegar numa expressão equivalente, porém mais suave, poderia levar à diminuição dos erros observados.

Com base nas soluções analíticas conhecidas para as variáveis de interesse, na Fig. 25 é mostrado um gráfico do erro pela dimensão da malha ($h$), conforme já feito no capítulo 4.

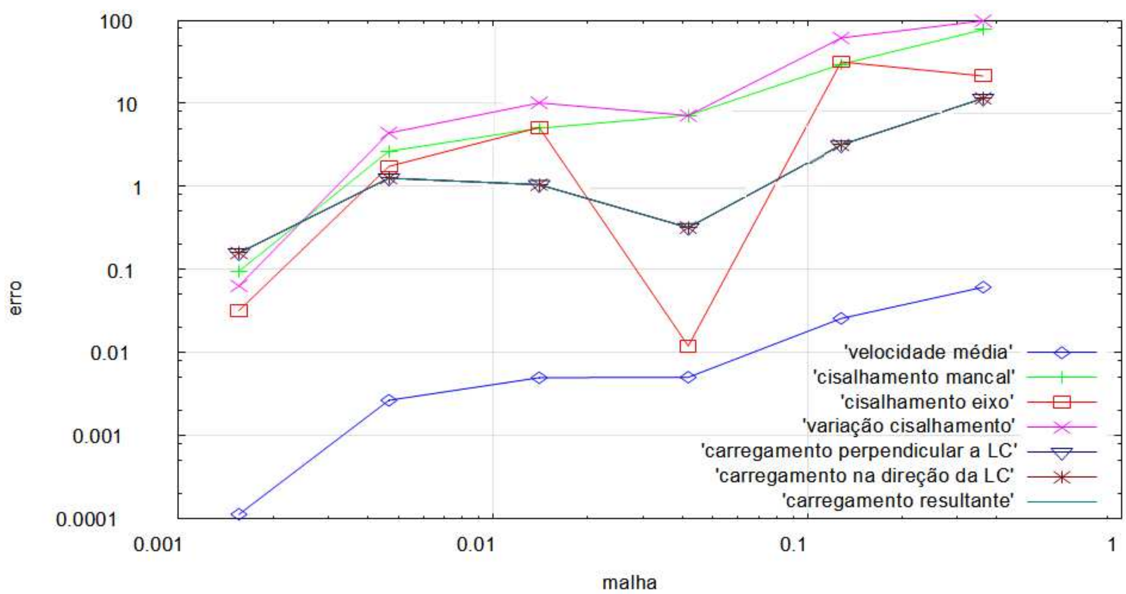



FIGURA 25 - Gráfico de erro por dimensão da malha

Observa-se desta figura que a solução numérica, diferentemente do problema 1, não consegue manter-se comportada e que para qualquer variável de uma dada malha, a ordem de magnitude do erro aumentou quando comparada com a malha correspondente do problema 1.

Fica claro que a inclusão de uma nova equação no problema 2, levou à propagação e crescimento dos erros, mas que mesmo assim, a tendência global para todas as variáveis é de que o erro diminua com o refinamento da malha, o que aumenta a expectativa de que o programa conduza a resultados confiáveis.

## 5.5 CONCLUSÃO

Os resultados obtidos com as seis malhas em análise levou à conclusão de que a solução numérica do problema 2 é mal comportada, uma vez que o erro não decresce de maneira previsível com o refino da malha. Este fato indica que as ordens aparentes não puderam ser calculadas, uma vez que nem mesmo as ordens de erro efetivas conseguiram ser determinadas.

O mal comportamento da solução numérica torna ainda que a estimativa GCI não é mais confiável para este problema.

Devido este problema ter uma solução exata (assim como possuía o problema 1) optou-se por não utilizar estimadores de erro neste momento, porém ressalta-se que em um problema real, o uso de tais estimadores, faz-se necessário para a validação dos resultados numéricos obtidos.

O aparecimento das instabilidades na solução numérica, conforme mostrado na Fig. 24, teve início em todos os casos a partir dos pontos nodais próximos de $\phi = 180^o$. Conforme as iterações evoluíram, houve uma perturbação dos pontos nodais mais afastados desta coordenada e o aumento da amplitude dos erros em torno da solução analítica.

Conforme já foi mencionado, acredita-se que a introdução de uma forma de “amortecimento” nas equações do problema 2, com o uso por exemplo de métodos de relaxação, poderia levar à convergência total do método, uma vez que esta convergência parece estar fortemente dependente do parâmetro $\overline{h}$ escolhido na iteração.

Excetuadas as malhas que apresentaram problemas de convergência, todas as que possuíam número de volumes múltiplos de 15, forneceram resultados satisfatórios, mostrando que o refino da malha levou à diminuição do erro numérico, porém não de forma tão rápida como no problema 1.

# 6 CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS GERAIS

O presente trabalho desenvolveu um estudo analítico e numérico de escoamentos em mancais deslizantes, que são elementos de máquinas comumente encontrados dentro de ambientes industriais. A realização deste trabalho permitiu a aplicação de vários conceitos e Leis Físicas básicas e mais especificamente, utilizou-se de ciências fundamentais como a Mecânica dos Fluidos e a Transferência de Calor.

Com a conclusão deste trabalho, foi possível vislumbrar o enorme potencial que tem este novo campo da área térmica e de fluidos, denominado Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD). Muitos dos resultados alcançados foram devidos principalmente, à apropriação dos conhecimentos, na disciplina Dinâmica dos Fluidos Computacional, ministrada pelo prof. Marchi no ano de 2008.

Em se tratando de um trabalho intimamente ligado à área computacional, foi indispensável o domínio de alguma linguagem de programação e, para tal, foi utilizado o mundialmente conhecido Fortran-90, linguagem esta, que se mostra muito atual para aplicação de métodos numéricos, já que possui uma enorme flexibilidade graças a seus comandos particulares (*functions*, *subroutines* e *modules*), facilitando sua implementação.

A presente monografia teve um período de realização de aproximadamente 8 meses, sendo que o trabalho foi dividido em duas fases. Na primeira fase (TG 1), buscou-se um estudo aprofundado sobre a Teoria da Lubrificação Hidrodinâmica, o conhecimento da tecnologia vigente sobre mancais, bem como a revisão de alguns tópicos chaves para a realização do trabalho, tais como Elementos de Máquinas, Mecânica de Fluidos, Programação Científica e outros tantos, não menos importantes. Nesta fase, extensa literatura sobre estes assuntos foi encontrada não só em livros específicos de Lubrificação, mas também em dissertações de mestrado e teses de doutorado que contemplavam esta área de interesse. Porém, mesmo assim existem escassos trabalhos que tratam da resolução das equações básicas de lubrificação, em nível de Trabalho de Graduação. As poucas fontes que pareciam ter alguma compatibilidade, infelizmente não puderam ser contatadas, fazendo com que a implementação do modelo computacional partisse da estaca zero, na segunda etapa da monografia.

Muitos dos artigos encontrados em periódicos técnicos consultados, não puderam ser incluídos na Revisão Bibliográfica, pois a grande maioria trata de problemas específicos do escoamento em mancais, como a otimização do método numérico, inclusão de cavidades e reentrâncias na geometria do domínio de cálculo, problemas de fronteira livre e modelos matemáticos de cavitação.

A partir do trabalho já realizado, muitos conceitos que anteriormente não estavam claramente entendidos, passaram a ter uma melhor compreensão e alguns poderiam até ser implementados em novas versões do programa computacional desenvolvido.

Inicialmente, pensou-se em implementar um programa computacional que tivesse caráter geral, ou seja, que resolvesse problemas de escoamento em mancais de quaisquer geometrias, como os mancais curtos e longos. Porém, devido à exiguidade do tempo, o escopo do trabalho final contemplou somente aqueles mancais cuja largura fosse superior ao seu diâmetro (mancais longos), para os quais a solução de Sommerfeld oferece uma boa precisão.

O problema 1, definido e abordado no Capítulo 4, tratou então da simulação do escoamento de um fluido por meio da solução de Sommerfeld. Com base nos resultados da pressão e nos gradientes de pressão do filme de óleo obtidos, ambos por meio da solução analítica de Sommerfeld, pode-se discretizar uma forma da equação do movimento, chegando-se a resultados numéricos para a variável *velocidade* do fluido lubrificante, condizentes com a solução analítica. Para tal fim, utilizou-se o esquema CDS-2.

A partir da determinação da velocidade, variáveis de interesse secundárias como a tensão de cisalhamento no filme de óleo, puderam ser calculadas numericamente. O refinamento da malha nas direções circunferencial e radial levou à diminuição do erro numérico em todas as variáveis, porém, a variável que representa a tensão de cisalhamento do fluido em contato com a superfície do eixo, foi a que apresentou maiores erros. A ordem efetiva do erro dessa variável foi determinada como sendo de ordem 1 pelo estimador GCI, enquanto que todas as demais variáveis foram de ordem 2. Isto pode ser explicado pelo fato de que na superfície do eixo, há movimento de fronteira, o que pode ter levado ao aumento destes erros.

No problema 2, o uso do mesmo estimador utilizado no problema 1, conduziu a resultados não confiáveis, uma vez que nem mesmo a ordem efetiva do erro não foi possível ser determinada. O fato que possibilitou a avaliação das ordens de erro efetivas no problema 1, foi o comportamento monotônico do erro numérico, como pode ser observado nas retas traçadas no gráfico da Fig. 16 em escala *bi-log*.

Como sugestão para trabalhos futuros e que poderiam ser incorporados à estrutura do presente trabalho, ficam as seguintes propostas:

a) uma análise do efeito da viscosidade variável sobre as variáveis de interesse, por meio das equações analíticas do escoamento Couette-Poiseulle com viscosidade variável;

b) a substituição das condições de contorno de Sommerfeld pelas condições de contorno de Reynolds;

c) a comparação dos diversos modelos reológicos na avaliação das variáveis de interesse;

d) a introdução da Equação da Energia e da Equação de Estado, para uma análise mais completa. Para tal, poder-se-ia utilizar um esquema de acoplamento pressão-velocidade como o *Simplec*, *Simple* ou *Simpler*, os quais não estiveram presentes neste trabalho;

e) a introdução da solução de Ocvirk, que contempla os mancais curtos e a modificação do modelo matemático, de maneira que considere agora um gradiente de pressão na direção axial. Isto levaria à extensão das possíveis geometrias a serem utilizadas no domínio de cálculo. Chegar-se-ia então, a novas variáveis de interesse tais como, a velocidade do fluido na direção axial (haveria duas equações do movimento), o nível de vazamento de óleo na direção axial, dentre outras.

O atual estágio do programa desenvolvido permite obter e determinar a altura mínima do fluido de óleo, os níveis de pressão e a pressão máxima do lubrificante, assim como as tensões cisalhantes no fluido e nas superfícies do mancal e do eixo.

Pode-se conjecturar que numa simulação de um problema real, o carregamento resultante devido à configuração do conjunto eixo-mancal, obtido pela integração do campo de pressões, chamaria a atenção do projetista, se, nesta geometria do conjunto, o mesmo seria capaz de resistir às solicitações mecânicas impostas por sua aplicação de interesse.

Com base nestes poucos e simples parâmetros calculados, observa-se que se tem em mãos, um programa computacional ainda incipiente, mas cuja aplicação já permite que sejam feitas análises que conduzam a importantes conclusões sobre o funcionamento e aplicabilidade dos mancais, atuando desta forma, como uma ferramenta válida para um pré-dimensionamento ou uma pré-seleção de tais componentes mecânicos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ANDRÉS, L.S. **Moderns Hydrodynamic Lubrification Theory**. Class Notes, Note 2: Derivation of the Classical Reynolds Equation for Thin Film Flows. ~350p.

[2] CAMERON, A**. The Principles of Lubrification.** 3rd ed. Londres: Longmans Green, 1966. 591p.

[3] CASTRO, H. F. **Análise de Mancais Hidrodinâmicos em Rotores sob Instabilidade Fluido-Induzida**. 2007. 201p. Tese de Doutorado – Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP, Campinas 2007.

[4] FARSHID, S. **Topics About Lubrification, Newtonian, non-Newtonian, Units, Grades, Pressure and Temperature Dependence, Class Notes**. Disponível em: <https://engineering.purdue.edu/ME556>. Acesso em: 12 jun. de 2009.

[5] FINZI, D. **Mecânica Aplicada as Máquinas**. São Carlos, SP: Universidade de São Paulo – Escola de Engenharia de São Carlos, 1959. 310p.

[6] FORTUNA, A. O. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos.** 1ª Ed. São Carlos: Edusp, 2000. 426p.

[7] GARCEZ, L. N. **Elementos de Máquina dos Fluidos – Hidráulica Geral**. São Paulo: Edgard Blücher Editora, 1960. 1v. 459p.

[8] HAMROCK, B. J. et al. **Fundamentals of Fluid Film Lubrification**. 2nd ed. Nova York: Marcel Dekker, Inc, 2004. 728p.

[9] HARNOY, A. **Bearing Design in Machinery**. 5th ed. Nova York: Marcel Dekker, Inc, 2003. 640 p.

[10] INCROPERA, F. P. e WITT, D. P. **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa.** 5ª Ed. Rio de Janeiro: LTG – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2003. 698 p.

[11] KARAMZIN, V. A. **Study of Lubrificants Flow Rates Through a Bearing Depending Upon the Location of the Lubrificant Inlet**. Wright: FTD Foreign Technology Division: 1972. 19p.

[12] MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional.** 2ª Ed. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1995. 453 p.

[13] MARCHI, C. H. **Verificação de Soluções Numéricas Unidimensionais em Dinâmica dos Fluidos.** 2001. 305 p. Tese de Doutorado – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – UFSC, Florianópolis, 2001.

[14] MARCHI, C. H. **Dinâmica de Fluidos Computacional.** Notas de Aula. Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008.

[15] MAUK, P. J. **Class Notes about Journal Bearings**. Essen: Universität Duisburg, [ca. 2000]. Disponível em: <http://www.uni-due.de/materialtechnik/ls_umformtechnik.shtml.>. Acesso em: 13 jun. 2009.

[16] NORTON, R. L. **Projeto de Máquinas: Uma Abordagem Integrada**. Trad. João Batista de Aguiar [et al]. 2ºed. Porto Alegre: Bookman, 2004. 919 p.

[17] PATANKAR, S. V. **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow.** 1st ed. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1980. 197 p.

[18] PINKUS, O. et al. **Theory of Hydrodynamic Lubrification**. 1st ed. Nova York: McGraw-Hill Book, Inc, 1961. 461 p.

[19] SANTOS, M. F. **Efeitos Térmicos em Mancais Segmentados**. 1997. 101p. Tese de Doutorado – Faculdade de Engenharia Mecânica – UNICAMP, Campinas, 1997.

[20] SHIGLEY, J. E. et al. **Projeto de Engenharia Mecânica**. Trad. João Batista de Aguiar, José Manuel de Aguiar. 7º ed. Porto Alegre: Bookman, 2005. 960 p.

[21] STREETER, V. L. e WYLIE, E. B. **Mecânica dos Fluidos.** Trad. Milton Gonçalves Sanches [et al]. 7ª ed. São Paulo: Editora McGraw-Hill do Brasil,Ltda., 1982. 585 p.

[22] TORRANCE, A. A. **Tribology Class Notes do Curso de Tribologia da TCD**. Dublin: Parson/ Prentice, 1997. 90 p.

**APÊNDICE A: Equação Clássica de Reynolds**

Considere o escoamento representado na Fig. 26, em que a espessura do filme variável é uma função *h(x, z, t)* e onde para o escoamento, são válidas as mesmas hipóteses já listadas.

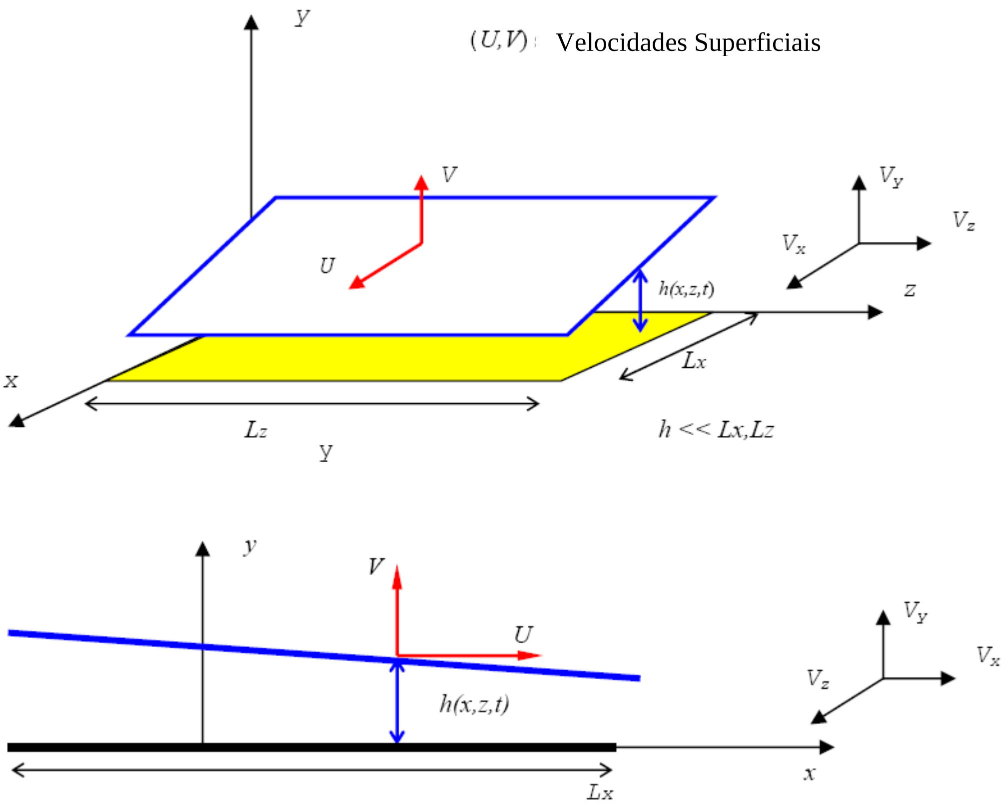



FIGURA 26 – Superfícies deslizantes [1]

Na região de interesse, a placa inferior se mantém estacionária, enquanto a superfície superior move-se com velocidade *U* e *V* nas direções *x* e *y* respectivamente. Considerando que o fluido adere às superfícies, têm-se as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} &em \quad y=0: u=0, \qquad v=0, \qquad w=0, \\ &em \quad y=h: u=U, \qquad v=V, \qquad w=0. \end{aligned} \tag{A-1}$$

Através do simples movimento cinemático da placa, pode ser facilmente inferido que a velocidade normal *V* da superfície superior é dada pelo Stokiano:

$$V = \frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial x}\cancelto{0}{\frac{dz}{dt}} \tag{A-2}$$

$$V = \frac{\partial h}{\partial t} + U\,\frac{\partial h}{\partial x} \tag{A-3}$$

O escoamento isoviscoso ($\mu = cte$), newtoniano e onde as forças inerciais são desprezíveis, ($\mathcal{R}e < \mathcal{R}e_c$) pode ser modelado pelas seguintes equações:

- Equação da Conservação de Massa:

$$\vec{\nabla}\left(\rho\vec{v}\right) + \cancelto{0}{\frac{\partial \rho}{\partial t}} = 0 \tag{A-4}$$

$$\frac{\partial\left(\rho u\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho v\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\rho w\right)}{\partial z} = 0 \tag{A-5}$$

- Equação da Quantidade de Movimento Linear:

- na direção $x$:

$$\rho\,\cancelto{0}{\frac{Du}{Dt}} = \cancelto{0}{\rho g_x} - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\cancelto{0}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \cancelto{0}{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{A-6}$$

- na direção $y$: 0

- na direção $z$:

$$\rho\,\cancelto{0}{\frac{Dw}{Dt}} = \cancelto{0}{\rho g_z} - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\cancelto{0}{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}} + \cancelto{0}{\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{A-7}$$

As equações (A-6) e (A-7) reduzem-se a:

$$\mu\,\frac{d^2 u}{dy^2} - \frac{dp}{dx} = 0 \tag{A-8}$$

$$\mu\,\frac{d^2 w}{dy^2} - \frac{dp}{dz} = 0 \tag{A-9}$$

Integrando-se as equações do *momentum* em relação a $y$ e aplicando-se as condições de contorno conhecidas (A-1), chega-se a :

$$u = \frac{1}{2\mu}\;\frac{dp}{dx}\left\{y^2 - yh\right\} + \frac{y}{h}U \tag{A-10}$$

$$w = \frac{1}{2\mu}\;\frac{dp}{dz}\left\{y^2 - yh\right\} \tag{A-11}$$

As vazões mássicas ao longo da espessura de filme e as velocidades médias nas direções *x* e *z* são definidas respectivamente por:

$$M_{\mathbf{x}} = \int_0^h (\rho u)\,dy\;,\; M_{\mathbf{z}} = \int_0^h (\rho v)\,dy \tag{A-12}$$

$$\overline{V}_{\mathbf{x}} = \frac{M_{\mathbf{x}}}{\rho_{\mathbf{A}} h}\,,\quad \overline{V}_{\mathbf{z}} = \frac{M_{\mathbf{z}}}{\rho_{\mathbf{A}} h} \tag{A-13}$$

onde, $\rho_{\mathbf{A}} = \int_0^h \rho \cdot dy$ é a densidade média ao longo da espessura de filme.

Observa-se que, se a densidade do fluido for uma função exclusiva da pressão $(\rho = \rho(p))$, como esta não varia ao longo da seção do filme, $\rho$ mantém-se constante: $\rho = \rho_{\mathbf{A}}$. Líquidos barométricos, cujas propriedades dependem unicamente da pressão e a maioria dos gases que evoluem de forma isotrópica, ou em processos adiabáticos ou isotérmicos, mostram este tipo de relação.

Substituindo os perfis de velocidade (A-10) e (A-11) nas equações (A-12) e (A-13), obtém-se para um fluido isoviscoso e barométrico, os seguintes fluxos de massa (por unidade de comprimento) e as velocidades médias:

$$M_{\mathbf{x}} = -\frac{\rho h^3}{12\mu}\;\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho h U}{2}\quad,\qquad M_{\mathbf{z}} = -\frac{\rho h^3}{12\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} \tag{A-14}$$

$$\overline{V}_{\mathbf{x}} = -\frac{h^2}{12\mu}\;\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{U}{2}\quad,\quad \overline{V}_{\mathbf{z}} = -\frac{h^2}{12\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} \tag{A-15}$$

Integrando agora a equação de conservação de massa, ao longo da direção *y*:

$$\int_0^h \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dy + \int_0^h \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} dy + \int_0^h \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} dy + \int_0^h \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} dy = 0 \qquad \text{(A-16)}$$

E , usando a relação de Leibniz:

$$\int_0^{h(\zeta)} \frac{\partial g}{\partial \zeta} dy = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \int_0^{h(\zeta)} g \, dy \right\} - g(\zeta, h) \frac{\partial h}{\partial \zeta} \qquad \text{(A-17)}$$

Obtém-se:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho \, dy + \rho_h \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (\rho u) \, dy - \rho_h \, u(h) \frac{\partial h}{\partial x} + \ldots \\ &\ldots + \rho_h \, v(h) - \rho_0 \, v(0) + \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h (\rho w) \, dy - \rho_h \, w(h) \frac{\partial h}{\partial z} = 0 \end{aligned} \qquad \text{(A-18)}$$

Aplicando as condições de contorno (A-1) e (A-3) junto com as equações deduzidas para o fluxo de massa (A-14), a equação de conservação da massa fica:

$$\frac{\partial (\rho h)}{\partial x} + \frac{\partial M_{\mathbf{x}}}{\partial y} + \frac{\partial M_z}{\partial z} = 0 \qquad \text{(A-19)}$$

Ou, em termo das velocidades médias:

$$\frac{\partial (\rho h)}{\partial x} + \frac{\partial \left( \rho h \overline{V_{\mathbf{x}}} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left( \rho h \overline{V_{\mathbf{z}}} \right)}{\partial z} = 0 \qquad \text{(A-20)}$$

E, finalmente, substituindo as expressões das velocidades $\overline{V_{\mathbf{x}}}$ e $\overline{V_z}$ , obtidas pelas equações do fluxo de massa ao longo do filme de lubrificante, na equação (A-20) chega-se:

$$\frac{\partial (\rho h)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial (\rho h U)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\rho h^{\mathbf{3}}}{12 \mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\rho h^{\mathbf{3}}}{12 \mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right\} \qquad \text{(A-21)}$$

Esta é a equação clássica de Reynolds, da Teoria de Lubrificação Hidrodinâmica. Nesta equação não foi preciso admitir que a relação $c/L << 1$, o que revela o caráter muito mais geral desta equação. Quando o escoamento é incompressível, pode-se simplificar (A-21) a:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{2}\ \frac{\partial (Uh)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{h^3}{12\mu}\ \frac{\partial p}{\partial x}\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{h^3}{12\mu}\ \frac{\partial p}{\partial z}\right\} \tag{A-22}$$

**APÊNDICE B**: **Teoria da Cunha de Óleo de Reynolds**

Considere-se a sapata inclinada movendo-se com velocidade *U* em relação a uma placa fixa (Fig. 27), onde o ângulo de inclinação $\delta$ relativo à placa é muito pequeno.

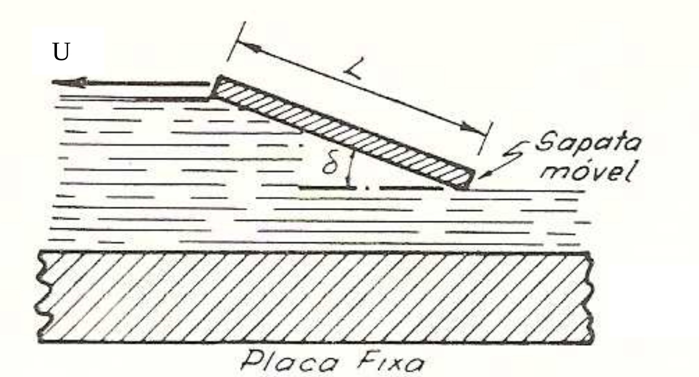


FIGURA 27 – Mancal de deslizamento plano [7]

O escoamento é suposto viscoso, incompressível e laminar ($\mathcal{Re} < \mathcal{Re}_c$). Considerando um elemento infinitesimal de lubrificante de dimensões *dx*, *dy* e *(dz* = 1) e computando-se as tensões que atuam nos lados desse elemento, chega-se ao seguinte diagrama de forças para o elemento mostrado na Fig. 28.

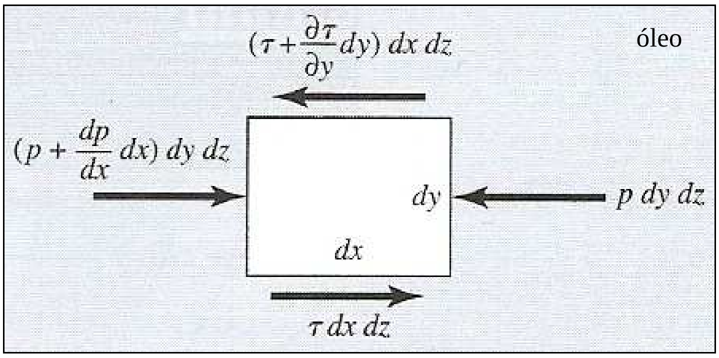


FIGURA 28 – Forças sobre um elemento de fluido lubrificante [20]

O somatório das forças de pressão (normais) que atuam sobre os lados esquerdo e direito, com a das forças de cisalhamento, devido à viscosidade e à velocidade sobre a parte superior e inferior no elemento, deduz-se:

$$\sum F_x = p\, dxdz = \left( p + \frac{dp}{dx} dx \right) dydz - \tau\, dxdz + \ldots$$
$$\ldots + \left( \tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \right) dxdz = 0 \qquad \text{(B-1)}$$

Que se reduz a:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\partial \tau}{\partial y} \tag{B-2}$$

A partir da eq. 29 (em módulo), obtém-se:

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{B-3}$$

A derivada parcial em "$u$" foi conservada, pois a velocidade *u* depende de ambos *x* e *y*. A eq. (B-2) é definida como a equação do movimento do fluido e pode ser resolvida para obter a distribuição de velocidade.

Ao integrar-se a equação (B-3), obtém-se:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} y + f_1(x) \tag{B-4}$$

E, com nova integração:

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx} y^2 + y\ f_1(x) + f_2(x) \tag{B-5}$$

Onde $f_1$ e $f_2$ são funções de integração que podem ser determinadas pelas condições de contorno:

$$\begin{aligned} &para \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0 \\ &para \quad y = h \quad \Rightarrow \quad u = U \end{aligned} \quad \textbf{(condições de não escorregamento)} \tag{B-6}$$

Sendo *h* a espessura da camada correspondente à abscissa *x*.

Aplicando as condições de contorno (B-6), chega-se a $f_2 = 0$ e $f_1 = \frac{U}{h} - \frac{h}{2\mu}\cdot\frac{dp}{dx}$. Tem-se então que:

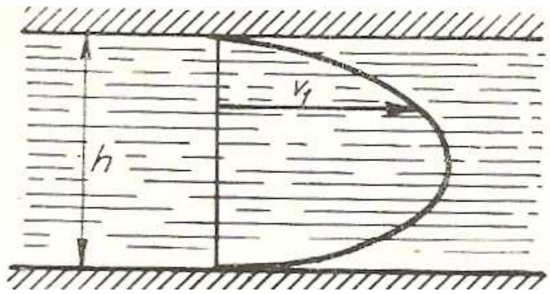
$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(y^2 - hy\right) + \frac{U}{h}\, y \tag{B-7}$$

Assim, a velocidade em um ponto de coordenadas *x* e *y* pode ser considerado como a soma de duas parcelas $u_1$ e $u_2$:

$$u_1 = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(y^2 - hy\right) \tag{B-8}$$

$$u_2 = \frac{U}{h}\,y \tag{B-9}$$

A primeira parcela dá lugar a uma distribuição parabólica de velocidade (Fig. 29), onde observa-se que $u_1 = 0$ , para $y = 0$ e para $y = h$. O escoamento é semelhante ao que ocorre em duas placas planas paralelas e estacionárias, em conseqüência de um gradiente de pressão $\frac{dp}{dx}$, diminuindo ao longo de $x$.

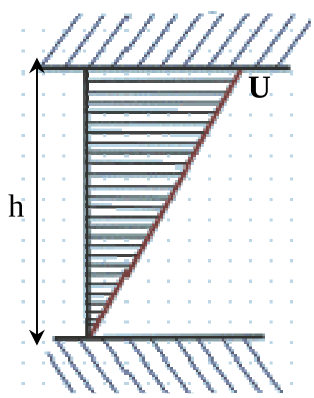



$$u_1 = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(y^2 - hy\right)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}(2y - h)$$

FIGURA 29 – Representação do escoamento de Poiseuille [7]

A segunda parcela $u_2$ dá lugar a uma distribuição linear de velocidades, do tipo que decorre do escoamento laminar de um fluido contido entre superfícies separadas pela distância *h*, onde há um movimento relativo de velocidade *U*, conforme a Fig. 30.




$$u_2 = \frac{U}{h}\,y$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{U}{h}$$

FIGURA 30 – Representação do escoamento de Couette [7]

A partir da equação (B-7), conclui-se que o termo parabólico pode ser aditivo ou subtrativo ao termo linear, dependendo do sinal do gradiente de pressão. Além do que, quando a pressão é máxima ($\frac{dp}{dx}=0$), a velocidade do fluido constitui-se de uma relação linear. A Fig. 31 exibe a superposição das componentes $u_1$ e $u_2$, para obter a velocidade $u$, para valores particulares de $x$ e $\frac{dp}{dx}$.

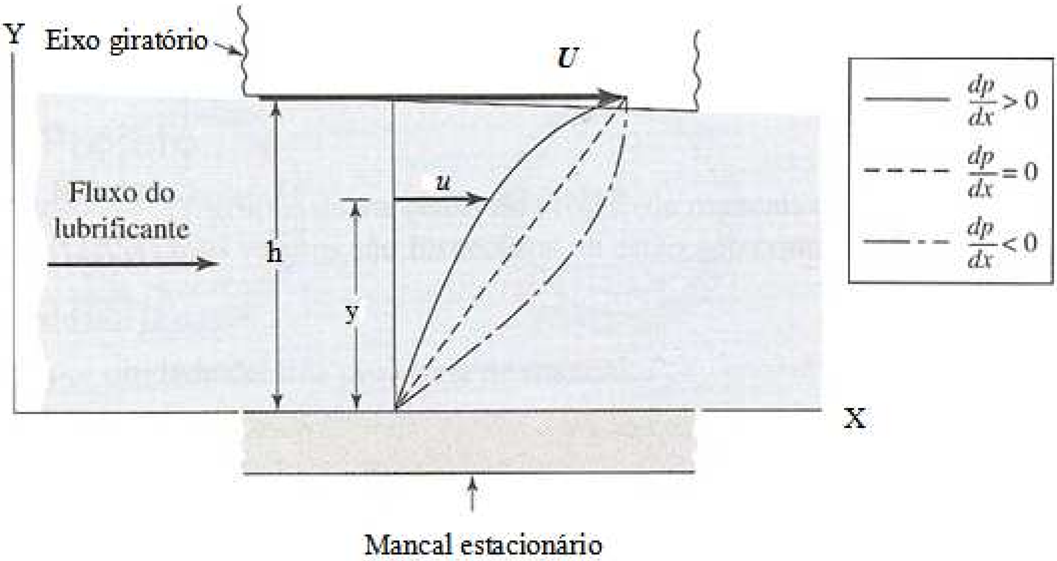



FIGURA 31 – Perfil de velocidades no filme de óleo lubrificante [20]

Uma vez definida a distribuição de velocidades, é possível determinar a vazão de lubrificante fluindo na direção $x$:

$$Q_x = \int_0^h u dy \tag{B-10}$$

Substituindo (B-7) em (B-10) e integrando, obtém-se:

$$Q_x = \frac{Uh}{2} - \frac{h^3}{12\mu}\frac{dp}{dx} \tag{B-11}$$

Logo, isolando $\frac{dp}{dx}$:

$$\frac{dp}{dx} = 6\mu U \left( \frac{1}{h^2} - \frac{2Q_x}{h^3 U} \right) \tag{B-12}$$

Ainda, no ponto em que $\frac{dp}{dx} = 0$, a seguinte igualdade se verifica:

$$\frac{1}{h^2} - \frac{2Q_x}{h^3 U} = 0 \tag{B-13}$$

$$\Rightarrow h = \overline{h} = \frac{2Q_x}{U} \tag{B-14}$$

Onde $\overline{h}$ representa a espessura do filme no ponto em que a pressão é máxima.

Com posse de (B-13), é possível ainda reescrever (B-12) como:

$$\frac{dp}{dx} = 6\mu U \left( \frac{h - \overline{h}}{h^3} \right) \tag{B-15}$$

Esta equação é a forma integrada da Equação de Reynolds.

Outra forma da Equação de Reynolds, é a que decorre de igualar a zero a derivada $\frac{dQ}{dx}$ da eq. (B-11), em consequência da equação de continuidade:

$$\frac{d}{dx}\left( \frac{h^3}{\mu} \frac{dp}{dx} \right) = 6 \frac{d(Uh)}{dx} \tag{B-16}$$

As eq. (B-15) e (B-16) descrevem o comportamento do fluido lubrificante quando analisado do ponto de vista unidimensional. Não foi considerado o escoamento de fluido que “escapa’’ pelos lados da sapata, devido ao fato do movimento relativo entre o fluido e a sapata gerar um campo de pressões, no sentido da largura finita da sapata. Será apresentada posteriormente uma solução analítica deste problema, com a ressalva de que a geometria do problema justifique tal aplicação. Como este é somente um caso específico do problema hidrodinâmico, uma teoria mais geral deve ser desenvolvida de forma a contemplar todo o universo de possíveis geometrias (domínios de cálculo).

## APÊNDICE C: Outros Regimes de Lubrificação

Neste trabalho de graduação foi exposto e dado ênfase ao regime de lubrificação hidrodinâmica, no entanto, existem três formas de lubrificação que podem ocorrer num mancal: lubrificação de filme completo, de filme misto e lubrificação de contorno.

Verifica-se que o regime de lubrificação hidrodinâmica é uma subdivisão da categoria de filme completo, a qual possui ainda os regimes de lubrificação hidrostática, elasto-hidrodinâmica e lubrificação sólida.

A lubrificação de contorno descreve uma situação na qual, por razões de geometria, aspereza das superfícies, cargas excessivas ou falta de lubrificante suficiente, as superfícies do mancal acabam contatando-se fisicamente e pode ocorrer, portanto, desgastes abrasivo.

Porém, antes que este contato íntimo entre as asperezas dos materiais ocorra, verifica-se a existência de um regime de lubrificação intermediário, no qual um fluido escoando por entre o conjunto eixo-mancal forma um filme de óleo de dimensões moleculares, mas cujo campo de pressão hidrodinâmica, ainda consegue sustentar seu eixo e a carga externa.

Caso o comportamento do coeficiente de atrito seja traçado contra uma variável que contemple os três parâmetros básicos utilizados por Petroff, na descrição do comportamento hidrodinâmico do filme de lubrificante, chega-se a um gráfico conforme o mostrado na Fig. 32. Nela é possível observar porque é atrativo que os mancais de deslizamento trabalhem sobre a faixa de operação correspondente ao regime de lubrificação hidrodinâmica, já que neste campo, os índices de atrito são mais baixos, gerando portanto, menores perdas energéticas.

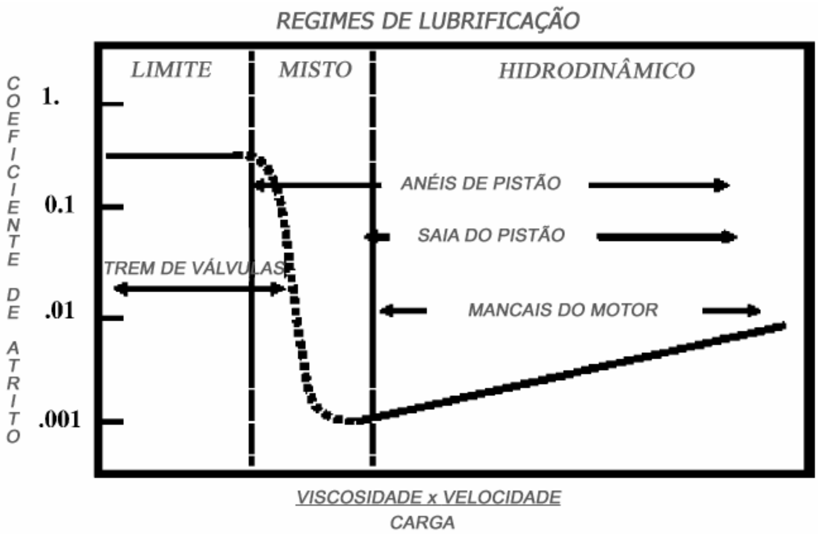



FIGURA 32 – Curva de Stribeck [19]

O gráfico representado na Fig. 32, é denominado de curva de Stribeck, em homenagem a este cientista que estudou a estabilidade dos filmes de lubrificante nos mancais. Deste gráfico é possível concluir que a lubrificação de filme completo é muito mais estável para as aplicações gerais do que o filme gerado na lubrificação de filme misto e de contorno, que são tidas também como instáveis.

A estabilidade do filme completo pode ser exemplificada na situação em que, há um aumento da temperatura do fluido lubrificante, devido a variações operacionais. Desta nova temperatura, resultaria uma viscosidade inferior e, consequentemente, em um valor menor de $\frac{\mu N}{P}$. Na Fig. 32, vê-se então que o coeficiente de fricção decresce para esta nova situação, gerando menos calor ao cisalhar o lubrificante e, por conseguinte, a temperatura deste cai, retornando aos valores originais.

Quando os mancais operam em temperaturas extremas, o uso de lubrificantes sólidos como o grafite ou o dissulfeto de molibdênio ($MoS_2$) são necessários, uma vez que nestes casos, o comportamento de óleos minerais não é mais satisfatório. A Fig. 33 mostra alguns mancais que operam segundo este tipo de lubrificação. Os materiais dos mancais empregados neste fim têm como característica os baixos índices de desgaste, bem como pequenos índices friccionais.

FIGURA 33 – Lubrificação sólida.  Extraída de: http://www.whitfordww.com.br/

Na lubrificação elasto-hidrodinâmica, as superfícies de contato do par cinemático gerado, são do tipo não-conformantes e, verifica-se neste caso, uma maior dificuldade de se formar um filme de óleo completo, uma vez que estas superfícies não-conformantes tendem a expulsar o óleo lubrificante, ao invés de prendê-lo. Exemplos de casos em que se dá este tipo de lubrificação de filme completo são vistos em mecanismos do tipo came-seguidor, entre os dentes de engrenagens e em superfícies que possuem contato rolante, como os mancais de rolamentos mostrados na Fig. 34. A explicação matemática desta forma de lubrificação requer conhecimento sobre a teoria hertziana de tensão de contato e mecânica de fluidos.

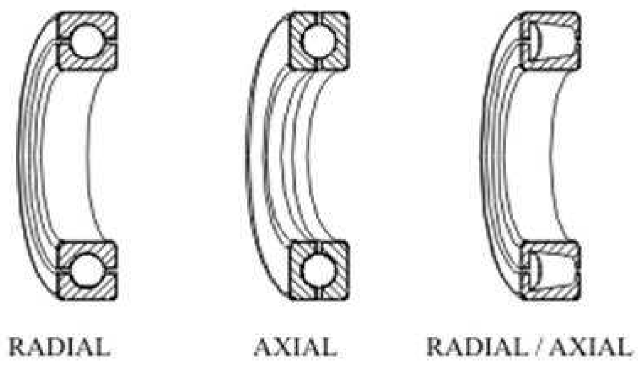



FIGURA 34 – Mancais de rolamento. Extraída de: http://www.corremol.com.br/produtos_rolamentos.php

Para casos em que os mancais devem ser projetados a operarem com pequenas velocidades (ou quase nulas) e, o campo de pressão gerado pelo movimento relativo de suas superfícies, pode não ser grande o bastante para sustentar os carregamentos externos, é necessário gerar no filme de lubrificante uma pressão origem estática.

Esta pressão estática deve-se à pressurização de lubrificante por meio de uma bomba externa e conduzido para dentro do mancal por meio de um conjunto de tubulações. Esta categoria de mancais, onde o movimento entre as fronteiras não é mais condição necessária para a manutenção do filme de lubrificante, é denominada de mancais de lubrificação hidrostática. Uma representação esquemática do funcionamento deste tipo de mancal é mostrado na Fig. 35.

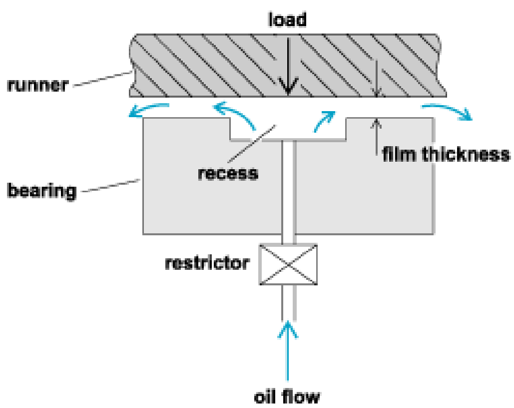



FIGURA 35 – Lubrificação hidrostática. Extraída de: http://www.answers.com/topic/lubrication-5

**APÊNDICE D: Discretização das Variáveis de Interesse do Problema 1**

A discretização da equação do movimento do filme de fluido (eq. 11) é feita no problema 1 considerando a pressão do filme de óleo prescrita por meio de uma função analítica conhecida:

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dp}{dx} = f(x) \tag{D-1}$$

Logo, tem-se que:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{1}{\mu} f(x) \tag{D-2}$$

E introduzindo a nova variável *g* definda por:

$$g = \frac{du}{dy} \tag{D-3}$$

Chega-se a seguinte equação:

$$\frac{dg}{dy} = \frac{1}{\mu} f(x) \tag{D-4}$$

Integrando-se esta função ao longo de um volume de controle *P* unidimensional genérico delimitado pelas suas faces leste e oeste, conforme ilustrado na Fig. 36, chega-se à seguinte equação íntegro-diferencial:

$$\int_{y_w}^{y_e} \frac{dg}{dy} dy = \int_{y_w}^{y_e} \frac{1}{\mu} f(x)\, dy \tag{D-5}$$

$$\int_{y_w}^{y_e} dg = \int_{y_w}^{y_e} \frac{1}{\mu} f(x)\, dy \tag{D-6}$$

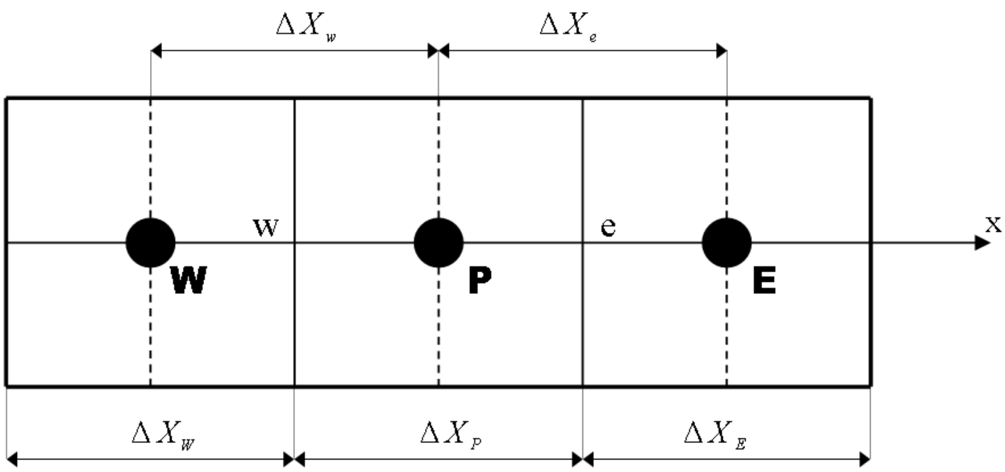



FIGURA 36 – Volumes de controle usados na discretização da equação governante

Lembrando das hipóteses assumidas na seção 3.1.1 de que a viscosidade do filme de óleo se mantém constante dentro do conjunto eixo-mancal e que a pressão ao longo da direção radial em uma dada secção transversal do mancal é praticamente constante, o termo sendo integrado no lado direito da equação anterior é uma constante e a equação pode ser escrita como:

$$g_e - g_w = \frac{1}{\mu} f(x) \int_{y_w}^{y_e} dy \tag{D-7}$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_e - \left(\frac{du}{dy}\right)_w = \frac{f(x)\Delta y_p}{\mu} \tag{D-8}$$

Utilizando o esquema de discretização CDS nas faces, tem-se que:

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_e = \frac{u_E - u_P}{y_E - y_P} = \frac{u_E - u_P}{\Delta y_E} \tag{D-9}$$

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_w = \frac{u_P - u_W}{y_P - y_W} = \frac{u_P - u_W}{\Delta y_W} \tag{D-10}$$

Pode-se substituir as eq. (D-9) e (D-10) em (D-8) e obter a seguinte equação algébrica:

$$\frac{(u_E - u_P)}{\Delta y_E} - \frac{(u_P - u_W)}{\Delta y_W} = \frac{f(x)\,\Delta y_p}{\mu} \tag{D-11}$$

que escrita em termo dos coeficientes nodais, chega a:

$$\left(\frac{1}{\Delta y_E} + \frac{1}{\Delta y_W}\right) \cdot u_P = \left(\frac{1}{\Delta y_E}\right) \cdot u_E + \left(\frac{1}{\Delta y_W}\right) \cdot u_W - \frac{f(x)\,\Delta y_p}{\mu} \tag{D-12}$$

A forma com que o sistema de equações algébricas deve ser escrito para ser resolvida por meio do solver TDMA (algoritmo de Thomas), com uma malha unidimensional em que a variável dependente é a velocidade *u* é da forma:

$$a_p \cdot u_P = a_e \cdot u_E + a_w \cdot u_W + b_p \tag{D-13}$$

A eq. (D-12) quando comparada à forma geral de (D-13), permite a obtenção dos coeficientes e termos fontes listados abaixo:

$$\begin{cases} a_e = \left(\dfrac{1}{\Delta y_E}\right) \\ a_w = \left(\dfrac{1}{\Delta y_W}\right) \\ b_p = -\dfrac{f(x)\Delta y_p}{\mu} \\ a_p = a_e + a_w \end{cases} \tag{D-14}$$

Para a aplicação das condições de contorno optou-se pela técnica dos volumes fictícios, onde a partir da condição de não-escorregamento, tem-se que a velocidade no contorno inferior é nula, enquanto que a no contorno superior é igual à velocidade do eixo girante, conforme mostrado na Fig. 37.

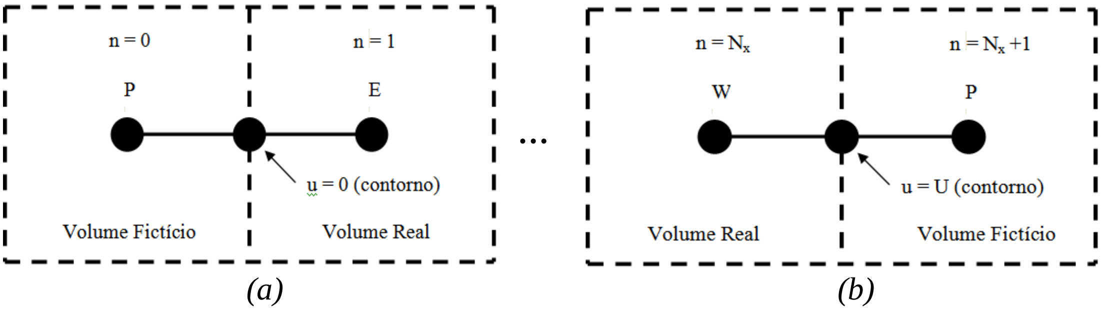



FIGURA 37 - Volumes de controle fictícios no mancal *(a)* e no eixo *(b)*

Aplicando-se as condições de não-escorregamento no mancal e no eixo chega-se a:

a) Mancal

$$u_e = \frac{u_P + u_E}{2} = 0$$
$$u_P + u_E = 0 \qquad \text{(D-15)}$$
$$u_P = -u_E$$

Assim os coeficientes para o TDMA são:

$$n = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} a_P = 1 \\ a_e = -1 \\ a_w = 0 \\ b_p = 0 \end{cases} \qquad \text{(D-16)}$$

b) Eixo

$$u_w = \frac{u_P + u_W}{2} = U$$
$$u_P + u_W = 2U \qquad \text{(D-17)}$$
$$u_P = -u_W + 2U$$

$$n = N_y + 1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} a_P = 1 \\ a_e = 0 \\ a_w = -1 \\ b_p = 2U \end{cases} \tag{D-18}$$

Tem-se ainda que a partir da definição da eq. 29, é possível calcular numericamente as tensões de cisalhamento no mancal e no eixo (variáveis de interesse) respectivamente por:

$$\tau_{\mathbf{xy}}\Big|_{\mathbf{y=0}} = -\mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\mathbf{y=0}} = -\mu_{constante}\left(\frac{u_1 - u_{imaginario\,"0"}}{\Delta y_1}\right) \tag{D-19}$$

$$\tau_{\mathbf{xy}}\Big|_{\mathbf{y}=h} = -\mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\mathbf{y}=h} = -\mu_{constante}\left(\frac{u_{imaginario\;"N_{y+1}"} - u_{N_y}}{\Delta y_{N_y}}\right) \tag{D-20}$$

E as tensões do fluido entre o mancal e o eixo são calculadas como:

$$\tau_{\mathbf{xy}}\Big|_{\mathbf{y}=n} = -\mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -2\mu_{constante}\left(\frac{u_E - u_P}{\Delta y_P + \Delta y_E}\right) \tag{D-21}$$

As velocidades médias numéricas e exatas foram calculadas por meio da integral média da velocidade, resolvida por meio da regra do retângulo:

$$\overline{u}_n = \frac{1}{h(x)}\int_0^{h(x)} u\,dy = \frac{\sum_{p=1}^{N}\left(u_p \cdot \Delta y_p\right)}{h_n} \tag{D-22}$$

**APÊNDICE E: Discretização das Variáveis de Interesse do Problema 2**

A discretização da equação da pressão (eq. 13) é feita no problema 2. Nele, o gradiente da pressão é estimado e corrigido nas iterações posteriores. A equação apresentada abaixo nada mais é que o lado direito da eq. 13:

$$\frac{dp}{dx} = pl_P \tag{E-1}$$

Pela definição do esquema CDS com correção adiada, tem-se que:

$$p_i = p_{i,UDS} + \beta\left(p^{*}_{i,CDS} - p^{*}_{i,UDS}\right) \tag{E-2}$$

nesta notação o super-índice refere-se à variável de interesse calculada na iteração anterior.

Utilizando o esquema CDS para discretizar a eq. (E-1), chega-se a definição:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p_e - p_w}{x_e - x_w} \tag{E-3}$$

Para conseguir escrever as pressões nas faces em termos de pressões nodais é preciso aproximar os termos de pressão segundo o esquema UDS, como abaixo:

$$p_w = p_W \tag{E-4}$$

$$p_e = p_P \tag{E-5}$$

Escrevendo as pressões nas faces em termos das pressões nodais, utilizando no entanto agora o esquema CDS, tem-se:

$$p_w = \frac{p_W + p_P}{2} \tag{E-6}$$

$$p_e = \frac{p_P + p_E}{2} \qquad \text{(E-7)}$$

Com base nas definições de (E-4), (E-5), (E-6) e (E-7) é possível substituir na eq. (E-2) estas equações e obter as expressões:

$$p_w = p_W + \beta\left[\frac{p_W^{\,*} + p_P^{\,*}}{2} - p_W^{\,*}\right] \qquad \text{(E-8)}$$

$$p_e = p_P + \beta\left[\frac{p_P^{\,*} + p_E^{\,*}}{2} - p_P^{\,*}\right] \qquad \text{(E-9)}$$

Após algumas operações algébricas sobre as equações acima, chega-se a:

$$p_w = p_W + \beta\left[\frac{p_P^{\,*} - p_W^{\,*}}{2}\right] \qquad \text{(E-10)}$$

$$p_e = p_P + \beta\left[\frac{p_E^{\,*} - p_P^{\,*}}{2}\right] \qquad \text{(E-11)}$$

A substituição das eq. (E-10) e (E-11) em (E-3) leva a:

$$\frac{p_e - p_w}{\Delta x_P} = \frac{p_P - p_W}{\Delta x_P} + \frac{\beta}{2\Delta x_P}\left(p_E^{\,*} - 2p_P^{\,*} + p_W^{\,*}\right) = pl_P \qquad \text{(E-12)}$$

Reescrevendo a eq. (E-12) de maneira que as pressões nodais fiquem na forma explícita, é possível escrever os coeficiente nodais e termos fontes para este problema como sendo:

$$\begin{cases} a_p = 1 \\ a_e = 0 \\ a_w = 1 \\ b_p = \dfrac{\beta}{2\Delta x_P}\left(p_E{}^* - 2p_P{}^* + p_W{}^*\right) \end{cases} \tag{E-13}$$

Para a aplicação das condições de contorno pelo método dos volumes fictícios, admiti-se que a pressão na seção de entrada e de saída do mancal é nula, conforme mostrado na Fig. 38.

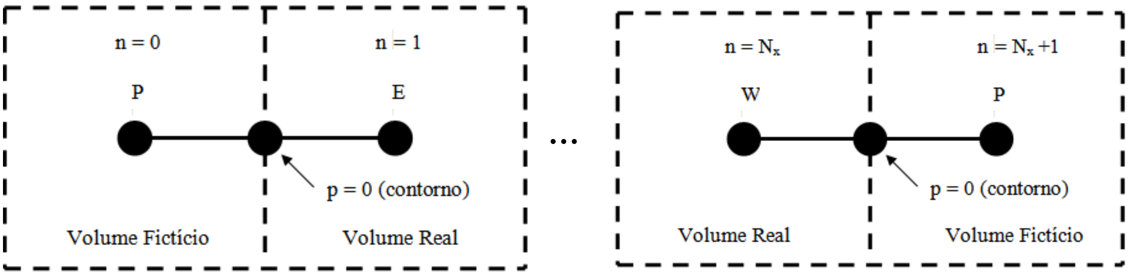



FIGURA 38 - Volumes de controle fictícios para equação da pressão

Aplicando-se as condições de Dirichlet nas faces, chega-se para a seção de entrada e saída a:

a) Seção de entrada

$$\begin{aligned} p_e &= \frac{p_P + p_E}{2} = 0 \\ p_P + p_E &= 0 \\ p_P &= -p_E \end{aligned} \tag{E-14}$$

Assim os coeficientes para o TDMA são:

$$n = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_P = 1 \\ a_e = -1 \\ a_w = 0 \\ b_p = 0 \end{cases} \tag{E-15}$$

b) Seção de saída

$$p_w = \frac{p_P + p_W}{2} = 0$$
$$p_P + p_W = 0 \qquad \text{(E-16)}$$
$$p_P = -p_W$$

E os coeficientes para o TDMA:

$$n = N_y + 1 \Rightarrow \begin{cases} a_P = 1 \\ a_e = 0 \\ a_w = -1 \\ b_p = 0 \end{cases} \qquad \text{(E-17)}$$