UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
COSMO DAMIÃO SANTIAGO

# ESTUDO DE PARÂMETROS DO MÉTODO *MULTIGRID* PARA SISTEMAS DE EQUAÇÕES 2D EM CFD

CURITIBA

2010

**COSMO DAMIÃO SANTIAGO**

# ESTUDO DE PARÂMETROS DO MÉTODO *MULTIGRID* PARA SISTEMAS DE EQUAÇÕES 2D EM CFD

Tese apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de doutor em Engenharia Mecânica no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFPR, na área de concentração de Fenômenos de Transporte e Mecânica dos Sólidos.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Henrique Marchi.

Co-Orientador: Prof. Dr. Leandro Franco Souza.

**CURITIBA**

**2010**

# Termo de Aprovação

COSMO DAMIÃO SANTIAGO

ESTUDO DE PARÂMETROS DO MÉTODO *MULTIGRID* PARA SISTEMAS DE EQUAÇÕES 2D EM CFD

Tese aprovada como requisito parcial para a obtenção do título do doutor em Engenharia Mecânica no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica na área de Fenômenos de Transporte e Mecânica dos Sólidos, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

---

Prof. Dr. Carlos Henrique Marchi
Universidade Federal do Paraná (UFPR)

---

Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto
Universidade Federal de Uberlândia (UFU)

---

Prof. Dr. Admilson Teixeira Franco
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

---

Prof. Dr. Christian Johann Losso Hermes
Universidade Federal do Paraná (UFPR)

---

Prof. Dr. Márcio Augusto Villela Pinto
Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Curitiba, 03 de agosto de 2010

# DEDICATÓRIA

*À Deus.*

*À minha família.*

*À minha linda filha, Ana Carolina.*

*Que Deus te proteja sempre.*

# AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço à Deus por tudo.

Agradeço ao Prof. Dr. Carlos H. Marchi, meu orientador, que teve contribuição significativa sobre o desenvolvimento deste trabalho, através da orientação, acompanhamento e revisão ao longo desta jornada, e também ao meu co-orientador Leandro F. Souza por importantes contribuições. Agradeço aos professores Dr. Aristeu da Silveira Neto, Dr. Admilson Teixeira Franco, Dr. Christian Johann Losso Hermes e o Dr. Márcio Augusto Villela Pinto, membros participantes da banca examinadora, pelas sugestões apresentadas para o enriquecimento deste trabalho. Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PG-Mec) da Universidade Federal do Paraná (UFPR) pela oportunidade de cursar o doutorado. Agradeço aos colegas do LENA, que estão sempre dispostos a dar sugestões e também à Maristela, secretária do PPGMNE e ao Márcio, secretário do PG-Mec, pelo pronto atendimento. Agradeço à minha esposa Sueli e à minha filha Carol, pela paciência e compreensão.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

# EPÍGRAFE

Bom mesmo é ir a luta com determinação,
abraçar a vida com paixão,
perder com classe e vencer com ousadia,
pois o triunfo pertence a quem se atreve...
A vida é muita para ser insignificante.
Charles Chaplin.

# RESUMO

A influência de alguns parâmetros do método *multigrid* geométrico sobre o tempo de CPU para diferentes modelos matemáticos é investigada. Os parâmetros investigados são: número de iterações internas do *solver* ($\sigma$); número de níveis de malha ($L$); tamanho do problema ($N$); esquemas CS e FAS para dois modelos; e o efeito causado pelo número de equações diferenciais em dois modelos matemáticos. Os parâmetros são estudados para a equação de Laplace, equações de Navier (Termoelasticidade linear), equações de Burgers e de Navier-Stokes para escoamento incompressível; nas equações de Navier-Stokes discute-se também o efeito do número de Reynolds. Para o método *multigrid*, são feitas simulações com iterações internas $\sigma = 1, 2, 3, \cdots, 10$ e $\sigma = 15$, e, no caso das equações de Navier-Stokes, o necessário para confirmar a tendência. O número de níveis de malhas varia de $L = 2$ a $L = L_{máximo}$ com $N = 5\times5$, $9\times9$, $17\times17$, $\cdots$, $1025\times1025$. O desempenho do método *multigrid* nas equações de Navier-Stokes é comparado nas formulações função de corrente e velocidade ($\psi - \mathbf{v}$) e função de corrente e vorticidade ($\psi - \omega$). As equações são usadas na forma bidimensional e em regime estacionário. Os algoritmos *multigrid* CS (*Correction Scheme*) e FAS (*Full Approximation Scheme*) são implementados para a equação de Laplace e equações de Navier. Para as equações de Burgers e de Navier-Stokes implementa-se o algoritmo FAS. As equações diferenciais parciais são discretizadas com o Método de Diferenças Finitas em malhas uniformes nas duas direções. Os sistemas de equações algébricas são resolvidos com o *solver* MSI (*Modified Strongly Implicit*), e no caso das equações de Navier-Stokes com o SOR (*Successive Over-Relaxation*), ambos associados ao método *multigrid* geométrico com ciclo V e razão de engrossamento dois. As informações foram transferidas entre as malhas com injeção na restrição e interpolação bilinear na prolongação. Apenas na formulação função de corrente e velocidade utilizou-se a ponderação completa na restrição. Verificou-se principalmente que: o esquema FAS apresentou melhor desempenho que o CS nos problemas lineares; a redução do fator de aceleraçao do método *multigrid* não é causado pelo acoplamento das equações; a formulação $\psi - \mathbf{v}$ apresentou maiores fatores de aceleração que a formulação $\psi - \omega$, mas o tempo de execução do *singlegrid* com $\psi - \omega$ é menor que $\psi - \mathbf{v}$; as soluções da formulação $\psi - \mathbf{v}$ são mais acuradas que as soluções da formulação $\psi - \omega$, inclusive em malhas grossas. Os resultados foram comparados com o método *singlegrid* e resultados disponíveis na literatura.

**Palavras-chave:** CFD. Função de Corrente. Velocidade. Métodos Numéricos. Navier-Stokes. *Multigrid*. Burgers. Laplace.

# ABSTRACT

The influence of some parameters of the geometric multigrid on the CPU time for different mathematical models is investigated. The parameters investigated are: the number of inner iterations in the solver ($\sigma$); the number of grid levels ($L$); the size of the problem ($N$); CS and FAS schemes for two models; and the number of differential equations of the mathematical models. The mathematical models adopted are: Laplace, Navier (thermoelasticity), Burgers and Navier-Stokes equations for incompressible flow; in Navier-Stokes equations is studied also the Reynolds number $Re$. For the multigrid method, simulations are carried out with inner iterations $\sigma = 1, 2, 3, \cdots, 10$ and $\sigma = 15$, and, in the case of the Navier-Stokes equations, the necessary to confirm the tendency. The number of grid levels ranging from of $L = 2$ to $L = L_{maximum}$ with $N = 5 \times 5, 9 \times 9, 17 \times 17, \cdots, 1025 \times 1025$. The Navier-Stokes equations are solved according to formulations streamfunction-velocity ($\psi - \mathbf{v}$) and streamfunction-vorticity ($\psi - \omega$) formulations, whose performances were compared in the lid-driven square cavity flow classic problem. All the problems are two-dimensional steady-state. The multigrid algorithms CS (Correction Scheme) and FAS (Full Approximation Scheme) are implemented for Laplace and Navier equations. For Burgers and Navier-Stokes equations the FAS algorithm is implemented. The partial differential equations are discretized using the Finite Difference Method in uniform grids in both directions. The algebraic equations are solved with MSI (Modified Strongly Implicit) and in the case of the Navier-Stokes equations with SOR (Successive Over-Relaxation) solver, both associated to geometric multigrid method with V-cycle, by using a coarsening ratio two. The information was transferred among the grids with the injection in restriction and bi-linear interpolation within prolongation. In the streamfunction-velocity formulation was used the full weighting in restriction only. It was verified mainly that: the performance of the FAS scheme is better than CS in linear problems; reducing the efficiency of the multigrid method is not caused by the coupling of the equations; the $\psi - \mathbf{v}$ formulation presented higher values of speed-up's that the $\psi - \omega$ formulation, but the runtime of the singlegrid with $\psi - \omega$ formulation is smaller; the solutions of the $\psi - \mathbf{v}$ formulation are more accurate than the solutions of the $\psi - \omega$ formulation also in coarse grids. The results were compared with the singlegrid method and other ones available in the literature.

**Keywords:** CFD. Streamfunction. Velocity. Numerical Methods. Navier-Stokes. Multigrid. Burgers. Laplace.

# LISTA DE FIGURAS


Figura 1 Exemplo de transformação do domínio contínuo em domínio discretizado. 25

Figura 2 Exemplos de tipos de malhas. ..... 26

Figura 3 Estrutura da matriz dos coeficientes com ordenação lexicográfica e aproximações envolvendo 5 e 9 pontos. ..... 27

Figura 4 Modos de Fourier, adaptado de Briggs et al. (2000)). ..... 50

Figura 5 Suavização do erro com método Gauss-Seidel na malha $33 \times 33$ (Adaptado de Trottenberg et al. (2001)). ..... 51

Figura 6 Suavização do erro com método Gauss-Seidel na malha $17 \times 17$ (Adaptado de Trottenberg et al. (2001)). ..... 52

Figura 7 Erro suave na malha $\Omega^h$ e o erro oscilatório na malha grossa $\Omega^{2h}$. Adaptado de Briggs et al. (2000). ..... 53

Figura 8 Sequência de três malhas com razão de engrossamento 2. ..... 54

Figura 9 Transferência de informações da malha fina para a malha grossa com operador de restrição por injeção $[I]_h^{2h}$. ..... 56

Figura 10 Transferência de informações da malha grossa para a malha fina com o operador de prolongação $[I]_{2h}^h$. ..... 57

Figura 11 Estrutura dos ciclos V, W e FMG com ciclo V. ..... 58

Figura 12 Domínio físico. ..... 64

Figura 13 Domínio físico e condições de contorno da cavidade quadrada para as equações de Navier-Stokes. ..... 74

Figura 14 Ponto $i, j$ e seus vizinhos adjacentes mais próximos. ..... 76

Figura 15 Domínio de cálculo e condições de contorno da cavidade quadrada para as equações de Burgers. ..... 80

Figura 16 Ponto $i, j$ e seus oito vizinhos mais próximos. ..... 87

Figura 17 Distribuição do erro numérico da equação de Laplace numa malha com $65 \times 65$ pontos. ..... 94

Figura 18 Isolinhas das soluções numérica e analítica da equação de Laplace na malha $129 \times 129$ pontos. ..... 95

Figura 19 Comportamento do erro numérico para a equação de Laplace no ponto central com o refino da malha. ..... 95

Figura 20 Isolinhas da componente $u$ obtidos com as equações de Navier numa malha com $129 \times 129$ pontos. ..... 96

Figura 21 Isolinhas da componente $v$ das equações de Navier numa malha com $129 \times 129$ pontos. ..... 97

Figura 22 Distribuição do erro de discretização das equações de Navier no domínio de cálculo numa malha com $65 \times 65$ pontos. ..... 97

Figura 23 Ordem efetiva $p_E(h)$ do erro de discretização e o comportamento do erro numérico $E_h$ da componente $u$ nas equações de Navier. ..... 98

Figura 24 Isovelocidades numérica e analítica de $u$ das equações de Burgers numa malha com $129 \times 129$ pontos. ..... 98

Figura 25 Isovelocidades numérica e analítica das componentes da velocidade das equações de Burgers numa malha com $129 \times 129$ pontos. ..... 99

Figura 26 Distribuição do erro numérico das equações de Burgers no domínio de cálculo numa malha com $65 \times 65$ pontos. ..... 99

Figura 27 Ordem efetiva $p_E$ e queda do erro de discretização $E_h$ das componentes $u$ e $v$ com as equações de Burgers. O símbolo estrela, Fig. 27a, representa a ordem verdadeira. ..... 100

Figura 28 Ordem aparente $p_U$ do erro de discretização da formulação $\psi - \mathbf{v}$ com $Re = 100$ no ponto central. ..... 101

Figura 29 Perfis de $u$ e $v$, no centro da cavidade ao longo das linhas horizontal e vertical, respectivamente, para vários Reynolds e malha $129 \times 129$, com a formulação $\psi - \mathbf{v}$ e comparação com Ghia et al. (1982). ..... 102

Figura 30 Perfis de $u$ e $v$, no centro da cavidade ao longo das linhas horizontal e vertical, respectivamente, para vários Reynolds e malha $129 \times 129$, com a formulação $\psi - \mathbf{v}$ e comparação com Marchi et al. (2009) na malha $1024 \times 1024$ volumes. ..... 102

Figura 31 Linhas de contorno da função de corrente $\psi$, com vários números de Reynolds na malha $513 \times 513$, com a formulação $\psi - \mathbf{v}$. ..... 103

Figura 32 Ordem aparente $p_U$ do erro de discretização da formulação $\psi - \omega$ com

$Re = 100$ ponto central. ..... 105

Figura 33 Perfis de $u$ e $v$ no centro da cavidade ao longo das linhas horizontal e vertical, respectivamente, para vários Reynolds e malha $513 \times 513$, com a formulação $\psi - \omega$ e comparação com Ghia et al. (1982) na malha $129 \times 129$. ..... 105

Figura 34 Perfis de $u$ e $v$, no centro da cavidade ao longo das linhas horizontal e vertical, respectivamente, para vários Reynolds e malha $513 \times 513$, com a formulação $\psi - \omega$ e comparação com Marchi et al. (2009) na malha $1024 \times 1024$ volumes. ..... 106

Figura 35 Linhas de contorno da função de corrente, $\psi$, na malha $513 \times 513$, com a formulação $\psi - \omega$. ..... 107

Figura 36 Linhas de contorno da vorticidade $\omega$, na malha $513 \times 513$, obtidas com a formulação $\psi - \omega$. ..... 108

Figura 37 Efeito de $\sigma$ sobre o tempo de CPU para o esquema CS na equação de Laplace e equações de Navier. ..... 113

Figura 38 Efeito de $\sigma$ sobre o tempo de CPU para o esquema FAS nos três problemas. ..... 113

Figura 39 Efeito do tempo de CPU sobre o número de níveis $L$ para a equação de Laplace e equações de Navier com o equema CS. ..... 115

Figura 40 Efeito do tempo de CPU sobre o número de níveis $L$ para os três problemas com o esquema FAS. ..... 115

Figura 41 Tempo de CPU (s) *versus* tamanho do problema $N$ com os esquemas CS e FAS. ..... 117

Figura 42 Comparação entre os esquemas CS e FAS com os dois problemas lineares. 118

Figura 43 Efeito de $\sigma$ sobre o tempo de CPU para $Re = 100$ na formulação $\psi - \mathbf{v}$. 122

Figura 44 Efeito de $\sigma$ sobre o tempo de CPU para $Re = 400$ na formulação $\psi - \mathbf{v}$. 123

Figura 45 Efeito de $\sigma$ sobre o tempo de CPU para $Re = 1000$ na formulação $\psi - \mathbf{v}$. 123

Figura 46 Efeito de $\sigma$ sobre o tempo de CPU para $Re = 100$ na formulação $\psi - \omega$. 124

Figura 47 Efeito de $\sigma$ sobre o tempo de CPU para $Re = 400$ na formulação $\psi - \omega$. 125

Figura 48 Efeito de $\sigma$ sobre o tempo de CPU para $Re = 1000$ na formulação $\psi - \omega$. 125

Figura 49 Efeito do número de níveis sobre o tempo de CPU na formulação $\psi - \mathbf{v}$

com $Re = 100$. ..... 127
Figura 50 Efeito do número de níveis na formulação $\psi - \mathbf{v}$ com $Re = 400$. ..... 127
Figura 51 Efeito do número de níveis na formulação $\psi - \mathbf{v}$ com $Re = 1000$. ..... 128
Figura 52 Número de níveis com $Re = 100$, formulação $\psi - \omega$. ..... 129
Figura 53 Número de níveis com $Re = 400$ na formulação $\psi - \omega$. ..... 129
Figura 54 Número de níveis com $Re = 1000$ na formulação $\psi - \omega$. ..... 130
Figura 55 Tempo de CPU ($s$) *versus* tamanho do problema $N$. ..... 130
Figura 56 Análise do desempenho do método *multigrid* aplicado em apenas uma equação em problemas com duas equações. ..... 134

# LISTA DE TABELAS


Tabela 1 Resumo de trabalhos realizados com as equações de Navier-Stokes nos últimos anos. ..... 38

Tabela 2 Parâmetros de relaxação do método SOR usados no sistema de equações da vorticidade. ..... 85

Tabela 3 Parâmetros de relaxação do método SOR usados no sistema de equações da formulação $\psi - \mathbf{v}$. ..... 89

Tabela 4 Comparações dos valores mínimos de $\psi$ e das velocidades no centro da cavidade e as respectivas localizações, com outros autores. ..... 110

Tabela 5 Número ótimo de iterações internas ($\sigma_{ótimo}$) nos esquemas CS e FAS para os problemas de Laplace, Navier e de Burgers. ..... 114

Tabela 6 Tempo de CPU ($s$) dos métodos *multigrid* e *singlegrid* com os esquemas CS e FAS nos problemas de Laplace, Navier e de Burgers, com os respectivos fatores de aceleração. ..... 118

Tabela 7 Expoente ($p$) da Eq. 5.2 com o *solver* MSI. ..... 120

Tabela 8 Número ótimo de iterações internas na formulação $\psi - \mathbf{v}$. ..... 123

Tabela 9 Número ótimo de iterações internas na formulação $\psi - \omega$. ..... 126

Tabela 10 Tempo de CPU ($s$) dos métodos *multigrid* e *singlegrid* das duas formulações com os respectivos fatores de aceleração. ..... 132

Tabela 11 Expoente ($p$) da Eq. 5.2 para o *solver* SOR. ..... 133

Tabela 12 Soluções numérica e analítica da equação de Laplace na linha vertical que passa pelo centro do domínio. ..... 148

Tabela 13 Perfil e erro numérico de $u$ das equações de Navier na linha que passa pelo centro do domínio. ..... 149

Tabela 14 Perfil e erro numérico de $v$ das equações de Navier na linha que passa pelo centro do domínio. ..... 150

Tabela 15 Perfil e erro numérico de $u$ das equações de Burgers na linha que passa pelo centro do domínio. ..... 150

Tabela 16 Perfil e erro numérico de $v$ das equações de Burgers na linha que passa pelo centro do domínio. ..... 151

Tabela 17 Perfil da velocidade $u$ ao longo da linha vertical que passa pelo centro da cavidade, com a formulação $\psi - \mathbf{v}$. ..... 152

Tabela 18 Perfil da velocidade $v$ ao longo da linha vertical que passa pelo centro da cavidade com a formulação $\psi - \mathbf{v}$. ..... 152

Tabela 19 Perfil da velocidade $u$ ao longo da linha vertical que passa pelo centro da cavidade com a formulação $\psi - \omega$. ..... 153

Tabela 20 Perfil da velocidade $v$ ao longo da linha vertical que passa pelo centro da cavidade com a formulação $\psi - \omega$. ..... 154

# LISTA DE SIGLAS

| | |
|---|---|
| $\omega - \mathbf{v}$ | Formulação vorticidade e velocidade |
| $\psi - \mathbf{v}$ | Formulação função de corrente e velocidade |
| $\psi - \omega$ | Formulação função de corrente e vorticidade |
| $p - \mathbf{v}$ | Formulação pressão (variáveis primitivas) |
| Bi-CGStab | Gradientge Bi-Conjugado Estabilizado |
| CDS | *Central Differencing Scheme* |
| CFD | *Computational Fluid Dynamics* |
| CFD-6 | Nome do computador usado para as simulações numéricas |
| CPU | Unidade Central de Processamento |
| CS | Correction Scheme (Esquema de Correção) |
| EDP | Equação Diferencial Parcial |
| FAS | *Full Approximation Scheme* (Esquema de Aproximação Completa) |
| GMRES | Método do Resíduo Mínimo Generalizado |
| MDF | Método de Diferenças Finitas |
| MEF | Método de Elementos Finitos |
| MG | Multigrid Geométrico |
| MG-1EQ | Algoritmo *multigrid* para uma equação |
| MG-2EQ | Algoritmo *multigrid* para duas equações |
| MVF | Método de Volumes Finitos |
| QML | Quantidade de Movimento Linear |
| SG | Método *singlegrid* ou método de malha única |
| SIMPLE | *Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations* |
| SIMPLEC | *Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations Consistent* |
| SOR | *Successive Over-Relaxation* |
| TDMA | *Tri-Diagonal Matrix Algorithm* |
| TIMEF | Função da biblioteca PORTLIB do FORTRAN/95 usada para medir o tempo de CPU |
| UDS | Upstream Differencing Scheme |

# LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|---|---|
| $a_{.,.}$ | Coeficientes da matriz $a_{p,e}$, $a_{p,n}$, $a_{p,p}$, $a_{p,s}$, $a_{p,w}$, $a_{p,ne}$, $a_{p,se}$, $a_{p,sw}$, $a_{p,nw}$ |
| $A$ | Matriz dos coeficientes |
| $B$ | Termo fonte na Eq. (3.24) |
| $b_p^{\tilde{\phi}}$ | Termo fonte da variável de interesse |
| $c$ | Coeficiente da Eq. (5.2) |
| Eq. | Equação |
| $E_h$ | Erro verdadeiro ou erro de discretização da solução numérica |
| $E_m$ | Erro na iteração $m$ |
| $f$ | Vetor de termos independentes |
| $h$ | Tamanho do elemento (ou espaçamento) na malha computacional |
| $i, j$ | Índices |
| $ite$ | Iteração externa |
| $ite_{máximo}$ | Número máximo de iterações externas |
| $k$ | Número de ondas ou modos de Fourier |
| $l_1$ | Norma média do erro na iteração $m$ |
| $L$ | Número de níveis |
| $L_{ótimo}$ | Número ótimo de níveis de malhas |
| $L_{máximo}$ | Número máximo de níveis de malhas |
| $m$ | iteração |
| $N$ | Número total de pontos (ou nós) da malha computacional |
| $N_x$ e $N_y$ | Número de pontos na malha fina nas direções coordenadas $x$ e $y$ |
| $p$ | Pressão estática, $Pa$ |
| $p_E$ | Ordem efetiva do erro de discretização |
| $p_L$ | Ordem assintótica do erro de discretização |
| $p_U$ | Ordem aparente do erro de discretização |
| $q$ | Razão de refino entre as malhas |
| $r$ | Razão de engrossamento |
| $R$ | Resíduo |
| $R^1$ | Resíduo na primeira iteração |
| $R^m$ | Resíduo na iteração $m$ |

| | |
|---|---|
| $Re$ | Número de Reynolds |
| $\hat{S}$ | Matriz de iteração |
| $S$ | Fator de aceleração (ou fator *speed-up*) |
| $T$ | Temperatura, $^oC$ |
| $t_{MG}$ | Tempo de CPU do método *multigrid*, $s$ |
| $t_{SG}$ | Tempo de CPU do método *singlegrid*, $s$ |
| $u$ | Na direção $x$: componente do deslocamento ($m$), nas eqs. de Navier, componente da velocidade ($m/s$), nas eqs. de Burgers e Navier-Stokes |
| $v$ | Na direção $y$: componente do deslocamento ($m$), nas eqs. de Navier, componente da velocidade ($m/s$), nas eqs. de Burgers e Navier-Stokes |
| $x$ e $y$ | Coordenadas espaciais nas direções horizontal e vertical, $m$ |

*Símbolos gregos*

| | |
|---|---|
| $\alpha$ | Coeficiente de expansão térmica, $K^{-1}$ |
| $\beta_1$ e $\beta_2$ | Parâmetros das Eqs. (3.11) e (3.12) |
| $\gamma$ | Parâmetro que define o tipo de esquema (CS ou FAS) nos algoritmos |
| $\epsilon_\tau$ | Erro de truncamento |
| $\varepsilon$ | Tolerância |
| $\eta$ | Parâmetro do ciclo V |
| $\theta$ | Parâmetro de relaxação do método SOR |
| $\lambda$ | Razão de Poisson |
| $\mu$ | Viscosidade dinâmica do fluido, $Pa.s$ |
| $\bar{\lambda}$ | Autovalores da matriz de iteração |
| $\nu$ | Viscosidade cinemática |
| $\rho$ | Massa específica do fluido, $kg/m^3$ |
| $\sigma_{ótimo}$ | Número ótimo de iterações internas |
| $\sigma$ | Iterações internas do *solver* |
| $\phi_{m\to\infty}$ | Solução do sistema de equações sem erros de iteração |
| $\phi_m$ | Solução na iteração $m$ |
| $\tilde{\phi}$ | Aproximação de $\phi$ |
| $\phi$ | Incógnitas do sistema de equações |
| $\Phi$ | Solução analítica exata das equações diferenciais parciais |

| | |
|---|---|
| $\psi$ | Função de corrente |
| $\omega$ | Vorticidade |
| $\Omega^h$ | Domínio discretizado |
| $\Omega^{2h}$ | Malha grossa |
| $\Omega$ | Domínio contínuo |

*Símbolos*

| | |
|---|---|
| $I_h^{2h}$ | Operador de restrição |
| $I_{2h}^h$ | Operador de prolongação |
| $\|\cdot\|_\infty$ | Norma do máximo |
| $\|\cdot\|_2$ | Norma euclidiana |
| $\ll$ | Muito menor |
| $\gg$ | Muito maior |
| $O(\cdot)$ | Acurácia |
| $\forall$ | Para todo |

# SUMÁRIO


**1 INTRODUÇÃO ..... 23**

1.1 O PROBLEMA ..... 29

1.2 REVISÃO DA LITERATURA ..... 30

1.2.1 Aspectos relevantes do método *multigrid* ..... 30

1.2.2 Estudos do método *multigrid* ..... 32

1.2.3 Formulações alternativas para Navier-Stokes ..... 34

1.3 MOTIVAÇÃO ..... 40

1.4 OBJETIVOS ..... 42

1.5 ORGANIZAÇÃO DA TESE ..... 43

**2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA ..... 44**

2.1 MÉTODOS ITERATIVOS BÁSICOS ..... 44

2.2 EQUAÇÃO RESIDUAL ..... 46

2.3 O MÉTODO *MULTIGRID* ..... 48

2.3.1 Fundamentos básicos ..... 49

2.4 COMPONENTES DO *MULTIGRID* ..... 55

2.4.1 Operadores de restrição ..... 55

2.4.2 Operadores de prolongação ..... 56

2.4.3 Ciclos ..... 57

2.5 ALGORITMOS ..... 59

2.6 RESUMO DO CAPÍTULO 2 ..... 63

**3 MODELOS MATEMÁTICOS E NUMÉRICOS ..... 64**

3.1 MODELOS MATEMÁTICOS ..... 64

3.1.1 Equação de Laplace . . . . . 64
3.1.2 Equações de Navier . . . . . 65
3.1.3 Equações de Burgers . . . . . 67
3.1.4 Formulações das Equações de Navier-Stokes . . . . . 68
3.1.4.1 Variáveis primitivas: $\mathbf{v} - p$ . . . . . 69
3.1.4.2 Função de Corrente e Vorticidade: $\psi - \omega$ . . . . . 70
3.1.4.3 Função de Corrente e Velocidade: $\psi - \mathbf{v}$ . . . . . 72
3.1.5 Problema teste: Cavidade quadrada . . . . . 73
3.2 MODELOS NUMÉRICOS . . . . . 74
3.2.1 Obtenção das equações algébricas . . . . . 75
3.2.2 Equação de Laplace . . . . . 77
3.2.3 Equações de Navier . . . . . 78
3.2.4 Equações de Burgers . . . . . 80
3.2.5 Resolução dos sistemas de equações . . . . . 82
3.2.6 Equações de Navier-Stokes . . . . . 83
3.2.6.1 Formulação Função de Corrente e Vorticidade: $\psi - \omega$ . . . . . 83
3.2.6.2 Resolução dos sistemas de equações associados a $\psi$ e $\omega$ . . . . . 84
3.2.6.3 Formulação Função de Corrente e Velocidade: $\psi - \mathbf{v}$ . . . . . 86
3.2.6.4 Resolução do sistema de equações associado a $\psi$ . . . . . 89
3.3 DETALHES DA IMPLEMTAÇÃO COMPUTACIONAL . . . . . 90
3.4 RESUMO DO CAPÍTULO 3 . . . . . 91

**4 VERIFICAÇÃO DAS SOLUÇÕES NUMÉRICAS . . . . . 92**

4.1 EQUAÇÃO DE LAPLACE, EQUAÇÕES DE NAVIER E DE BURGERS . . . . 93
4.1.1 Equação de Laplace . . . . . 94
4.1.2 Equações de Navier . . . . . 96
4.1.3 Equações de Burgers . . . . . 98

4.2 EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES . . . . . 100
4.2.1 Função de Corrente e Velocidade: $\psi - \mathbf{v}$ . . . . . 101
4.2.2 Função de Corrente e Vorticidade: $\psi - \omega$ . . . . . 104
4.3 CONCLUSÃO DO CAPÍTULO 4 . . . . . 109

**5 ANÁLISE DOS RESULTADOS . . . . . 111**

5.1 ETAPA I: EQUAÇÃO DE LAPLACE E, EQUAÇÕES DE NAVIER E DE BURGERS . . . . . 112
5.1.1 Número de iterações internas ($\sigma$) . . . . . 112
5.1.2 Número de níveis ($L$) . . . . . 114
5.1.3 Tamanho do problema ($N$) . . . . . 116
5.1.4 Comparação entre os esquemas CS e FAS . . . . . 118
5.1.5 Esforço computacional . . . . . 119
5.1.6 Conclusão da Etapa I . . . . . 120
5.2 ETAPA II: EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES . . . . . 121
5.2.1 Número de iterações internas ($\sigma$) . . . . . 121
5.2.1.1 Função de Corrente e Velocidade: $\psi - \mathbf{v}$ . . . . . 121
5.2.1.2 Função de Corrente e Vorticidade: $\psi - \omega$ . . . . . 123
5.2.2 Número de níveis ($L$) . . . . . 126
5.2.2.1 Função Corrente e Velocidade: $\psi - \mathbf{v}$ . . . . . 126
5.2.2.2 Função de Corrente e Vorticidade: $\psi - \omega$ . . . . . 128
5.2.3 Tamanho do problema ($N$) . . . . . 129
5.2.4 Esforço computacional . . . . . 132
5.2.5 Estudo em modelos com duas equações e *multigrid* apenas em uma . . . . . 133
5.2.6 Conclusão da Etapa II . . . . . 134

**6 CONCLUSÃO . . . . . 136**

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS ..... 141**

**APÊNDICE A – PERFIS TABULADOS ..... 148**

A.1 PERFIL DA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE ..... 148

A.2 PERFIS DE DESLOCAMENTO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER ..... 149

A.3 PERFIS DE VELOCIDADE DAS EQUAÇÕES DE BURGERS ..... 149

A.4 PERFIS DE VELOCIDADE DA FORMULAÇÃO $\psi - \mathbf{v}$ ..... 150

A.5 PERFIS DE VELOCIDADE DA FORMULAÇÃO $\psi - \omega$ ..... 151

**APÊNDICE B – ARTIGOS ..... 155**

# 1 INTRODUÇÃO

A mecânica computacional é a área da ciência que estuda fenômenos físicos utilizando técnicas que envolvem computação, matemática e engenharia. A Dinâmica dos Fluidos Computacional (do inglês, *Computational Fluid Dynamics* - CFD) está inserida dentro do contexto da mecânica computacional. Segundo Fortuna (2000), CFD é a área da computação científica que trata dos estudos de métodos computacionais para simulação de fenômenos que envolvem fluidos em movimento com ou sem troca de calor, cujo interesse principal é obter grandezas físicas, tais como velocidade, temperatura e pressão, na região de escoamento.

Em Dinâmica dos Fluidos Computacional é comum a aplicação de novas tecnologias para simulação numérica de problemas reais com mais eficiência. Na indústria aeroespacial e automotiva, por exemplo, engenheiros e técnicos trabalham em busca de estruturas aerodinâmicas ideais para tentar minimizar o impacto da superfície com o ar e, ao mesmo tempo, otimizar os custos de projetos. No campo da meteorologia, buscam-se resolver problemas de previsões do tempo com maior precisão e menor tempo de computação. Em geral, faz-se simulações computacionais para entender o comportamento de fenômenos físicos por meio de soluções das velocidades direcionais, pressão e temperatura.

Um dos modelos matemáticos mais importantes usados para modelar problemas em CFD é o conjunto de equações de Navier-Stokes (FOX e MCDONALD, 1995; FERZIGER e PERIC, 2001). São equações diferenciais parciais de segunda ordem, não-lineares, sobre domínios bidimensionais ou tridimensionais. Essas equações modelam fluido em movimento, cuja região (domínio) em que se deseja a solução do problema pode ter formas diversas. Em situações mais complexas, tais como a sustentação em uma asa, ou um sistema de clima global como o *El Niño*, as soluções numéricas para as equações de Navier-Stokes são geralmente obtidas com a ajuda de supercomputadores.

Infelizmente, a solução analítica dessas equações para muitos problemas reais em dinâmica dos fluidos não é ainda conhecida. O desenvolvimento teórico para esse tipo de equação ainda não é suficiente para o tratamento adequado das não-linearidades. Por essa razão é que, no estudo do movimento de fluidos e de seus efeitos, se utilizam ensaios experimentais, como testes em túneis de vento e tanques d'água (FORTUNA, 2000).

Três tipos de técnicas que podem ser usadas para obter a solução de problemas em engenharia são (MALISKA, 2004):

- Métodos analíticos;
- Métodos numéricos (experimentação numérica) e;
- Experimentação em laboratório, como por exemplo, túnel de vento.

Cada método apresenta vantagens e desvantagens, dependendo da formulação matemática do problema a ser resolvido e dos recursos disponíveis.

Uma desvantagem dos métodos analíticos é que as hipóteses simplificadoras podem afastar o modelo matemático do fenômeno físico. Além disso, é necessário que geometrias e condições de contorno também sejam simples. Uma das suas vantagens é a obtenção da solução de forma fechada ou soluções contínuas. Em geral, as soluções analíticas são obtidas apenas para uma pequena quantidade de problemas e aplicações de interesse das engenharias. Segundo Maliska (2004), os métodos analíticos e numéricos também são denominados métodos teóricos, pois também trabalham com modelos matemáticos.

Em geral, os métodos numéricos apresentam menos restrições que os métodos analíticos. Podem ser usados para resolver problemas com complicadas condições de contorno, definidos em geometrias arbitrárias e apresentam resultados com maior rapidez (MALISKA, 2004).

A experimentação em laboratório tem a vantagem de estar lidando com a configuração real do fenômeno físico, contudo, o custo pode ser demasiadamente alto e, muitas vezes proibitivo. Além disso, questões de segurança também podem inviabilizar os ensaios. Na falta de modelos matemáticos adequados e em geometrias complexas, muitas vezes esta é a única alternativa viável. Mais detalhes podem ser encontrados em Marchi (2001) e Maliska (2004).

Diante das dificuldades colocadas acima, embora haja algumas vantagens, a busca de soluções dos problemas em engenharia tem impulsionado o desenvolvimento de várias técnicas numéricas, como alternativa aos métodos analíticos e experimentais, para a obtenção de soluções aproximadas. Em muitas situações práticas, as soluções de problemas de engenharia são obtidas por meio de métodos numéricos, e algumas vezes, essa é a forma mais prática, ou a única, de se obter informações sobre um determinado escoamento (FORTUNA, 2000).

Os métodos numéricos consistem em substituir os termos das derivadas parciais envolvidas na equação diferencial por aproximações numéricas. Com isso, o problema contínuo é transformado em um problema discreto, em que o domínio espacial é parti-

cionado em um número finito de pontos ou nós. Essa transformação é conhecida como discretização do domínio e resulta em um conjunto de pontos discretos e seus elementos, que recebe o nome de malha computacional, ou simplesmente malha. A Fig. 1 a seguir ilustra esta idéia.

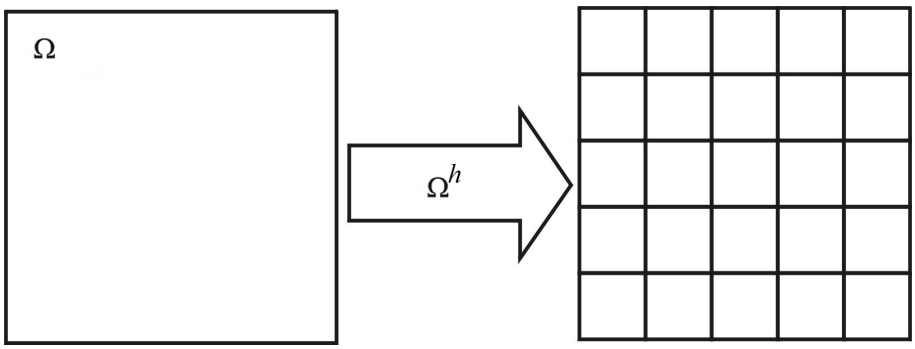
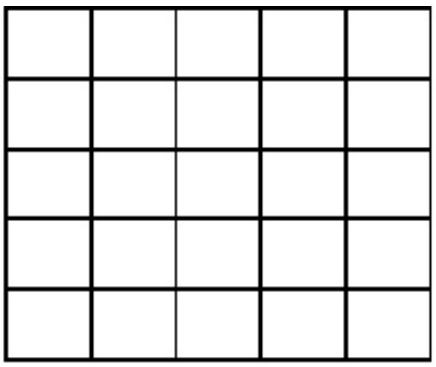



Figura 1: Exemplo de transformação do domínio contínuo em domínio discretizado.

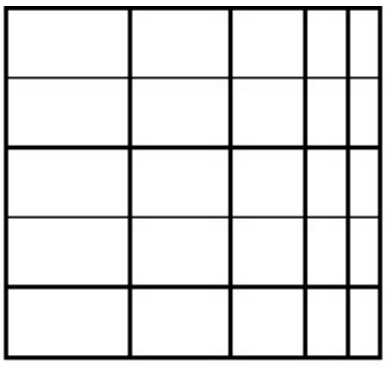
Na Fig. 1, $\Omega$ representa o domínio contínuo e $\Omega^h$ o domínio discretizado, em que $h$ é a distância entre dois nós (ou pontos) consecutivos nas direções coordenadas. A malha resultante da discretização poderá ser classificada em uniforme ou não-uniforme e estruturada ou não-estruturada, dependendo da forma como os pontos discretos estão distribuídos no domínio computacional. Uma malha é estruturada quando os pontos possuem uma determinada lei de construção, apresentando sempre o mesmo número de vizinhos e, não-estruturada, quando os pontos não possuem uma lei de construçao, apresentando um número de vizinhos diferentes. Para cada ponto da malha computacional obtém-se um sistema de equações algébricas, cujas características dependem do tipo de aproximação numérica usada.

A Fig. 2 exemplifica a estrutura de algumas malhas. Na Fig. 2a, tem-se distâncias iguais entre dois nós consecutivos nas duas direções coordenadas. Na Fig. 2b, observam-se distâncias diferentes na direção $x$ e, na Fig. 2c, tanto as distâncias nas duas direções quanto o número de nós vizinhos podem ser diferentes.

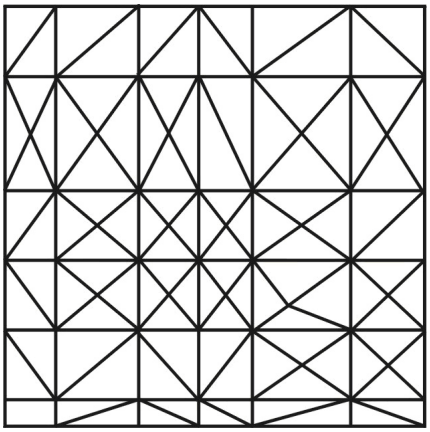
Vários métodos podem ser usados para discretizar um modelo matemático. Em CFD os métodos mais comuns são o Método de Diferenças Finitas (MDF); Método de Volumes Finitos (MVF); e o Método de Elementos Finitos (MEF). Em Fortuna (2000) podem ser enconcontradas diversas aplicações de CFD em que o MDF é usado para a discretização dos modelos matemáticos. No livro de Tannehill et al. (1997) também pode ser encontrada uma boa fundamentação do MDF com aplicações em CFD. Diversos modelos matemáticos discretizadas com o MVF podem ser encontradas em Maliska (2004) e Versteeg e Malalasekera (2007), e com o uso do MEF, em Hughes (2000).



(a) Estruturada e uniforme



(b) Estruturada e não-uniforme na direção $x$



(c) Não-estruturada

Figura 2: Exemplos de tipos de malhas.

Em todos os métodos citados acima, dependendo das características do modelo matemático, as discretizações conduzem a um sistema de equações algébricas, lineares ou não-lineares. Com a discretização, as propriedades físicas envolvidas passam a ser descritas em função de um conjunto de valores discretos, obtidos com a utilização de métodos adequados para cada ponto da malha computacional. Em Patankar (1980), Wesseling e Oosterlee (2001) e Ferziger e Peric (2001), podem ser encontradas mais informações sobre métodos de discretização.

A idéia do MDF é obter a solução aproximada de uma equação diferencial parcial em pontos discretos do domínio. Este método é baseado na expansão da série de Taylor em torno de um ponto na malha computacional, como descrito em Tannehill et al. (1997). Com o uso de métodos de resolução de sistemas de equações é possível obter soluções aproximadas para muitos problemas das diversas áreas de conhecimento das engenharias.

A discretização de modelos matemáticos com o MDF conduz a um sistema de equa-

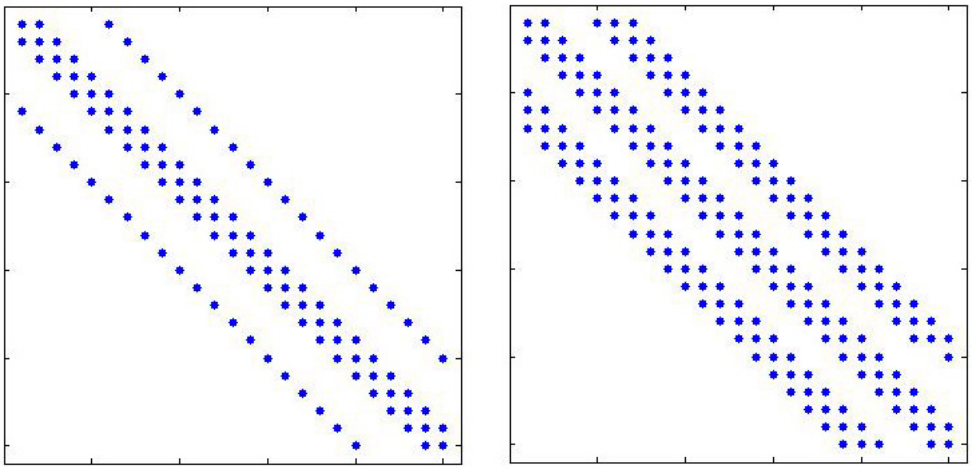
ções algébricas do tipo

$$A\phi = f, \tag{1.1}$$

onde $A$ é a matriz dos coeficientes, $\phi$ é o vetor de incógnitas e $f$ é o vetor de termos independentes.

A estrutura da matriz $A$ depende basicamente do tipo de malha, da aproximação numérica adotada e da ordenação das variáveis no vetor de incógnitas, e em geral é esparsa. Por exemplo, em problemas bidimensionais com ordenação lexicográfica, e com aproximação numérica de segunda ordem envolvendo cinco pontos, a matriz dos coeficientes tem cinco diagonais e, com aproximação numérica de segunda ordem envolvendo nove pontos, a matriz possui nove diagonais.

A Fig. 3 ilustra a estrutura da matriz dos coeficientes para um problema bidimensional discretizado com o MDF usando uma aproximação de cinco e nove pontos, Figs. 3a e 3b, respectivamente.



(a) Estrutura com aproximação de 5 pontos.

(b) Estrutura com aproximação de 9 pontos.

Figura 3: Estrutura da matriz dos coeficientes com ordenação lexicográfica e aproximações envolvendo 5 e 9 pontos.

Duas classes de métodos que podem ser usados para obter a solução numérica do sistema de equações algébricas dado pela Eq. (1.1) são: métodos diretos (ou exatos) e métodos iterativos (BURDEN e FAIRES, 2003).

Os métodos diretos, exceto por erros de arredondamento, definido como os erros que ocorrem em virtude da representação finita dos números reais nas computações (MARCHI,

2001), comuns em soluções numéricas, fornecem a solução exata do sistema de equações, se existe, após um número finito de operações. Entretanto, esses métodos não são adequados quando o interesse é obter soluções em malhas muito refinadas, devido a necessidade de armazenamento dos pontos e o tempo de CPU[1], demasiadamente alto do ponto de vista computacional para inverter a matriz dos coeficientes. Pode-se destacar ainda que, malhas com muitos pontos resultam em sistemas de equações que podem envolver até milhões de variáveis, e muitas vezes esparsos, tornando-se proibitivo com métodos diretos (GOLUB e LOAN, 1989).

Por outro lado, quanto mais pontos tiver a malha, menor deverá ser o erro de discretização, que Marchi (2001) define como a diferença entre a solução analítica exata e a solução numérica em uma dada malha computacional. Entretanto, aumentar o número de pontos implica em maior esforço computacional, principalmente com os métodos diretos. A alternativa, nesses casos, são os métodos iterativos, que pela sua própria natureza, apresentam erros de iteração. Segundo Roache (1998) os erros de iteração são definidos como a diferença entre a solução exata das equações discretizadas e a solução numérica em uma determinada iteração. O tempo de processamento requerido pelos métodos iterativos, em relação aos métodos diretos, é muito menor quando o problema é resolvido em malhas com muitos pontos. Nos métodos diretos, os erros de arredondamento podem prejudicar a qualidade da solução quando o sistema de equações é muito grande, portanto os métodos iterativos tendem a apresentar resultados mais aceitáveis[2] porque são baseados em um processo finito convergente. Em geral procuram-se soluções numéricas mais próximas possível da solução do fenômeno real, ou seja, com o menor erro numérico possível. Deve-se ressaltar que os altos custos, mesmo com os métodos iterativos, devido principalmente ao tempo de processamento, limitam as soluções dos problemas em malhas, às vezes, relativamente grosseiras.

A resolução por métodos numéricos requer a utilização de técnicas numéricas eficientes para que se possam obter soluções aceitáveis e com menor tempo de CPU (tempo de processamento). Na prática, muitos problemas em CFD apresentam algum tipo de dificuldade para obter a solução numérica. Estas dificuldades podem estar relacionadas, por exemplo, com a geometria do domínio de cálculo, aplicações das condições de contorno, descontinuidades, limitações das técnicas numéricas e recursos computacionais disponíveis. Com o desenvolvimento de potentes computadores e *softwares* nas últimas

[1]Tempo gasto pela Unidade Central de Processamento (do inglês, *Central Processing Unit* - CPU).

[2]Entende-se por soluções aceitáveis aquelas que estão mais próximas possíveis da solução do fenômeno real.

décadas, muitos caminhos têm sido abertos, e nesse sentido, nota-se um grande avanço das pesquisas na área de CFD (BRANDT, 1998; BRANDT et al., 2002).

O foco de muitos estudos têm sido na direção da minimização do tempo de CPU necessário para resolver o sistema dado pela Eq. (1.1), sem afetar a qualidade da solução numérica. Um método muito usado para acelerar a taxa de convergência[3] dos esquemas iterativos é o método *multigrid* (MG) (BRIGGS et al., 2000; HACKBUSCH, 1985).

## 1.1 O PROBLEMA

Esta pesquisa concentra-se no estudo de alguns parâmetros do método *multigrid* geométrico para cinco modelos matemáticos. Verifica-se também se o número de equações diferenciais envolvidas no problema afetam estes parâmetros. As equações de Navier-Stokes, para escoamentos incompressíveis, em regime estacionário e propriedades constantes (FOX e MCDONALD, 1995; MCDONOUGH, 2003), constituem o principal modelo matemático.

Os modelos matemáticos são:

1. Equação Laplace;
2. Equações de Navier (ou termoelasticidade linear);
3. Equações de Burgers;
4. Equações de Navier-Stokes.
   As equações de Navier-Stokes são abordadas em duas formulações:
   (a) Função de corrente e velocidade: $\psi - \mathbf{v}$
   (b) Função de corrente e vorticidade: $\psi - \omega$

A equação de Laplace (TANNEHILL et al., 1997) é um modelo linear que envolve derivadas parciais de segunda ordem. Muito usada para descrever fenômenos físicos em vários campos da ciência, como por exemplo, eletromagnetismo, astronomia e mecânica dos fluidos. Os dois modelos matemáticos, equações de Navier (TIMOSHENKO e GOODIER, 1970) e de Burgers (EFE, 2006) envolvem, cada um, duas equações acopladas pelos deslocamentos e velocidades, respectivamente. As equações de Navier são lineares e usadas para estudar o efeito do campo de temperaturas sobre o campo de tensão e o efeito associado do campo

[3] A taxa de convergência pode ser vista como uma medida de quão rápido a solução pelo método iterativo se aproxima da solução do sistema linear.

de tensão sobre as condições térmicas num sólido elástico. As equações de Burgers são não-lineares e são consideradas uma forma simplificada das equações de Navier-Stokes, usadas para a modelagem de escoamentos de fluidos, na formação de ondas de choque e de transmissão acústica (EFE, 2006). As equações de Navier-Stokes são não-lineares e são usadas principalmente para o estudo de fenômenos que envolvem escoamentos de fluidos laminares ou turbulentos. Por possuírem características diferentes, entre si e em relação a equação de Laplace, entende-se serem problemas adequados para estudar a influência do número de equações nos parâmetros do método *multigrid*, bem como o fato de ser linear ou não. Todos os modelos citados acima são resolvidos na forma bidimensional.

Existem basicamente duas maneiras de encontrar soluções aproximadas para as equações de Navier-Stokes. Uma delas é utilizar a formulação do problema em variáveis primitivas, $p - \mathbf{v}$ (MALISKA, 2004). Nesta formulação, além da falta de condições de contorno para a pressão, a presença da equação da conservação da massa, a qual deve ser satisfeita em todo o tempo, não permite a utilização de métodos explícitos simples de solução. Ou seja, são necessários procedimentos especiais para o tratamento da equação que descreve a conservação da massa durante o processo. Outra maneira é utilizar formulações alternativas (FERZIGER e PERIC, 2001; FORTUNA, 2000). Em formulações alternativas baseadas na vorticidade tem-se a vantagem, no caso bidimensional, de envolver somente dois campos escalares desconhecidos: a função de corrente $\psi$ e a vorticidade $\omega$. Assim, evitam-se as dificuldades associadas com a resolução da equação da pressão. A recente formulação $\psi - \mathbf{v}$ (GUPTA e KALITA, 2005) envolve somente um campo escalar no processo iterativo, que é a função de corrente, $\psi$. Para esta formulação ainda não existem resultados com o método *multigrid* disponíveis na literatura.

## 1.2 REVISÃO DA LITERATURA

### 1.2.1 Aspectos relevantes do método *multigrid*

O método *multigrid* pode ser interpretado como uma técnica numérica usada para acelerar a taxa de convergência dos métodos iterativos. Para Hirsch (1988) e Tannehill et al. (1997) este método é considerado um dos mais eficientes e gerais desenvolvidos nos últimos anos. Segundo Wesseling (1992), o método *multigrid* usando mais que duas malhas, foi desenvolvido na década de 60, por Fedorenko (1964). Os primeiros experimentos numéricos foram feitos para acelerar a taxa de convergência do problema discreto

associado a equação de Poisson, entretanto, o seu desempenho foi efetivamente comprovado para problemas de CFD no trabalho pioneiro de Brandt (1977) que fez uma análise teórica e numérica incluindo uma introdução ao método *multigrid* e esquemas específicos para problemas lineares e não-lineares. Estes esquemas foram denominados de Esquema de Correção (do inglês, *Correction Scheme* - CS ), que segundo Brandt é mais adequado para problemas lineares e Esquema de Aproximação Completa (do inglês, *Full Approximation Scheme* - FAS ), para problemas não-lineares. No esquema CS trabalham-se somente com o resíduo (ou erro) nas malhas grossas, onde resolvem-se a equação residual. Já no esquema FAS, trabalham-se com aproximações completas da solução discreta na malha grossa, e não somente com o resíduo. De acordo com Brandt, cada ciclo do esquema FAS é mais caro computacionalmente se comparado ao esquema CS devido à transferência de informações (resíduo e solução) para as malhas mais grossas. Ele abordou também técnicas adaptativas, razões de engrossamento, análise local de Fourier, taxa de convergência e outras análises. A partir do trabalho de Brandt, verificam-se um grande número de trabalhos com o método *multigrid*, abordando tanto o aprimoramento do método em geral quanto a resolução de novos problemas em CFD. Aplicações do método *multigrid* podem ser vistas em Hirsch (1988), Tannehill et al. (1997) e Trottenberg et al. (2001). Mais detalhes sobre os esquemas CS e FAS serão apresentados na seção 2.5.

Brandt (1998) resumiu as principais dificuldades computacionais (escoamentos recirculantes, linhas de correntes não alinhadas com a malha, características da malha, pontos de estagnação, discretização e relaxação próximos a choques e contornos, etc.) observadas com o método *multigrid* e apontou as possíveis soluções em uma extensa tabela. Wesseling e Oosterlee (2001) fizeram uma revisão dos desenvolvimentos do método *multigrid* geométrico na década de 90, enfatizando aplicações em CFD, onde o estado-da-arte foi mostrado para escoamentos compressíveis e incompressíveis em relação aos métodos usados na indústria. Eles argumentaram que uma boa razão para trabalhar com o método *multigrid* é por ser um dos mais significantes desenvolvimentos em análise numérica na segunda metade do século XX. Stuben (2001) também fez uma revisão dos desenvolvimentos na década de 90, mas enfocando o método *multigrid* algébrico (AMG), que é mais adequado para problemas com malhas não-estruturadas. Stuben afirmou que muitos métodos foram desenvolvidos, mas ainda nenhum deles é capaz de tratar com eficiência todos os problemas práticos em CFD. Neste sentido, Brandt et al. (2002) destacaram os recentes avanços do método *multigrid* e revisaram algumas estratégias para atingir sua eficiência. Yavneh (2006) forneceu alguns conceitos básicos do método *multigrid*, realizou análise de convergência para o método iterativo de Jacobi e destacou algumas das dificuldades para

desenvolver algoritmos *multigrid* eficientes.

Vários trabalhos têm identificado as principais vantagens do método *multigrid*, por meio de análises teóricas ou numéricas. Hirsch (1988) e Ferziger e Peric (2001) afirmaram que sua propriedade mais importante é que o número de iterações na malha mais fina, necessária para alcançar a convergência, é independente do número de pontos da malha. Nessa mesma linha de raciocínio, Wesseling (1984), Hortmann et al. (1990) e Pavlov et al. (2001) afirmaram que o tempo de CPU necessário para obter a solução de um problema com o uso do *multigrid* é diretamente proporcional ao número de variáveis.

Uma boa introdução ao método *multigrid*, incluindo a análise de Fourier, para os algoritmos de problemas lineares e não-lineares, em que são abordadas as iterações, operadores de restrição e prolongação, ciclos, complexidade, propriedades variacionais, análise espectral e aplicações, pode ser encontrada nos livros de Wesseling (1992), Briggs et al. (2000) e Trottenberg et al. (2001). Brandt foi um dos autores que mais contribuiu para o desenvolvimento e análise do método *multigrid* nas últimas três décadas. Uma lista dos seus principais trabalhos pode ser encontrada em http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~achi/. Outros textos e informações gerais sobre o método *multigrid* podem ser encontrados também no site http://www.mgnet.org/.

O método *multigrid* pode ser classificado em dois tipos: método *multigrid* geométrico que é recomendado para problemas em malhas estruturadas (WESSELING e OOSTERLEE, 2001); e método *multigrid* algébrico que é mais indicado para problemas em malhas não-estruturadas (CHAN et al., 1998; STUBEN, 2001).

### 1.2.2 Estudos do método *multigrid*

Em busca de soluções com o menor tempo de CPU, e sem afetar a qualidade da solução, alguns trabalhos têm sido publicados, onde o objetivo é melhorar a eficiência do método *multigrid* por meio de estudos de parâmetros utilizando-se problemas específicos de CFD. Neste sentido, Tannehill et al. (1997) afirmaram que o melhor desempenho do método *multigrid* é obtido com diversos níveis de malhas e sugeriram o uso de 4 ou 5, para o problema de Laplace 2D com a malha mais fina de $129 \times 129$ pontos. Pinto et al. (2005) fizeram otimização de vários parâmetros do método *multigrid* geométrico para os problemas unidimensionais lineares de difusão e advecção-difusão. Eles também fizeram uma análise de parâmetros para um problema não-linear unidimensional (equação

de Burgers). Em Pinto e Marchi (2006) encontram-se uma análise dos esquemas CS e FAS com três *solvers* e razão de engrossamento padrão ($r = 2$), em que o problema modelo usado foi a equação de Laplace bidimensional. Eles constataram que o ideal é usar o máximo possível de níveis de malhas e, além disso, o esquema FAS é mais rápido que o esquema CS, mesmo em problemas lineares. Oliveira et al. (2006) também fizeram um estudo para encontrar valores ótimos de alguns parâmetros do método *multigrid* em problemas unidimensionais lineares e não-lineares.

Importantes contribuições usando o método *multigrid* em problemas de escoamentos de fluido incompressível governado pelas equações de Navier-Stokes, dentro da cavidade quadrada (SHANKAR e DESHPANDE, 2000; ERTURK, 2008), podem ser encontradas na literatura. Alguns destes trabalhos são citados e comentados a seguir.

As dificuldades associadas às equações de Navier-Stokes, aliada as boas propriedades do método *multigrid* (BRANDT, 1977), tem atraído a atenção de muitos pesquisadores para encontrar soluções em malhas cada vez mais refinadas. Vanka (1986) descreveu um método *multigrid* baseado na formulação em variáveis primitivas e obteve as equações discretas com o Método de Diferenças Finitas. Ele propôs como *solver* um método Gauss-Seidel Simetricamente Acoplado (SCGS) associado ao método *multigrid* e obteve soluções em malhas de até $321 \times 321$ pontos. Vanka observou que, exceto para $Re = 5000$, cuja solução foi obtida somente para malhas até $161 \times 161$ pontos, o tempo de CPU aumentou quase que linearmente com o aumento do número de pontos da malha, confirmando, portanto, as características atrativas do método. Entretanto, o tempo de CPU aumentou com o número de Reynolds, devido ao aumento da não-linearidade das equações. Para $Re = 5000$ e malha $321 \times 321$, por exemplo, a taxa de convergência foi muito lenta e precisou uma forte sobre-relaxação no método iterativo. Sockol (1993) fez um estudo com quatro métodos de relaxação no método *multigrid* usando as equações de Navier-Stokes como problema modelo. Ele usou malhas uniformes altamente distorcidas com vários números de Reynolds. Rubini et al. (1992) usaram um algoritmo *multigrid*, chamado de *Full Multigrid* (FMG), com o esquema FAS, para acelerar a convergência em modelos de turbulência tridimensional, em que a equações foram discretizadas com o Método dos Volumes Finitos. A ideia básica do FMG é construir uma boa estimativa inicial para a malha mais fina iniciando o processo iterativo na malha mais grossa (TROTTENBERG et al., 2001; BRIGGS et al., 2000). Em Lilek et al. (1997) foi apresentada uma análise da eficiência e acurácia do *Full Multigrid* usando o Método dos Volumes Finitos com o método de acoplamento SIMPLE, em que são abordados escoamentos incompressíveis no problema da cavidade quadrada tridimensional (SHANKAR e DESHPANDE, 2000).

Yan e Thiele (1998) propuseram um esquema FMG modificado baseado no ciclo V, em que somente o resíduo é restrito para a malha grossa e a solução é aproveitada do mesmo nível do ciclo anterior, diferentemente do FAS, que restringe o resíduo e a solução. Yan et al. (2007) fizeram uma validação geral do algoritmo apresentado em Yan e Thiele (1998), envolvendo esquemas de convecção de alta-ordem, várias geometrias, diferentes tipos de malhas, modelos turbulentos e laminares, 2D e 3D, e compararam a performance do novo esquema com FMG e *singlegrid*. No problema da cavidade quadrada, por exemplo, eles verificaram um ganho significativo no fator de aceleração quando aumentou o número de pontos da malha. Para $Re = 400$ e 1000, na malha $256 \times 256$ volumes, eles encontraram fatores de aceleração iguais a 289 e 284, com o FMG modificado e, 187 e 169 com FMG, respectivamente. Mas, verificaram também que, o fator de aceleração diminui ligeiramente com o aumento do número de Reynolds, concordando, portanto, com as observações de Vanka (1986). Montero et al. (2001) fizeram um estudo comparativo entre dois algoritmos *multigrid* robustos para as equações de Navier-Stokes compressível em problemas tridimensionais usando a formulação nas variáveis primitivas. Eles verificaram que a taxa de convergência não é independente do número de Reynolds.

Os resultados obtidos pelos autores citados acima evidenciam avanços em relação a performance do método *multigrid* para problemas de escoamentos, mas, pode-se notar também que ainda é necessário estudos mais detalhados do método, visando melhorar o seu desempenho principalmente para malhas refinadas e altos números de Reynolds.

Na seção seguinte destacam-se alguns trabalhos em que as equações de Navier-Stokes foram usadas em formulações alternativas, inclusive com o *multigrid*.

### 1.2.3 Formulações alternativas para Navier-Stokes

Encontram-se na literatura, por exemplo Fortuna (2000), McDonough (2003) e Tannehill et al. (1997), algumas formulações alternativas para as equações de Navier-Stokes. Além da formulação em função das variáveis primitivas, que envolve a pressão e velocidade, $p - \mathbf{v}$, destacam-se também as formulações função de corrente e vorticidade, $\psi - \omega$, e vorticidade e velocidade $\omega - \mathbf{v}$, que geralmente são referenciadas como formulações alternativas para Navier-Stokes.

As formulações baseadas em vorticidade possuem a vantagem da transformação das três equações da formulação baseada na $p - \mathbf{v}$, que envolve as equações de conservação

da Quantidade de Movimento Linear nas direções $x$ (QML-$x$) e $y$ (QML-$y$) e equação da continuidade, em apenas duas. Essas formulações evitam o cálculo da pressão pela sua eliminação das equações da QML, porém, de acordo com Fortuna (2000), apresentam algumas dificuldades, apesar de possuírem o atrativo de não necessitarem de tratamento especial para a pressão. As condições de contorno da vorticidade requerem tratamento especial e a pressão não é obtida diretamente, devendo ser calculada após o campo da função de corrente ou das velocidades ter sido determinado, ou seja, no pós-processamento.

De acordo com Palma et al. (2001) e Ponta (2005), o primeiro a aplicar a formulação vorticidade e velocidade para as equações de Navier-Stokes incompressível foi Fasel (1976). Palma et al. (2001) apresentaram um estudo sobre a acurácia e eficiência do escoamento viscoso transiente usando a formulação $\omega-\mathbf{v}$, em malha não ortogonal e com o Método dos Volumes Finitos. Para acelerar a taxa de convergência, eles usaram o método *multigrid* associado ao método iterativo Gauss-Seidel por linha alternada (TROTTENBERG et al., 2001) somente nas equações das velocidades que, neste caso, são equações do tipo Poisson. Meitz e Fasel (2000) usaram a formulação vorticidade e velocidade para desenvolver um método numérico para as equações de Navier-Stokes. O método é aplicável à simulação de escoamento em camada limite e é baseado em um esquema de discretização de Diferenças Finitas Compacto. Meitz e Fasel (2000) afirmaram que esta formulação é particularmente atrativa em duas dimensões, onde o número de variáveis é reduzido de três para duas.

Ern e Smooke (1993) apresentaram as equações de Navier-Stokes tridimensionais na formulação $\omega - \mathbf{v}$ para simular escoamentos de fluido compressíveis. Essa formulação gerou sete equações diferenciais acopladas que foram discretizadas com o Método de Diferenças Finitas. Napolitano e Catalano (1991) aplicaram um método *multigrid* com o *solver* Gauss-Seidel por linha para resolver as equações de Navier-Stokes, em duas e três dimensões, com a formulação vorticidade e velocidade em regime permanente. Napolitano e Pascazio (1991) desenvolveram um método para resolver as equações de Navier-Stokes, em regime permanente com a formulação vorticidade e velocidade. Eles utilizaram o método *multigrid* com o *solver* Gauss-Seidel por linha alternada por direção (FERZIGER e PERIC, 2001) para acelerar a convergência em malha desencontrada. Souza (2003) usou a formulação $\omega - \mathbf{v}$ modelada para um escoamento sobre uma placa curva. Ele aplicou o método *multigrid* apenas nas equações de Poisson, para as componentes de velocidade, que surgem quando se usa este tipo de formulação. De acordo com Souza, o método *multigrid* foi aplicado na equação de Poisson porque é onde precisa de maior tempo de CPU para obter a solução numérica. Uma revisão sobre a formulação vorticidade e velocidade pode ser encontrada em Speziale (1987), Gatski (1991) e Davies e Carpenter (2001). Estes

autores afirmam que a eliminação da pressão é uma das principais vantagens quando se usam as equações de Navier-Stokes bidimensional na forma de uma equação de transporte de vorticidade.

Erturk et al. (2005) e Erturk e Gokcol (2006) resolveram as equações de Navier-Stokes com a formulação $\psi - \omega$. Eles apresentaram um esquema de Diferenças Finitas Compacto de quarta ordem e resultados com número de Reynolds de até 20000. Ghia et al. (1982) usaram o método *multigrid* na formulação $\psi - \omega$ com um *solver* implícito fortemente acoplado (do inglês, *Coupled Strongly Implicit* - CSI) (RUBIN e KHOSLA, 1981). As equações foram discretizadas com o Método de Diferenças Finitas e a malha mais fina adotada foi de $257 \times 257$ pontos. As análises foram feitas com o número de Reynolds variando de 100 a 10000. Eles reduziram o tempo de CPU por um fator de quatro em relação ao método *singlegrid* (SG), ou malha única. As soluções obtidas no trabalho de Ghia et al. (1982) foram consideradas acuradas e tornaram-se referência para grande parte dos estudos posteriores sobre métodos numéricos para problemas de escoamentos.

Zhang (2003) resolveu o problema da cavidade quadrada com a formulação $\psi - \omega$ e números de Reynolds variando de a 7500 usando o método *multigrid* e esquema de Diferenças Finitas Compacto de quarta ordem. Zhang comparou a acurácia de suas soluções com as de outros autores que usaram esquemas de Diferenças Finitas de segunda, quarta e sexta ordem. Kumar et al. (2009) usaram a formulação nas variáveis primitivas com um esquema de alta ordem para os fluxos convectivos e segunda ordem para os fluxos difusivos. Eles analisaram a acurácia das soluções numéricas com número de Reynolds até 10000 em malhas com até $513 \times 513$ pontos. Todos os testes foram feitos com 2 e 4 níveis de malhas e observaram que aumentar o número de níveis não paga o custo adicional. Na malha $129 \times 129$ pontos, com 4 níveis de malha, eles encontraram fatores de aceleração 10,41, 7,95, 8,06 e 9,01, para $Re = 1000$, 3200, 5000 e 7500, respectivamente. Concluiram que é possível obter soluções com discretização de alta ordem em malhas muito finas usando o método *multigrid*.

Recentemente Gupta e Kalita (2005) apresentaram a formulação função de corrente e velocidade, $\psi - \mathbf{v}$, como um novo paradigma para a resolução das equações de Navier-Stokes. As equações são expressas apenas em termos da função de corrente, envolvendo derivadas de até quarta ordem e derivadas mistas de terceira ordem. Nesta formulação evitam-se as dificuldades associadas com os cálculos dos valores da vorticidade, especialmente em contorno sólido, quando é empregada com a formulação $\psi - \omega$, além das dificuldades associadas à resolução da equação da pressão. Para obter a solução numé-

rica, eles discretizaram a equação com um Método de Diferenças Finitas Compacto com acurácia de segunda ordem e resolveram o sistema discreto com o método do Gradiente Bi-Conjugado Estabilizado (Bi-CGSTAB) (VORST, 1992). O problema da cavidade quadrada foi utilizado com duas configurações, onde encontraram soluções com o método *singlegrid*, cujo maior tamanho de malha foi $161 \times 161$ pontos, com vários números de Reynolds. O objetivo deles foi verificar a precisão da solução usando o esquema compacto na nova formulação.

Uma nova abordagem numérica para a formulação $\psi - \mathbf{v}$ em geometria irregular e complexa, usando o Método de Diferenças Finitas Compacto de segunda e quarta ordem, com *singlegrid*, foi desenvolvida por Pandit (2008). Pandit afirmou que a vantagem desta formulação não é somente se livrar do acoplamento pressão-velocidade e formulação $\psi - \omega$, mas também por ser aplicável a geometrias complexas.

Vários autores (GUJ e STELLA, 1993; ERN e SMOOKE, 1993; SUH e KIM, 1999; SHEU et al., 2000; DAVIES e CARPENTER, 2001; PONTA, 2005; WANG et al., 2006; KIM et al., 2007; ERTURK e DURSUN, 2007; ERTURK, 2008, 2009) têm resolvido as equações de Navier-Stokes usando formulações alternativas, entretanto, o foco de tais pesquisas, na maioria dos casos, não é necessariamente a redução do tempo de CPU, e tampouco estudos sistemáticos de parâmetros do método *multigrid*. Em geral, o foco é apresentar e testar novas metodologias numéricas, como por exemplo o método LBM (do inglês, *Lattice Boltzmann Method*) (CHEN e DOOLEN, 1998) que não requer suavizador, e o método da projeção, introduzido por Chorin (1968). Muitos trabalhos concentram-se também em estudos para valores do número de Reynolds, acurácia de soluções próximas dos contornos e diferentes geometrias.

A Tab. 1 traz um resumo de pesquisas realizadas com as equações de Navier-Stokes na forma bidimensional nos últimos anos, incluindo a formulação utilizada, opção por *multigrid* ou não, números de Reynolds, tamanho máximo da malha, tipo de malha e *solver*.

Tabela 1: Resumo de trabalhos realizados com as equações de Navier-Stokes nos últimos anos.

| Autor | Formulação | *Re* | Multigrid | Malha | Método/*Solver* | Principais contribuições |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ghia et al. (1982) | $\psi - \omega$ | 100 a 10000 | Sim | $257^2$ | MDF/CSI | Mostraram que o *multigrid* é 4 vezes mais rápido que *singlegrid*. |
| Vanka (1986) | $p - \mathbf{v}$ | 100 a 5000 | Sim | $321^2$ | MDF/SCGS | Constatou lenta taxa de convergência para altos Reynolds. |
| Gupta (1990) | $\psi - \omega$ | 1 a 2000 | Não | $41^2$ | MDF/SOR | Verificou que aproximações de $4^o$ ordem são mais acuradas. |
| Napolitano e Pascazio (1991) | $\omega - \mathbf{v}$ | 100 a 3200 | Sim | $129^2$ | MDF/Gauss-Seidel | Mostrou em 2D e 3D que o método usado foi eficiente e muito acurado. |
| Stortkuhl et al. (1993) | $\psi - \omega$ | 20 | Sim | $129^2$ | MEF/Gauss-Seidel | Mostraram que suas soluções numéricas se aproximam da solução analítica próxima aos cantos da cavidade. |
| Wood (1996) | $p - \mathbf{v}$ e $\psi - \omega$ | 100 a 20000 | Sim (3 níveis) | $101^2$ | MDF/Gauss-Seidel Simétrico | Verificou que com o *multigrid* a taxa de convergência é acelerada em malhas finas. |
| Botella e Peyret (1998) | $\psi - \omega$ | 100 a 1000 | Não | $160^2$ | Método de colocação de Chebyshev | Apresentaram soluções altamente precisas. |
| Zhang (2003) | $\psi - \omega$ | 100 a 7500 | Sim | $257^2$ | MDF Compacto/SOR | Verificou que aproximações de $4^o$ ordem em malha grossa são comparadas com outras aproximações em malha fina. |
| Gupta e Kalita (2005) | $\psi - \mathbf{v}$ | 100 a 10000 | Não | $161^2$ | MDF Compacto de $2^o$ ordem/Bi-CGStab | Mostrou que o esquema compacto de $2^o$ ordem produz soluções acuradas em malhas grossas na formulação $\psi - \mathbf{v}$. |

continua na próxima página ...

**Tabela 1**

| Autor | Formulação | *Re* | Multigrid | Malha | Método/*Solver* | Principais contribuições |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Erturk et al. (2005) | $\psi - \omega$ | 1000 a 21000 | Não | $601^2$ | MDF/TDMA | Mostrou várias características do escoamento destacando o aparecimento de vórtice quartenário e terciário. |
| Wang et al. (2006) | $\psi - \omega$ | 1 a 1000 | Não | $129^2$ | MDF Compacto de $4^o$ ordem/GMRES | Mostrou que os resultados com o esquema de $4^o$ ordem, usando malhas não uniformes, comparam favoravelmente com os resultados em malhas finas utilizando métodos de discretização padrão. |
| Yan et al. (2007) | $p - \mathbf{v}$ | 100 a 1000 | Sim | $256^2$ | MVF/SOR | Melhorou o fator de aceleração do FMG-FAS em cerca de 40%. |
| Pandit (2008) | $\psi - \mathbf{v}$ | 100 a 3200 | Não | $129^2$ | MDF Compacto de $2^o$ ordem/Bi-CGStab | Em geometria irregular, mostrou que as soluções são muito acuradas em malhas grossas. |
| Chen et al. (2008) | $\psi - \omega$ | 50 a 2000 | Não | $257^2$ | LBM | Mostrou a performance do método LBM com vários problemas testes. |
| Erturk (2009) | $\psi - \omega$ | 100 a 1000 | Não | $513^2$ | MDF/TDMA | Mostrou, em malha não-uniforme, que pode-se obter solução numérica do escoamento na cavidade com altos números de Reynolds quando malhas finas são usadas. |
| Kumar et al. (2009) | $p - \mathbf{v}$ | 1000 a 10000 | Sim | $513^2$ | MVF/SIMPLEC/TDMA | Mostrou que é possível obter soluções de alta ordem em malha muito fina. |
| Marchi et al. (2009) | $p - \mathbf{v}$ | 0.01 a 1000 | Não | $1024^2$ | MVF/SIMPLEC/MSI | Reduziram o erro de discretização usando Múltiplas Extrapolações de Richardson (MER). |

No presente trabalho o método *multigrid* é aplicado a cinco modelos matemáticos, incluindo as equações de Navier-Stokes nas formulações $\psi - \mathbf{v}$ e $\psi - \omega$, em que alguns parâmetros são estudados. Uma das principais contribuições da presente pesquisa é a aplicação do método *multigrid* na formulação $\psi - \mathbf{v}$. Para esta formulação, não foi encontrado na literatura nenhum trabalho com o uso do *multigrid*.

## 1.3 MOTIVAÇÃO

Como comentado na seção 1.2, o método *multigrid* tem mostrado ser extremamente eficiente na resolução de sistemas lineares que resultam da discretização de equações diferenciais elípticas, isto é, do tipo Poisson. Nestes problemas alguns ciclos *multigrid* são suficientes para obter soluções rapidamente com erros que estão muito abaixo dos erros de truncamento, até mesmo em problemas bidimensionais. Para uma ampla classe de diferentes problemas o *multigrid* é considerado um método eficiente e o custo computacional é proporcional ao tamanho da malha (HACKBUSCH, 1985). No entanto, as dificuldades que estão associadas a problemas não-elípticos ou com algum termo não-elíptico, como por exemplo os descritos pelas equações de advecção-difusão e as equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressível com altos números de Reynolds, ou problemas com perturbações singulares[4], frequentemente causam uma diminuição significativa na eficiência do método *multigrid*, resultando em mais tempo computacional (ZHANG, 1997). Além disso, o acoplamento das equações pressão-velocidade, presente na formulação com variáveis primitivas, requer métodos numéricos adicionais específicos para o tratamento do acoplamento, como os da família SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations*) (PATANKAR, 1980; MALISKA, 2004), para fazer a conexão entre as variáveis. Por outro lado, formulações alternativas das equações de Navier-Stokes sugerem a eliminação do acoplamento pressão-velocidade, bem como a redução do número de equações, no caso bidimensional, como pode ser visto em Meitz e Fasel (2000), Ferziger e Peric (2001) ou em Gupta e Kalita (2005).

De acordo com Brandt (1977) e Wesseling e Oosterlee (2001), a eficiência ideal do método *multigrid* (taxa de convergência proporcional ao tamanho da malha) ainda não foi obtida para problemas de CFD em geral. Segundo Ferziger e Peric (2001) no contexto geral do método *multigrid* existem muitos parâmetros que podem ser escolhidos mais

[4] O surgimento de perturbações singulares está associado a regiões onde existe uma grande mudança no valor da variável dependente.

ou menos arbitrariamente, e que a taxa de convergência depende dessas escolhas, além disso, os melhores ganhos com o método *multigrid* são obtidos em problemas totalmente elípticos, e os menores em problemas dominados pela advecção. Fatores de aceleração típicos (ou fatores *speed-up*'s) estão na faixa de 10 a 100 quando cinco níveis de malha são usados. O fator de aceleracão[5] ($S$) mede quantas vezes o método *multigrid* é mais rápido na obtenção da solução de um problema do que sem ele.

Em um problema dominado pela difusão ($Re \ll 1$), a equação de Laplace 2D, por exemplo, com malha de $129 \times 129$ pontos, Tannehill et al. (1997) encontraram $S = 325$. Teoricamente, esse valor de $S$ deveria se manter igual em qualquer problema. Entretanto, soluções de um problema de escoamento bidimensional governado pelas equações de Navier-Stokes, em malhas muito refinadas, ainda produzem taxa de convergência que difere muito da taxa ideal do *multigrid*. Para números de Reynolds 100 e 1000, Ferziger e Peric (2001) obtiveram valores de $S = 42$ e 11, respectivamente, usando a formulação nas variáveis primitivas, em malha uniforme de $128 \times 128$ volumes. Estes resultados demonstraram a redução da eficiência do método *multigrid* com o aumento do número de Reynolds e em relação a equação de Laplace. Brandt et al. (2002) afirmaram que um ganho de mais de duas ordens de magnitude na redução do tempo de CPU ainda pode ser alcançado com o *multigrid*. Para escoamentos de fluido incompressível já foram desenvolvidos métodos *multigrid* relativamente eficientes, mas essa eficiência ainda pode ser melhorada em aproximadamente uma ordem de magnitude.

Segundo Trottenberg et al. (2001), experiências com o método *multigrid* (e teoria *multigrid*) mostram que as escolhas de componentes, tais como: suavizadores, número de passos de suavização, ciclos, malha grossa, operadores de restrição e prolongação, podem ter uma forte influência na taxa de convergência do algoritmo. Para construir algoritmos ótimos do ponto de vista computacional, para problemas mais complexos, algumas escolhas podem ser recomendadas e outras não. Ou seja, uma boa combinação de parâmetros pode tornar-se essencial na redução do tempo de CPU. Por isso, a importância de estudar e identificar os parâmetros ótimos do método *multigrid*.

As ótimas propriedades teóricas (BRANDT, 1977; TROTTENBERG et al., 2001) em relação aos métodos iterativos básicos têm motivado o desenvolvimento de vários trabalhos com o foco em análise de parâmetros do método *multigrid* em problemas de CFD. Algumas análises podem ser encontradas em Ferziger e Peric (2001) e Mesquita e De-Lemos (2004).

[5]O fator de aceleração ($S$) é definido como a razão entre o tempo de CPU do *singlegrid* e o tempo de CPU do *multigrid*.

Um grupo de pesquisa liderado pelo prof. Carlos H. Marchi, da Universidade Federal do Paraná, tem dedicado esforços no estudo de parâmetros do *multigrid*; os principais resultados podem ser encontrados em Pinto et al. (2005), Pinto e Marchi (2006, 2007), Oliveira et al. (2006), Santiago e Marchi (2007, 2008) e Santiago et al. (2010); ou em ftp://ftp.demec.ufpr.br/CFD.

A aplicação do método *multigrid* otimizado em problemas de CFD tem grande relevância em engenharia. Com o aumento aproximadamente linear no tempo de CPU, é possível obter soluções em malhas com grande quantidade de pontos discretos, e com isso soluções mais precisas podem ser obtidas. Sabe-se que soluções em malhas refinadas resultam em menor erro de discretização, e, consequentemente soluções mais confiáveis do ponto de vista da precisão numérica.

Neste contexto, esta pesquisa concentra-se no estudo de alguns parâmetros do método *multigrid* geométrico com o ciclo V para importantes modelos matemáticos, como citado na seção 1.1, em que as equações de Navier-Stokes são usadas em formulações alternativas. No caso de problemas com duas equações, analisa-se também a influência do acoplamento. Os objetivos estão destacados na seção seguinte.

## 1.4 OBJETIVOS

O objetivo geral desta pesquisa é estudar alguns parâmetros do método *multigrid* geométrico com ciclo V, para cinco modelos matemáticos bidimensionais. Dentre estes modelos destacam-se as equações de Navier-Stokes na formulação função de corrente e velocidade ($\psi - \mathbf{v}$) e formulação função de corrente e vorticidade ($\psi - \omega$), que serão estudadas com três números de Reynolds. O procedimento usado para alcançar este objetivo consiste em implementar e analisar o método *multigrid* para três modelos matemáticos que apresentam menor grau de dificuldade.

### Objetivos específicos

Os objetivos específicos podem ser resumidos nos seguintes tópicos:

- Comparar o desempenho do método *multigrid*, com os esquemas CS e FAS, em dois problemas lineares, um deles envolvendo acoplamento;
- Analisar o desempenho do método *multigrid*, com o esquema FAS, em um problema não-linear envolvendo acoplamento;

- Verificar se o número de equações diferenciais do modelo matemático influencia nos parâmetros ótimos do método *multigrid*;
- Implementar o método *multigrid* para as equações de Navier-Stokes na nova formulação $\psi - \mathbf{v}$ e identificar os parâmetros ótimos;
- Implementar o método *multigrid* para as equações de Navier-Stokes na formulação $\psi - \omega$ e identificar os parâmetros ótimos;
- Comparar o desempenho do método *multigrid* nas formulações $\psi - \mathbf{v}$ e $\psi - \omega$;
- Analisar o desempenho do método *multigrid* com o aumento do tamanho do problema;
- Comparar o desempenho do método *multigrid* em problemas com duas equações diferencias, quando aplicado em apenas uma das equações.

## 1.5 ORGANIZAÇÃO DA TESE

O presente trabalho está organizado da seguinte forma: o capítulo 2 concentra-se o embasamento teórico para o desenvolvimento desta tese. São apresentados o conceito básico dos métodos iterativos com comentários sobre o erro e o resíduo que ocorrem durante as iterações; a fundamentação básica do método *multigrid*, incluindo uma rápida análise da suavização de erros com o método de Gauss-Seidel utilizando-se os modos de Fourier; os operadores de transferência entre as malhas e três algoritmos também são apresentados. No capítulo 3 são apresentados com detalhes todos os modelos matemáticos e numéricos. No capítulo 4, as soluções númericas são verificadas comparando-se com soluções analíticas; para o caso de Navier-Stokes, com soluções da literatura. Apresentam-se também análises gráficas da ordem efetiva ou aparente do erro de descretização, isolinhas e gráficos de perfil. No capítulo 5 são analisados os parâmetros do método *multigrid*, que foram separados nas etapas I e II. Na etapa I apresentam-se as análises para a equação de Laplace, equações de Navier e equações de Burgers; na etapa II para as equações de Navier-Stokes nas duas formulações. No capítulo 6, apresenta-se a conclusão, contribuições e trabalhos futuros. Finalmente, no apêndice A, são apresentadas tabelas com perfis de soluções e os respectivos erros numéricos dos problemas da etapa I; no caso das equações de Navier-Stokes apresentam-se os perfis de velocidade para $Re \leq 5000$. No apêndice B, apresentam-se os títulos dos artigos já publicados que reportam alguns dos resultados desta tese.

# 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo apresenta-se a concepção básica dos métodos iterativos e do método *multigrid*.

## 2.1 MÉTODOS ITERATIVOS BÁSICOS

A discretização de um modelo matemático em CFD geralmente conduz a um sistema de equações algébricas como a Eq. (1.1). Vários métodos podem ser usados para resolver iterativamente tal sistema. A seguir apresenta-se a concepção de um método iterativo básico.

Considera-se um sistema de equações dado por $A\phi = f$, em que a matriz dos coeficientes pode ser particionada na forma $A = M - N$. Supondo que $M$ é inversível, por substituição, obtém-se

$$M\phi^{(m+1)} = N\phi^{(m)} + f, \tag{2.1}$$

onde o superescrito de $\phi$ é a representação dos passos iterativos. A solução do sistema é obtida fazendo

$$\phi^{(m+1)} = \hat{S}\phi^{(m)} + M^{-1}f, \tag{2.2}$$

onde $\hat{S} = M^{-1}N$, $N = M - A$, $\hat{S}$ é chamada de matriz de iteração do método dado pela Eq. (2.2) e $m = 1, 2, 3, \ldots$ é a iteração.

No caso de sistemas de equações não-lineares, estes são representados (BRIGGS et al., 2000) por

$$A(\phi) = f. \tag{2.3}$$

A matriz $A$ na Eq. (2.3) pode ser particionada da mesma forma que na Eq. (2.1).

O procedimento descrito pelas Eqs. (2.1) e (2.2) é a base para o desenvolvimento de um esquema iterativo, por isso é conhecido por método iterativo básico.

A ideia acima deu origem a vários métodos iterativos como, por exemplo, Gauss-Seidel, Jacobi, Jacobi ponderado, SOR (*Successive Over-Relaxation*) e outros. Esses

métodos são muito conhecidos e podem ser encontrados de forma detalhada em livros que tratam sobre a resolução de sistemas de equações ou de análise numérica, como em Burden e Faires (2003).

Os métodos iterativos são computacionalmente mais eficientes e mais robustos que os métodos diretos para a resolução de problemas de engenharia (BURDEN e FAIRES, 2003). A ideia básica desses métodos é encontrar a solução do sistema de equações algébricas, dado pela Eq. (1.1), a partir de uma dada estimativa inicial, geralmente nula. Com esta estimativa inicial na Eq. (2.2), novas soluções aproximadas são geradas sequencialmente até encontrar uma solução que atenda a um dado critério de parada, ou que atinja o número máximo de iterações previamente estabelecido. Esses métodos convergem sob certas condições impostas sobre a matriz dos coeficientes e tem vantagens sobre os métodos diretos quando o sistema de equações envolve um grande número de variáveis, especialmente em que possuem muitos elementos nulos na matriz $A$ (matriz esparsa). O esforço computacional requerido para os métodos diretos é da ordem de $O(N^3)$ e para os métodos iterativos $O(N^2/2)$ (FERZIGER e PERIC, 2001).

Os métodos iterativos tem taxas de convergências fortemente dependente do raio espectral[1] da matriz dos coeficientes, que dá uma boa indicação sobre quão convergente é o sistema de equações algébricas. Para o método de Jacobi com um parâmetro de relaxação $\theta$, por exemplo, a matriz de iteração $\hat{S}_\theta$ é dada por (BRIGGS et al., 2000)

$$\hat{S}_\theta = (1-\theta)I + \theta D^{-1}(L+U), \tag{2.4}$$

onde $D$ é a diagonal principal, $L$ e $U$ são matrizes estritamente triangulares inferior e superior, respectivamente, da matriz $A$ e $I$ é a matriz identidade. Neste caso, os autovalores da matriz $\hat{S}_\theta$ são dados pela expressão (BRIGGS et al., 2000)

$$\bar{\lambda}_k(\hat{S}_\theta) = 1 - 2\theta \,\mathrm{sen}^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right), \qquad 1 \leq k \leq N-1, \tag{2.5}$$

em que $N$ é o número de pontos da malha computacional e $k$ denota os modos de Fourier. Pode-se observar na Eq. (2.5) que, para $0 < \theta \leq 1$, tem-se $|\bar{\lambda}_k(\hat{S}_\theta)| < 1$. Além disso, se $k = 1$, para todos os valores de $\theta$ que satisfazem o intervalo $0 < \theta \leq 1$, tem-se,

[1] $\rho(A) = \max_k \|\bar{\lambda}_k\|$, onde $\bar{\lambda}_k$ são os autovalores da matriz dos coeficientes.

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_1(\hat{S}_\theta) &= 1 - 2\theta\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{2N}\right) \\ &= 1 - 2\theta\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi h}{2}\right) \\ &\approx 1 - \frac{\theta\pi^2 h^2}{2}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

A Eq. (2.6) implica que

$$\bar{\lambda}_1(\hat{S}_\theta) \approx 1, \qquad \forall\ \theta \in (0,1), \tag{2.7}$$

como $\bar{\lambda}_1$ é associado a um autovalor da forma

$$w_j = \mathrm{sen}\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad 0 \leq j \leq N, \tag{2.8}$$

resulta das Eqs. (2.5)-(2.8) que as componentes do erro associadas as baixas frequências não são removidas com eficiência pelo método de Jacobi. De acordo com Briggs et al. (2000), a maioria dos métodos iterativos compartilham com essa limitação. Uma análise detalhada da taxa de convergência desses métodos pode ser encontrada em Wesseling (1992) e Burden e Faires (2003).

## 2.2 EQUAÇÃO RESIDUAL

Consideremos o sistema de equações dado pela Eq. (1.1) e supomos que $\Phi$ seja a solução exata daquele sistema. Se $\widetilde{\phi}$ é uma aproximação para $\Phi$, então o erro algébrico (BRIGGS et al., 2000), ou simplesmente erro, pode ser calculado fazendo

$$e = \Phi - \widetilde{\phi}. \tag{2.9}$$

O erro definido pela Eq. (2.9) é um vetor, dado que a solução exata e a aproximação também são vetores, assim a sua magnitude pode ser medida por alguma norma vetorial. As mais utilizadas são a norma euclidiana e a norma infinita (FORTUNA, 2000), definidas pelas equações

$$\|e\|_2 = \sqrt{\Sigma_{i=1}^{N} e_i^2}, \tag{2.10}$$

$$\|e\|_\infty = \max_i |e_i|, \quad i = 1, 2, 3, \cdots, N, \tag{2.11}$$

onde $e_i$ representa a $i$-ésima componente do vetor do erro. Outras normas vetoriais podem ser encontradas em Burden e Faires (2003).

Na prática, geralmente não se conhece a solução exata do sistema de equações algébricas, por essa razão também não se pode *a priori* conhecer o erro.

Uma técnica que pode ser adotada em procedimentos iterativos é verificar o quanto a aproximação $\widetilde{\phi}$ dista da solução exata do sistema de equações ao longo das iterações, ou seja, deve-se calcular o resíduo $R$ da Eq. (1.1) utilizando a equação

$$R = f - A\widetilde{\phi}. \tag{2.12}$$

Resumidamente, a Eq. (2.12) obtém uma precisão da solução aproximada, ou seja, ela mede o quanto a aproximação $\widetilde{\phi}$ falha ao satisfazer o sistema dado pela Eq. (1.1). Teoricamente, se $\widetilde{\phi} = \Phi$ então $\Phi - \widetilde{\phi} = e = 0$, ou seja, o erro é zero e portanto $\widetilde{\phi}$ satisfaz o sistema de equações.

As equações do erro e do resíduo, Eqs. (2.9) e (2.12), respectivamente, possuem uma relação extremamente importante. Essa relação é geralmente denominada de equação residual e pode ser obtida substituindo a Eq. (1.1) na equação do resíduo, Eq. (2.12). Assim, obtém-se

$$R = A\Phi - A\widetilde{\phi}, \tag{2.13}$$

que, para o caso linear, pode ser escrito como

$$R = A(\Phi - \widetilde{\phi}). \tag{2.14}$$

Com a substituição do erro, Eq. (2.9), na Eq. (2.14), tem-se outro sistema de equações, cujo vetor de incógnitas é o próprio erro e o termo independente é o resíduo, isto é,

$$Ae = R. \tag{2.15}$$

A Eq. (2.15) é denominada equação do resíduo, ou equação residual, e indica que o erro dado pela Eq. (2.9) satisfaz o mesmo conjunto de equações que a solução $\Phi$ quando $f$ é substituído pelo resíduo $R$ (BRIGGS et al., 2000).

Quando tem-se o caso não-linear, adota-se a seguinte notação para a equação residual

$$R = A(\Phi) - A(\widetilde{\phi}). \tag{2.16}$$

É importante notar que no caso não-linear $A(e) \neq R$, diferentemente do caso linear, onde $Ae = R$. De um modo geral, no caso não-linear $A(e) = A(\Phi - \widetilde{\phi}) \neq A(\Phi) - A(\widetilde{\phi})$. Neste caso, $A$ é frequentemente denominado de operador não-linear.

Supomos agora que uma aproximação $\widetilde{\phi}$ tenha sido obtida para o sistema dado pela Eq. (1.1) por algum método iterativo, então pode-se calcular o resíduo com a Eq. (2.12). Para melhorar essa aproximação, calcula-se o erro com a Eq. (2.15), e depois, corrige-se a solução atual obtendo uma nova aproximação através da expressão

$$\phi = \widetilde{\phi} + e. \tag{2.17}$$

A Eq. (2.17) nos diz que em um dado passo iterativo, a solução é a aproximação atual mais o erro. O procedimento descrito acima é chamado de esquema de correção, e é um dos princípios fundamentais do método *multigrid*, que será discutido na próxima seção. Mais detalhes sobre esquemas de correção podem ser obtidos em Trottenberg et al. (2001), Wesseling (1992) e Briggs et al. (2000).

## 2.3 O MÉTODO *MULTIGRID*

O grande diferencial do método *multigrid* em relação a outros métodos iterativos é que ele percorre um conjunto de malhas com diferentes espaçamentos ($h$). As operações em cada malha, ou nível de malha, podem ser interpretadas como uma etapa de pré-processamento do sistema de equações original. Com um *solver* executam-se iterações em cada nível de malha até atingir o critério de convergência especificado para o sistema de equações original (malha mais fina). A maneira como os sistemas de equações com diferentes tamanhos se relacionam com o sistema original é o que caracteriza os diferentes ciclos *multigrid*. Com esta concepção, o método *multigrid* acelera a taxa de convergência de muitos métodos iterativos de resolução de sistemas de equações porque é fundamentado em propriedades de suavização de erros (redução de erros de alta frequência comuns nos métodos iterativos). Na seção seguinte apresenta-se a fundamentação básica do método.

### 2.3.1 Fundamentos básicos

O método *multigrid* é baseado em dois processos: esquemas de relaxação, que são geralmente lentos para convergir, mas suavizam os erros oscilatórios rapidamente; e aproximações do erro em malha grossa e do resíduo da malha fina (BRANDT, 2006).

O fundamento básico é cobrir um espectro maior de comprimento de ondas (oscilações do erro) que surgem naturalmente durante as iterações. Para isso, usa-se uma sequência de malhas (ou hierarquia de malhas) com espaçamentos diferentes[2], um suavizador (*solver*) e operadores de transferência entre as malhas. Em cada malha, realizam-se poucas iterações com o esquema de relaxação, cujo objetivo é obter soluções aproximadas para a malha original, ou seja, na malha mais fina onde se deseja obter a solução do problema discreto.

Uma análise de Fourier do processo de redução do erro (WESSELING, 1992; BRIGGS et al., 2000) mostra que os métodos iterativos básicos, tais como Gauss-Seidel, Jacobi e SOR, são eficientes na suavização das componentes de erros de alta frequência em malhas refinadas já nas primeiras iterações, mas são menos eficientes na suavização de erros de baixa frequência nesta mesma malha. Esses métodos podem ser interpretados como um processo de suavização ou relaxação do erro inicial. Por este motivo são também frequentemente chamados de métodos de relaxação, métodos de suavização ou suavizadores (TROTTENBERG et al., 2001).

Para visualizar na prática os efeitos da suavização do erro inicial com métodos iterativos, Briggs et al. (2000) resolveram um problema homogêneo unidimensional que tem solução exata conhecida (nula) e o erro na aproximação é a própria solução aproximada. Eles usaram o método de Jacobi ponderado e aplicaram várias iterações no sistema de equações com uma estimativa inicial consistindo de vetores (ou modos de Fourier), dados por

$$v_j = \operatorname{sen}\left(\frac{jk\pi}{N}\right), \quad 0 \leq j \leq N, \quad 1 \leq k \leq N-1, \tag{2.18}$$

em que $j$ denota a componente do vetor $v$, $N$ é o número de elementos e $k$ é o número de ondas ou modos de Fourier.

Na Fig. 4 pode-se visualizar os modos de Fourier para valores de $k = 1$, $k = 3$

[2]Geralmente uma malha grossa qualquer tem a metade do número de espaçamentos da malha fina subsequente.

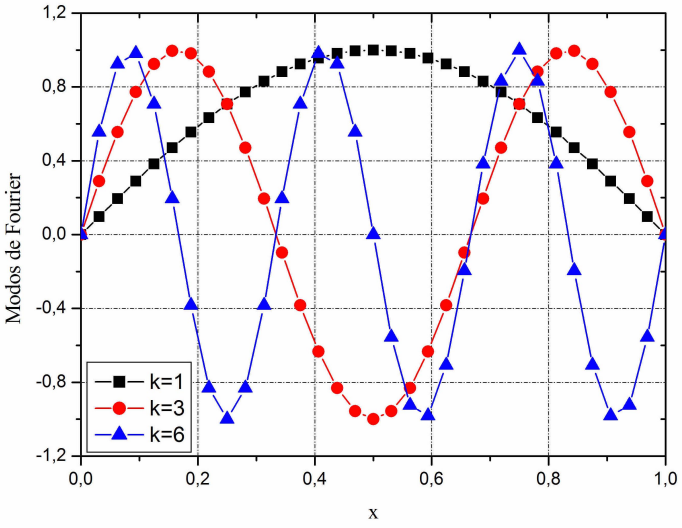



Figura 4: Modos de Fourier, adaptado de Briggs et al. (2000)).

e $k = 6$, com $N = 32$. Os valores de $k$ indicam quantos meios-senos constituem a curva do vetor $v$ definido na Eq. (2.18). Na figura nota-se que pequenos valores de $k$ correspondem a ondas mais longas e suaves, enquanto grandes valores de $k$ correspondem as ondas oscilatórias. A distinção entre alta e baixa frequência é importante no contexto do *multigrid*. Trottenberg et al. (2001) definem baixa frequência, ou modos suaves, se $k < N/2$ e alta frequência, ou modos oscilatórios se $N/2 \leq k < N$, $k = 1, 2, 3, \cdots, N-1$.

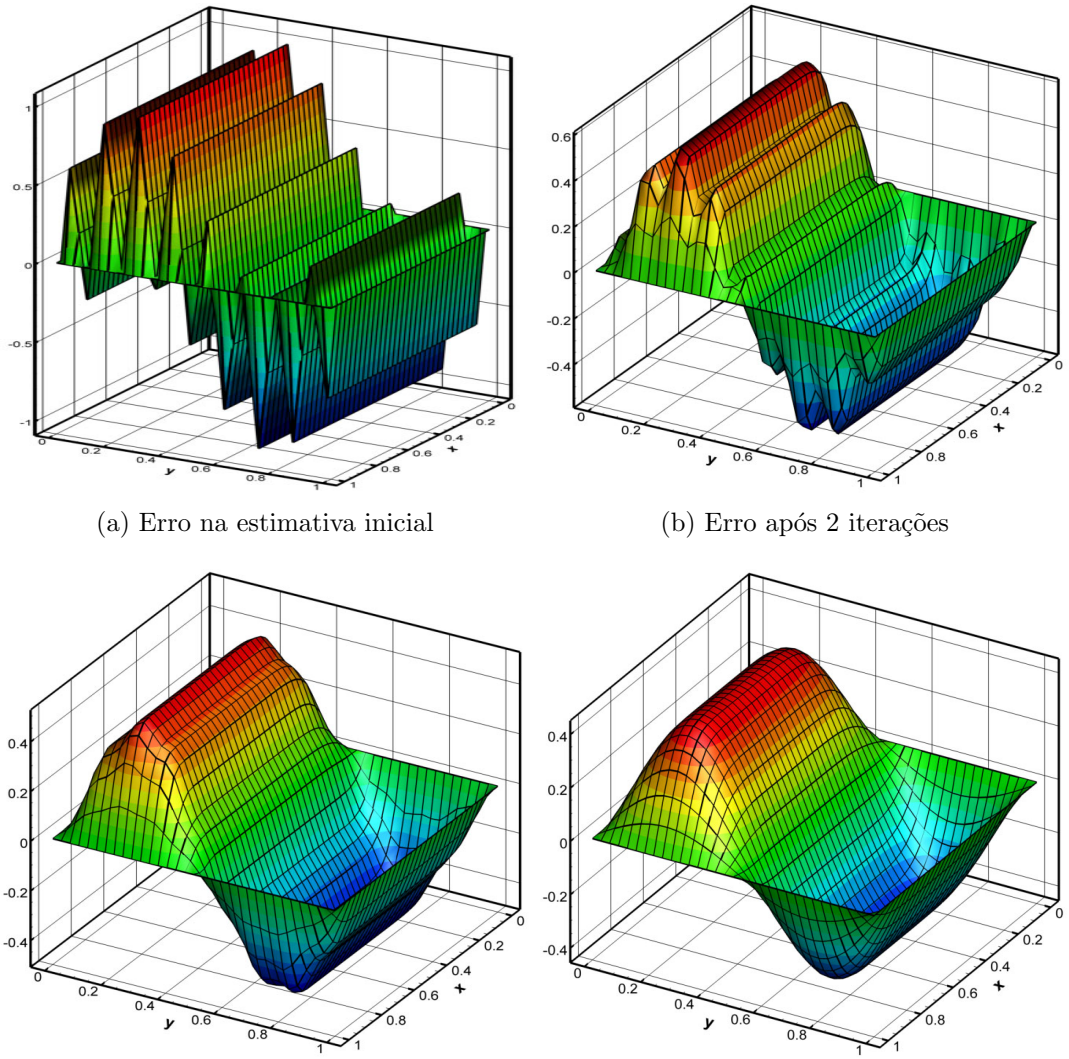
Na presente pesquisa, o comportamento dos modos de Fourier é explorado no processo iterativo com a resolução da equação de Laplace bidimensional, cujo sistema de equações lineares tem a forma da Eq. (1.1) com $f = 0$. Com condições de contornos nulas este problema tem solução exata conhecida ($\Phi = 0$) e o erro na aproximação $\tilde{\phi}$ é a própria solução aproximada ($e = -\tilde{\phi}$). A equação diferencial foi discretizada usando o Método de Diferenças Finitas com aproximação de cinco pontos e malha uniforme nas duas direções coordenadas.

Como estimativa inicial (que é também o erro inicial) adotou-se uma combinação de modos de Fourier, com alta e baixa frequência, na direção de $y$, cujo vetor com os modos desejados é escrito como

$$v_{i,j} = \frac{1}{2}\left[\text{sen}\left(\frac{k_1 i\pi}{N_y}\right) + \text{sen}\left(\frac{k_2 i\pi}{N_y}\right)\right], \quad 0 \leq i, j \leq N_y, \quad 1 \leq k_1,\, k_2 \leq N_y - 1, \quad (2.19)$$

em que $N_y$ é o número de pontos na direção $y$. O valor $1/2$ que aparece na Eq. (2.19) foi usado por conveniência apenas para diminuir a amplitude da onda (ou modo).

Algumas iterações foram realizadas com o método Gauss-Seidel em dois tamanhos



(a) Erro na estimativa inicial

(b) Erro após 2 iterações

(c) Erro após 4 iterações

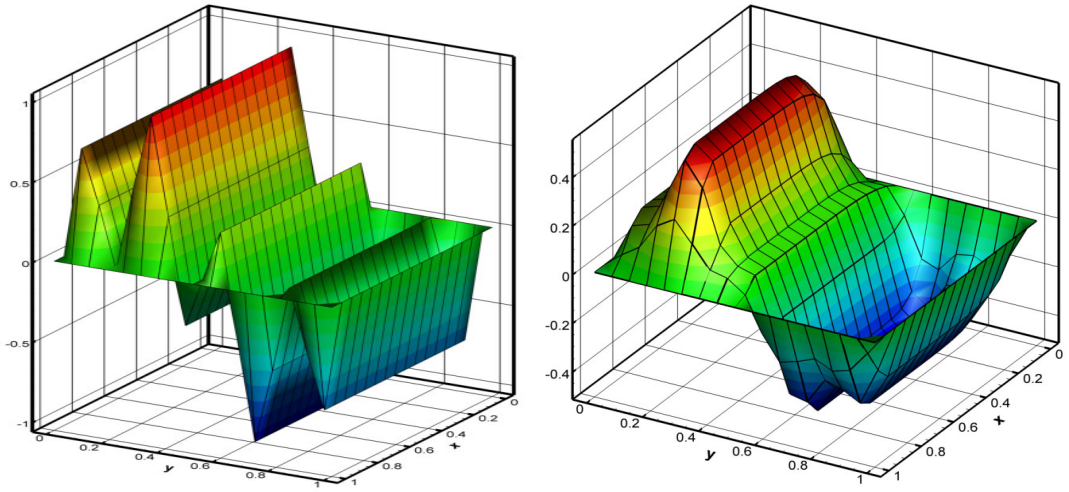
(d) Erro após 10 iterações

Figura 5: Suavização do erro com método Gauss-Seidel na malha $33 \times 33$ (Adaptado de Trottenberg et al. (2001)).

de malha: $33 \times 33$ com $k_1 = 2$ e $k_2 = 16$ e na malha grossa $17 \times 17$ pontos com $k_1 = 2$ e $k_2 = 8$, ou seja, $k_1$ representa os modos de baixa frequência e $k_2$ de alta frequência. Os resultados são mostrados nas Figs. 5 e 6. Nas Figs. 5a-5d ilustram-se as superfícies que demonstram a suavização do erro com a estimativa inicial e com 2, 4 e 10 iterações, respectivamente, na malha $33 \times 33$ pontos. Nas Figs. 6a-6d tem-se o comportamento do erro na malha $17 \times 17$ pontos, também com a estimativa inicial e com 2, 4 e 10 iterações. Na estimativa inicial, Figs. 5a e 6a, as curvas observadas nas superfícies são os próprios modos de Fourier dados pela Eq. (2.19). Na malha mais refinada, Fig. 5b, depois de 2 iterações nota-se que as componentes de alta frequência foram suavizadas, enquanto que as de baixa frequência são pouco influenciadas. Esta característica fica mais evidente quando o número de iterações é aumentado, deixando os modos mais suaves. Com 10

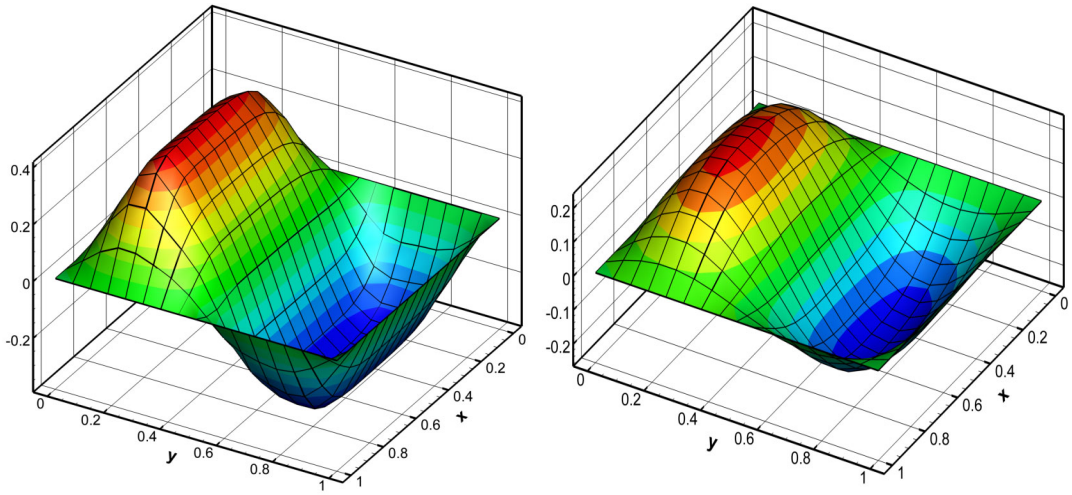
iterações, por exemplo, Fig. 5d, as componentes que eram oscilatórias estão suavizados e as de baixa frequência (apenas 2 modos) são pouco afetadas pelo efeito da suavização. De acordo com Trottenberg et al. (2001), o fato de que o erro se torna suave depois de algumas iterações significa que os componentes de alta frequência tornaram-se pequenos, enquanto que os componentes de baixa freqüência permanecem inalteradas. Na estimativa inicial adotada, Eq. (2.19), estão presentes componentes de alta e baixa frenquência.

Na malha mais grossa porém, Fig. 6, nota-se que as componentes de alta e baixa frequência são suavizados mais rapidamente. Com apenas 4 iterações, pode-se notar na Fig. 6c e com 10 iterações na Fig. 6d, que tanto as componentes de alta quanto as de baixa frequência foram suavizados. Este fato está mais evidente na Fig. 6d.



(a) Erro na estimativa inicial

(b) Erro após 2 iterações



(c) Erro após 4 iterações

(d) Erro após 10 iterações

Figura 6: Suavização do erro com método Gauss-Seidel na malha $17 \times 17$ (Adaptado de Trottenberg et al. (2001)).

De acordo com Briggs et al. (2000) a maioria dos esquemas de relaxação possuem

a propriedade de eliminar os modos oscilatórios deixando-os suaves, mas sofrem com a presença de componentes de erros suaves, tornando-se lento a partir deste momento.

Em geral as componentes suaves do erro aparecem oscilatórias em malhas mais grossas, como ilustrado na Fig. 7, por esse motivo as propriedades de suavização dos métodos iterativos sugerem a transferência do problema para uma malha com menor número de pontos, onde o custo da suavização é bem menor. Segundo Briggs et al. (2000), Wesseling (1992) os métodos iterativos são eficazes na redução das componentes dos erros oscilátorios (alta frequência), isto é, possuem boas propriedades de suavização. Esse é, portanto, um dos princípios do método *multigrid*, porque associado a um método iterativo, suaviza o erro e corrige a solução em diferentes tamanhos de malhas.

Para um caso unidimensional, a Fig. 7 mostra a representação da suavização do erro na maioria dos métodos iterativos. Nota-se que o erro suave na malha fina $\Omega^h$ com $N = 12$ pontos, projetado nos pontos coincidentes diretamente na malha grossa $\Omega^{2h}$ com a metade dos pontos, torna-se mais oscilatório nessa malha.

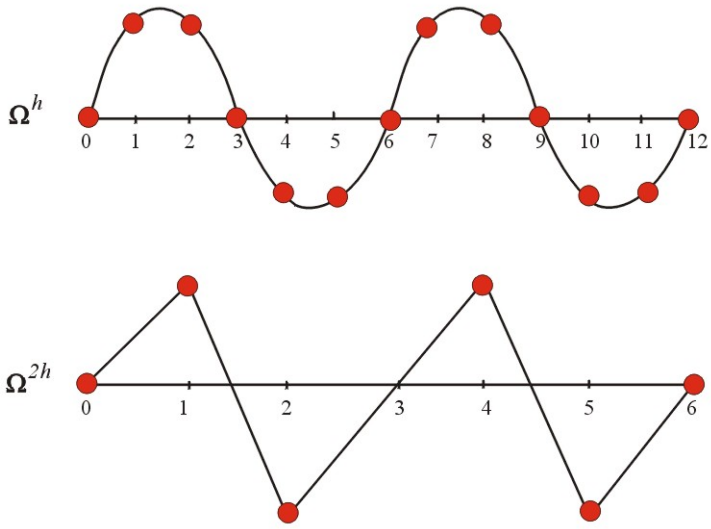
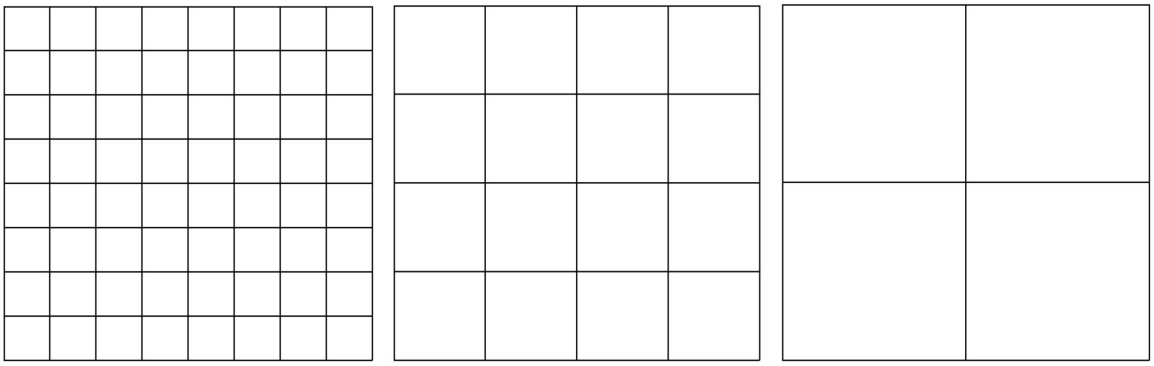



Figura 7: Erro suave na malha $\Omega^h$ e o erro oscilatório na malha grossa $\Omega^{2h}$. Adaptado de Briggs et al. (2000).

Agora, supõe-se que se deseja resolver um sistema de equações como a Eq. (1.1), proveniente de um problema discretizado em uma malha fina $\Omega^h$. Considerando-se a razão de engrossamento padrão ($r = 2h/h = 4h/2h = \cdots = 2Lh/Lh = 2$) e constrói-se uma seqüência de malhas computacionais, $\Omega^h$, $\Omega^{2h}$,$\Omega^{4h}$,$\cdots$ , $\Omega^{2^{(L-1)}h}$, com elementos de tamanho $h$, onde $\Omega^{2^{(L-1)}h}$ é a malha mais grossa possível, ou a malha mais grossa desejada. O número $L$, tal que $1 \leq L \leq L_{máximo}$ é chamado de número de níveis de malha e $L_{máximo}$

é o número máximo de níveis. A Fig. 8 ilustra uma sequência de três malhas, $L = 3$, com razão de engrossamento 2, isto é, em cada direção: a malha $\Omega^{2h}$, Fig. 8b, tem a metade do número de elementos da malha $\Omega^h$, Fig. 8a; a malha $\Omega^{4h}$, Fig. 8c, tem a metade do número de elementos da malha $\Omega^{2h}$.



(a) Malha $\Omega^h$ (b) Malha $\Omega^{2h}$ (c) Malha $\Omega^{4h}$

Figura 8: Sequência de três malhas com razão de engrossamento 2.

Assim, um ciclo V do *multigrid* inicia com uma estimativa inicial na malha fina $\Omega^h$, onde o esquema de relaxação é repetido até que as componentes oscilatórias do erro se tornem suaves nessa malha. A partir desse momento o esquema começa a tornar-se lento, como discutido anteriormente. As vantagens do esquema de relaxação serão re-aproveitadas quando as informações da malha fina $\Omega^h$ forem transferidas para a malha imediatamente mais grossa $\Omega^{2h}$. Nessa malha, as componentes do erro que eram suaves na malha $\Omega^h$ tornaram-se oscilatórias e novamente o esquema de relaxação é repetido até que as componentes oscilatórias do erro se tornem suaves (BRIGGS et al., 2000). Este procedimento é repetido até a malha mais grossa possível, ou a malha mais grossa previamente estabelecida pelo parâmetro $L_{máximo}$. Na malha mais grossa a aproximação da solução é atualizada com o erro e transferida para a malha fina subsequente; este procedimento é repetido até a malha mais fina $\Omega^h$. A transferência de informações entre as malhas requer a definição de operadores de transferência, que serão definidos na seção 2.4.

Várias razões de engrossamento podem ser usadas com o método *multigrid*. Brandt (1977) fez comparações com razões de engrossamento $r = 2$, 3 e 3/2; concluiu que a razão $r = 2$ é a recomendável. Briggs et al. (2000) afirmam que a razão $r = 2$ é uma prática universal e que o uso de diferentes razões de engrossamento geralmente não apresenta vantagens. Pinto et al. (2005) também analisaram várias razões e não encontraram vantagens significativas em relação a razão de engrossamento $r = 2$. Nessa razão, se considerado o caso unidimensional, o número de elementos de uma malha fina é o dobro do número de elementos da malha grossa subsequente; no caso bidimensional, o número de elementos

duplica em cada direção. No presente trabalho, a razão de engrossamento $r = 2$ será referida como razão de engrossamento padrão.

Um algoritmo *multigrid* implementado para problemas elípticos (dominados pela difusão), fornece custo computacional proporcional ao tamanho da malha (ROACHE, 1998; WESSELING, 1992). No entanto, como já discutido na seção 1.3, existem muitos problemas em CFD cuja eficiência do *multigrid* ainda não foi totalmente alcançada.

## 2.4 COMPONENTES DO *MULTIGRID*

### 2.4.1 Operadores de restrição

A transferência de informações da malha fina $\Omega^h$ para a malha imediatamente mais grossa $\Omega^{2h}$ requer a definição do *operador de restrição* e será denotado genericamente por $I_h^{2h}$. Os subíndices $h$ e $2h$ indicam que as informações são transferidas da malha fina $\Omega^h$ para a malha grossa $\Omega^{2h}$.

O operador de restrição por injeção transfere informações da malha fina $\Omega^h$ para os pontos coincidentes na malha grossa $\Omega^{2h}$. A injeção é um dos procedimentos mais utilizados pela sua simplicidade, definido de acordo com Wesseling (1992), Briggs et al. (2000) e Trottenberg et al. (2001), como

$$\phi^{2h} = [I]_h^{2h}\, \phi^h, \tag{2.20}$$

ou, para cada ponto da malha

$$\phi_{i,j}^{2h} = \phi_{2i,2j}^h, \qquad 1 \leq i \leq \frac{N_x}{2} - 1, \quad 1 \leq j \leq \frac{N_y}{2} - 1, \tag{2.21}$$

onde $N_x$ e $N_y$ são os números de pontos na malha fina nas direções coordenadas $x$ e $y$, respectivamente. A ideia do operador de restrição por injeção está ilustrada na Fig. 9.

Outros operadores de restrição podem ser encontrados na literatura (BRIGGS et al., 2000), tais como a ponderação completa e meia ponderação. Em Wesseling (1992), Briggs et al. (2000) e Trottenberg et al. (2001), por exemplo, pode-se encontrar o operador de

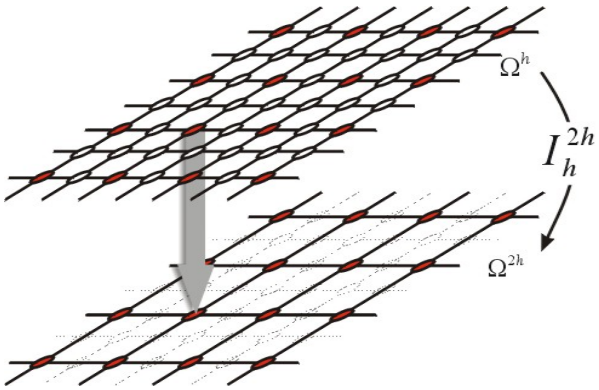



Figura 9: Transferência de informações da malha fina para a malha grossa com operador de restrição por injeção $[I]_h^{2h}$.

restrição por ponderação completa (*Full Weighting*), definido por

$$\begin{aligned}\phi_{i,j}^{2h} &= \frac{1}{16}[\phi_{2i-1,2j-1}^{h} + \phi_{2i-1,2j+1}^{h} + \phi_{2i+1,2j-1}^{h} + \phi_{2i+1,2j+1}^{h} + \\ &\quad 2(\phi_{2i,2j-1}^{h} + \phi_{2i,2j+1}^{h} + \phi_{2i-1,2j}^{h} + \phi_{2i+1,2j}^{h}) + 4\phi_{2i,2j}^{h}],\end{aligned} \tag{2.22}$$

com $1 \leq i \leq N_x/2 - 1$, $1 \leq j \leq N_y/2 - 1$.

A ponderação completa, como pode ser notada na Eq. (2.22), envolve nove pontos, porque transfere também contribuições proporcionais dos valores dos nós vizinhos mais próximos ao ponto central $(i, j)$.

### 2.4.2 Operadores de prolongação

A transferência de informações da malha grossa para a malha imediatamente mais fina é realizada através do operador de prolongação. Esse operador envia informações da malha grossa (menos pontos) para a malha fina (mais pontos) e por isso também é conhecido como interpolação. É denotado genericamente por $I_{2h}^h$, em que os subíndices $2h$ e $h$ indicam que as informações são transferidas da malha grossa para a malha fina. Wesseling (1992), Briggs et al. (2000) e Trottenberg et al. (2001) definem esse operador genericamente como

$$\phi^h = [I]_{2h}^h \, \phi^{2h}, \tag{2.23}$$

ou, para cada ponto da malha

$$\begin{cases} \phi^h_{2i,2j} &= \phi^{2h}_{i,j}, \\ \phi^h_{2i+1,2j} &= \frac{1}{2}(\phi^{2h}_{i,j} + \phi^{2h}_{i+1,j}), \\ \phi^h_{2i,2j+1} &= \frac{1}{2}(\phi^{2h}_{i,j} + \phi^{2h}_{i,j+1}), \\ \phi^h_{2i+1,2j+1} &= \frac{1}{4}(\phi^{2h}_{i,j} + \phi^{2h}_{i+1,j} + \phi^{2h}_{i,j+1} + \phi^{2h}_{i+1,j+1}), \end{cases} \tag{2.24}$$

com $0 \leq i \leq N_x/2 - 1$ e $0 \leq j \leq N_y/2 - 1$.

A Fig. 10 ilustra o operador de prolongação com a interpolação bilinear, para o ponto $(i, j)$, que requer a contribuição de quatro pontos vizinhos.

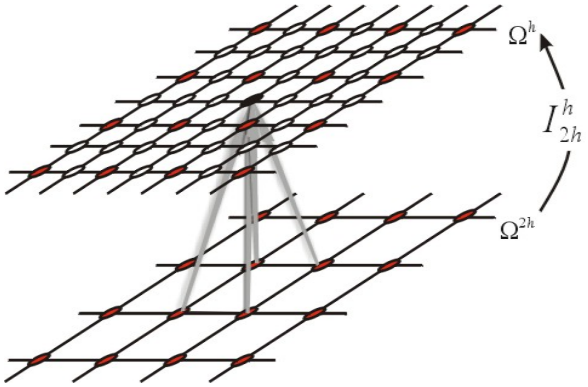



Figura 10: Transferência de informações da malha grossa para a malha fina com o operador de prolongação $[I]^h_{2h}$.

A ideia da interpolação bilinear é relativamente simples: interpolam-se linearmente na direção $x$ e depois na direção $y$, de acordo com as proporções das distâncias das coordenadas $x$ e $y$ do ponto a ser interpolado em relação aos pontos vizinhos. Devido ao fato de ser feita a interpolação linear nas direções $x$ e $y$, esse procedimento é chamado de interpolação bilinear.

Em Briggs et al. (2000) e Trottenberg et al. (2001) podem ser vistos outros operadores de prolongação que usam a metodologia da interpolação como, por exemplo, a interpolação trilinear, quadrática ou cúbica.

### 2.4.3 Ciclos

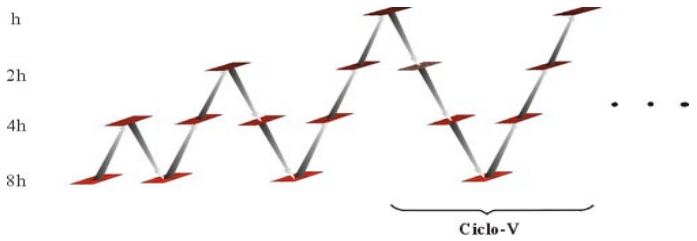
A seqüência com que as diversas malhas são percorridas é denominada de ciclo. Em Trottenberg et al. (2001) e Wesseling (1992) podem ser encontrados detalhes dos diversos

ciclos: V, W, F entre outros. O ciclo V, que percorre todas as malhas iniciando o processo na malha mais fina, é um dos mais usados. Wesseling (1992) mostra uma generalização do ciclo V em que ele introduz um parâmetro (indicado aqui por $\eta$) para determinar o tipo de ciclo que o algoritmo irá percorrer. Para o ciclo V, por exemplo, toma-se $\eta = 1$ e, para o ciclo W, $\eta = 2$. O tipo de ciclo não muda a filosofia básica do método *multigrid*, isto é, a transferência de informações entre as malhas, a suavização do erro e a correção da aproximação da solução ocorrem da mesma forma, obedecendo à estrutura do ciclo. Na Fig. 11 estão representados os Ciclos V, W e o procedimendo do FMG (*Full Multigrid*) para o ciclo V, em que foram considerados quatro níveis de malha.

Nos ciclos V e W, Fig. 11a, são feitas suavizações do erro e correções nas malhas grossas, com as Eqs. (2.15) e (2.17). Apenas na malha mais fina é verificada a convergência. No FMG, Fig. 11b, o esquema é iniciado na malha mais grossa e transferem-se aproximações da solução para a malha mais fina para obter uma boa estimativa inicial.

O número de suavizações geralmente depende do esquema de relaxação (*solver*) e não precisa necessariamente ser o mesmo em todos os níveis de malha, tanto no processo de restrição quanto no de prolongação. Trottenberg et al. (2001) usa $V(\sigma_1, \sigma_2)$ para indicar o número de relaxações executado pelo *solver* em um ciclo, em que $\sigma_1$ indica as relaxações antes da restrição (pré-suavização) e $\sigma_2$ após a prolongação (pós-suavização). Na prática, em problemas que não apresentam dificuldades de convergência, normalmente usa-se 1, 2 ou 3 relaxações (BRIGGS et al., 2000).

(a) Ciclos V e W




(b) Procedimento do FMG com ciclo V

Figura 11: Estrutura dos ciclos V, W e FMG com ciclo V.

## 2.5 ALGORITMOS

Existem dois tipos de esquemas com os quais o método *multigrid* pode ser implementado. O Esquema de Correção (do inglês, *Correction Scheme* - CS) e o Esquema de Aproximação Completa (do inglês, *Full Approximation Scheme* - FAS). Estes esquemas se caracterizam pelo tipo de informações que são transferidas ao percorrer as malhas durante um ciclo *multigrid*. Podem ser implementados computacionalmente com as metodologias ciclo V, ciclo W, ciclo F, FMG e outros (BRIGGS et al., 2000; TROTTENBERG et al., 2001).

O esquema CS é indicado para problemas lineares (BRANDT, 1977), como as Eqs. (3.1),(3.6) e (3.7), que serão dadas nas seções 3.1.1 e 3.1.2. Nesse caso, o sistema de equações original, Eq. (1.1), é resolvido somente na malha mais fina, e o resíduo, dado pela Eq. (2.12), é transferido para a malha grossa subsequente, onde é resolvida a equação do resíduo, Eq. (2.15). Na malha mais grossa o erro é transferido para a malha fina subsequente para corrigir a solução e ser usado como estimativa inicial. Já o esquema FAS é mais indicado para problemas não-lineares (BRANDT, 1977), como as equações de Burgers, Eqs. (3.23) e (3.24), dadas na seção 3.1.3 e equações de Navier-Stokes, seção 3.1.4. A idéia fundamental do FAS é a mesma do CS, entretanto, além do resíduo, a aproximação da solução é também transferida para a malha grossa subsequente. Na malha mais grossa, é feito uma aproximação do erro e interpolado para aproximar a solução na malha fina subsequente. O sistema de equações é resolvido em todos os níveis de malha com um método de relaxação. A principal diferença em relação ao esquema CS é que no FAS não se resolve explicitamente a equação residual; resolve-se equações com aproximações para a solução na malha grossa.

Para descrever os algoritmos *multigrid*, considera-se que um problema com duas equações diferenciais tenha sido discretizado com o MDF, obtém-se então os seguintes sistemas de equações na malha computacional $\Omega^h$,

$$A_u^h u^h = f_u^h, \tag{2.25}$$

$$A_v^h v^h = f_v^h. \tag{2.26}$$

Considerando o engrossamento padrão ($r = 2$), os sistemas de equações estarão definidos nas malhas $\Omega^h$, $\Omega^{2h}$, $\Omega^{4h}\cdots$, $\Omega^{2^{(L-1)}h}$, isto é, em malhas com espaçamentos de tamanho $h$, $2h$, $4h$,$\cdots$, $2^{(L-1)}h$. Aqui $A_u^h$ e $A_v^h$ são os operadores discretos para as compo-

nentes $u$ e $v$, respectivamente. Para problemas envolvendo apenas uma equação diferencial o procedimento é análogo, porém, tem-se apenas um sistema de equações discretas.

A seguir são apresentados os algoritmos que descrevem o procedimento padrão do método *multigrid* com ciclo V. O algoritmo 2.5.1 aplica-se a problemas com uma única equação e o algoritmo 2.5.2 para duas equações, ambos generalizados para qualquer número de malhas ( $1 \leq L \leq L_{máximo}$ ) e esquemas CS e FAS. O parâmetro de entrada $\gamma$ define o tipo de esquema a ser usado: para $\gamma = 0$, o procedimento MG-1EQ executa o esquema CS; para $\gamma = 1$ tem-se o esquema FAS. O parâmetro de entrada $\sigma$ é o número de iterações do método de suavização; $u_0^h$ é a estimativa inicial e $f^h$ o respectivo termo fonte.

**Algoritmo 2.5.1.** - Esquemas CS e FAS para uma equação (Adaptado de Briggs et al. (2000))

MG-1EQ $(\gamma, \sigma, u_0^h, f^h)$;
Início

1. Suavizar $A^h u^h = f^h$ $\sigma$ vezes com estimativa inicial $u_0^h$;
2. Calcular $R^{2h} = I_h^{2h}(f^h - A^h u^h)$, $u_0^{2h} = \gamma I_h^{2h} u^h$;
3. Definir $f^{2h} = \gamma A^{2h} u_0^{2h} + R^{2h}$;
4. Suavizar $A^{2h} u^{2h} = f^{2h}$ $\sigma$ vezes com estimativa inicial $u_0^{2h}$;
5. Calcular $R^{4h} = I_{2h}^{4h}(f^{2h} - A^{2h} u^{2h})$, $u_0^{4h} = \gamma I_{2h}^{4h} u^{2h}$;
6. Definir $f^{4h} = \gamma A^{4h} u_0^{4h} + R^{4h}$;
7. Suavizar $A^{4h} u^{4h} = f^{4h}$ $\sigma$ vezes com estimativa inicial $u_0^{4h}$;
   $\vdots$
8. Resolver $A^{Lh} u^{Lh} = f^{Lh}$;
9. Aproximar o erro $e^{Lh} = u^{Lh} - \gamma u_0^{Lh}$;
   $\vdots$
10. Corrigir a solução $u_0^{4h} \leftarrow u^{4h} + I_{8h}^{4h} e^{8h}$;
11. Suavizar $A^{4h} u^{4h} = f^{4h}$ $\sigma$ vezes com estimativa inicial $u_0^{4h}$;
12. Corrigir a solução $u_0^{2h} \leftarrow u^{2h} + I_{4h}^{2h} e^{4h}$
13. Suavizar $A^{2h} u^{2h} = f^{2h}$ $\sigma$ vezes com estimativa inicial $u_0^{2h}$;
14. Corrigir a solução $u_0^h \leftarrow u^h + I_{2h}^h e^{2h}$

15. Suavizar $A^h u^h = f^h$ $\sigma$ vezes com estimativa inicial $u_0^h$.

MG-1EQ $(\gamma, \sigma, u^h, f^h)$.
Fim

Para o caso de duas equações o procedimento é análogo, ou seja, são executados os mesmos passos descritos para o Algoritmo 2.5.1. A única diferença é que em cada passo as operações são realizadas para mais um sistema de equações, como pode ser observado a seguir no procedimento MG-2EQ.

**Algoritmo 2.5.2.** - Esquemas CS e FAS para duas equações.

MG-2EQ $(\gamma, \sigma, u_0^h, v_0^h, f_u^h, f_v^h)$;
Início

1. Suavizar $A_u^h u^h = f_u^h$ e $A_v^h v^h = f_v^h$ $\sigma$ vezes com estimativa inicial $u_0^h$ e $v_0^h$;
2. Calcular $R_u^{2h} = I_h^{2h}(f_u^h - A_u^h u^h)$, $R_v^{2h} = I_h^{2h}(f_v^h - A_v^h v^h)$, $u_0^{2h} = \gamma I_h^{2h} u^h$ e $v_0^{2h} = \gamma I_h^{2h} v^h$;
3. Definir $f_u^{2h} = \gamma A_u^{2h} u_0^{2h} + R_u^{2h}$ e $f_v^{2h} = \gamma A_v^{2h} v_0^{2h} + R_v^{2h}$;
4. Suavizar $A_u^{2h} u^{2h} = f_u^{2h}$ e $A_v^{2h} v^{2h} = f_v^{2h}$, $\sigma$ vezes com estimativa inicial $u_0^{2h}$ e $v_0^{2h}$;
5. Calcular $R_u^{4h} = I_{2h}^{4h}(f_u^{2h} - A_u^{2h} u^{2h})$ e $R_v^{4h} = I_{2h}^{4h}(f_v^{2h} - A_v^{2h} v^{2h})$, $u_0^{4h} = \gamma I_{2h}^{4h} u^{2h}$ e $v_0^{4h} = \gamma I_{2h}^{4h} v^{2h}$;
6. Definir $f_u^{4h} = \gamma A_u^{4h} u_0^{4h} + R_u^{4h}$ e $f_v^{4h} = \gamma A_v^{4h} v_0^{4h} + R_v^{4h}$;
7. Suavizar $A_u^{4h} u^{4h} = f_u^{4h}$ e $A_v^{4h} v^{4h} = f_v^{4h}$ $\sigma$ vezes com estimativa inicial $u_0^h$ e $v_0^h$;
   $\vdots$
8. Resolver $A_u^{Lh} u^{Lh} = f_u^{Lh}$ e $A_v^{Lh} v^{Lh} = f_v^{Lh}$;
9. Aproximar o erro $e_u^{Lh} = u^{Lh} - \gamma u_0^{Lh}$ e $e_v^{Lh} = v^{Lh} - \gamma v_0^{Lh}$;
   $\vdots$
10. Corrigir a solução $u_0^{4h} \leftarrow u^{4h} + I_{8h}^{4h} e_u^{8h}$ e $v_0^{4h} \leftarrow v^{4h} + I_{8h}^{4h} e_v^{8h}$
11. Suavizar $A_u^{4h} u^{4h} = f_u^{4h}$ e $A_v^{4h} v^{4h} = f_v^{4h}$ $\sigma$ vezes com estimativa inicial $u_0^{4h}$ e $v_0^{4h}$;
12. Corrigir a solução $u_0^{2h} \leftarrow u^{2h} + I_{4h}^{2h} e_u^{4h}$ e $v_0^{2h} \leftarrow v^{2h} + I_{4h}^{2h} e_v^{4h}$;

13. Suavizar $A_u^{2h}u^{2h} = f_u^{2h}$ e $A_v^{2h}v^{2h} = f_v^{2h}$ $\sigma$ vezes com estimativa inicial $u_0^{2h}$ e $v_0^{2h}$;
14. Corrigir a solução $u_0^h \leftarrow u^h + I_{2h}^h e_u^{2h}$ e $v_0^h \leftarrow v^h + I_{2h}^h e_v^{2h}$
15. Suavizar $A_u^h u^h = f_u^h$ e $A_v^h v^h = f_v^h$ $\sigma$ vezes com estimativa inicial $u_0^h$ e $v_0^h$.

MG-2EQ $(\gamma, \sigma, u^h, v^h, f_u^h, f_v^h)$.
Fim

No Algoritmo 2.5.2 os sistemas de equações são suavizadas nos passos 1, 4, 7, 11, 13 e 15. Quando $\gamma = 0$ (esquema CS), os termos do lado direito (passos 3 e 6) são os próprios resíduos restritos, isto é, as estimativas iniciais são nulas (passos 2 e 5). No esquema FAS ( $\gamma = 1$ ), além dos resíduos, as soluções aproximadas também são restritas para as respectivas malhas grossas (passos 2 e 5) e usadas para atualizar os termos do lado direito (passos 3 e 6) dos sistemas de equações. Este procedimento é repetido até a malha mais grossa possível ou a estabelecida (do passo 7 ao 8), onde resolve-se os sistemas (passo 8) e calcula-se os erros (passo 9). Os erros são interpolados para as malhas finas subsequentes e usados para corrigir as soluções; estas são as novas estimativas iniciais (passo 10). Nos passos 11 e 13 os sistemas são suavizados, os erros calculados e usados para corrigir as estimativas iniciais (passos 12 e 14). Na malha mais fina (passo 15), os sistemas são resolvidos e verificados a convergência.

A seguir apresenta-se um procedimento recursivo para o caso de duas equações, que permite diversas chamadas do ciclo V até atingir uma tolerância ($\varepsilon$), ou um número máximo de ciclos estabelecido. O número de ciclos V percorrido será indicado neste trabalho como iterações externas do *multigrid* e denotado por *ite*.

**Algoritmo 2.5.3.** - Procedimento recursivo que permite diversos ciclos V (Adaptado de Wesseling (1992)) Início

Escolha $u_0^h$, $v_0^h$, $\varepsilon$ e $ite_{máximo}$

1. $ite = 1$
   Enquanto não convergir ou $ite \leq ite_{máximo}$, faça
2. MG-2EQ $(\gamma, \sigma, u_0^h, v_0^h, f_u^h, f_v^h)$
3. $u_0^h = u^h$ e $v_0^h = v^h$,
   $ite = ite + 1$

Fim.

Observa-se no Algoritmo 2.5.3 que o procedimento MG-2EQ é solicitado no início de cada ciclo V. Ao término de cada ciclo é verificada a convergência, e, caso não satisfaça a tolerância estabelecida, as estimativas iniciais devem ser atualizadas.

Os processos de restrição e prolongação são uma generalização direta do caso de uma equação e são feitos separadamente para cada uma das equações envolvidas, tanto para o CS quanto para o FAS. O tratamento das condições de contorno no *multigrid* para problemas com duas equações é essencialmente o mesmo que no caso com uma equação, além disso, a transferência dos valores dos contornos é feita separadamente dos valores internos do domínio para cada equação, como pode ser observado em Trottenberg et al. (2001).

## 2.6 RESUMO DO CAPÍTULO 2

Neste capítulo foram apresentados os elementos teóricos principais para o desenvolvimento desta tese. Foram descritos o conceito dos métodos iterativos básicos com uma análise sucinta para demostrar o processo de suavização do erro com a análise de Fourier, a equação residual, os conceitos básicos do método *multigrid* e os seus principais componentes: operadores de restrição, de prolongação, alguns tipos de ciclos *multigrid* e esquemas CS e FAS. Dois algoritmos do *multigrid* foram propostos para resolver problemas com diversas malhas, podendo escolher entre os esquemas CS e FAS. No capítulo seguinte apresentam-se os modelos matemáticos e númericos e metodologia para a resolução dos sistemas de equações algébricas.

# 3 MODELOS MATEMÁTICOS E NUMÉRICOS

Neste capítulo apresentam-se os modelos matemáticos e numéricos empregados na realização deste trabalho. Primeiramente apresentam-se cada modelo matemático com suas respectivas condições de contorno, que serão resolvidos em um domínio quadrado unitário como mostrado na Fig. 12. Em seguida, apresentam-se a configuração do problema teste usado com as equações de Navier-Stokes e os detalhes dos modelos numéricos.

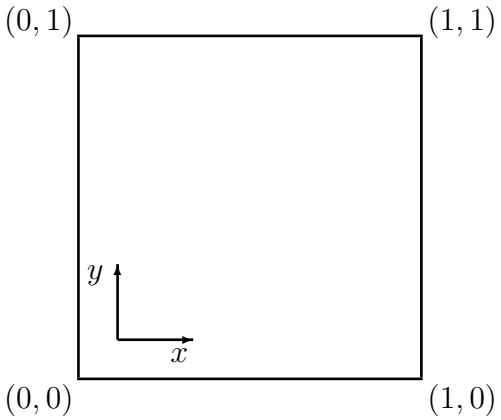



Figura 12: Domínio físico.

## 3.1 MODELOS MATEMÁTICOS

### 3.1.1 Equação de Laplace

O problema linear de condução de calor bidimensional (equação de Laplace 2D), com condições de contorno de Dirichlet, em sistemas de coordenadas cartesianas, é escrito como (FERZIGER e PERIC, 2001):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \tag{3.1}$$

com as seguintes condições de contornos para o domínio representado pela Fig. 12:

$$T(x,0) = T(0,y) = 0, \tag{3.2}$$

$$T(x,1) = x, \tag{3.3}$$

$$T(1,y) = y, \tag{3.4}$$

em que $T$ representa a temperatura em $^oC$, $x$ e $y$ as coordenadas espaciais. A solução analítica linear do problema definido pela Eq. (3.1) com condições de contorno de Dirichlet representadas pelas Eqs. (3.2)-(3.4) é dada por

$$T(x, y) = xy. \tag{3.5}$$

### 3.1.2 Equações de Navier

No sistema de coordenadas cartesianas, para um estado plano de tensões, as equações do problema de termoelasticidade linear na forma bidimensional em regime permanente, para corpos elásticos, cujos materiais são homogêneos e isotrópicos, a partir da lei de Hooke, podem ser reduzidas a duas equações diferenciais parciais lineares escritas em termos dos deslocamentos $u$ e $v$. Para obter estas equações, as relações elásticas tensão-deformação são substituídas nas equações de equilíbrio. Assim, obtém-se as clássicas equações de Navier para a elasticidade em meio contínuo (TIMOSHENKO e GOODIER, 1970; SALENÇON, 2001), descritas como

$$C_\lambda \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2C_\lambda \alpha \frac{\partial T}{\partial x} + S^u, \tag{3.6}$$

$$C_\lambda \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2C_\lambda \alpha \frac{\partial T}{\partial y} + S^v, \tag{3.7}$$

sendo $C_\lambda = (1 + \lambda)/(1 - \lambda)$, $\lambda$ a razão de Poisson (razão entre deformação transversal e longitudinal), $\alpha$ o coeficiente de expansão térmica e $u$ e $v$ são as componentes do deslocamento nas direções coordenadas $x$ e $y$, respectivamente. O coeficiente de expansão térmica $\alpha$ e a razão de Poisson $\lambda$ são constantes nesse modelo matemático, sendo que $\lambda = 0,34$ e $\alpha = 16 \times 10^{-6}$ $^o$C são propriedades físicas do cobre. O campo de temperaturas $T(x, y)$ é obtido a partir da solução analítica senoidal de um problema de difusão bidimensional, cujas condições de contornos são dadas por $T(x, 0) = T(0, y) = T(1, y) = 0$ e $T(x, 1) = \text{sen}(\pi x)$ (GREENBERG, 1998), isto é,

$$T(x, y) = \text{sen}(\pi x)\frac{\text{senh}(\pi y)}{\text{senh}(\pi)}. \tag{3.8}$$

Derivando a Eq. (3.8) em relação a $x$ e em relação a $y$, obtêm-se os gradientes da temperatura nas direções coordenadas. Portanto, para a Eq. (3.6), tem-se,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\pi \cos(\pi x)\,\text{senh}(\pi y)}{\text{senh}(\pi)}, \tag{3.9}$$

e, de forma análoga, tem-se para a Eq. (3.7),

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\pi \,\mathrm{sen}\,(\pi x)\cosh(\pi y)}{\mathrm{senh}\,(\pi)}. \tag{3.10}$$

Neste trabalho propõe-se a seguinte solução analítica para os deslocamentos $u$ e $v$ nas Eqs. (3.6) e (3.7),

$$u(x,y) = \beta_1 \,\mathrm{sen}(\pi x)\frac{(e^{2x}-1)(e^y-1)}{(e^2-1)(e-1)}, \tag{3.11}$$

$$v(x,y) = \beta_2 x y^2, \tag{3.12}$$

em que $\beta_1 = 0,01\,m$ e $\beta_2 = 1\,m$ são parâmetros.

As soluções analíticas dadas pelas Eqs. (3.5), (3.11) e (3.12) foram obtidas com o Método das Soluções Manufaturadas (veja, por exemplo, em Roache (2002) ou Shih et al. (1989)). Em geral, a utilização da solução Manufaturada é usada para verificar a existência de eventuais erros de programação e erros numéricos.

A substituição das derivadas das funções $u$ e $v$, Eqs. (3.11) e (3.12), nas Eqs. (3.6) e (3.7), resulta nas parcelas dos termos fontes $S^u$ e $S^v$, respectivamente, obtendo,

$$S^u_a = -\,\mathrm{sen}(\pi x)\pi^2(e^{2x}-1)(e^y-1) + 4\cos(\pi x)\pi e^{2x}(e^y-1), \tag{3.13}$$

$$S^u_b = 4\,\mathrm{sen}(\pi x)e^{2x}(e^y-1) + 2x(e^2-1)(e-1), \tag{3.14}$$

$$S^u_c = -\,\mathrm{sen}(\pi x)\pi^2(e^{2x}-1)(e^y-1) + 4\cos(\pi x)\pi e^{2x}(e^y-1), \tag{3.15}$$

$$S^u_d = 4\,\mathrm{sen}(\pi x)e^{2x}(e^y-1) - \mathrm{sen}(\pi x)(e^{2x}-1)(e^y) - \frac{2\alpha C_\lambda \cos(\pi x)\,\mathrm{senh}(\pi y)\pi}{\mathrm{senh}(\pi)}. \tag{3.16}$$

Agrupando as parcelas acima obtém-se a seguinte expressão para o termo $S^u$:

$$S^u = \frac{C_\lambda}{(e^2-1)(e-1)}(S^u_a + S^u_b) + S^u_c + S^u_d. \tag{3.17}$$

Para o termo $S^v$, tem-se:

$$\begin{aligned} S^v \;=\; & C_\lambda\left[\frac{\cos(\pi x)\pi(e^{2x}-1)e^y}{(e^2-1)(e-1)} + \frac{2\,\mathrm{sen}(\pi x)e^{2x+y}}{(e^2-1)(e-1)}\right] - \\ & \frac{2\alpha C_\lambda \,\mathrm{sen}(\pi x)\cosh(\pi y)\pi}{\mathrm{senh}(\pi)} + 2y. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Com a substituição dos valores de $x$ e $y$ sobre o contorno nas soluções analíticas dadas pelas Eqs. (3.11) e (3.12), obtém-se as condições de contorno para o domínio representado pela Fig. 12 para os deslocamentos $u$ e $v$, cujas equações resultantes são:

Contorno superior

$$u(x,1) = \beta_1 \operatorname{sen}(\pi x)\frac{(e^{2x}-1)}{e^2-1}, \quad v(x,1) = \beta_2 x. \tag{3.19}$$

Contorno direito

$$u(1,y) = 0, \quad v(1,y) = \beta_2 y^2. \tag{3.20}$$

Contorno inferior

$$u(x,0) = v(x,0) = 0. \tag{3.21}$$

Contorno equerdo

$$u(0,y) = v(0,y) = 0. \tag{3.22}$$

### 3.1.3 Equações de Burgers

As equações de Burgers são equações diferenciais parciais não-lineares, do tipo advecção-difusão, e são consideradas como formas simplificadas das equações de Navier-Stokes. As equações reduzem-se às equações de conservação da Quantidade de Movimento Linear (QML). Devido as suas não-linearidades e pelo fato de serem uma simplificação das equações de Navier-Stokes, constituem-se um importante problema teste. Uma revisão bibliográfica de pesquisas em que esse problema é usado como *benchmark* pode ser encontrada em Efe (2006). O modelo considerado no presente estudo tem solução analítica dada por Shih et al. (1989), dessa forma, eliminam-se as dificuldades relacionadas ao cálculo da pressão.

As equações de Burgers com propriedades constantes, em regime permanente, escritas no sistema de coordenadas cartesianas, na forma não conservativa e com o número de Reynolds unitário ($Re = 1$), são dadas por

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial (vu)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial y} - B, \tag{3.24}$$

onde $p$ é a pressão estática, $u$ e $v$ são as componentes da velocidade nas direções coordenadas $x$ e $y$, respectivamente, e $B$ é um termo fonte que surge devido a utilização do método de soluções manufaturadas. A solução analítica das Eqs. (3.23) e (3.24) é dada pelas seguintes equações

$$u(x, y) = 8(x^4 - 2x^3 + x^2)(4y^3 - 2y), \tag{3.25}$$

$$v(x, y) = -8(4x^3 - 6x^2 + 2x)(y^4 - y^2). \tag{3.26}$$

Shih et al. (1989) sugeriram as Eqs. (3.25) e (3.26) como solução analítica das componentes da velocidade nas equações de Navier-Stokes para estudar escoamentos dentro de uma cavidade quadrada. Mais detalhes sobre as soluções analíticas de $u$, $v$ e $p$ e o termo fonte $B$ podem ser vistos em Shih et al. (1989).

A partir das Eqs. (3.25) e (3.26), aplica-se as condições de contorno nas componentes de velocidade $u$ e $v$, assumindo zero em todos os contornos, exceto no superior para a componente $u$, cuja equação para o contorno é dada por

$$u(x, 1) = 16(x^4 - 2x^3 + x^2). \tag{3.27}$$

### 3.1.4 Formulações das Equações de Navier-Stokes

Nesta seção apresenta-se o principal modelo matemático desta pesquisa. Serão abordadas as equações de Navier-Stokes para escoamento bidimensional de fluido incompressível em regime estacionário, em duas formulações alternativas. As equações na formulação em variáveis primitivas não são resolvidas neste trabalho, entretanto, são apresentadas por necessidade de referenciar no texto.

As variáveis nas equações de Navier-Stokes são frequentemente usadas na forma adimensional e são relacionadas com as variáveis dimensionais da seguinte forma (FORTUNA, 2000):

$$x = \frac{\hat{x}}{l} \quad \text{e} \quad y = \frac{\hat{y}}{l}, \tag{3.28}$$

$$u = \frac{\hat{u}}{U_\infty}, \qquad v = \frac{\hat{v}}{U_\infty} \quad \text{e} \quad p = \frac{\hat{p}}{U_\infty^2}, \tag{3.29}$$

em que $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{u}$, $\hat{v}$ e $\hat{p}$ são dimensionais. Assim, define-se o número de Reynolds, escrito na forma

$$Re = \frac{U_\infty l}{\nu}, \tag{3.30}$$

que é baseada na viscosidade cinemática $\nu = \mu/\rho$; em que $\mu$ é a viscosidade dinâmica e $\rho$ é a massa específica, num comprimento de referência $l$ e numa velocidade de referência $U_\infty$. O número de Reynolds expressa a razão entre as forças inerciais (devido à velocidade) e as forças viscosas. Basicamente, o número de Reynolds define o comportamento do escoamento de um fluido: laminar ou turbulento. Escoamentos abaixo de um valor $Re_{crítico}$ são laminares; acima desse valor, os escoamentos se tornam turbulentos. De acordo com Fortuna (2000), para um escoamento permanente em um tubo circular, convenciona-se definir $Re_{crítico} = 2000$. No problema da cavidade quadrada, Erturk (2009) observou que o escoamento começa a mostrar sinais característicos de turbulência quando $6000 < Re < 8000$; para $Re > 8000$ o escoamento na cavidade é turbulento.

#### 3.1.4.1 Variáveis primitivas: $\mathbf{v} - p$

As equações de Navier-Stokes escritas em termos das variáveis primitivas, pressão-velocidade $p - \mathbf{v}$, em regime permanente, e sem forças externas, são deduzidas dos princípios fundamentais da conservação da massa e da quantidade do movimento linear (QML) e, são representadas na forma não conservativa como (FOX e MCDONALD, 1995),

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{3.31}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{3.32}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial p}{\partial y}. \tag{3.33}$$

onde $u$ e $v$ são as componentes da velocidade nas direções coordenadas $x$ e $y$ , respectivamente, $p$ é a pressão estática e $Re$ é o número de Reynolds. As Eqs (3.31), (3.32) e (3.33)

são denominadas equação de conservação da massa (ou restrição de incompressibilidade), equação de conservação da Quantidade de Movimento Linear na direção $x$ (QML-$x$) e equação de conservação da Quantidade de Movimento Linear na direção $y$ (QML-$y$), respectivamente. Com condições iniciais e de contornos adequadas estas equações constituem um sistema de Equações Diferenciais Parciais (EDP) para as variáveis $u$, $v$ e $p$.

Nota-se nas Eqs. (3.32) e (3.33) que para valores de $Re >> 1$, tem-se uma diminuição da influência das forças viscosas e um aumento da influência das forças inerciais no escoamento. Para $Re << 1$ há um aumento da influência das forças viscosas e uma diminuição das forças inerciais.

#### 3.1.4.2 Função de Corrente e Vorticidade: $\psi - \omega$

Para escoamento bidimensional de fluido incompressível com propriedades constantes, as equações de Navier-Stokes podem ser simplificadas introduzindo a função de corrente $\psi$ e vorticidade $\omega$ como variáveis dependentes. Estas duas funções escalares são definidas em termos das componentes cartesianas da velocidade (FERZIGER e PERIC, 2001), onde $\psi$ é definido tal que:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \tag{3.34}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{3.35}$$

e a vorticidade, que é associada ao movimento rotacional de um elemento do fluido em torno de um ponto (FORTUNA, 2000), é definida como

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{3.36}$$

A substituição das Eqs. (3.34) e (3.35) na definição da vorticidade, Eq. (3.36), estabelece a conexão da função de corrente com a vorticidade, resultando numa equação do tipo Poisson para $\psi$, isto é,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega. \tag{3.37}$$

Agora, derivando as equações da QML, Eqs. (3.32) e (3.33), em relação a $y$ e a $x$, respectivamente, e subtraindo o resultado de cada uma da outra equação, ou seja,

$\frac{\partial}{\partial y}$(Eq. 3.32) $-$ $\frac{\partial}{\partial x}$(Eq. 3.33), obtém-se a equação de transporte para a vorticidade na forma não-conservativa e em regime estacionário

$$u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right). \tag{3.38}$$

Com a substituição das Eqs. (3.34) e (3.35) na Eq. (3.38), e com as devidas manipulações algébricas nos termos, obtém-se uma equação para a vorticidade do tipo Poisson, isto é,

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = Re\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y}\right), \tag{3.39}$$

onde o lado direito é usado como termo fonte. A Eq. (3.37) juntamente com a Eq. (3.38) ou (3.39), representam as equações de Navier-Stokes escritas na formulação função de corrente e vorticidade ($\psi - \omega$).

Observa-se que nesta formulação a pressão não aparece como variável dependente. Em contraste com a formulação $p - \mathbf{v}$, Eqs. (3.31)-(3.33), que requer a resolução de três equações, componentes da velocidade e pressão, nessa abordagem é possível obter a solução numérica das equações de Navier-Stokes resolvendo apenas duas equações diferenciais parciais do tipo Poisson. A redução do número de equações e variáveis dependentes é o principal atrativo desta formulação no caso bidimensional (FERZIGER e PERIC, 2001).

As duas equações são acopladas através do aparecimento das componentes da velocidade (que são derivadas de $\psi$) na equação da vorticidade e da vorticidade agindo como termo fonte na equação de Poisson para $\psi$.

Alguns autores (WESSELING, 1984; GUPTA e KALITA, 2005) relatam dificuldades com a aplicação das condições de contorno para vorticidade. Não obstante, algumas abordagens e discussões sobre a acurácia e performance de diversas técnicas que podem ser adotadas para aplicar as condições de contornos numéricas para a formulação $\psi - \omega$, podem ser encontradas na literatura (SPOTZ, 1998; ROACHE, 1998). Uma técnica bastante popular é conhecida como fórmula de Jensen (ou fórmula de Briley) (ERTURK, 2009; CHEN et al., 2008; FLETCHER, 1991). Nesta técnica a vorticidade é calculada com a Eq. (3.37) usando aproximações de diferenças finitas de segunda ordem.

Sejam $\partial\psi/\partial x = 0$ e $\partial\psi/\partial y = \pm\mathbf{v}_c$ nos contornos, em que $\mathbf{v}_c$ é a velocidade no contorno superior. Seja $\xi$ uma constante arbitrária. Expandindo $\partial\psi/\partial y$ em torno de um

ponto qualquer sobre o contorno (SPOTZ, 1998), obtém-se

$$\psi_1 + \xi\psi_2 = (1+\xi)\psi_c + (1+2\xi)h\left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_c + (1+4\xi)\frac{h^2}{2}\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right|_c + (1+8\xi)\frac{h^3}{6}\left.\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}\right|_c + O(h^4). \tag{3.40}$$

Substituindo a equação $\partial\psi/\partial y = \pm\mathbf{v}_c$ e Eq. (3.37) na Eq. (3.40), utilizando o fato de que $\partial^2\psi/\partial x^2 = 0$ sobre o contorno, e escolhendo $\xi = -1/8$ para cancelar o termo $h^3$, resulta em

$$\psi_1 - \frac{1}{8}\psi_2 = \frac{7}{8}\psi_c \pm \frac{3h}{4}\mathbf{v}_c - \frac{h^2}{4}\omega_c + O(h^4). \tag{3.41}$$

Multiplicando a Eq. (3.41) por 4 e dividindo por $h^2$, obtém-se

$$\omega_c = \frac{7\psi_c - 8\psi_1 + \psi_2}{2h^2} - \frac{3\mathbf{v}_c}{h} + O(h^2), \tag{3.42}$$

onde o subescrito "c" denota o ponto sobre o contorno, 1 refere-se ao ponto adjacente ao contorno, 2 refere-se a segunda linha de pontos adjacente ao contorno e $\mathbf{v}_c = u = 1$ é a velocidade no contorno superior e zero nos demais. A Eq. (3.42) é chamada de fórmula de Jensen (ROACHE, 1998). Mais detalhes sobre a formulação $\psi - \omega$ podem ser encontradas em Ferziger e Peric (2001) ou Erturk et al. (2005), Erturk (2009). Os valores da função de corrente são zero em todos os quatro contornos, $\psi = 0$.

#### 3.1.4.3 Função de Corrente e Velocidade: $\psi - \mathbf{v}$

A equação do transporte da função de corrente, em estado permanente, pode ser deduzida a partir da formulação $\psi - \omega$. Observa-se que na Eq. (3.38) todos os termos envolvem derivadas da vorticidade, $\omega$, de primeira ou de segunda ordem. Assim, para chegar a uma expressão que dependa apenas de $\psi$, pode-se obter as derivadas correspondentes na Eq. (3.37) e substituir na Eq. (3.38).

Derivando a Eq. (3.37) duas vezes em relação a $x$, obtém-se as derivadas primeira e segunda de $\omega$, cujas equações são, respectivamente,

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) = -\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} - \frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial y^2}, \tag{3.43}$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) = -\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2}. \tag{3.44}$$

Agora, utilizando o mesmo raciocínio para as derivadas em relação a $y$, a partir da Eq. (3.37), obtém-se as equações

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) = -\frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial x^2} - \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}, \tag{3.45}$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) = -\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^2 \partial x^2} - \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4}. \tag{3.46}$$

Substituindo as Eqs. (3.43), (3.44), (3.45) e (3.46), na Eq. (3.38), resulta em

$$\begin{aligned} -u\left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2}\right) - v\left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}\right) &= -\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2}\right) \\ &\quad -\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4}\right). \end{aligned} \tag{3.47}$$

Multiplicando a Eq. (3.47) por $Re$ e rearranjando os termos, obtém-se as equações de Navier-Stokes escrita apenas em termos de uma equação diferencial de quarta ordem, isto é,

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} - Re\left[\left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2}\right)u + \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}\right)v\right] = 0. \tag{3.48}$$

A Eq. (3.48) respresenta a equação de transporte da função de corrente, $\psi$. As componentes de velocidade são dadas pelas Eqs. (3.34) e (3.35).

As condições de contorno são do tipo Dirichlet e aplicadas como em Gupta e Kalita (2005), isto é, para as velocidades no contorno superior tem-se $u = 1$ e $v = 0$, e nos demais $u = v = 0$. Os valores da função de corrente são zero nos quatro contornos, $\psi = 0$. Em Kundu (1990) e Tannehill et al. (1997) podem ser obtidas definições e informações com mais detalhes sobre funções de corrente.

### 3.1.5 Problema teste: Cavidade quadrada

O escoamento de um fluido incompressível na cavidade quadrada, definida no domínio unitário, como ilustrado na Fig. 12, é extensivamente usado como um problema

modelo para testar métodos numéricos e validar códigos computacionais para as equações de Navier-Stokes (RUBIN e KHOSLA, 1977; GHIA et al., 1982; SHANKAR e DESHPANDE, 2000; ERTURK et al., 2005). A preferência de muitos pesquisadores por este problema é devido a simplicidade da configuração e geometria, embora possua singularidade em dois de seus cantos. Pode-se observar na Fig. 13 que $u = 0$ ao longo dos contornos laterais e no contorno superior $u = 1$. Muitos resultados para moderados números de Reynolds podem ser encontrados na literatura obtidos com diversos tipos de procedimentos; soluções acuradas podem ser encontradas em Botella e Peyret (1998) e Marchi et al. (2009). Resultados com altos números de Reynolds podem ser encontrados em Erturk et al. (2005).

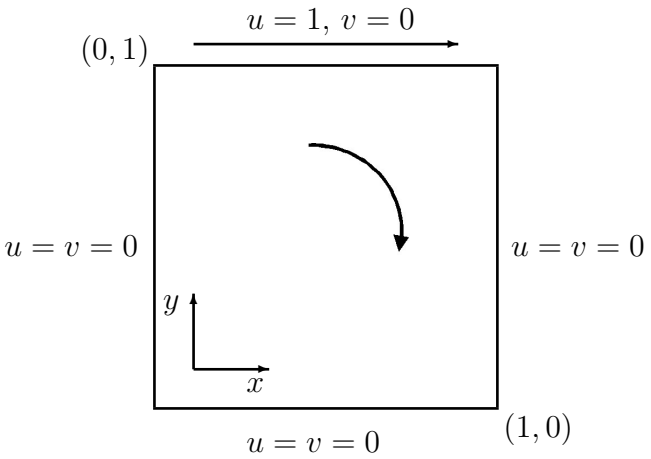



Figura 13: Domínio físico e condições de contorno da cavidade quadrada para as equações de Navier-Stokes.

O escoamento é induzido pelo movimento do contorno superior, da esquerda para a direita, e governado pelas equações de Navier-Stokes. Com o aumento do número de Reynolds, o movimento no contorno faz com que surjam vórtices na parte central da cavidade e próximos aos cantos. As condições de contorno do tipo Dirichlet estão representados na Fig. 13. Uma importante revisão sobre as características físicas do escoamento na cavidade foi abordado por Shankar e Deshpande (2000).

## 3.2 MODELOS NUMÉRICOS

Nesta seção descreve-se os métodos, esquemas e procedimentos adotados para resolver numericamente os modelos matemáticos apresentados. Serão descritos principalmente: a discretização das equações, tipo de malha, tipos de aproximações numéricas, metodologia do teste de coerência, critério de convergência e o método iterativo utilizado.

### 3.2.1 Obtenção das equações algébricas

Para obter as equações algébricas adotou-se o Método de Diferenças Finitas (TANNEHILL et al., 1997). A idéia central do MDF é a discretização do domínio e a substituição das derivadas parciais presentes na equação diferencial, por aproximação envolvendo somente valores numéricos da função contínua. Na prática as derivadas são substituídas pela razão incremental que converge para o valor da derivada quando o incremento tende a zero. Diz-se então que o problema foi discretizado. Quando a equação diferencial envolve mais de uma variável, a idéia acima é aplicada a cada uma delas, separadamente. No limite, teoricamente quando a razão incremental tende a zero, o problema discretizado tende ao problema contínuo.

Nesta tese a discretização do domínio foi desenvolvida fazendo-se uso de malhas estruturadas e uniformes por direção, como ilustrado na Fig. 2a, onde o domínio $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$ é particionado em um número de nós (ou número de pontos), dado por,

$$N = N_x N_y, \tag{3.49}$$

onde $N$ é o número total de pontos da malha, ou tamanho do problema, que ordinariamente será referido neste trabalho.

Um ponto qualquer na malha é definido como

$$(x_i, y_j) = ((i-1)h_x, (j-1)h_y), \tag{3.50}$$

em que $h_x = 1/(N_x - 1)$ e $h_y = 1/(N_y - 1)$, e $i = 1 \cdots N_x$, $j = 1 \cdots N_y$, $h_x$ e $h_y$ são os tamanhos dos elementos da malha nas direções coordenadas $x$ e $y$, respectivamente. No caso de malhas estruturadas e uniformes nas duas direções, Fig. 2a, cada elemento da malha computacional $\Omega^h$, é geralmente denotado por $h$, em que $h = h_x = h_y$ é o tamanho do elemento. Qualquer ponto $(x_i, y_j)$ fica representado na malha por $(i, j)$ e os vizinhos relativamente a esse ponto são representados por $(i \pm 1, j \pm 1)$, como pode ser observado na Fig. 14.

A ferramenta matemática básica utilizada para o cálculo de aproximações das derivadas, por fórmulas de diferenças finitas, é a série de Taylor. O desenvolvimento da série de Taylor em torno do ponto $(x_i, y_j)$, para uma dada função contínua $\phi(x, y)$, resulta nas seguintes equações para as derivadas na direção $x$ (TANNEHILL et al., 1997):

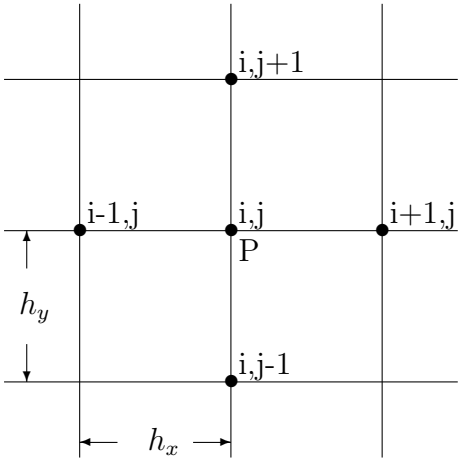



Figura 14: Ponto $i, j$ e seus vizinhos adjacentes mais próximos.

- Um ponto a jusante ou diferença adiantada (*Downstream Differencing Scheme* - DDS, de primeira ordem),

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{h} + O(h). \tag{3.51}$$

- Um ponto a montante ou diferença atrasada (*Upstream Differencing Scheme* - UDS, de primeira ordem),

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{h} + O(h). \tag{3.52}$$

- Diferença central de dois pontos (*Central Differencing Scheme* - CDS-2, de segunda ordem)

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2h} + O(h^2), \tag{3.53}$$

- e para a derivada de segunda ordem, com diferença central de três pontos (*Central Differencing Scheme* - CDS-2, de segunda ordem),

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2), \tag{3.54}$$

em que os termos $O(h)$ e $O(h^2)$ são chamados de erros de truncamento; eles medem a precisão da aproximação e determinam a velocidade com que o erro diminui à medida que o espaçamento $h$ entre os pontos é reduzido. Em particular, o primeiro termo truncado é

geralmente a principal fonte de erro. Segundo Ferziger e Peric (2001) a substituição das derivadas por aproximações introduz erros que diminuem à medida que a malha é refinada. Aqui, o expoente de $h$ indica a ordem (ou acurácia) da aproximação, ou discretização.

As aproximações de diferenças finitas na direção $y$ são semelhantes, basta fixar $i$ e adicionar ou subtrair uma unidade em $j$ nos pontos vizinhos ao ponto $(i, j)$. Diversas aproximações em torno de um ponto, inclusive para derivadas mistas e derivadas de alta ordem podem ser encontradas em Ferziger e Peric (2001) ou em Tannehill et al. (1997).

A substituição das aproximações por diferenças finitas de segunda ordem, Eq. (3.54), numa equação diferencial bidimensional, do tipo Poisson, conduz a um sistema de equações algébricas que pode ser representado genericamente como

$$a_{P,p}\tilde{\phi}_{i,j} = a_{P,n}\tilde{\phi}_{i,j+1} + a_{P,s}\tilde{\phi}_{i,j-1} + a_{P,e}\tilde{\phi}_{i+1,j} + a_{P,w}\tilde{\phi}_{i-1,j} + b_P^{\tilde{\phi}}, \tag{3.55}$$

onde $a_{P,p}$, $a_{P,e}$ $a_{P,w}$, $a_{P,n}$ e $a_{P,s}$ são os coeficientes de uma matriz pentadiagonal e fazem a conexão entre o ponto $P$ e seus vizinhos leste $(e)$, oeste $(w)$, norte $(n)$ e sul $(s)$, respectivamente; $\tilde{\phi}$ representa a aproximação numérica para a variável de interesse e; $b_P^{\tilde{\phi}}$ é o termo fonte associado ao ponto $P$. A Fig. 3a ilustra a representação gráfica da estrutura matricial da Eq. (3.55).

Se $\tilde{\phi}$ e $f$ são denotados por $\tilde{\phi} = (\tilde{\phi}_1, \cdots, \tilde{\phi}_N)$ e $f = (f_1, \cdots, f_N)$, onde $f$ é o vetor independente formado pelos termos de $b_P^{\tilde{\phi}}$ e $\tilde{\phi}$ é o vetor de incógnitas, então o sistema dado pela Eq. (3.55), pode ser representado por um sistema de equações algébricas do tipo da Eq. (1.1), onde $A$ é uma matriz pentadiagonal $N$ por $N$, geralmente simétrica e definida positiva (BRIGGS et al., 2000). O sistema de equações algébricas, Eq. (3.55), deve ser resolvido para cada ponto interno da malha.

A seguir apresentam-se os esquemas numéricos específicos utilizados para resolver os modelos matemáticos descritos na seção 3.1.

### 3.2.2 Equação de Laplace

A aproximação dos termos das derivadas da Eq. (3.1), com a Eq. (3.54), resulta na seguinte expressão

$$\frac{\tilde{\phi}_{i+1,j} - 2\tilde{\phi}_{i,j} + \tilde{\phi}_{i-1,j}}{h^2} + \frac{\tilde{\phi}_{i,j+1} - 2\tilde{\phi}_{i,j} + \tilde{\phi}_{i,j-1}}{h^2} = b_P^{\tilde{\phi}}, \tag{3.56}$$

onde $\tilde{\phi}$ representa uma aproximação numérica para a temperatura $T$ e $b_P^{\tilde{\phi}}$ é o termo fonte correspondente.

Rearanjando os termos da Eq. (3.56), e colocando na forma da Eq. (3.55), obtém-se os seguintes coeficientes para o interior do domínio,

$$a_{P,e} = a_{P,w} = a_{P,n} = a_{P,s} = \frac{1}{h^2}, \quad a_{P,p} = \frac{4}{h^2}, \quad \text{e}, \quad b_P^{\tilde{\phi}} = 0, \tag{3.57}$$

e nos contornos,

$$a_{P,e} = a_{P,w} = a_{P,n} = a_{P,s} = 0, \quad a_{P,p} = 1, \quad \text{e}, \quad b_c^{\phi} = \phi_c, \tag{3.58}$$

em que $\phi_c$ representa o valor conhecido de $\phi$ em cada ponto do contorno.

Os coeficientes dados pela Eq. (3.57) formam um sistema de equações com cinco diagonais que é resolvido para os pontos no interior do domínio. Os valores de $T$ sobre os contornos são obtidos diretamente a partir da solução analítica, Eq. (3.5), cujas expressões são dadas pelas Eqs. (3.2)-(3.4).

### 3.2.3 Equações de Navier

A substituição das aproximações das derivadas nas Eqs. (3.6) e (3.7) conduz a duas equações algébricas do tipo da Eq. (3.55). Os coeficientes para a componente do deslocamento $u$ são dados por

$$a_{P,e}^u = a_{P,w}^u = -\frac{1 + C_\lambda}{h^2}, \tag{3.59}$$

$$a_{P,n}^u = a_{P,s}^u = -\frac{1}{h^2}, \tag{3.60}$$

$$a_{P,p}^u = -(a_{P,e}^u + a_{P,w}^u + a_{P,n}^u + a_{P,s}^u). \tag{3.61}$$

A aproximação numérica para o termo fonte da Eq. (3.6) resulta na expressão

$$b_P^u = \frac{C_\lambda}{4h^2}(v_{i+1,j+1} + v_{i-1,j-1} - v_{i-1,j+1} - v_{i+1,j-1}) + \\ -2\alpha C_\lambda \frac{\pi \cos(\pi x)\,\text{senh}(\pi y)}{\text{senh}(\pi)} - S^u, \tag{3.62}$$

em que o sobreescrito $u$ indica que as expressões são válidas para a componente $u$. Os termos $v_{i+1,j+1}$, $v_{i-1,j-1}$, $v_{i-1,j+1}$ e $v_{i+1,j-1}$ são aproximações numéricas da derivada cruzada que aparece na Eq. (3.6). O segundo termo que aparece na Eq. (3.62) refere-se ao gradiente da temperatura, dado pela Eq. (3.9), e o termo $S^u$ é dado pela Eq. (3.17).

Os coeficientes para o deslocamento $v$ são dados por

$$a^v_{P,e} = a^v_{P,w} = -\frac{1}{h^2}, \tag{3.63}$$

$$a^v_{P,n} = a^v_{P,s} = -\frac{1+C_\lambda}{h^2}, \tag{3.64}$$

$$a^v_{P,p} = -(a^u_{P,e} + a^u_{P,w} + a^u_{P,n} + a^u_{P,s}). \tag{3.65}$$

A aproximação numérica para o termo fonte da Eq. (3.7) conduz à expressão

$$b^v_P = \frac{C_\lambda}{4h^2}(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1}) + \\ -2\alpha C_\lambda \frac{\pi \,\mathrm{sen}\,(\pi x)\cosh(\pi y)}{\mathrm{senh}\,(\pi)} - S^v, \tag{3.66}$$

em que o sobreescrito $v$ indica que as expressões são válidas para a componente $v$. Os termos $u_{i+1,j+1}$, $u_{i-1,j-1}$, $u_{i-1,j+1}$ e $u_{i+1,j-1}$ são aproximações numéricas da derivada cruzada que aparece na Eq. (3.7). O segundo termo que aparece na Eq. (3.66) refere-se ao gradiente da temperatura, dado pela Eq. (3.10), e o termo $S^v$ é dado pela Eq. (3.18).

A aplicação das condições de contornos de Dirichlet, no caso da Eq. (3.55), tanto para $u$ quanto para $v$, são realizadas com a Eq. (3.58).

Os coeficientes dados pelas Eqs. (3.59)-(3.61) e (3.63)-(3.65), com os respectivos termos fontes, Eqs. (3.62) e (3.66), formam dois sistemas de equações algébricas semelhantes a Eq. (3.55) que são resolvidos para os pontos internos do domínio.

Na aproximação da derivada cruzada da Eq. (3.6), aparece a componente $v$ que é deslocada para o termo fonte $b^u_P$, como pode ser observado na Eq. (3.62). O mesmo ocorre com a aproximação da derivada cruzada da Eq. (3.7), sendo assim, os dois sistemas de equações, associados a $u$ e a $v$, são acoplados porque a solução de $u$ depende da solução de $v$ e vice-versa. As parcelas $S^u$ e $S^v$ que aparecem nas Eqs. (3.62) e (3.66) são adicionadas aos respectivos termos fontes.

As condições de contorno para $u$ e $v$ são aplicadas diretamente da solução analítica e são dadas pelas Eqs. (3.19)-(3.22).

### 3.2.4 Equações de Burgers

A resolução das equações de Burgers é de grande importância no tratamento de problemas aplicados tanto na matemática como na engenharia. Nesta tese, as equações de Burgers são resolvidas em uma região fechada conhecida na literatura como problema da cavidade quadrada. O fluido se desloca para a direita no contorno superior com uma distribuição de velocidade horizontal conhecida dada pela Eq. (3.27), enquanto que nos outros contornos permanece com velocidade nula (condição de contorno de não-deslizamento). A Fig. 15 dá uma idéia do domínio físico deste problema. O deslocamento provocado no contorno superior cria dentro da cavidade um movimento circular das partículas do fluido. Para Reynolds unitário o movimento é em torno de um ponto, chamado vórtice central.

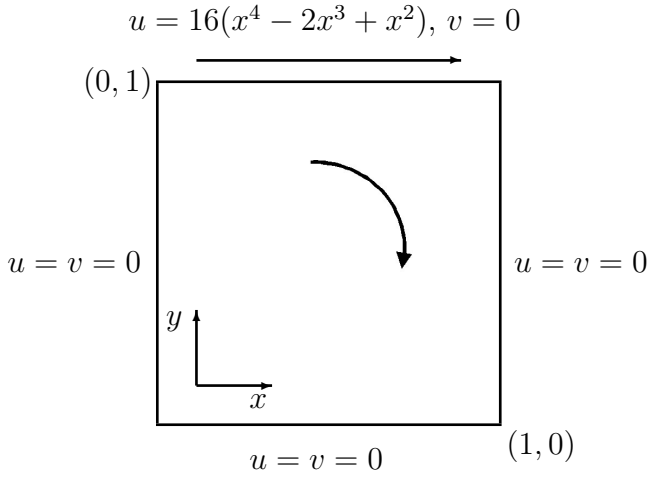



Figura 15: Domínio de cálculo e condições de contorno da cavidade quadrada para as equações de Burgers.

Os termos difusivos foram discretizados com o esquema CDS, Eq. (3.54), que é de segunda ordem. Os termos advectivos presentes no lado esquerdo das Eqs. (3.23) e (3.24) foram discretizados com aproximações de primeira ordem com o esquema UDS, Eq. (3.52). Os termos não-lineares foram linearizados no ponto $(x_i, y_j)$, como em Ferziger e Peric (2001), da seguinte forma na direção $x$:

$$\left(\frac{\partial \phi^2}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{\phi^*_{i,j}\phi_{i,j} - \phi^*_{i-1,j}\phi_{i-1,j}}{h}, \quad \text{se} \quad \phi_{i,j} > 0, \quad \text{ou} \tag{3.67}$$

$$\left(\frac{\partial \phi^2}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{\phi^*_{i+1,j}\phi_{i+1,j} - \phi^*_{i,j}\phi_{i,j}}{h}, \quad \text{se} \quad \phi_{i,j} < 0 \tag{3.68}$$

em que $\phi$ representa a propriedade envolvida, $u$ ou $v$; o sobreescrito "*" indica que os valores são conhecidos da iteração anterior. Na direção $y$ e para os termos advectivos as expressões podem ser obtidas de forma similar. Com a introdução dos parâmetros $\alpha_u = (1/2)\,\mathrm{sinal}(u_{i,j})$ e $\alpha_v = (1/2)\,\mathrm{sinal}(v_{i,j})$ para controlar a direção do escoamento local, conforme os sinais de $u$ e $v$, obtém-se as expressões

$$\left(\frac{\partial u^2}{\partial x}\right)_{i,j} = \left(\frac{1}{2}+\alpha_u\right)\frac{u^*_{i,j}u_{i,j} - u^*_{i-1,j}u_{i-1,j}}{h} + \left(\frac{1}{2}-\alpha_u\right)\frac{u^*_{i+1,j}u_{i+1,j} - u^*_{i,j}u_{i,j}}{h}, \quad (3.69)$$

$$\left(\frac{\partial (vu)}{\partial y}\right)_{i,j} = \left(\frac{1}{2}+\alpha_v\right)\frac{v^*_{i,j}u_{i,j} - v^*_{i,j-1}u_{i,j-1}}{h} + \left(\frac{1}{2}-\alpha_v\right)\frac{v^*_{i,j+1}u_{i,j+1} - v^*_{i,j}u_{i,j}}{h}, \quad (3.70)$$

$$\left(\frac{\partial v^2}{\partial y}\right)_{i,j} = \left(\frac{1}{2}+\alpha_v\right)\frac{v^*_{i,j}v_{i,j} - v^*_{i,j-1}v_{i,j-1}}{h} + \left(\frac{1}{2}-\alpha_v\right)\frac{v^*_{i,j+1}v_{i,j+1} - v^*_{i,j}v_{i,j}}{h}, \quad (3.71)$$

$$\left(\frac{\partial (uv)}{\partial x}\right)_{i,j} = \left(\frac{1}{2}+\alpha_u\right)\frac{u^*_{i,j}v_{i,j} - u^*_{i-1,j}v_{i-1,j}}{h} + \left(\frac{1}{2}-\alpha_u\right)\frac{u^*_{i+1,j}v_{i+1,j} - u^*_{i,j}v_{i,j}}{h}. \quad (3.72)$$

A substituição das aproximações das derivadas com as respectivas linearizações, Eqs. (3.69)-(3.72), nas Eqs. (3.23) e (3.24), fornecem os seguintes coeficientes, que são os mesmos para as equações de $u$ e $v$:

$$a_{P,e} = -\left(\frac{1}{2}-\alpha_u\right)\frac{u^*_{i+1,j}}{h} + \frac{1}{h^2}, \quad (3.73)$$

$$a_{P,w} = \left(\frac{1}{2}+\alpha_u\right)\frac{u^*_{i-1,j}}{h} + \frac{1}{h^2}, \quad (3.74)$$

$$a_{P,n} = -\left(\frac{1}{2}-\alpha_v\right)\frac{v^*_{i,j+1}}{h} + \frac{1}{h^2}, \quad (3.75)$$

$$a_{P,s} = \left(\frac{1}{2}+\alpha_v\right)\frac{v^*_{i,j-1}}{h} + \frac{1}{h^2}, \quad (3.76)$$

$$a_{P,p} = \frac{2}{h}\left(\alpha_u u^*_{i,j} + \alpha_v v^*_{i,j} + \frac{2}{h}\right). \quad (3.77)$$

Os termos fontes são expressos em função do gradiente de pressão (SHIH et al., 1989), que no caso da componente $v$ surge também o termo $B$. As equações são, portanto,

$$b^u_P = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3.78)$$

$$b_P^v = -\frac{\partial p}{\partial y} - B. \tag{3.79}$$

Os coeficientes dados pelas Eqs. (3.73)-(3.77), juntamente com os termos fontes, Eqs. (3.78) e (3.79), formam dois sistemas de equações algébricas, um para $u$ e outro para $v$, com a forma pentadiagonal, também semelhantes a Eq. (3.55), que são resolvidos para os pontos internos do domínio. Os coeficientes para os contornos são dados pela Eq. (3.58). Os valores de $u$ e $v$ sobre os contornos são obtidos diretamente das soluções analíticas, Eqs. (3.25) e (3.26), e estão representadas na Fig. 15.

### 3.2.5 Resolução dos sistemas de equações

Os sistemas de equações algébricas obtidos para cada um dos modelos matemáticos (Laplace, Navier e Burgers) foram resolvidos com o método *multigrid* geométrico com ciclo V associado ao *solver* MSI. O Algoritmo 2.5.1 descreve o ciclo V completo adotado para resolver um problema envolvendo apenas uma equação, que é o caso da equação de Laplace, cujo sistema discreto foi resolvido utilizando-se os esquemas CS e FAS. Os sistemas de equações algébricas associados as equações de Navier e de Burgers foram resolvidos com a implementação do Algoritmo 2.5.2. Para as equações de Navier utilizou-se os esquemas CS e FAS e para Burgers, somente o FAS. Pinto e Marchi (2006) usaram o método MSI para resolver a equação de Laplace bidimensional e compararam os resultados com o Gauss-Seidel, ambos com os esquemas CS e FAS; eles otimizaram alguns parâmetros do método *multigrid* e concluiram que o método MSI é mais rápido que o método Gauss-Seidel.

Foram realizados testes para a verificação do código computacional, estabelecer tolerância e o critério de parada. O procedimento adotado é o seguinte: na malha mais fina possível e dentro das limitações de memória física computacional, o programa é executado até eliminar o erro de iteração. Nesse ponto, a solução do sistema de equações é gravada em arquivo e considerada como solução exata do sistema. Com a norma média $\bar{l}_1$ do resíduo (FERZIGER e PERIC, 2001), calculado em cada iteração, verificou-se o número de dígitos significativos, sem variar com as iterações (faixa do erro de arredondamento). Com essa verificação obteve-se uma tolerância da ordem de $10^{-12}$ , que é duas ordens de grandeza acima do número de dígitos significativos verificado no erro de arredondamento. Com esse procedimento, a tolerância, portanto, fica definida como $\varepsilon = 10^{-12}$. O mesmo procedimento é usado para gerar a solução exata em todas as malhas mais grossas. Assim,

define-se o critério de parada como

$$\bar{l}_1[E_m(\phi)]_m = \frac{\sum_{i=1}^{N} |(\phi_{m\to\infty} - \phi_m)_i|}{N}, \tag{3.80}$$

onde $\phi_{m\to\infty}$ é a solução exata do sistema de equações, $\phi_m$ é a solução na iteração $m$, $N$ é o número total de pontos da malha, Eq. (3.49), $E_m$ é o erro na iteração $m$, $\bar{l}_1$ denota a norma $l_1$ média do erro na iteração $m$ e $i$ denota o índice do ponto na malha. Com isso, obtém-se menor erro relativo possível em relação à solução verdadeira do sistema de equações algébricas, gerando portanto, maior confiabilidade e qualidade das soluções.

Em todos os problemas adotou-se a estimativa inicial com valor nulo para as variáveis dependentes. O tempo de CPU foi medido usando-se a função TIMEF da biblioteca PORTLIB do FORTRAN 95. A incerteza desta função é aproximadamente de $\pm 0,05$s (PINTO et al., 2005).

### 3.2.6 Equações de Navier-Stokes

#### 3.2.6.1 Formulação Função de Corrente e Vorticidade: $\psi - \omega$

Para discretizar a formulação $\psi - \omega$ utilizou-se aproximações com diferença central de segunda ordem (CDS), como nas Eq. (3.53) e (3.54), nos termos advectivos e difusivos, respectivamente.

A substituição das aproximações das derivadas nas Eqs. (3.37) e (3.39) resulta numa equação algébrica semelhante a Eq. (3.56) para cada uma das funções escalares. Devido a forma como foi escrita esta formulação no presente trabalho, os coeficientes para a função de corrente $\psi$ e vorticidade $\omega$ são os mesmos, e são dados por

$$a_{P,e} = a_{P,w} = a_{P,n} = a_{P,n} = \frac{1}{h^2}, \tag{3.81}$$

$$a_{P,p} = \frac{4}{h^2}. \tag{3.82}$$

Para a função de corrente, Eq. (3.37), o termo fonte é dado por

$$b_P^{\psi} = \omega_P, \tag{3.83}$$

e, para a vorticidade, Eq. (3.39), o termo fonte é dado por

$$b_P^{\omega} = -\frac{Re}{4h^2}\left[(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1})(\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}) - (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})(\omega_{i,j+1} - \psi_{i,j-1})\right]. \tag{3.84}$$

De forma semelhante ao obtido para as equações de Burgers, os coeficientes dados pelas Eqs. (3.81) e (3.82), juntamente com os termos fontes, Eqs. (3.83) e (3.84), formam dois sistemas de equações algébricas pentadiagonais, que são resolvidos para $\psi$ e $\omega$ nos pontos internos do domínio. Os coeficientes nos contornos são dados pela Eq. (3.58).

A função de corrente assume zero, $\psi = 0$, nos contornos do domínio ilustrado na Fig. 13. Para a vorticidade, considera-se que nos contornos o termo $\partial^2\psi/\partial^2 y = 0$ na direção $x$ e o termo $\partial^2\psi/\partial^2 x = 0$ na direção $y$. Então, a discretização da Eq. (3.37) para um ponto qualquer sobre os contornos da Fig. 13, de acordo com a fórmula de Jensen dada pela Eq. (3.42), fornece as seguintes expressões:

Contorno inferior

$$\omega_{i,j} = \frac{7\psi_{i,j} - 8\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j+2}}{2h^2}, \qquad i = 2, \cdots N_x - 1, \quad j = 1. \tag{3.85}$$

Contorno superior

$$\omega_{i,j} = \frac{7\psi_{i,j} - 8\psi_{i,j-1} + \psi_{i,j-2}}{2h^2} - \frac{3}{h}, \qquad i = 1, \cdots N_x, \quad j = N_y. \tag{3.86}$$

Contorno esquerdo

$$\omega_{i,j} = \frac{7\psi_{i,j} - 8\psi_{i+1,j} + \psi_{i+2,j}}{2h^2}, \qquad i = 1, \quad j = 2, \cdots N_y - 1. \tag{3.87}$$

Contorno direito

$$\omega_{i,j} = \frac{7\psi_{i,j} - 8\psi_{i-1,j} + \psi_{i-2,j}}{2h^2}, \qquad i = N_x, \quad j = 2, \cdots N_y - 1. \tag{3.88}$$

No contorno superior da Fig. 13, $u = 1$, por isso aparece o termo $3/h$ na Eq. (3.86).

#### 3.2.6.2 Resolução dos sistemas de equações associados a $\psi$ e $\omega$

Os sistemas de equações algébricas foram resolvidos com o método SOR associado ao método *multigrid* com o esquema FAS e ciclo V. O método SOR é uma variante do

método de Gauss-Seidel; um parâmetro de relaxação é inserido na Eq. (2.2) com o objetivo de amortecimento. Para todos os números de Reynolds adotou-se estimativa inicial zero, $\psi = 0$ e $\omega = 0$. Um ciclo V completo usado para obter uma aproximação numérica para a formulação $\psi - \omega$ está descrito no Algoritmo 2.5.2. As informações foram transferidas entre as malhas, na restrição por injeção, e na prolongação, por interpolação bilinear.

Na primeira iteração externa (ciclo V) a vorticidade é não nula no contorno superior, devido ao aparecimento do termo $3/h$ na Eq. (3.86), e zero nos demais contornos. Nos demais ciclos a vorticidade nos contornos foi atualizada somente na malha mais fina com os valores da função de corrente conhecidos da iteração anterior, Eqs. (3.85)-(3.88). Adotou-se também a razão de engrossamento padrão ($r = 2$). Uma iteração externa ($ite$) é caracterizada por um ciclo V completo, e uma iteração interna ($\sigma$) é uma suavização realizada pelo *solver* SOR. Na malha mais fina foi usado apenas uma iteração interna, isto é, $\sigma = 1$, e não foi necessário utilizar relaxação no processo iterativo da função de corrente.

Em cada iteração interna a nova aproximação da vorticidade foi atualizada usando um fator de relaxação, ou seja,

$$\omega^{(m)} = \theta\bar{\omega}^{(m)} + (1-\theta)\omega^{(m-1)}, \tag{3.89}$$

onde $\bar{\omega}$ denota a iteração de Gauss-Seidel (BURDEN e FAIRES, 2003), e $\theta$ é o parâmetro de relaxação. Quando $\theta = 1$ o método reduz-se ao método Gauss-Seidel. A idéia é escolher um valor para que acelere a taxa de convergência diretamente para a solução.

Um estudo não sistemático foi realizado para determinar o melhor valor do parâmetro de relaxação $\theta$ do *solver* SOR, em relação ao tempo de CPU, para cada malha e cada número de Reynolds. A Tab. 2 mostra os valores obtidos.

Tabela 2: Parâmetros de relaxação do método SOR usados no sistema de equações da vorticidade.

| | $Re$ | | |
|---|---|---|---|
| Malha | 100 | 400 | 1000 |
| $65 \times 65$ | 0,8 | 0,1 | 0,02 |
| $129 \times 129$ | 0,8 | 0,3 | 0,1 |
| $257 \times 257$ | 0,8 | 0,8 | 0,3 |
| $513 \times 513$ | 0,8 | 0,8 | 0,7 |
| $1025 \times 1025$ | 0,8 | 0,8 | 0,8 |

Para monitorar o processo iterativo, utilizou-se como critério de convergência para

as iterações externas (um ciclo V) a razão entre a norma infinito $\|.\|_\infty$ do resíduo na iteração $m$ e a norma infinito do resíduo na primeira iteração, considerando o máximo entre as duas variáveis, onde o resíduo em cada ponto foi calculado com a Eq. (2.12). Ferziger e Peric (2001) sugerem o monitoramento do processo iterativo comparando com a norma $L_1$ do resíduo na estimativa inicial, contudo, neste trabalho optou-se pela norma do resíduo da primeira iteração. Assim, o processo iterativo foi interrompido quando

$$\max\left(\frac{||R_\psi^m||_\infty}{||R_\psi^1||_\infty}, \frac{||R_\omega^m||_\infty}{||R_\omega^1||_\infty}\right) \leq 10^{-7}, \tag{3.90}$$

onde $R^m$ indica o resíduo na iteração $m$, $R^1$ indica o resíduo na primeira iteração e o subescrito indica a variável. As equações da função de corrente, Eq. (3.37), e da vorticidade, Eq. (3.39), não estão explicitamente acopladas com as velocidades, assim, $u$ e $v$ foram calculadas no pós-processamento com o método TDMA (*Tri-Diagonal Matrix Algorithm*) (TANNEHILL et al., 1997), cujas condições de contornos para estas variáveis estão especificadas na Fig. 13.

#### 3.2.6.3 Formulação Função de Corrente e Velocidade: $\psi - \mathbf{v}$

A Eq. (3.48) pode ser discretizada com a abordagem tradicional em uma malha uniforme usando aproximações de 13 pontos e erro de truncamento de segunda ordem (CDS), ou seja, o ponto central $P$ da Fig. 16, representado por $(x_i, y_j)$, seria, neste caso, conectado com 12 pontos vizinhos. Esta abordagem resulta em um sistema de equações algébricas com 13 diagonais. Porém, além de ajustes necessários próximos aos pontos dos contornos, a resolução com métodos diretos do sistema de equações lineares resultante está limitado a moderados valores de $h$ (GUPTA e MANOHAR, 1979) e com métodos iterativos básicos converge lentamente ou diverge (GUPTA e KALITA, 2005).

No presente trabalho, a discretização da Eq. (3.48) é realizada com um esquema de Diferenças Finitas Compacto que conecta o ponto $P$ com oito pontos vizinhos e tem erro de truncamento de segunda ordem, a mesma metodologia usada por Gupta e Kalita (2005). A Fig. 16 mostra um ponto $(x_i, y_j)$ da malha e os oito vizinhos relativos a esse ponto.

A equação discreta resultante para os pontos internos ao domínio pode ser escrita

como

$$\psi_{i-1,j-1} - 8\psi_{i,j-1} + \psi_{i+1,j-1} - 8\psi_{i-1,j} + 28\psi_{i,j} - 8\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j+1} - 8\psi_{i,j+1} + \psi_{i+1,j+1} = 3h(u_{i,j-1} + u_{i,j+1} + v_{i+1,j} + v_{i-1,j}) + \frac{Reh^2}{2}\{v_{i,j}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) - u_{i,j}(v_{i+1,j} + v_{i-1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1})\}. \quad (3.91)$$

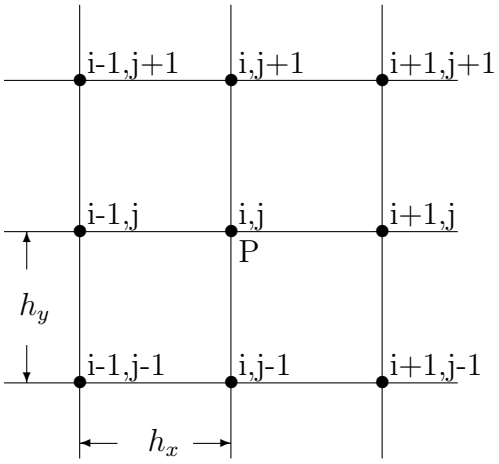



Figura 16: Ponto $i, j$ e seus oito vizinhos mais próximos.

O sistema de equações algébricas associado a Eq. (3.91) pode ser escrito na forma da Eq. (3.55), neste caso, envolvendo nove pontos resultando na seguinte expressão

$$a_{P,sw}\psi_{i-1,j-1} + a_{P,s}\psi_{i,j-1} + a_{P,se}\psi_{i+1,j-1} + a_{P,w}\psi_{i-1,j} + a_{P,p}\psi_{i,j} + a_{P,e}\psi_{i+1,j} + a_{P,nw}\psi_{i-1,j+1} + a_{P,n}\psi_{i,j+1} + a_{P,ne}\psi_{i+1,j+1} = b_P^{\psi}, \quad (3.92)$$

em que os coeficientes são dados por

$$\begin{aligned} a_{P,e} &= a_{P,w} = a_{P,n} = a_{P,s} = -8, \\ a_{P,ne} &= a_{P,se} = a_{P,nw} = a_{P,sw} = 1, \\ a_{P,p} &= 28. \end{aligned} \quad (3.93)$$

A expressão resultante para o termo fonte é

$$b_p^{\psi} = 3h(u_{i,j-1} + u_{i,j+1} + v_{i+1,j} + v_{i-1,j}) + \frac{Reh^2}{2}\{v_{i,j}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) - u_{i,j}(v_{i+1,j} + v_{i-1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1})\}. \quad (3.94)$$

Os coeficientes $a_{P,ne}$, $a_{P,se}$, $a_{P,nw}$ e $a_{P,sw}$, Eq. (3.92), conectam o ponto $P$ aos seus vizinhos noroeste, nordeste, sudeste e sudoeste, respectivamente.

Os coeficientes dados pela Eq. (3.93), com o respectivo termo fonte, Eq. (3.94), formam um sistema de equações com nove diagonais que é resolvido para os pontos no interior do domínio. Os valores da função de corrente nos contornos são definidos como nulos, $\psi = 0$.

As componentes de velocidade foram aproximadas com um esquema de Diferenças Finitas Compacto de quarta ordem (LELE, 1992; TANNEHILL et al., 1997). A aproximação para a componente $u$ é dada a seguir. Nota-se que derivando duas vezes em relação a $y$, a Eq. (3.34) fornece

$$\frac{\partial \psi^2}{\partial y^2} = \frac{\partial \psi^3}{\partial y^3}. \tag{3.95}$$

Por outro lado, aplicando aproximação de segunda ordem na Eq. (3.34) em torno de um ponto qualquer $i, j$, pode-se escrever

$$u_{i,j} = \frac{\psi_{i,j+1} - \psi i, j-1}{2h} - \frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + O(h^4), \tag{3.96}$$

que, substituindo o termo $\partial^3\psi/\partial y^3$ por $\partial^2\psi/\partial y^2$, na Eq. (3.96), e fazendo aproximação central de segunda ordem, resulta em

$$u_{i,j} = \frac{\psi_{i,j+1} - \psi i, j-1}{2h} - \frac{h^2}{6}\left(\frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{h^2}\right) + O(h^4). \tag{3.97}$$

Simplificando o termo $h^2$ e com as devidas manipulações algébricas, obtém-se a equação discreta para a componente $u$ com erro de truncamento de quarta ordem $O(h^4)$, que é dada por

$$u_{i,j-1} + 4u_{i,j} + u_{i,j+1} = \frac{3}{h}(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}). \tag{3.98}$$

Para a componente $v$ o procedimento é análogo, cuja equação discreta resultante é dada por

$$v_{i-1,j} + 4v_{i,j} + v_{i+1,j} = -\frac{3}{h}(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}). \tag{3.99}$$

As condições de contornos das velocidades estão especificadas na Fig. 13.

#### 3.2.6.4 Resolução do sistema de equações associado a $\psi$

O procedimento usado para obter a solução numérica da função de corrente $\psi$ é semelhante ao descrito na seção 3.2.6.2. Entretanto, como pode ser observado nas equações discretas, nesta formulação tem-se apenas uma equação para ser resolvida iterativamente com o método *multigrid*. Assim, as componentes de velocidade estão fora do processo iterativo, sendo atualizadas somente na malha mais fina com a resolução dos dois sistemas tri-diagonais dados pelas Eqs. (3.98) e (3.99), utilizando-se o método TDMA.

Alguns testes foram realizados e verificou-se que os melhores resultados, em termos de tempo de CPU, foram obtidos com $\sigma = 1$, na malha mais fina, e $\sigma = 20$ na malha mais grossa. Um ciclo V completo usado para obter uma aproximação numérica para a função de corrente está descrito no Algoritmo 2.5.1. Em cada iteração interna a nova aproximação de $\psi$ foi atualizada usando um fator de relaxação como na Eq. (3.89). A Tab. 3 mostra os valores de $\theta$ no método SOR utilizados nas simulações com os três números de Reynolds analisados com o *multigrid*.

Tabela 3: Parâmetros de relaxação do método SOR usados no sistema de equações da formulação $\psi - \mathbf{v}$.

| | *Re* | | |
|---|---|---|---|
| Malha | 100 | 400 | 1000 |
| $65 \times 65$ | 1,3 | 1,3 | 0,001 |
| $129 \times 129$ | 1,3 | 1,3 | 1,3 |
| $257 \times 257$ | 1,3 | 1,3 | 1,3 |
| $513 \times 513$ | 1,3 | 1,3 | 1,3 |
| $1025 \times 1025$ | 1,3 | 1,3 | 1,3 |

Nesta formulação as informações foram transferidas na restrição por ponderação completa, Eq. (2.22), e na prolongação, interpolação bilinear, Eq. (2.24). A restrição por injeção divergiu, em todos os testes. Outro detalhe observado foi que os métodos Gauss-Seidel e MSI são extremamente lentos ou divergem com esta formulação, principalmente para altos número de Reynolds.

Seguindo a mesma metodologia da formulação $\psi - \omega$, para monitorar o processo iterativo, utilizou-se como critério de convergência para as iterações externas (ciclo V) a razão entre a norma infinita do resíduo na iteração $m$ e a norma infinita da primeira iteração, onde o resíduo em cada ponto da malha foi calculado com a Eq. (2.12). Portanto,

o processo iterativo foi interrompido quando

$$\frac{\|R^m\|_\infty}{\|R^1\|_\infty} \leq 10^{-7}, \tag{3.100}$$

onde o sobrescrito $m$ indica a iteração, sendo $R^1$ o resíduo na primeira iteração.ES

## 3.3 DETALHES DA IMPLEMTAÇÃO COMPUTACIONAL

Os algoritmos *multigrid* descritos na seção 2.5 foram implementados na linguagem FORTRAN/95 com o software Compaq Visual FORTRAN 6.6. Todas as simulações foram realizados no microcomputador do LENA 1 (Laboratório de Experimentação Numérica - UFPR) que possui Processador Intel Core 2 Duo com 2.66 GHz e 8 GB RAM, usando aritmética de dupla precisão em sistema operacional Windows XP de 32 Bits. Os códigos computacionais foram desenvolvidos para malhas estruturadas, cartesianas e uniformes nas duas direções. As soluções numéricas foram obtidas em regime permanente e em geometrias simples.

A memória computacional utilizada na resolução dos problemas testes foi monitorada através do gerenciador de tarefas do Windows, acessado durante a execução do processo iterativo. Todas as simulações nas malhas finas foram efetivadas sem a necessidade do uso de memórial virtual. O tempo de CPU foi medido usando-se a função TIMEF da biblioteca PORTLIB do FORTRAN/95, e corresponde ao tempo gasto para realizar a geração de malhas, atribuição da estimativa inicial, cálculo dos coeficientes, resolução dos sistemas de equações e verificação da convergência. Pinto et al. (2005) verificaram com diversos testes que a incerteza da função TIMEF é de aproximadamente $\pm 0,05$ segundos.

Para cada problema modelo foi escrito um código computacional e compilado na versão release, projeto tipo Console Application. Portanto, os seguintes programas computacionais geraram resultados para esta pesquisa:

- **LaplaceCS.exe e LaplaceFAS.exe**
  Resolve a equação de Laplace com os métodos *singlegrid* e *multigrid*, com os esquemas CS e FAS.
- **TECS.exe e TEFAS.exe**
  Resolve as equações de Navier (termoelasticidade) com os métodos *singlegrid* e *multigrid*, usando os esquemas CS e FAS.

- **Burgers.exe**
  Resolve as equações de Burgers (escoamento) com o método *singlegrid* e *multigrid*, usando o esquema FAS.
- **NSFCV.exe**
  Resolve as equações de Navier-Stokes na formulação $\psi - \mathbf{v}$ com o método *singlegrid* e *multigrid*, usando o esquema FAS.
- **NSFCW.exe**
  Resolve as equações de Navier-Stokes na formulação $\psi - \omega$ com o método *singlegrid* e *multigrid*, usando o esquema FAS.

As principais entradas dos programas computacionais são:

- Número de pontos da malha mais grossa;
- Número de níveis de malha ($L$);
- Número de iterações internas do solver ($\sigma$);
- Tolerância ($\varepsilon$);
- Número máximo de ciclos do *multigrid* (iterações externas - *ite*);
- Número de Reynolds $Re$ (NSFCV.exe e NSFCW.exe).

## 3.4 RESUMO DO CAPÍTULO 3

Neste capítulo foram apresentados com detalhes os cinco modelos matemáticos e as respectivas condições de contornos. As equações de Navier-Stokes foram apresentadas nas formulações em variáveis primitivas ($p - \mathbf{v}$), função de corrente e velocidade ($\psi - \mathbf{v}$) e função de corrente e vorticidade ($\psi - \omega$). Estas equações serão resolvidas com o método *multigrid* com as formulaçoes alternativas dentro de uma cavidade quadrada, chamada de problema teste, cuja configuração também foi apresentada. Foram apresentados também os modelos numéricos que consistem basicamente da discretização das equações, *solvers*, tolerância, critério de parada e a metodologia usada para o *multigrid*. Alguns detalhes sobre a implementação computacional também foram mencionados. No próximo capítulo verifica-se a consistência das soluções numéricas geradas pelos códigos computacionais.

# 4 VERIFICAÇÃO DAS SOLUÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo verifica-se a acurácia das soluções numéricas. A equação de Laplace, equações de Navier e de Burgers têm soluções analíticas, cujas equações e as respectivas condições de contornos foram especificadas na seção 3.1. No caso das equações de Navier-Stokes, cujas soluções analíticas não são conhecidas, as comparações foram feitas com soluções numéricas obtidas da literatura. Todas as soluções numéricas deste trabalho usadas para comparação foram obtidas com o método *multigrid*.

De acordo com Marchi (2001), o objetivo da verificação é determinar em que medida um modelo matemático é resolvido adequadamente através de um método numérico. Além de comparações, com tabelas e gráficos apropriados, verifica-se também se a ordem efetiva ($p_E$) do erro de discretização tende a ordem assintótica ($p_L$) à medida que a malha é refinada. Em teoria espera-se que $p_E \longrightarrow p_L = 2$ quando o espaçamento da malha é reduzido.

Como definido por Ferziger e Peric (2001) e Marchi (2001), o erro de truncamento ($\epsilon_\tau$) de uma equação diferencial é o resíduo que resulta quando se substitui a solução analítica exata da variável dependente ($\phi$) na equação discretizada do modelo matemático. Em Marchi (2001) pode ser encontrado uma demonstração do erro de truncamento com base em um exemplo.

Quando o erro da solução numérica é provocado apenas por erros de truncamento, a diferença entre a solução analítica exata ($\Phi$) de uma variável e a sua solução numérica ($\phi$) é denominada erro de discretização (FERZIGER e PERIC, 2001), ou erro numérico ($E_h$), definido por

$$E_h(\phi) = \Phi - \phi, \tag{4.1}$$

Marchi (2001) define a ordem efetiva ($p_E$) como a inclinação local da curva do erro de discretização $E_h$ da solução numérica da variável de interesse ($\phi$) *versus* o tamanho ($h$) dos elementos da malha num gráfico logarítmico. O cálculo de $p_E$ permite verificar, *a posteriori* das soluções numéricas, se à medida em que $h$ é reduzido a ordem do erro de discretização das soluções numéricas tende à ordem assintótica dos erros de truncamento, que é um resultado teórico, obtido *a priori* das soluções numéricas.

Quando a solução analítica do problema é conhecida, pode-se determinar a ordem efetiva do erro ($p_E$) utilizando-se a solução analítica e duas soluções numéricas. Portanto,

para duas malhas diferentes, com elementos $h_1$ na malha fina, $h_2$ na malha grossa e $h_2 = 2h_1$, a ordem efetiva do erro de discretização é dada por

$$p_E = \frac{\log\left(\dfrac{\Phi - \phi_2}{\Phi - \phi_1}\right)}{\log(q)}, \tag{4.2}$$

onde $q$ é a razão de refino entre as malhas (aqui, $q = h_2/h_1 = 2$), $\phi_1$ e $\phi_2$ são soluções numéricas de duas malhas e $\Phi$ é solução analítica exata. O valor de $p_E$ representa a inclinação média da curva do erro de discretização, *versus* $h$, entre $h_1$ e $h_2$.

Para os casos em que a solução analítica é desconhecida, verifica-se a ordem assintótica do erro de truncamento utilizando-se a ordem aparente ($p_U$), que é definida (MARCHI, 2001) como

$$p_U = \frac{\log\left(\dfrac{\phi_2 - \phi_3}{\phi_1 - \phi_2}\right)}{\log(q)}. \tag{4.3}$$

Nota-se que para obter a ordem aparente são necessárias três soluções numéricas, $\phi_1$, $\phi_2$ e $\phi_3$, obtidas em três diferentes malhas com elementos de tamanhos, $h_1$, $h_2$ e $h_3$ e com razão de refino $q = h_2/h_1 = h_3/h_2 = 2$.

O cálculo de $p_U$ permite verificar na prática, isto é, a *posteriori* das soluções numéricas, se à medida que $h$ é reduzido, a ordem de incerteza[1] das soluções numéricas tende à ordem assintótica dos erros de truncamento, ordem esta que é um resultado teórico, obtido a *priori* das soluções numéricas. Teoricamente espera-se que $p_U \longrightarrow p_L$ quando $h \longrightarrow 0$. Em Marchi (2001) encontra-se informações detalhadas sobre erros de truncamento, ordens efetiva e aparente.

## 4.1 EQUAÇÃO DE LAPLACE, EQUAÇÕES DE NAVIER E DE BURGERS

As análises para estes modelos matemáticos foram baseadas em malhas intermediárias e malhas finas. A distribuição do erro é mostrada em malhas com $65 \times 65$ pontos; as isolinhas são comparadas em malhas com $129 \times 129$; a queda do erro de discretização e as ordens efetiva e aparente são verificadas em malhas que vão desde $N = 5 \times 5$ até

[1] A incerteza da solução numérica é calculada pela diferença entre a solução analítica estimada ($\phi_\infty$) para a variável de interesse e a sua solução numérica ($\phi$) (ROACHE, 1994).

$1025 \times 1025$ pontos. Em todos os casos as soluções foram obtidas com o método *multi-grid* e sem erros de iteração, ou seja, o processo iterativo foi executado até atingir o erro devido a precisão da máquina. Para estes modelos as respectivas soluções analíticas são conhecidas, portanto, o erro numérico é avaliado usando a Eq. (4.1), isto é, pela diferença entre a solução analítica exata em um dado ponto do domínio e a solução numérica (sem erro de iteração) neste mesmo ponto.

### 4.1.1 Equação de Laplace

A equação de Laplace, Eq. (3.1), possui solução analítica dada pela Eq. (3.5). Neste caso a magnitude do erro mantém-se abaixo de $10^{-15}$ em qualquer malha. Isso ocorre porque no caso da Eq. (3.1), com as condições de contornos dadas pelas Eqs. (3.2) e (3.4), a aproximação numérica das derivadas com esquema de segunda ordem (CDS) não produz erro de discretização. O único erro presente na solução numérica é o erro inerente a precisão da máquina (nível de erro de arredondamento). A Fig. 17 mostra a distribuição deste erro, onde pode-se confirmar a oscilação entre 0 e $10^{-16}$.

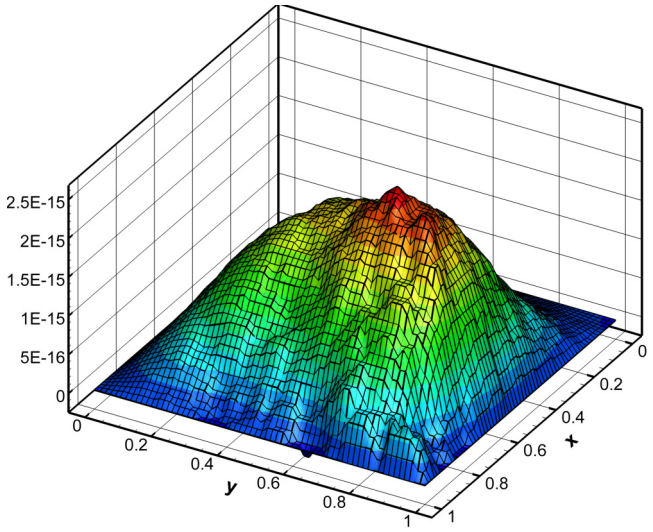
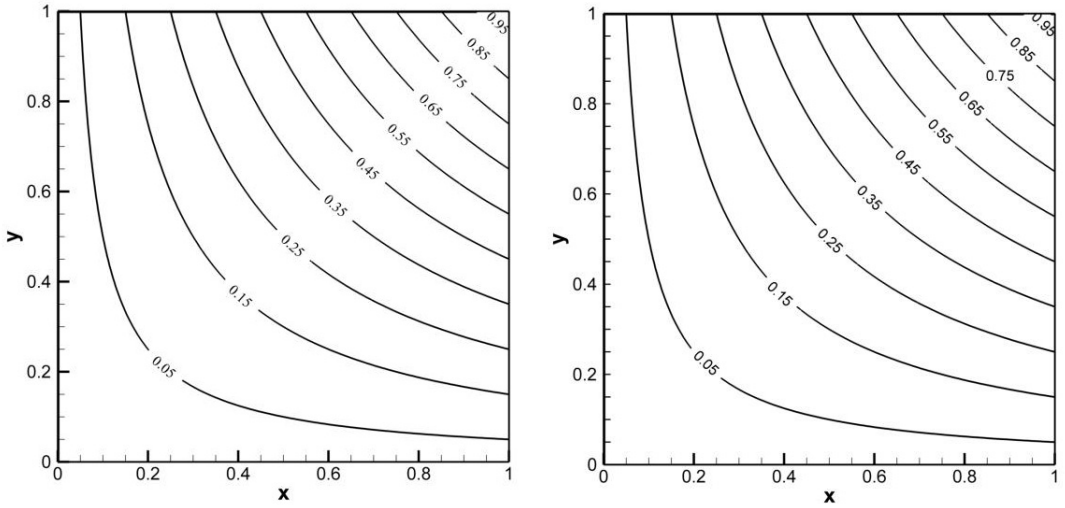



Figura 17: Distribuição do erro numérico da equação de Laplace numa malha com $65 \times 65$ pontos.

A Fig. 18 mostra as isolinhas das soluções, em que na Fig. 18a tem-se a numérica e, Fig. 18b a analítica. Estas figuras podem ser usadas para comparação no padrão das curvas, onde se percebe nitidamente uma ótima correspondência entre as isolinhas da solução numérica e analítica.

A ordem efetiva do erro de discretização da equação de Laplace linear não apresenta




(a) Isolinhas (numérica) (b) Isolinhas (analítica)

Figura 18: Isolinhas das soluções numérica e analítica da equação de Laplace na malha $129 \times 129$ pontos.

um comportamento padrão devido a ausência do erro de discretização. Na Fig. 19 observa-se que o erro apresenta uma oscilação não comum à medida que a malha é refinada. Este comportamento é devido a influência dos erros de arredondamento, uma vez que a equação de Laplace linear não apresenta erros de discretização. Os pontos que não aparecem na figura são porque o erro numérico é nulo.

Para uma visualização mais detalhada, na Tab. 12 do apêndice A.1 estão mostrados a solução numérica $T$, a solução analítica $T_a$ e o erro numérico $E_h$, ambas extraídas da linha vertical que passa pelo centro do domínio, na malha $65 \times 65$, onde pode ser verificado a precisão da solução numérica para a equação de Laplace linear em cada ponto.

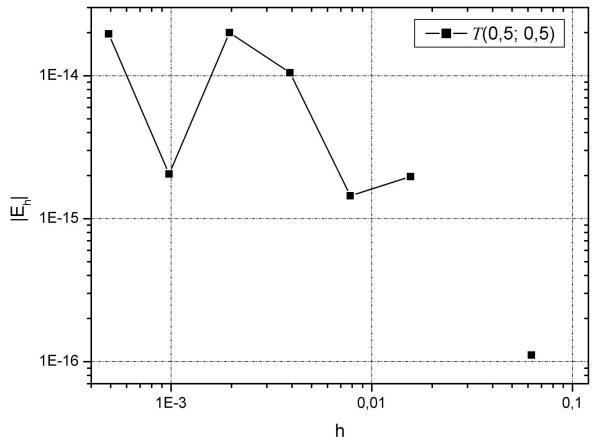
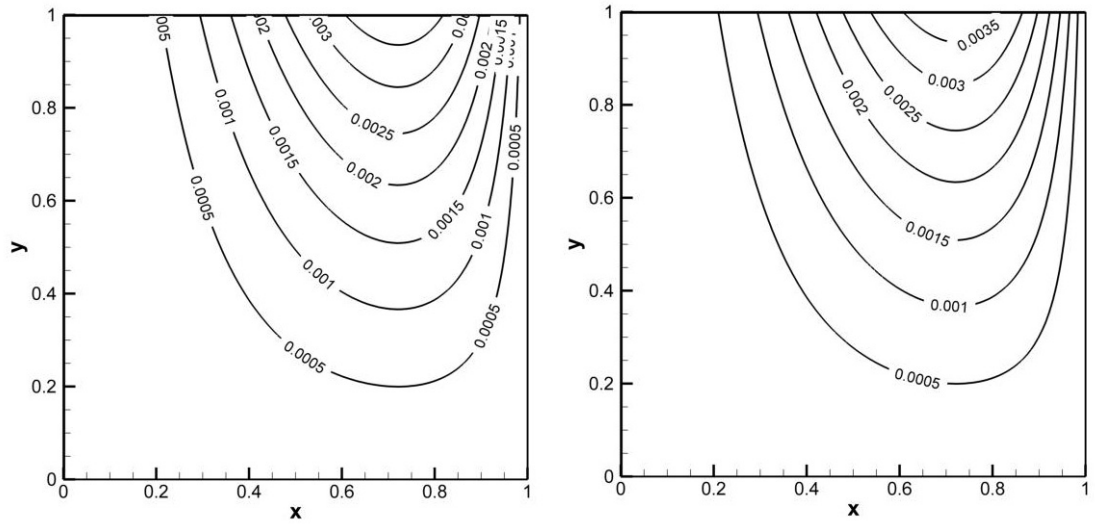



Figura 19: Comportamento do erro numérico para a equação de Laplace no ponto central com o refino da malha.

### 4.1.2 Equações de Navier

Para as equações de Navier, Eqs. (3.6) e (3.7), propôs-se uma solução analítica que é dada pelas Eqs. (3.11) e (3.12). A Fig. 20 mostra as isolinhas da componente do deslocamento $u$ da solução numérica Fig. 20a, e analítica Fig. 20b. Pode-se notar que as isolinhas da solução numérica e analítica exibem o mesmo padrão, inclusive próximo aos contornos, o que mostra uma ótima coerência entre as duas soluções.



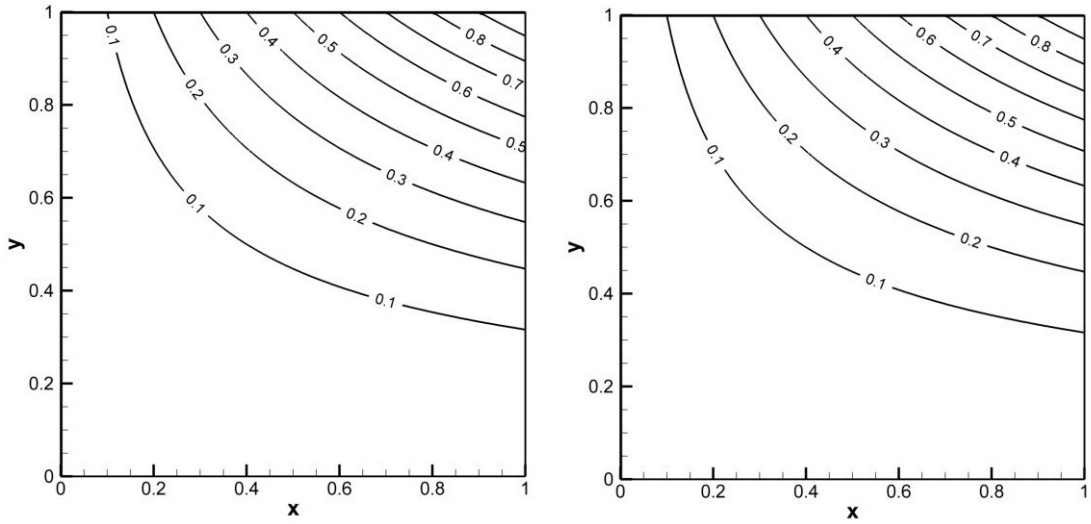

(a) Isolinhas (numérica) (b) Isolinhas (analítica)

Figura 20: Isolinhas da componente $u$ obtidos com as equações de Navier numa malha com $129 \times 129$ pontos.

O mesmo pode ser percebido nas isolinhas de $v$ da solução numérica e analítica que estão mostradas na Fig. 21, em que a Fig. 21a, mostra as isolinhas do deslocamento da solução numérica, e a Fig. 21b, o da analítica.

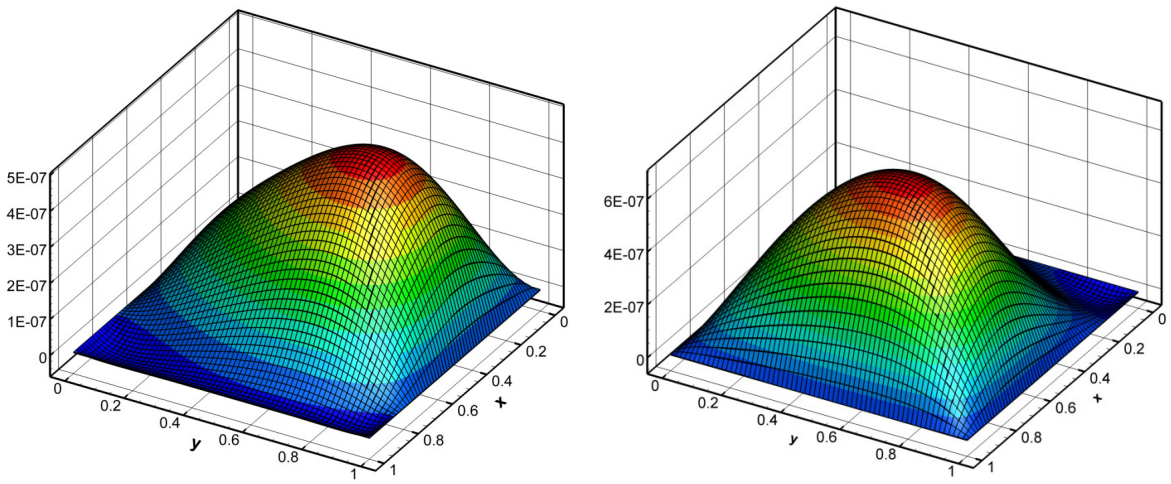
A Fig. 22 mostra a distribuição do erro numérico no domínio de cálculo. A Fig. 22a ilustra a distribuição do erro da componente $u$ e a Fig. 22b, da componente $v$. Tanto em $u$ quanto em $v$, o erro numérico na malha $65 \times 65$ é da ordem de $10^{-7}$, como pode-se verificar também na Tab. 13, do apêndice A; isto indica que a solução numérica tem precisão de seis dígitos nessa malha.

A ordem efetiva $p_E$ do erro de discretização, e o comportamento do erro numérico quando $h \to 0$, para a componente $u$ no ponto central estão mostrados na Fig. 23. No caso da componente $v$ o esquema CDS não produz erro de discretização, como o caso da equação de Laplace linear, neste caso, não são necessárias a presente análise. Observa-se na Fig. 23a que a ordem efetiva aproxima-se da ordem teórica (2) inclusive nas malhas mais




(a) Isolinhas (numérica) (b) Isolinhas (analítica)

Figura 21: Isolinhas da componente $v$ das equações de Navier numa malha com $129 \times 129$ pontos.

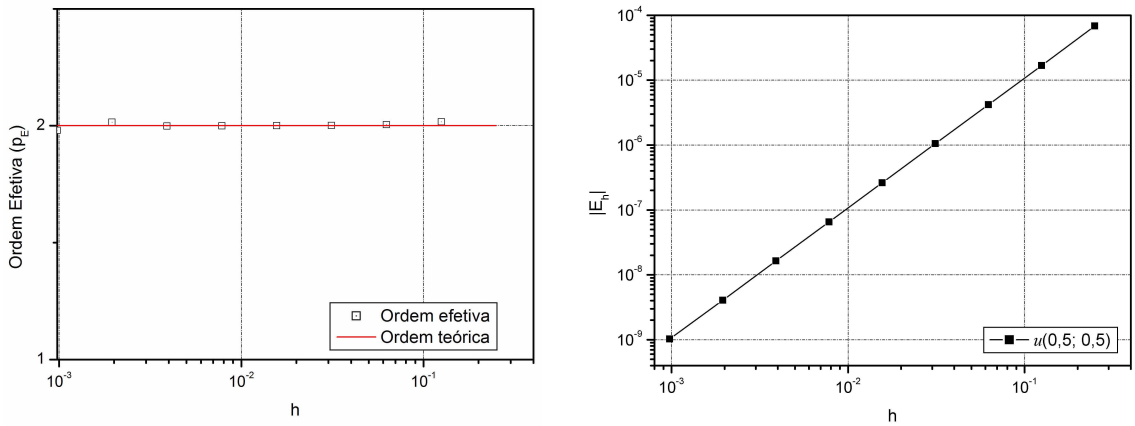



(a) Erro numérico $u$ (b) Erro numérico $v$

Figura 22: Distribuição do erro de discretização das equações de Navier no domínio de cálculo numa malha com $65 \times 65$ pontos.

grossas. Na Fig. 23b nota-se que o erro de discretização é reduzido proporcionalmente com a diminuição de $h$, como o esperado.

As soluções numérica, analítica exata e o erro numérico, nas linhas horizontal e vertical que passam pelo centro do domínio, para $u$ e $v$, respectivamente, nas malhas $65 \times 65$ e $1025 \times 1025$, estão nas Tabs. 13 e 14 do apêndice A.2.

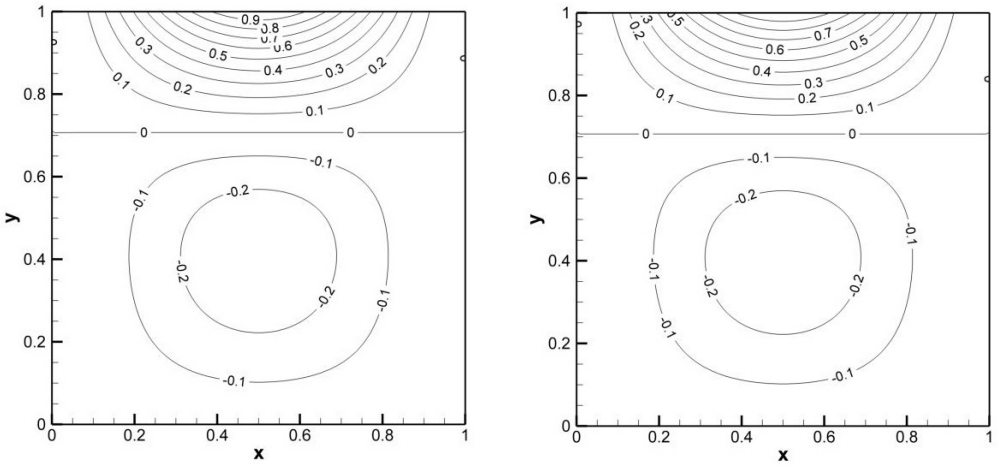



(a) Ordem efetiva de $u$ (b) Queda do erro de discretização de $u$

Figura 23: Ordem efetiva $p_E(h)$ do erro de discretização e o comportamento do erro numérico $E_h$ da componente $u$ nas equações de Navier.

### 4.1.3 Equações de Burgers

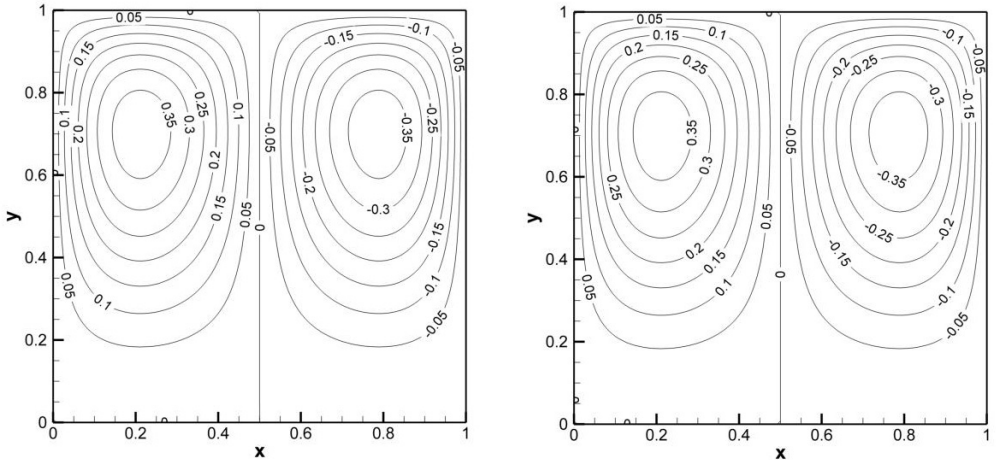
As equações de Burgers, Eqs. (3.23) e (3.24), possuem solução analítica dada pelas Eqs. (3.25) e (3.26). As linhas de isovelocidades das soluções numérica e analítica estão mostradas nas Figs. 24 e 25. As Figs. 24a e 24b mostram as isovelocidades numérica e analítica de $u$, e as Figs. 25a e 25b, as isovelocidades numérica e analítica de $v$. As linhas das isovelocidades nas respectivas figuras mostram que as curvas exibem uma ótima concordância.




(a) Isovelocidade $u$ (numérica). (b) Isovelocidade $u$ (analítica).

Figura 24: Isovelocidades numérica e analítica de $u$ das equações de Burgers numa malha com $129 \times 129$ pontos.

A Fig. 26 mostra a distribuição do erro numérico no domínio de cálculo. A Fig. 26a ilustra a distribuição do erro da velocidade $u$ e a Fig. 26b da velocidade $v$. Nota-se

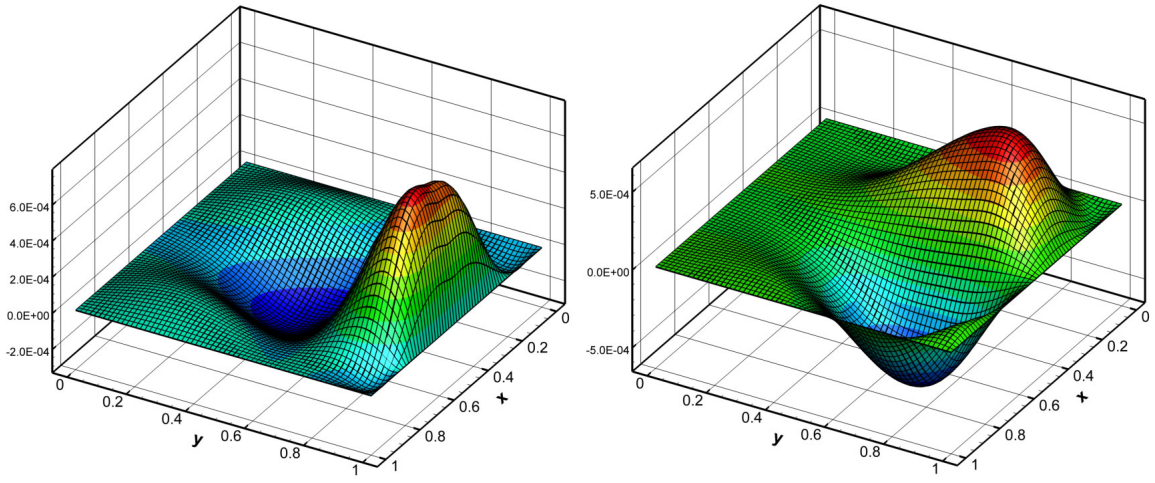



(a) Isovelocidade $v$ (numérica). (b) Isovelocidade $v$ (analítica).

Figura 25: Isovelocidades numérica e analítica das componentes da velocidade das equações de Burgers numa malha com $129 \times 129$ pontos.

nestes gráficos que os erros numéricos são da ordem de $10^{-4}$ e distribuem-se no domínio de forma semelhante. Nessa malha a solução numérica tem precisão de três dígitos.

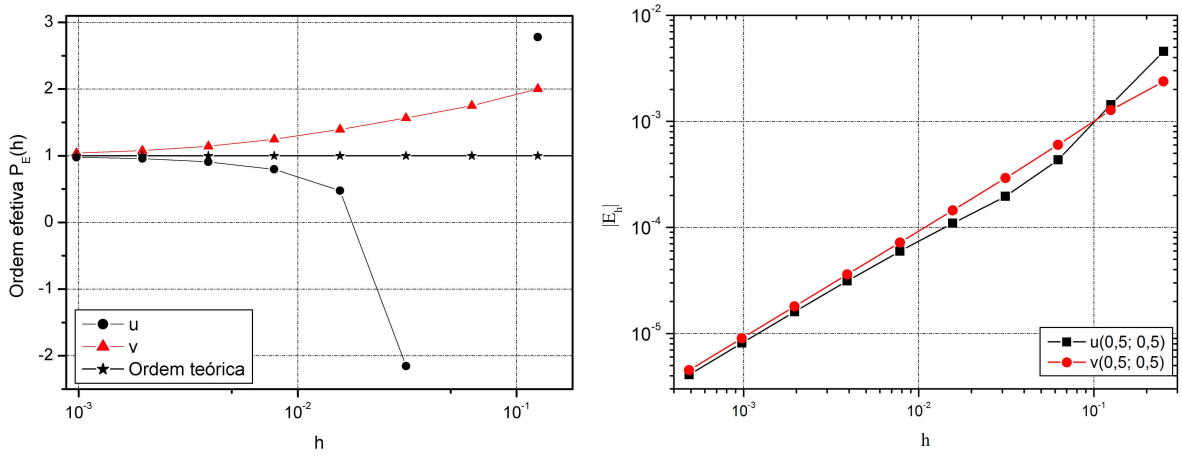
Deve-se ressaltar que nas Eqs. (3.23) e (3.24), os termos advectivos foram aproximados com um esquema que possui precisão de primeira ordem $O(h)$, Eq. (3.52), e os termos difusivos com esquema de segunda ordem $O(h^2)$, Eq. (3.54). Ferziger e Peric (2001) afirmam que o primeiro termo truncado na série de Taylor é geralmente a principal fonte de erro.




(a) Erro numérico de $u$. (b) Erro numérico de $v$.

Figura 26: Distribuição do erro numérico das equações de Burgers no domínio de cálculo numa malha com $65 \times 65$ pontos.

A ordem efetiva $p_E$ do erro de discretização, e a queda do erro de discretização quando $h \to 0$, para as velocidades $u$ e $v$, estão mostrados na Fig. 27. Na Fig. 27a observa-se que a ordens efetivas dos erros, das duas variáveis, aproximam-se da ordem




(a) Ordem efetiva de $u$ e $v$ (b) Queda do erro de discretização de $u$ e $v$

Figura 27: Ordem efetiva $p_E$ e queda do erro de discretização $E_h$ das componentes $u$ e $v$ com as equações de Burgers. O símbolo estrela, Fig. 27a, representa a ordem verdadeira.

teórica por cima e por baixo quando a malha é refinada. O erro de discretização, como pode ser observado na Fig. 27b, é reduzido proporcionalmente à medida que $h \longrightarrow 0$, como o esperado.

Nas Tabs. 15 e 16 do apêndice A.3 encontram-se a solução numérica, a solução analítica exata, e o erro numérico, nas linhas horizontal e vertical, que passam pelo centro do domínio, para as velocidades $u$ e $v$ nas malhas $65 \times 65$ e $1025 \times 1025$, respectivamente.

## 4.2 EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Para o problema de escoamento de fluido incompressível dentro da cavidade, as soluções numéricas são confrontadas com soluções encontradas na literatura. As verificações são feitas com números de Reynolds 100, 400, 1000 e 5000, cujas soluções foram obtidas com o método *multigrid*. A escolha destes números de Reynolds deve-se ao fato de ser encontradas soluções com maior facilidade na literatura. As comparações são feitas utilizando-se as principais variáveis envolvidas no modelo matemático, ou seja, função de corrente, vorticidade e velocidade. Para este problema a solução analítica não está disponível, por isso, verifica-se a ordem aparente ($p_U$) do erro de discretização (MARCHI, 2001) utilizando-se $Re = 100$. Mostra-se também os perfis das componentes de velocidade e as linhas de contorno da função de corrente e vorticidade.

Diversos autores como Erturk et al. (2005), Zhang (2003), Gupta e Kalita (2005), entre outros, estabelecem o trabalho de Ghia et al. (1982) como parâmetro de referência

para métodos que procuram simular o escoamento em uma cavidade quadrada com diversos números de Reynolds. Para efeito de comparação das soluções numéricas obtidas aqui com o método *multigrid*, procurou-se confrontar os perfis de velocidade ao longo das linhas que passam pelos centros geométricos da cavidade com as soluções obtidos por Ghia et al. (1982) e também com uma referência mais recente (MARCHI et al., 2009).

### 4.2.1 Função de Corrente e Velocidade: $\psi - \mathbf{v}$

Um esquema de diferenças finitas com aproximações de segunda ordem $O(h^2)$ foi usado para discretizar a Eq. (3.48). A ordem $p_U$ do erro de discretização quando $h \to 0$, para a função de corrente $\psi$ e velocidades $u$ e $v$, estão mostradas na Fig. 28. Observa-se que o comportamento obtido para a ordem aparente dos erros de discretização das três variáveis analisadas é o esperado, isto é, aproximam-se da ordem teórica $p_L = 2$, que é a ordem do esquema usado, à medida em que a malha é refinada.

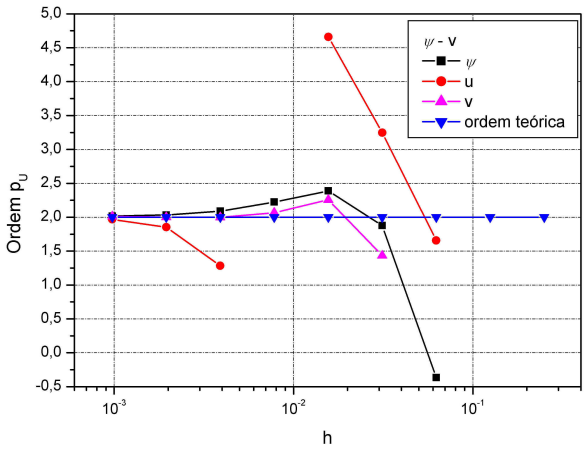


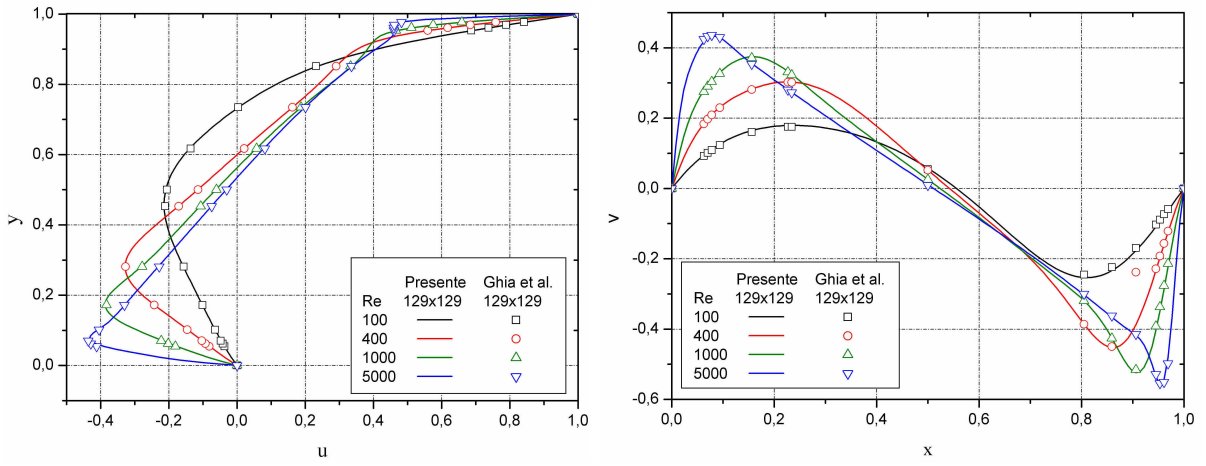

Figura 28: Ordem aparente $p_U$ do erro de discretização da formulação $\psi - \mathbf{v}$ com $Re = 100$ no ponto central.

Na formulação $\psi - \mathbf{v}$ adotou-se uma malha com $129 \times 129$ pontos para avaliar os perfis de velocidade no interior da cavidade. As comparações são realizadas com as soluções de Ghia et al. (1982) em uma malha com $129 \times 129$ pontos e com as soluções em uma malha com $1024 \times 1024$ volumes apresentados por Marchi et al. (2009). Todos os pontos dos perfis de $u$ e $v$ foram plotados para facilitar as comparações com as soluções de referências.

A comparação com Ghia et al. (1982) está ilustrado na Fig. 29, em que nas Figs. 29a e 29b apresentam-se os perfis de $u$ e $v$ ao longo das linhas horizontal e vertical, respectivamente, que passam pelo centro de cavidade em uma malha com $129 \times 129$

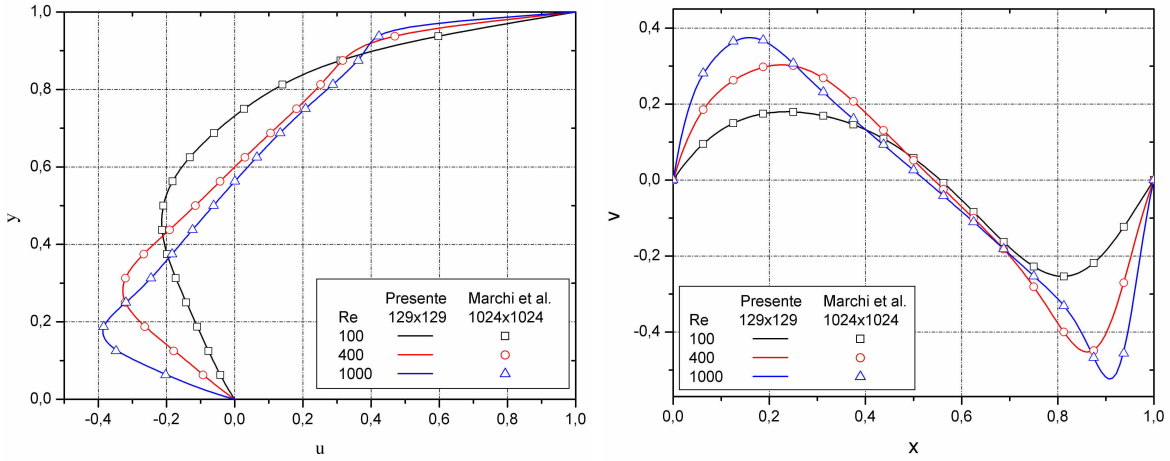
pontos.

Como pode ser verificado nestas figuras, as curvas indicam que existe uma excelente concordância com os resultados de Ghia et al. (1982), tanto na componente $u$ quanto em $v$, em todos os números de Reynods. Próximos aos contornos, que normalmente os métodos numéricos apresentam oscilações numéricas no problema da cavidade, as curvas mostram também uma excelente concordância.




(a) Perfil de $u$ (b) Perfil de $v$

Figura 29: Perfis de $u$ e $v$, no centro da cavidade ao longo das linhas horizontal e vertical, respectivamente, para vários Reynolds e malha $129 \times 129$, com a formulação $\psi - \mathbf{v}$ e comparação com Ghia et al. (1982).

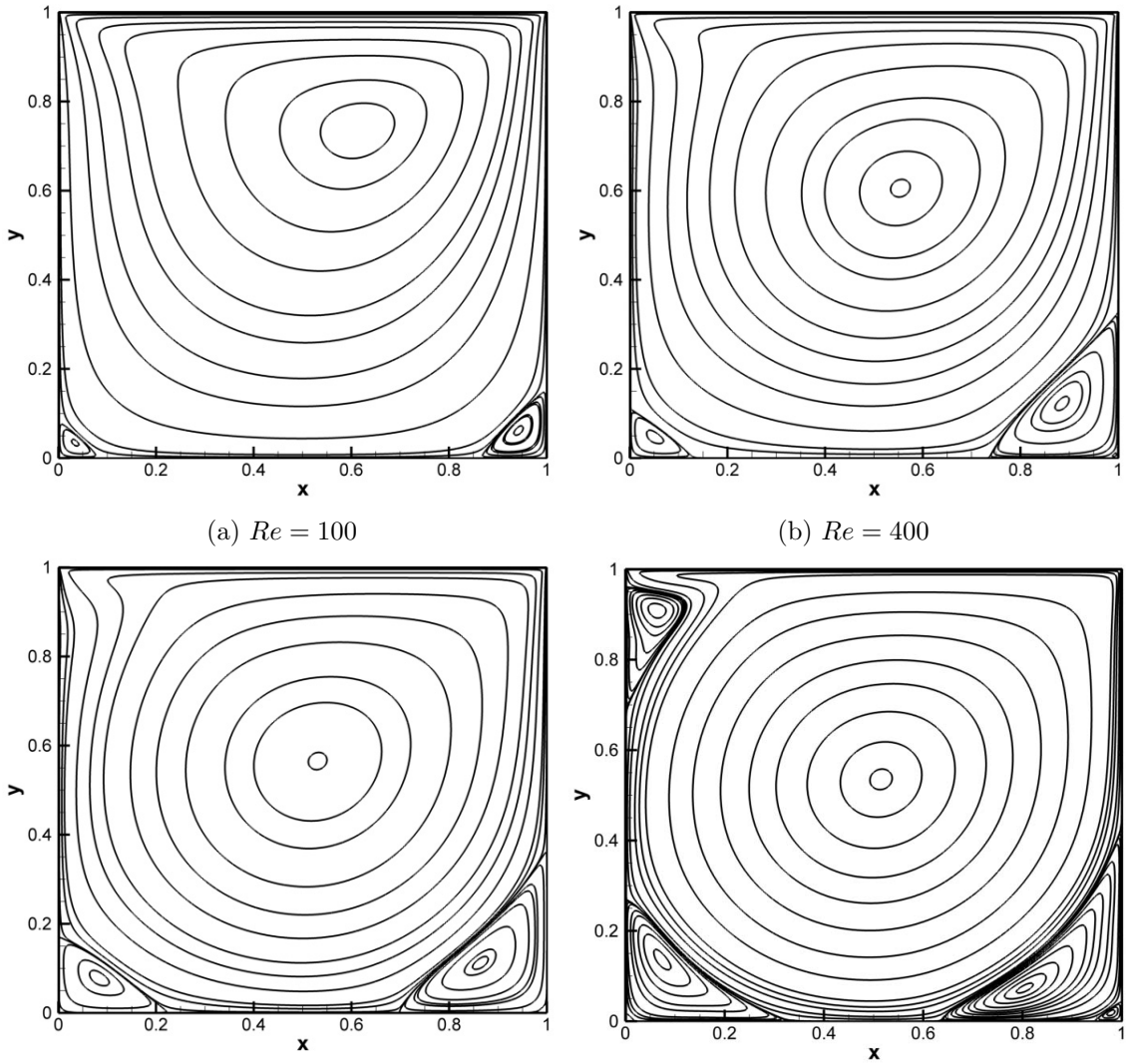



(a) Perfil de $u$ (b) Perfil de $v$

Figura 30: Perfis de $u$ e $v$, no centro da cavidade ao longo das linhas horizontal e vertical, respectivamente, para vários Reynolds e malha $129 \times 129$, com a formulação $\psi - \mathbf{v}$ e comparação com Marchi et al. (2009) na malha $1024 \times 1024$ volumes.

A comparação com Marchi et al. (2009) está mostrado na Fig. 30, em que nas Figs. 30a e 30b tem-se os perfis de $u$ e $v$ ao longo das linhas horizontal e vertical que passam

pelo centro de cavidade. Nesta análise, também verifica-se que para os três números de Reynolds as curvas indicam uma excelente concordância, inclusive próximos aos contornos.




(a) $Re = 100$ (b) $Re = 400$

(c) $Re = 1000$ (d) $Re = 5000$

Figura 31: Linhas de contorno da função de corrente $\psi$, com vários números de Reynolds na malha $513 \times 513$, com a formulação $\psi - \mathbf{v}$.

As linhas de contornos da função de corrente para o escoamento dentro da cavidade com $Re = 100$, 400, 1000 e 5000, estão mostradas na Fig. 31. Vale destacar que, dependendo do número de Reynolds, o padrão do escoamento apresenta uma recirculação primária próximo ao centro da cavidade e entre uma e três recirculações segundárias em três cantos.

Qualitativamente, as soluções obtidas neste trabalho exibem as características conhecidas da cavidade quadrada, incluindo o vórtice primário na parte central da cavidade e os vórtices secundários nos cantos, comparativamente com Erturk (2009), Ghia et al. (1982) e Kumar et al. (2009). Com o aumento do número de Reynolds percebe-se o

deslocamento do vórtice primário para o centro da cavidade. Um maior movimento das partículas do fluido, principalmente próximo das paredes, faz com que as recirculações se tornam mais intensas, provocando a formação de vórtices no canto inferior direito e no canto superior esquerdo, que pode ser observado com clareza quando $Re = 5000$, Fig. 31d. Isto mostra que o método numérico associado ao método *multigrid*, utilizando-se a formulação $\psi - \mathbf{v}$, foi eficiente na resolução do problema, com soluções numéricas que detectaram com eficiência os efeitos da vorticidade nos cantos do fundo da cavidade. Estes resultados estão coerentes com os resultados de Gupta e Kalita (2005) e Ghia et al. (1982).

Os perfis das velocidades $u$ e $v$ ao longo das linhas horizontal e vertical que passam pelo centro da cavidade nas malhas $129 \times 129$ e $513 \times 513$ estão mostrados nas Tabs. 17 e 18, respectivamente, que se encontram no apêndice A.4.

### 4.2.2 Função de Corrente e Vorticidade: $\psi - \omega$

As variáveis de interesse envolvidas no processo iterativo dessa formulação são $\psi$ e $\omega$. As componentes de velocidade $u$ e $v$ são obtidas no pós-processamento com a resolução dos sistemas tri-diagonais, dados pelas Eqs. (3.98) e (3.99), com o método TDMA, após a solução convergida do sistema de equações algébricas principal $\psi - \omega$.

Da mesma forma como na formulação $\psi - \mathbf{v}$, os termos das derivadas envolvidas na formulação $\psi - \omega$ foram aproximados com um esquema de diferenças finitas de segunda ordem de acurácia. A ordem $p_U$ do erro de discretização quando $h \to 0$, obtido para a função de corrente $\psi$, $\omega$ e velocidades $u$ e $v$, estão mostradas na Fig. 32.

A Fig. 32 mostra que a ordem aparente das duas variáveis $\psi$ e $\omega$ envolvidas diretamente no processo iterativo aproxima-se da ordem teórica ($p_L = 2$), que é a ordem do esquema usado, à medida em que a malha é refinada. No caso das variáveis $u$ e $v$, percebe-se oscilações mais fortes na ordem principalmente nas malhas mais finas. Estas oscilações podem estar associadas ao fato de que as respectivas variáveis não são resolvidas dentro do processo interativo, mas sim no pós-processamento.

Para avaliar a qualidade dos perfis de velocidade no interior da cavidade, Figs. 33 e 34, adotou-se uma malha fina com $513 \times 513$ pontos. As comparações foram realizadas com os resultados de Ghia et al. (1982) em uma malha com $129 \times 129$ pontos e com os resultados de Marchi et al. (2009) em uma malha com $1024 \times 1024$ volumes. Para facilitar

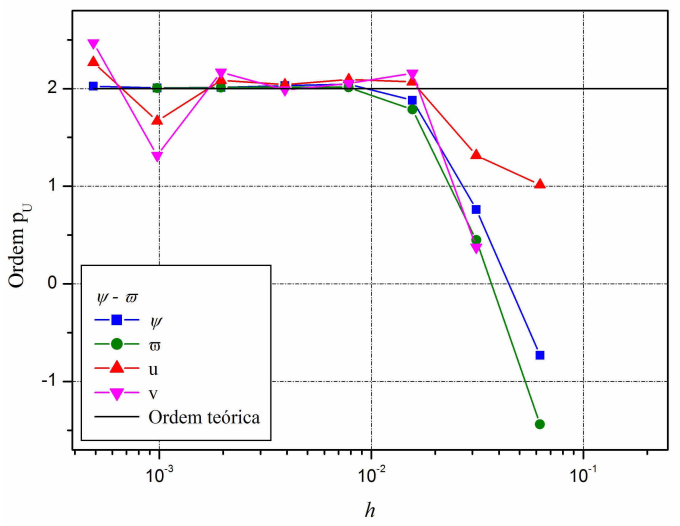
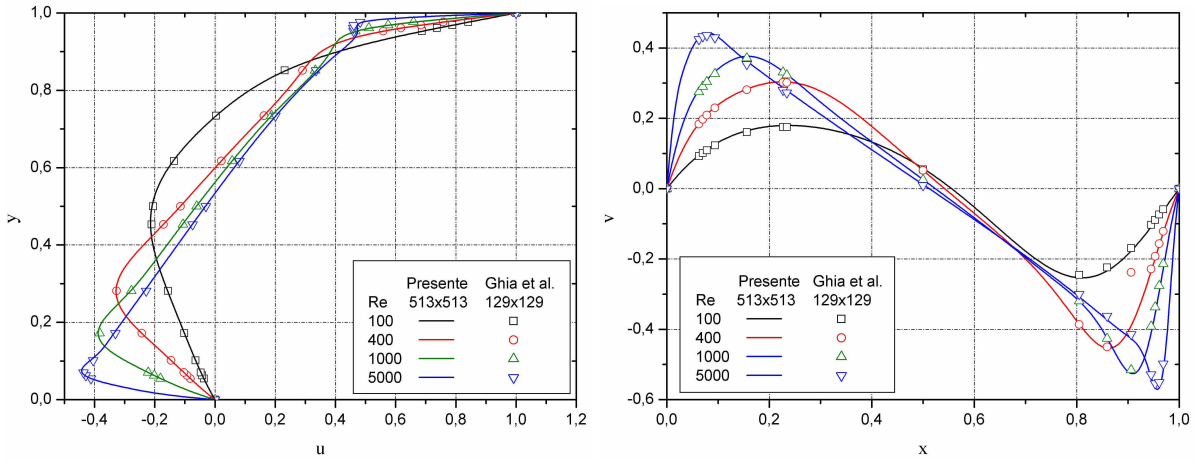



Figura 32: Ordem aparente $p_U$ do erro de discretização da formulação $\psi - \omega$ com $Re = 100$ ponto central.

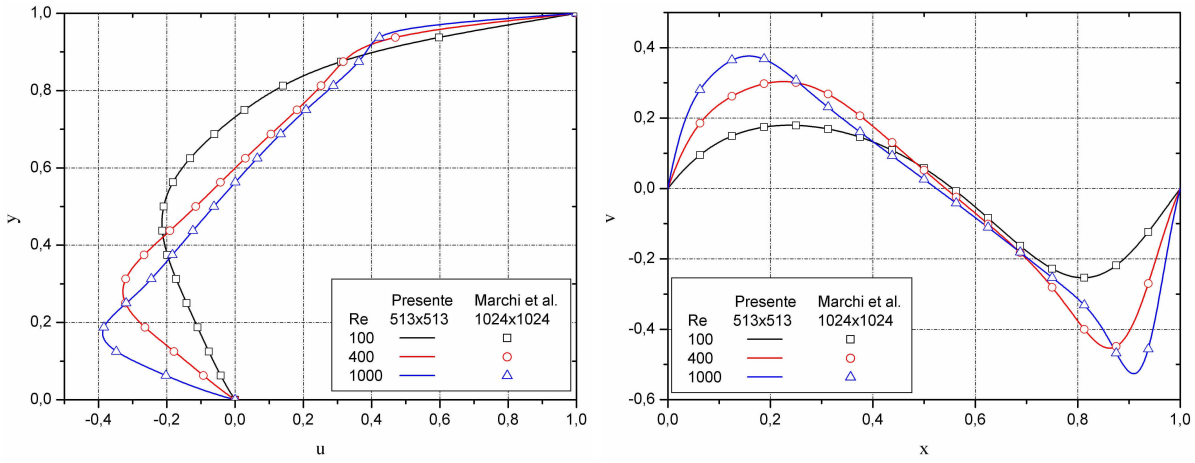
as comparações com as soluções de referências, todos os pontos dos perfis de $u$ e $v$ do presente trabalho foram plotados.




(a) Perfil de $u$ (b) Perfil de $v$

Figura 33: Perfis de $u$ e $v$ no centro da cavidade ao longo das linhas horizontal e vertical, respectivamente, para vários Reynolds e malha $513 \times 513$, com a formulação $\psi - \omega$ e comparação com Ghia et al. (1982) na malha $129 \times 129$.

A comparação com os resultados de Ghia et al. (1982) está ilustrado na Fig. 33, em que nas Figs. 33a e 33b tem-se os perfis de $u$ e $v$ ao longo das linhas horizontal e vertical que passam pelo centro de cavidade, respectivamente. Como pode ser verificado nas respectivas figuras, as curvas indicam que existe uma excelente concordância com os dados de Ghia et al. (1982), para todos os números de Reynolds, inclusive nas regiões próximas aos contornos. Em relação aos resultados de Marchi et al. (2009), Fig. 34, também pode-se verificar uma ótima concordância para os três números de Reynolds




(a) Perfil de $u$ (b) Perfil de $v$

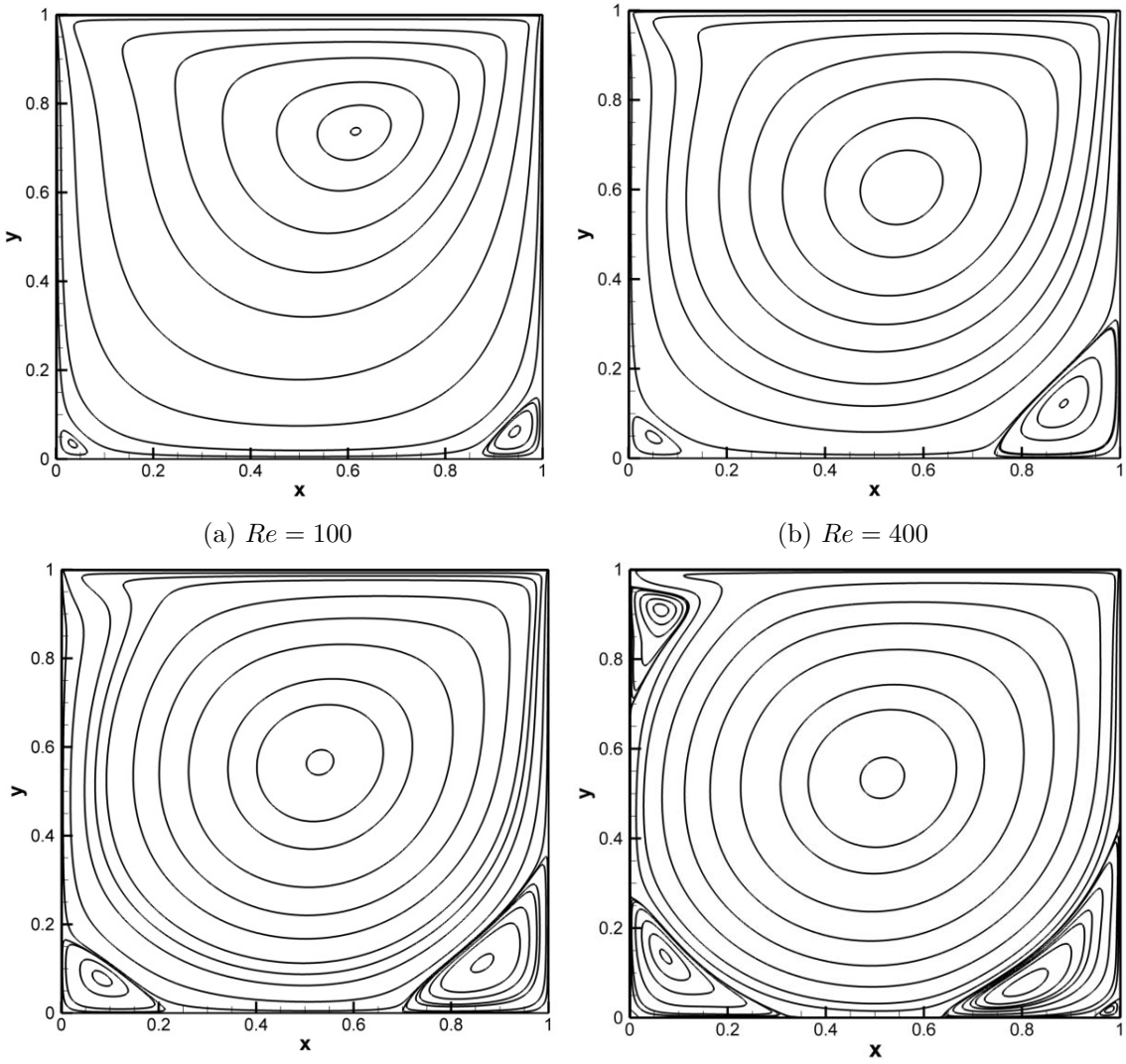
Figura 34: Perfis de $u$ e $v$, no centro da cavidade ao longo das linhas horizontal e vertical, respectivamente, para vários Reynolds e malha $513 \times 513$, com a formulação $\psi - \omega$ e comparação com Marchi et al. (2009) na malha $1024 \times 1024$ volumes.

testados em todos os pontos dos perfis.

As linhas de contornos da função de corrente $\psi$ e da vorticidade $\omega$ para o escoamento dentro da cavidade com $Re = 100$, 400, 1000 e 5000, estão ilustradas nas Figs. 35 e 36. Pode-se notar que as soluções obtidas com esta formulação também exibem muito bem as características conhecidas da cavidade quadrada, incluindo o vórtice primário na parte central da cavidade e os vórtices secundários nos cantos, com o mesmo padrão das figuras apresentadas nos trabalhos de Erturk (2009), Ghia et al. (1982) e Kumar et al. (2009).

Para finalizar, a Tab. 4 compara a solução numérica das velocidades no centro da cavidade, os valores mínimos da função de corrente $\psi_{mínimo}$ e sua localização no domínio, com resultados encontrados na literatura, para $Re = 100$, 400, 1000 e 5000.

Embora a discretização tenha sido de segunda ordem, Gupta e Kalita (2005) afirmam que a formulação $\psi - \mathbf{v}$, com o esquema compacto, permite obter soluções com alta acurácia. Eles obtiveram soluções com vários números de Reynolds em malhas até $161 \times 161$ pontos. A Tab. 4 mostra que os valores de $\psi_{mínimo}$ obtidos no presente estudo são tão acurados quantos os de Gupta e Kalita. Os resultados de Ghia et al. (1982) usados neste trabalho para comparação foram obtidos de uma malha de $129 \times 129$ pontos com aproximação de segunda ordem. Marchi et al. (2009) obtiveram soluções baseadas no método de volumes finitos e usaram Múltiplas Extrapolações de Richardson (MER) para reduzir o erro de discretização. Eles fizeram comparações com soluções de vários autores e concluiram que suas soluções são as mais acuradas para o problema da cavidade até o momento. Zhang (2003) usou aproximação de quarta ordem para obter a solução numérica




(a) $Re = 100$ (b) $Re = 400$

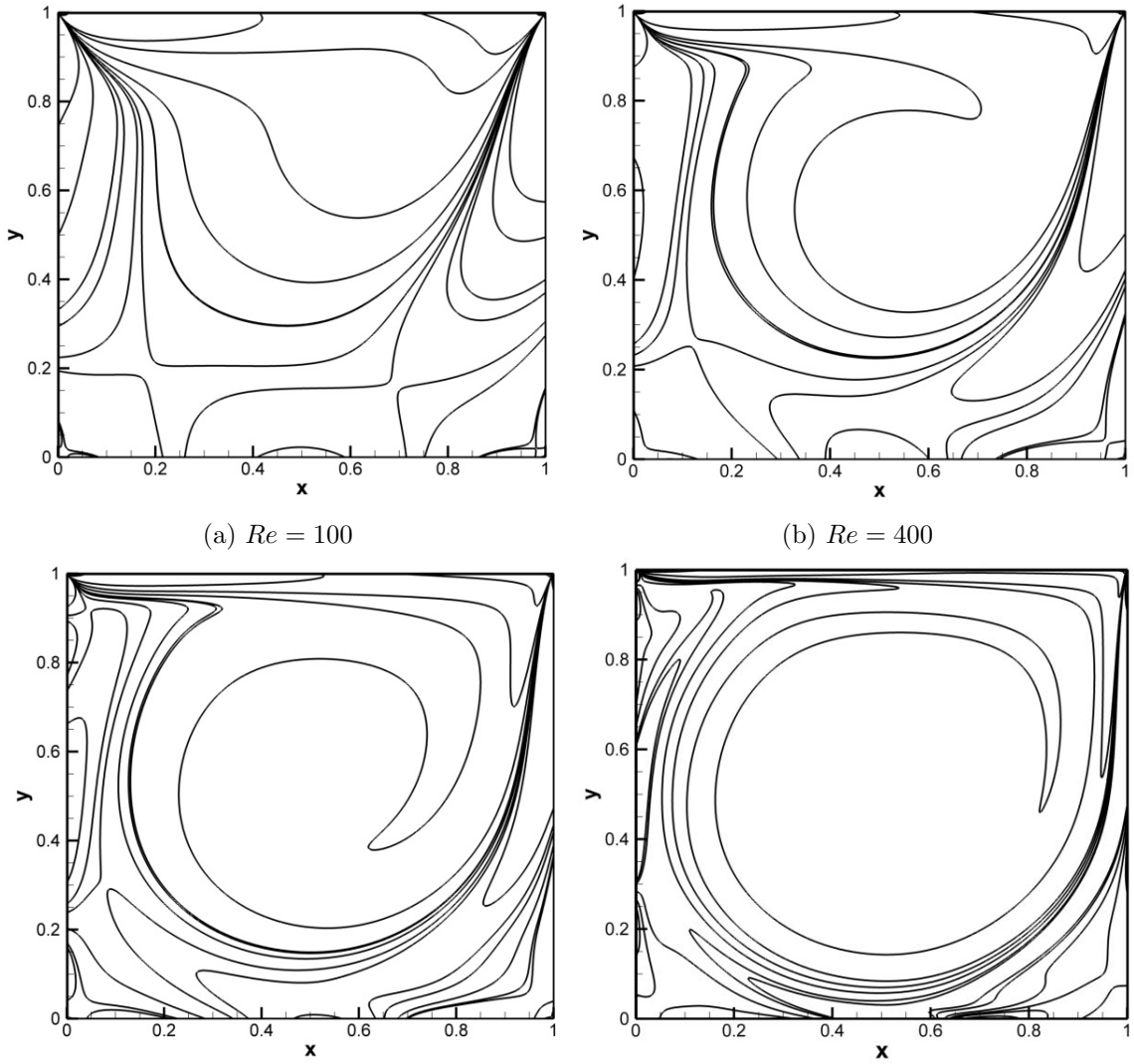
(c) $Re = 1000$ (d) $Re = 5000$

Figura 35: Linhas de contorno da função de corrente, $\psi$, na malha $513 \times 513$, com a formulação $\psi - \omega$.

na malha $129 \times 129$ pontos.

Como pode ser observado na Tab. 4, a soluções numéricas geradas pela formulação $\psi - \mathbf{v}$, para as variáveis citadas, apresentam uma ótima coerência com todos estes autores.

As soluções numéricas geradas pela formulação $\psi - \omega$, Tab. 4, apresentam uma pequena discrepância principalmente nas malhas mais grossas. Quando se comparam os resultados obtidos neste trabalho, na malha $129 \times 129$, entre as duas formulações, é notável uma pequena diferença que tende a aumentar com o número de Reynolds. Para a velocidade $u$, por exemplo, o desvio é 0,2% quando $Re = 100$, e de 13,5% quando $Re = 5000$. Contudo, quando comparamos os valores de $\psi_{mínimo}$ esses desvios são menores, isto é, 0,15% e 8,5%, respectivamente. Na mesma malha e os mesmos números de Reynolds,




(a) $Re = 100$ (b) $Re = 400$

(c) $Re = 1000$ (d) $Re = 5000$

Figura 36: Linhas de contorno da vorticidade $\omega$, na malha $513 \times 513$, obtidas com a formulação $\psi - \omega$.

o desvio em relação aos resultados de Ghia et al. (1982), para a velocidade $u$ são 1,43% e 0,7%. Ainda, considerando os resultados de $\psi_{mínimo}$ observa-se que as diferenças são, respectivamente, 0,08% e 8,9%. Nas malhas mais finas essa discrepância diminui, fazendo com que os resultados tornem-se mais coerentes. Na malha fina, $1025 \times 1025$ pontos, comparando-se com soluções de alta precisão, estes desvios são relativamente pequenos. Em relação aos resultados de Marchi et al. (2009), os desvios são quase imperceptíveis. Quando se comparam com os resultados de Erturk et al. (2005) tomando $Re = 1000$ ou 5000, na malha $513 \times 513$ pontos, também não há diferenças significativas.

A imprecisão verificada na malha $129 \times 129$ pontos, e certamente em outras mais grossas, é provavelmente devido ao esquema de aproximação utilizado (CDS) nos termos advectivos da Eq. (3.39). De um modo geral, pode-se verificar que as soluções numéricas

geradas para a formulação $\psi-\omega$ estão coerentes com as soluções dos demais autores, principalmente em malhas finas. Vale ressaltar que a solução numérica obtida neste trabalho, para $Re = 5000$ na malha $513 \times 513$ pontos, atingiu convergência com erro relativo da ordem de 7 dígitos, Eq. (3.90), em 8 horas na formulação $\psi-\omega$ e 5,4 horas na formulação $\psi - \mathbf{v}$. Como pode ser visto na Tab. 4, e também relatado acima, nessa malha e em malhas mais grossas, a solução numérica da formulação $\psi - \mathbf{v}$ é mais acurada do que aquelas da formulação $\psi - \omega$, portanto, neste caso têm-se soluções em malhas mais finas, mais acuradas, e com menor tempo de CPU.

Nas Tabs. 19 e 20, do apêndice A.5, estão tabulados os perfis das velocidades $u$ e $v$ ao longo das linhas horizontal e vertical que passam pelo centro da cavidade nas malhas $129 \times 129$ e $513 \times 513$ pontos, respectivamente.

## 4.3 CONCLUSÃO DO CAPÍTULO 4

Neste capítulo verificou-se a qualidade das soluções numéricas obtidas no presente trabalho. As verificações foram feitas por meio de erros numéricos, isolinhas, gráficos de perfis, de contornos e uma tabela. Pode-se concluir que os códigos computacionais desenvolvidos para o presente trabalho, bem como os métodos numéricos utilizados, são bons o suficiente para gerarem soluções com erros numéricos compatíveis com os da literatura. No caso das equações de Navier-Stokes, que não possuem soluções analíticas, as comparações foram feitas com resultados de outros autores, concentrando-se nos gráficos de perfis e linhas de contornos. Uma tabela com soluções para números de Reynolds entre 100 e 5000 foi apresentada. As soluções no centro da cavidade quadrada foram comparadas com diversos autores, onde pode-se ver, inclusive, soluções acuradas obtidas recentemente. Pode-se concluir que as soluções numéricas obtidas para as equações de Navier-Stokes são acuradas e estão de acordo com as soluções acuradas da literatura. No próximo capítulo apresentam-se os resultados do estudo realizado para os parâmetros do método *multigrid*.

Tabela 4: Comparações dos valores mínimos de $\psi$ e das velocidades no centro da cavidade e as respectivas localizações, com outros autores.

| $Re$ | Autores | Formulação | Malha | $u$ | $v$ | $\psi_{min}$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 | Presente | $\psi - \mathbf{v}$ | $129^2$ | -0,209165 | 0,057459 | -0,103488 | 0,617188 | 0,73438 |
| | | | $1025^2$ | -0,209189 | 0,057534 | -0,103522 | 0,615234 | 0,73731 |
| | | $\psi - \omega$ | $129^2$ | -0,208756 | 0,057445 | -0,103336 | 0,617188 | 0,734375 |
| | | | $1025^2$ | -0,209143 | 0,057535 | -0,103518 | 0,616211 | 0,737305 |
| | Ghia et al. (1982) | $\psi - \omega$ | $129^2$ | -0,20581 | 0,05454 | -0,103423 | 0,6172 | 0,7344 |
| | Zhang (2003) | $\psi - \omega$ | $129^2$ | | | -0,103511 | 0,617187 | 0,73438 |
| | Gupta e Kalita (2005) | $\psi - \mathbf{v}$ | $1025^2$ | | | -0,103 | 0,6125 | 0,7375 |
| | Marchi et al. (2009) | $p - \mathbf{v}$ | $1024^2$ | -0,209149 | 0,057537 | -0,103521 | 0,61621 | 0,73730 |
| 400 | Presente | $\psi - \mathbf{v}$ | $129^2$ | -0,115702 | 0,052068 | -0,113793 | 0,554688 | 0,60938 |
| | | | $1025^2$ | -0,115064 | 0,052059 | -0,113986 | 0,553711 | 0,60547 |
| | | $\psi - \omega$ | $129^2$ | -0,115659 | 0,052617 | -0,112939 | 0,554688 | 0,60938 |
| | | | $1025^2$ | -0,115062 | 0,052068 | -0,113971 | 0,553711 | 0,60547 |
| | Ghia et al. (1982) | $\psi - \omega$ | $129^2$ | -0,11477 | 0,05186 | -0,113909 | 0,5547 | 0,6055 |
| | Gupta e Kalita (2005) | $\psi - \mathbf{v}$ | $161^2$ | | | -0,113 | 0,5500 | 0,6125 |
| | Marchi et al. (2009) | $p - \mathbf{v}$ | $1024^2$ | -0,115054 | 0,052058 | 0,11399 | 0,55371 | 0,60547 |
| 1000 | Presente | $\psi - \mathbf{v}$ | $129^2$ | -0,062541 | 0,025562 | -0,118348 | 0,53125 | 0,56250 |
| | | | $1025^2$ | -0,062064 | 0,025795 | -0,118929 | 0,53125 | 0,56543 |
| | | $\psi - \omega$ | $129^2$ | -0,061693 | 0,026140 | -0,116009 | 0,53125 | 0,56250 |
| | | | $1025^2$ | -0,062048 | 0,025806 | -0,118888 | 0,53125 | 0,56543 |
| | Ghia et al. (1982) | $\psi - \omega$ | $129^2$ | -0,062080 | 0,02526 | -0,117929 | 0,5313 | 0,5625 |
| | Botella e Peyret (1998) | $p - \mathbf{v}$ | $160^2$ | -0,062056 | 0,02580 | 0,118937 | 0,5308 | 0,5652 |
| | Zhang (2003) | $\psi - \omega$ | $129^2$ | | | -0,118806 | 0,531250 | 0,56250 |
| | Erturk et al. (2005) | $\psi - \omega$ | $601^2$ | -0,0620 | 0,0258 | -0,11878 | 0,5300 | 0,5650 |
| | Gupta e Kalita (2005) | $\psi - \mathbf{v}$ | $161^2$ | | | -0,117 | 0,5250 | 0,5625 |
| | Kumar et al. (2009) | $p - \mathbf{v}$ | $513^2$ | -0,06205 | 0,02578 | | | |
| | Marchi et al. (2009) | $p - \mathbf{v}$ | $1024^2$ | -0,062056 | 0,025799 | -0,11894 | 0,53125 | 0,56543 |
| 5000 | Presente | $\psi - \mathbf{v}$ | $129^2$ | -0,032288 | 0,010732 | -0,11846 | 0,515625 | 0,53906 |
| | | | $513^2$ | -0,032109 | 0,011666 | -0,12203 | 0,515625 | 0,53516 |
| | | $\psi - \omega$ | $129^2$ | -0,028456 | 0,013382 | -0,10922 | 0,515625 | 0,53125 |
| | | | $513^2$ | -0,031840 | 0,011809 | -0,12111 | 0,515625 | 0,53516 |
| | Ghia et al. (1982) | $\psi - \omega$ | $129^2$ | -0,03039 | 0,00945 | -0,11897 | 0,5117 | 0,5352 |
| | Zhang (2003) | $\psi - \omega$ | $129^2$ | | | -0,11812 | 0,515625 | 0,53906 |
| | Gupta e Kalita (2005) | $\psi - \mathbf{v}$ | $161^2$ | | | -0,122 | 0,5125 | 0,5375 |
| | Kumar et al. (2009) | $p - \mathbf{v}$ | $513^2$ | -0,03208 | 0,01163 | | | |
| | Erturk et al. (2005) | $\psi - \omega$ | $601^2$ | -0,0319 | 0,0117 | -0,12129 | 0,5150 | 0,5350 |

# 5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

A análise dos parâmetros do método *multigrid* é apresentada neste capítulo. Centenas de simulações foram realizadas, embora os resultados apresentados sejam apenas aqueles de maior relevância. O objetivo aqui é, principalmente, investigar a influência sobre o tempo de CPU causado pelo número de iterações internas ($\sigma$) do *solver*, número de malhas ($L$) e número de pontos ($N$) da malha computacional.

As análises foram divididas em duas etapas, denominadas Etapa I e Etapa II.

A Etapa I concentra-se em um estudo preliminar em que são feitas análises do método *multigrid* nos problemas de Laplace, Navier e Burgers. Nesta etapa as análises para $\sigma$ e $L$ foram realizadas considerando-se malhas de tamanhos $N = 257\times257$, $513\times513$ e $1025 \times 1025$ pontos. As análises sobre o tamanho do problema ($N$) foram realizadas a partir da malha $5 \times 5$, até a malha mais fina possível, isto é, dentro da limitação da memória computacional, $2049 \times 2049$ pontos. Nas equações de Navier, por se tratar de um modelo linear, analisou-se o desempenho do método *multigrid* linear (CS) e o método *multigrid* não-linear (FAS) (Algoritmo 2.5.2, com $\gamma = 0$ e $\gamma = 1$). Nesta etapa os sistemas de equações algébricas foram resolvidos com o método MSI.

A Etapa II concentra-se na análise do método *multigrid* aplicado às equações de Navier-Stokes nas formulações $\psi - \mathbf{v}$ e $\psi - \omega$. Nesta etapa as simulações para $\sigma$ e $L$ foram realizadas a partir de malhas de tamanhos $65 \times 65$ até $1025 \times 1025$. Optou-se por cinco malhas devido a incerteza causada pela não-linearidade das equações, bem como os efeitos causados pelo número de Reynolds. As análises sobre o tamanho do problema foram realizadas a partir da malha $17 \times 17$ até a malha $1025 \times 1025$ pontos. Todos os estudos foram realizados com os seguintes números de Reynolds: $Re = 100$, 400 e 1000. Nesta etapa os sistemas de equações algébricas foram resolvidos com o método SOR. Os métodos MSI e Gauss-Seidel divergiram em malhas finas e números de Reynolds maiores que 100.

Para cada malha, as simulações foram realizadas com um número de níveis de malha $L$ tal que $1 \leq L \leq L_{máximo}$, em que $L = 1$ tem-se o *singlegrid*, e $L = L_{máximo}$ tem-se o método *multigrid* percorrendo todas as malhas possíveis do ciclo V. O parâmetro $L_{máximo}$ representa o número máximo possível de níveis de malhas que se pode usar para uma dada malha, com apenas um ponto interno na malha mais grossa. Por exemplo, se $N = 513\times513$ pontos, o método *multigrid* com todos os níveis percorre as malhas $513 \times 513$, $257 \times 257$,

$129 \times 129$, $65 \times 65$, $33 \times 33$, $17 \times 17$, $9 \times 9$, $5 \times 5$ e $3 \times 3$ pontos; neste caso específico $L_{máximo} = 9$.

Aqui, define-se o valor ótimo de um parâmetro quando a solução do problema é obtida no menor tempo de CPU para valores fixos dos demais parâmetros. O número ótimo de iterações internas no *solver* é denotado por $\sigma_{ótimo}$ e o número ótimo de níveis de malhas por $L_{ótimo}$. Para o estudo do número de iterações internas $\sigma$, todas as simulações, nas duas etapas, foram realizadas com $L = L_{maximo}$.

A análise do desempenho do método *multigrid*, em relação o *singlegrid*, é geralmente medido por um indicador $S$ chamado de fator de aceleração (ou fator *speed-up*) (FERZIGER e PERIC, 2001) definido por

$$S = \frac{t_{SG}}{t_{MG}} \tag{5.1}$$

onde $t_{SG}$ é o tempo de CPU gasto para encontrar a convergência no método *singlegrid* e $t_{MG}$ é o tempo de CPU gasto para encontrar a convergência no método *multigrid*. O fator de aceleracão $S$, na Eq. (5.1), mede quantas vezes o método *multigrid* é mais rápido na obtenção da solução de um problema do que sem ele.

## 5.1 ETAPA I: EQUAÇÃO DE LAPLACE E, EQUAÇÕES DE NAVIER E DE BURGERS

### 5.1.1 Número de iterações internas ($\sigma$)

Para cada malha e cada problema, foram realizadas simulações com um número de iterações internas variando de $\sigma = 1$ até $\sigma = 10$, e um valor isolado $\sigma = 15$ para confirmar a tendência do parâmetro. O valor de $\sigma$ que resultar no menor tempo de CPU será considerado o número de iterações internas ótimo, e representado por $\sigma_{ótimo}$. Em todas as simulações realizadas para este parâmetro utilizou-se $L = L_{maximo}$, isto é, o método *multigrid* percorre todos os níveis de malha do ciclo V.

A Fig. 37 ilustra a influência do número de iterações internas para a equação de Laplace e equações de Navier usando o esquema CS. Em cada curva indica-se o valor do $\sigma$ que resulta no menor tempo de CPU através do símbolo "estrela". Como pode ser observado na Fig. 37, o tempo de CPU aumenta com o número de iterações internas. Nos dois problemas pode-se notar que o menor tempo de CPU foi obtido com duas iterações

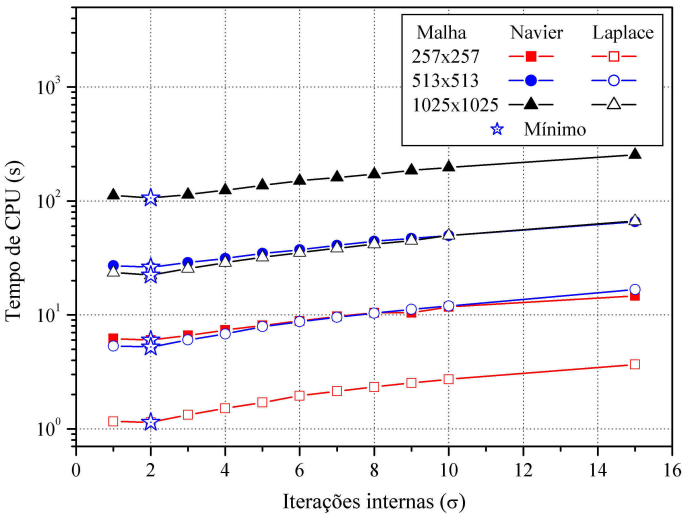



Figura 37: Efeito de $\sigma$ sobre o tempo de CPU para o esquema CS na equação de Laplace e equações de Navier.

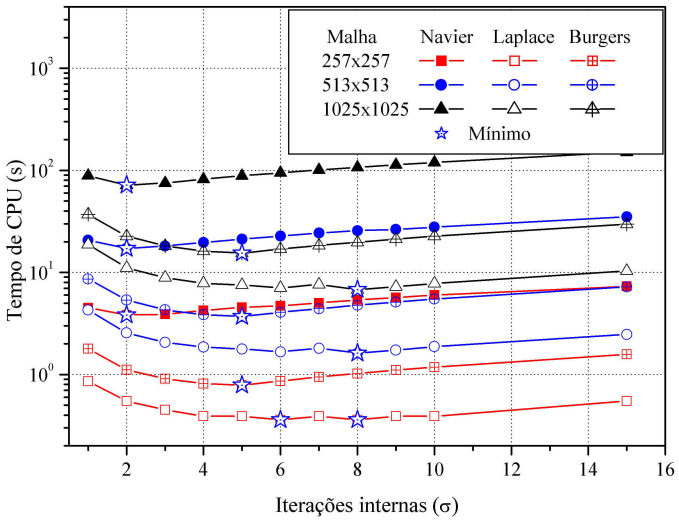



Figura 38: Efeito de $\sigma$ sobre o tempo de CPU para o esquema FAS nos três problemas.

internas, ou seja, $\sigma_{ótimo} = 2$ em qualquer malha. O tempo de CPU observado para o problema de Navier na malha mais fina foi de aproximadamente 4 vezes maior que o tempo observado para o problema de Laplace na mesma malha. Esse aumento no tempo de CPU pode estar relacionado a complexidade do modelo matemático. Os resultados mostram que o acoplamento das equações, Eqs. (3.6) e (3.7), não influenciaram no número ótimo de iterações internas. Pinto e Marchi (2006) também encontraram resultados similares para a equação de Laplace bidimensional, usando outro critério de tolerância e convergência.

Na Fig. 38 mostra-se os resultados para o esquema FAS, onde também se observa os resultados para as equações de Burgers. Nota-se que o número de suavizações ótimo é mantido igual a 2 para as equações de Navier. Entretanto, para a equação de Laplace

obteve-se, nas três malhas testadas, $\sigma = 8$; e, na malha $N = 257 \times 257$ obteve-se também $\sigma = 6$. Para as equações de Burgers, tem-se $\sigma_{ótimo} = 5$ para os três tamanhos de malhas testadas. Em todos os casos analisados, deve-se notar que quando se diminui ou aumenta o valor de $\sigma$ em relação a $\sigma_{ótimo}$, há um acréscimo no tempo de CPU. Este aumento pode ser significativo dependendo do valor usado para $\sigma$.

O comportamento do tempo de CPU observado para o modelo com uma equação (Laplace), é igual ou muito semelhante ao observado nos modelos com duas equações (Navier e Burgers). Mesquita e De-Lemos (2004) encontraram $\sigma = 3$ como o valor ótimo do número de iterações internas para as equações bidimensionais de Navier-Stokes e equação da energia, usando o esquema CS e até 4 malhas. Tannehill et al. (1997) resolveram a equação de Laplace bidimensional com o esquema CS, malha $129 \times 129$ nós com o suavizador Gauss-Seidel e encontraram $\sigma = 3$ ou 4, como parâmetro minimizador do tempo de CPU. Os valores de $\sigma_{ótimo}$ obtidos com os dois esquemas, CS e FAS, estão resumidos na Tab. 5. Pinto e Marchi (2006) resolveram a equação de Laplace bidimensional e testaram três solvers; para o MSI, o mesmo usado neste trabalho, eles encontraram $\sigma_{ótimo} = 1$ ou 2 para o esquema CS, e 4 para o FAS.

Tabela 5: Número ótimo de iterações internas ($\sigma_{ótimo}$) nos esquemas CS e FAS para os problemas de Laplace, Navier e de Burgers.

| Problema | $\sigma_{ótimo}$ | |
|---|---|---|
| | esquema CS | esquema FAS |
| Laplace | 2 | 8 |
| Navier | 2 | 2 |
| Burgers | — | 5 |

### 5.1.2 Número de níveis ($L$)

O estudo sobre a influência do número de níveis de malha ($L$) leva em consideração o número de iterações internas ótimo ($\sigma_{ótimo}$) obtido na seção anterior, visto que a intenção é encontrar parâmetros que reduzam o tempo de CPU.

A Fig. 39 mostra o efeito do número de níveis sobre o tempo de CPU para as equações de Navier e de Laplace com o esquema CS. Vale destacar que com as equações de Navier, na malha $N = 1025 \times 1025$ pontos, com $L = 1$, ou seja o *singlegrid*, o tempo gasto para encontrar a convergência no problema de Navier foi de $113673,77$ segundos

(31,5 horas), enquanto que com $L = L_{máximo}$, ou seja, o *multigrid* percorrendo todos os níveis, o tempo gasto foi de $105,09$ segundos. Nessa malha, portanto, o método *multigrid* é 1081,6 vezes mais rápido que o *singlegrid*.

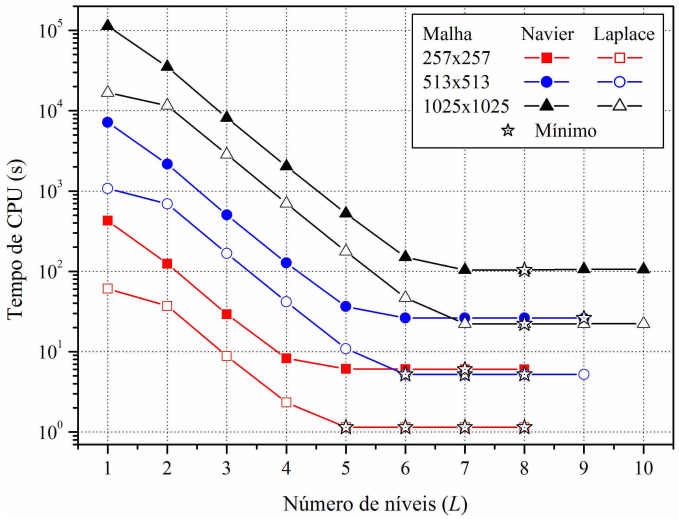



Figura 39: Efeito do tempo de CPU sobre o número de níveis $L$ para a equação de Laplace e equações de Navier com o equema CS.

A Fig. 40 mostra as curvas para a equação de Laplace, equações de Navier e de Burgers com o esquema FAS. Pode-se notar que o comportamento de cada curva e o $L_{ótimo}$ se assemelha tanto para as equações de Navier, com os esquemas CS e FAS, quanto para as equações de Burgers com o esquema FAS, em qualquer tamanho de malha. Para os dois esquemas (CS e FAS), as três malhas e os três problemas, o valor ótimo do número de níveis de malha é $L_{ótimo} = L_{máximo} - (0 \text{ a } 4)$.

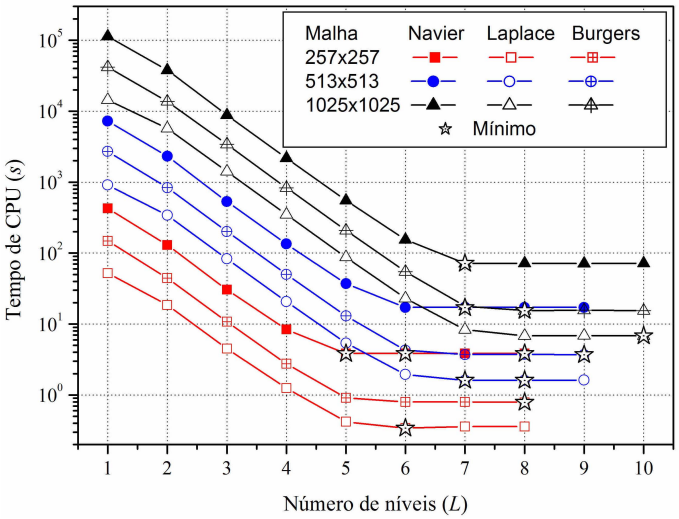



Figura 40: Efeito do tempo de CPU sobre o número de níveis $L$ para os três problemas com o esquema FAS.

Para $L < L_{ótimo}$, o tempo de CPU aumenta significativamente; mas para $L > L_{ótimo}$, o tempo de CPU é praticamente o mesmo. Na malha mais fina, com o esquema FAS e equações de Navier, por exemplo, observa-se que a diferença do tempo de CPU entre $L_{máximo} = 10$ e o $L_{ótimo} = 8$ é de menos de $0,3\%$; no caso das equações de Burgers essa diferença é de $0,1\%$.

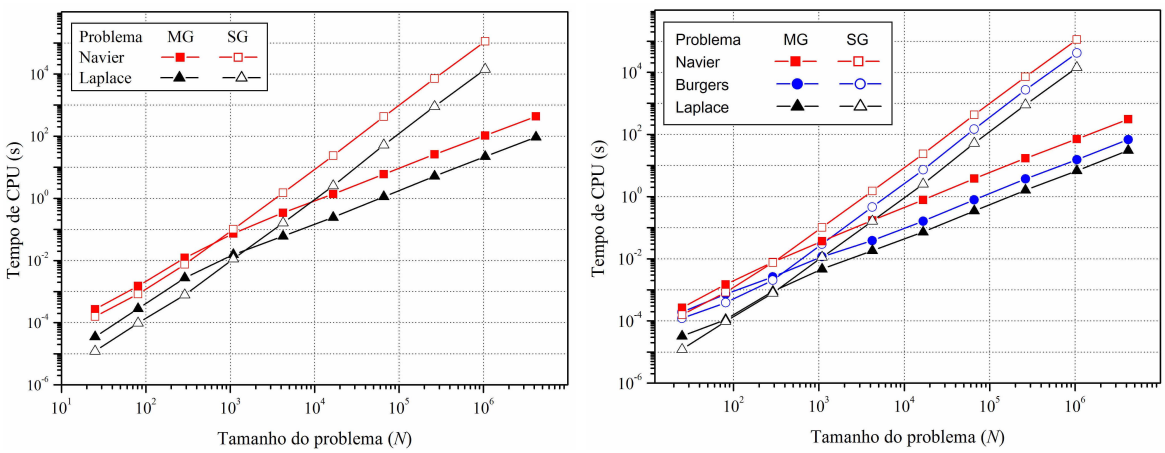
Os resultados obtidos aqui para a equação de Laplace estão coerentes com resultados da literatura. Pinto e Marchi (2006) recomendam usar $L = L_{máximo}$ para a equação de Laplace bidimensional. Tannehill et al. (1997) verificaram com o mesmo problema, na malha $N = 129 \times 129$ pontos, que não há ganho significativo ao usar todos os níveis e sugerem $L = 4$ ou 5. E, Rabi e De-Lemos (2001) sugerem pelos menos 4 níveis de malha no problema bidimensional de advecção-difusão. Esta análise mostra que o parâmetro número de níveis ($L$), no método *multigrid*, não se modifica nos problemas com duas equações, tanto no esquema CS quanto no FAS.

### 5.1.3 Tamanho do problema ($N$)

Na análise da influência do tamanho do problema, isto é, do número de incógnitas no sistema de equações, sobre o tempo de CPU, são considerados o número ótimo de iterações internas ($\sigma_{ótimo}$) obtidos na seção 5.1.1 e o número máximo de níveis de malha ($L_{máximo}$). Nessa análise consideram-se problemas de tamanho $N = 5 \times 5$ até o maior suportado pela memória física da máquina usada para as simulações, $N = 2049 \times 2049$. Para comparação, são mostrados também os resultados obtidos com o método *singlegrid* (malha única) e *solver* MSI para os três problemas. Os resultados são apresentados na Fig. 41.

Para malhas muito grossas, o tempo de CPU é muito próximo de zero, tanto no método *multigrid* quanto no *singlegrid*. Neste caso, adotou-se uma metodologia para obter o tempo de CPU que elimine o máximo possível o erro devido à incerteza de medição da função TIMEF. A idéia central é obter uma incerteza absoluta aceitável para o tempo de CPU. Assim, para todas as malhas cujo tempo de uma simulação foi menor que 10 segundos, adotou-se um ciclo externo para que o programa fizesse um número necessário de simulações para atingir 10 segundos ou mais. O tempo de uma simulação é a média do tempo gasto em todas as simulações. Por exemplo, no problema de Navier, com esquema CS, para a malha de tamanho $N = 5 \times 5$, simulada com o método *multigrid* e solver MSI, foram necessárias 38175 simulações para atingir $10,02$ segundos, resultando no tempo

médio de 0,000262 segundos para uma simulação.




(a) esquema CS (b) esquema FAS

Figura 41: Tempo de CPU (s) *versus* tamanho do problema $N$ com os esquemas CS e FAS.

É importante lembrar que quanto mais fina a malha, isto é, quanto maior o número de nós $N$, maior é a vantagem do método *multigrid* em relação ao método *singlegrid* (FERZIGER e PERIC, 2001). Esta propriedade está evidenciada na Fig. 41a, em que o tempo de CPU do método *multigrid* é menor que o do método *singlegrid* a partir da malha $N = 33 \times 33$ com o esquema CS; e com o esquema FAS, Fig. 41b, a partir da malha $N = 17 \times 17$. A partir destas malhas, fica mais evidente também, Figs. 41a e 41b, o crescimento linear do tempo de CPU com o aumento do número de pontos para o *multigrid*.

Na malha $N = 1025 \times 1025$, com o esquema FAS, o método *multigrid* é cerca de 1600 vezes mais rápido que o método *singlegrid* quando é usado nas equações de Navier; e, se considerarmos as equações de Burgers, essa vantagem passa para aproximadamente 2700 vezes. A Tab. 6 resume o fator de aceleração, Eq. (5.1), obtido nas malhas $N = 257 \times 257$, $N = 513 \times 513$ e $1025 \times 1025$ pontos com os dois esquemas e os três problemas. Pode-se notar que o desempenho do método *multigrid* melhora significativamente com o aumento do número de pontos da malha, nos três problemas, independente do esquema (CS ou FAS) utilizado, porém, o fator de aceleração é maior com o esquema FAS. O tempo de CPU é medido em segundos ($s$).

Para os dois problemas com duas equações (Navier e Burgers), pode-se notar na Fig. 41 que o tempo de CPU do *multigrid* cresce na mesma razão que o problema com apenas uma equação (Laplace). Portanto, pode-se concluir aqui, no caso dos dois modelos matemáticos envolvendo acoplamento, que o número de equações e sua complexidade (linear e não-linear) não afetaram o desempenho do método *multigrid* com o aumento do

Tabela 6: Tempo de CPU ($s$) dos métodos *multigrid* e *singlegrid* com os esquemas CS e FAS nos problemas de Laplace, Navier e de Burgers, com os respectivos fatores de aceleração.

| | | | MG | | $S$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Problema | Malha | SG/CPU | CS/CPU | FAS/CPU | CS | FAS |
| Laplace | | 52,30 | 1,13 | 0,35 | 46,2 | 150,7 |
| Navier | $257 \times 257$ | 427,20 | 5,98 | 3,80 | 71,5 | 112,5 |
| Burgers | | 148,77 | — | 0,79 | — | 188,4 |
| Laplace | | 905,19 | 5,16 | 1,60 | 175,3 | 564,0 |
| Navier | $513 \times 513$ | 7180,98 | 25,91 | 17,06 | 277,2 | 420,9 |
| Burgers | | 2711,61 | — | 3,71 | — | 731,2 |
| Laplace | | 14333,64 | 22,05 | 6,78 | 650,1 | 2113,6 |
| Navier | $1025 \times 1025$ | 113673,77 | 105,09 | 71,13 | 1081,6 | 1598,2 |
| Burgers | | 41799,11 | — | 15,47 | — | 2702,1 |

tamanho do problema.

### 5.1.4 Comparação entre os esquemas CS e FAS

O objetivo dessa análise é verificar qual dos dois esquemas resulta no menor tempo de CPU em dois problema lineares. A Fig. 42 mostra o tempo de CPU obtido para a equação de Laplace e equações de Navier, ambas com os esquemas CS e FAS, para $N = 5 \times 5$ até $2049 \times 2049$ pontos.

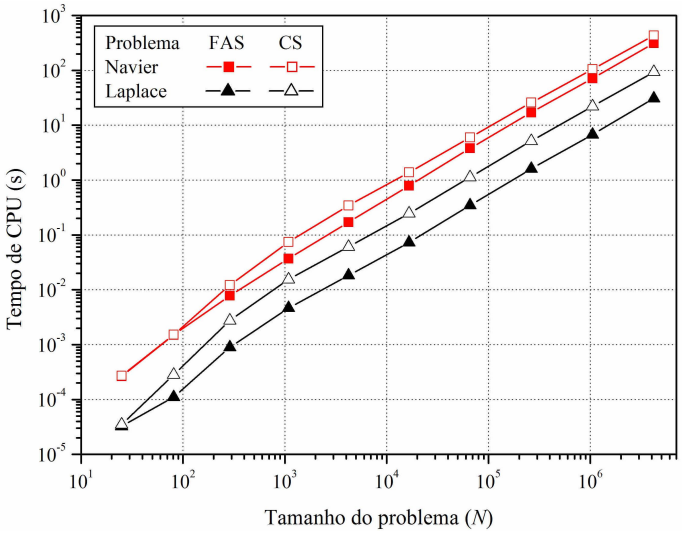



Figura 42: Comparação entre os esquemas CS e FAS com os dois problemas lineares.

Para um dado $N$, pode-se observar na figura que o esquema FAS resulta no menor

tempo de CPU em cada problema. Deve-se lembrar que o esquema CS é recomendado por alguns autores para problemas lineares e o algoritmo FAS para problemas não-lineares. Portanto, embora as equações de Laplace e Navier sejam lineares, o esquema FAS é mais rápido do que o CS. Este resultado está coerente com as conclusões de Pinto e Marchi (2006) que também concluiram que o esquema FAS é mais rápido que o esquema CS no problema de Laplace bidimensional.

Para as equações de Navier com $N = 513 \times 513$, por exemplo, o esquema FAS é cerca 1,5 vez mais rápido que o esquema CS e na malha $N = 1025 \times 1025$, 1,4 vez. No caso da equação de Laplace, na mesma malha, o esquema FAS é aproximadamente 3,2 vezes mais rápido que o esquema CS. Essa vantagem é praticamente a mesma em qualquer $N$, visto que as curvas da Fig. 42 mostram ser praticamente paralelas para $N > 33 \times 33$.

No caso de problemas lineares, Brandt (1977) mostra preferência pelo esquema CS em relação ao esquema FAS. De acordo com Brandt, cada ciclo iterativo do esquema FAS é mais caro computacionalmente se comparado ao esquema CS, cuja justificativa é a quantidade de cálculos necessários no esquema FAS. Pinto et al. (2005) fizeram comparações entre os esquemas CS e FAS usando a equação de Laplace e também concluiram que o esquema FAS é um pouco mais rápido que o esquema CS.

### 5.1.5 Esforço computacional

Para determinar a ordem de convergência do *solver* associado aos métodos e o comportamento da curva em função do tempo de CPU, Fig. 42, realizou-se um ajuste geométrico de mínimos quadrados, cuja função considerada é dada por

$$t_{CPU}(N) = cN^p, \tag{5.2}$$

aqui, $p$ representa a ordem do *solver* associado ao método empregado, ou a inclinação de cada curva da Fig. 41, e $c$ é uma constante que depende do método e do *solver*. Quanto mais próximo da unidade estiver o valor de $p$, melhor é o desempenho do algoritmo usado. Teoricamente, o método *multigrid* ideal tem $p = 1$, o que significa que o tempo de CPU cresce proporcionalmente com o aumento do tamanho da malha ($N$).

A Tab. 7 mostra o coeficiente $c$ e o expoente $p$ obtidos por ajuste geométrico de mínimos quadrados, dado pela Eq. (5.2), para os três problemas empregando os esquemas CS e FAS com $N > 33 \times 33$. Os resultados confirmam que o tempo de CPU do método

*multigrid* e *solver* MSI cresce quase linearmente com o aumento de $N$. O valor de $p$ é muito pouco afetado pelo número de equações e sua complexidade (linear ou não-linear), e pelo tipo de esquema (CS ou FAS); o efeito relevante é o uso ou não de *multigrid*. Os valores de $p$ próximos a dois para o método *singlegrid* com o método MSI concordam com os valores teóricos (BURDEN e FAIRES, 2003), bem como os valores próximos à unidade obtidos para o método *multigrid*.

Tabela 7: Expoente ($p$) da Eq. 5.2 com o *solver* MSI.

| Problema | *singlegrid* | | *multigrid* | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | FAS | | CS | |
| | $c$ | $p$ | $c$ | $p$ | $c$ | $p$ |
| Equação de Laplace | 6,6E-09 | 2,06 | 2,4E-06 | 1,07 | 8,7E-06 | 1,06 |
| Equações de Navier | 8,0E-08 | 2,01 | 1,0E-05 | 1,15 | 5,2E-05 | 1,05 |
| Equações de Burgers | 8,1E-08 | 1,92 | 5,8E-06 | 1,07 | — | — |

### 5.1.6 Conclusão da Etapa I

Nesta etapa foram estudados a influência de vários parâmetros do método *multigrid* geométrico, com os esquemas CS e FAS, sobre o tempo de CPU necessários para resolver a equação de Laplace e dois problemas com equações acopladas. A equação de Laplace e equações de Navier são lineares e as equações de Burgers não-lineares. As equações foram discretizadas com o Método de Diferenças Finitas em malhas uniformes com aproximações de segunda ordem para os termos difusivos. Nas equações de Burgers os termos advectivos foram discretizados com aproximações de primeira ordem. Os parâmetros analisados foram: número de iterações intenas ($\sigma$); número de níveis de malha ($L$); tamanho do problema ($N$); e o desempenho dos esquemas CS e FAS nos problemas lineares.

Os resultados mostram que o parâmetro número de iterações internas influencia significativamente o tempo de CPU nos três problemas testados, mas não é influenciado pelo número de equações do problema. O mesmo pode ser observado em relação aos parâmetros número de níveis $L$ e tamanho do problema $N$. As curvas referentes ao número de níveis obtidas para as equações com acoplamento seguem o mesmo comportamento que as obtidas para a equação de Laplace (1 equação), como pode ser visto nas Figs. 39 e 40. Em relação a influência do tamanho do problema no tempo de CPU, Fig. 41, nota-se que a curva obtida para a equação de Laplace, tanto no esquema CS quanto no FAS, cresce

com o aumento do número de pontos, com a mesma inclinação na comparação com as equações de Navier e de Burgers. A distância que se percebe de uma curva para outra é devido apenas a complexidade de cada problema. Ainda, independente dos esquemas, CS ou FAS, as curvas obtidas para as equações de Navier são muito semelhantes, Fig. 42. Portanto, com estes resultados, conclui-se que o acoplamento das equações não influenciou os parâmetros do método *multigrid*.

## 5.2 ETAPA II: EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Nesta seção estudou-se a performance do método *multigrid* para as equações de Navier-Stokes nas formulações $\psi - \mathbf{v}$ e $\psi - \omega$. Sobre o tempo de CPU investiga-se o efeito causado por: número de iterações internas no solver ($\sigma$); número de níveis de malha ($L$); número de pontos da malha ($N$); e número de Reynolds, com $Re = 100$, 400 e 1000. Os parâmetros são analisados para cada formulação separadamente.

Devido as várias possibilidades de combinação de parâmetros, foram realizadas aproximadamente 500 simulações para cada formulação. Nas seções seguintes são comentados alguns dos resultados, sendo, portanto, os mais relevantes para o foco dessa pesquisa. Soluções em malhas grossas com altos Reynolds nem sempre é possível e, malhas muito finas, geralmente requerem muito tempo de CPU. Aqui, o estudo dos parâmetros foi realizado separadamente para dada formulação.

### 5.2.1 Número de iterações internas ($\sigma$)

#### 5.2.1.1 Função de Corrente e Velocidade: $\psi - \mathbf{v}$

Para cada malha, isto é, $N = 65 \times 65, 129 \times 129, 257 \times 257, 513 \times 513$ e $1025 \times 1025$ e cada número de Reynolds, foram realizadas simulações para encontrar o $\sigma$ que resultasse no menor tempo de CPU. Para alguns valores de $\sigma$ o processo iterativo divergiu. As Figs. 43, 44 e 45, ilustram o efeito do número de iterações internas ($\sigma$) sobre o tempo de CPU para $Re = 100$, 400 e 1000, respectivamente. Em cada curva indica-se o valor do $\sigma$, através do símbolo "estrela", que resulta no menor tempo de CPU.

Nesta formulação nota-se que $\sigma_{ótimo}$ não é o mesmo em todas as malhas, ou seja, não

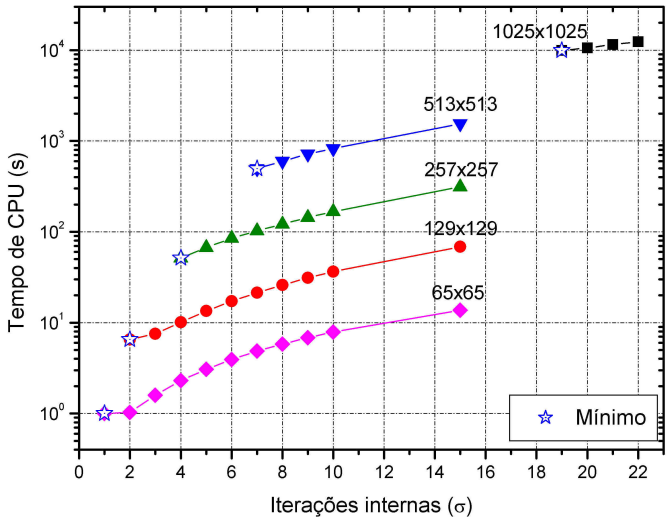



Figura 43: Efeito de $\sigma$ sobre o tempo de CPU para $Re = 100$ na formulação $\psi - \mathbf{v}$.

apresenta nenhum comportamento que possa ser estabelecido como padrão, como aquele observado nas curvas obtidas para esse parâmetro na seção 5.1.1. Para $\sigma < \sigma_{ótimo}$, Fig. 43, o problema não convergiu. As curvas do tempo de CPU, para $Re = 100$, apresentam crescimento a partir de $\sigma_{ótimo}$ em todas as malhas, evidenciando um padrão semelhante ao observado por Santiago e Marchi (2007) para a equação de Laplace bidimensional. Para cada malha, em geral o menor tempo de CPU foi obtido com o menor valor de $\sigma$. Aumentando-se o valor de $\sigma$, aumenta-se significativamente o tempo de CPU. Este comportamento, da Fig. 43, não é o mesmo quando se aumenta o número de Reynolds.

Nas Figs. 44 e 45 têm-se os valores de $\sigma$ para $Re = 400$ e 1000, respectivamente. Nessa análise verificou-se que o parâmetro $\sigma$ é bastante sensível ao número de Reynolds e ao número de pontos da malha $N$, especialmente quando $Re > 100$. Para $Re = 1000$, na malha $257 \times 257$, por exemplo, o menor tempo de CPU foi obtido com $\sigma = 48$.

A Tab. 8 mostra os valores de $\sigma_{ótimo}$ obtidos nesta análise. Nota-se na tabela que na mesma malha o valor de $\sigma_{ótimo}$ cresce com o aumento do número de Reynolds, exceto na malha $1025 \times 1025$ e, quando fixa-se o número de Reynolds, o $\sigma_{ótimo}$ cresce com o aumento no número de pontos da malha, exceto com $Re = 1000$, onde pode-se ver um caso isolado com $\sigma = 48$ na malha $257 \times 257$.

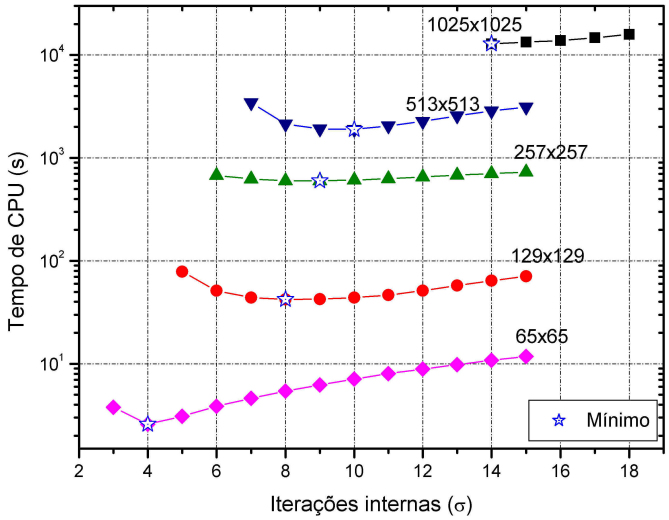



Figura 44: Efeito de $\sigma$ sobre o tempo de CPU para $Re = 400$ na formulação $\psi - \mathbf{v}$.

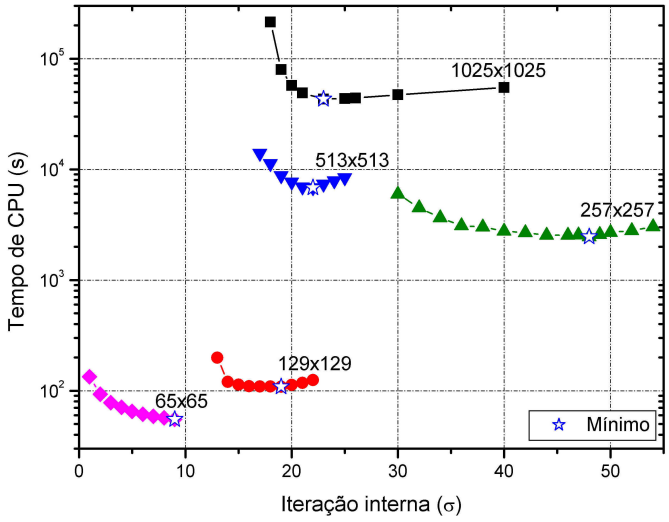



Figura 45: Efeito de $\sigma$ sobre o tempo de CPU para $Re = 1000$ na formulação $\psi - \mathbf{v}$.

Tabela 8: Número ótimo de iterações internas na formulação $\psi - \mathbf{v}$.

| Malha | $\sigma_{ótimo}$ | | |
|---|---|---|---|
| | $Re = 100$ | $Re = 400$ | $Re = 1000$ |
| $65 \times 65$ | 1 | 4 | 9 |
| $129 \times 129$ | 2 | 8 | 19 |
| $257 \times 257$ | 4 | 9 | 48 |
| $513 \times 513$ | 7 | 10 | 22 |
| $1025 \times 1025$ | 19 | 14 | 23 |

#### 5.2.1.2 Função de Corrente e Vorticidade: $\psi - \omega$

Nesta formulação observa-se que o número de iterações internas, em relação a formulação $\psi - \mathbf{v}$, é menos sensível ao número de Reynolds e ao número de pontos da malha

computacional. Entretanto, o parâmetro de relaxação $\theta$ do *solver* SOR é bastante afetado pelo número de Reynolds, principalmente para $Re \geq 1000$ em malhas mais grossas.

Na equação da vorticidade, para $Re = 100$, utilizou-se $\theta = 0,8$ como parâmetro de relaxação em todas as malhas. O valor de $\theta$ foi reduzido gradualmente com o aumento do número de Reynolds, como pode ser observado na Tab. 2. Em malhas grossas com elevados números de Reynolds foi necessário uma forte subrelaxação na solução aproximada da vorticidade. Por exemplo, para obter convergência em uma simulação com $Re = 1000$, na malha $513 \times 513$ pontos, utilizou-se $\theta = 0,7$, porém, nesta mesma malha com $Re = 5000$, foi necessário $\theta = 0,001$.

As Figs. 46, 47 e 48, ilustram o efeito do número de iterações internas ($\sigma$) sobre o tempo de CPU para o caso da formulação $\psi - \omega$ com $Re = 100$, 400 e 1000, respectivamente.. Em cada curva o menor valor de $\sigma$ é indicado através do símbolo "estrela".

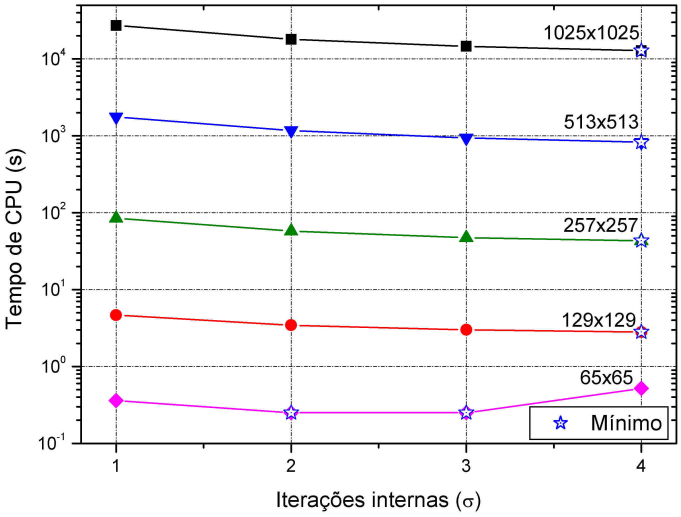



Figura 46: Efeito de $\sigma$ sobre o tempo de CPU para $Re = 100$ na formulação $\psi - \omega$.

Na Fig. 46 observa-se que o $\sigma_{ótimo}$ difere apenas na malha $65 \times 65$, mas o tempo de CPU nessa malha para obter a convergência é de 0,5 segundo. Ou seja, para $Re = 100$ pode-se estabelecer $\sigma_{ótimo} = 4$. Um fato interessante que pode ser observado na Fig. 46 é que para $\sigma > 4$ o processo iterativo divergiu em todas as malhas. Esta divergência está relacionada ao parâmetro de relaxação; para outros valores de $\theta$ o processo iterativo converge, porém o tempo de CPU é maior.

Na Fig. 47 tem-se $\sigma_{ótimo} = 4$ nas malhas mais finas, e $\sigma_{ótimo} = 5$ nas malhas mais grossas. A diferença entre $\sigma = 4$ e $\sigma_{ótimo} = 5$, nas malhas $65 \times 65$ e $129 \times 129$, é menor que 6%, portanto, para $Re = 400$ pode-se recomendar também que $\sigma_{ótimo} = 4$. No caso de $Re = 1000$, Fig. 48, observou-se uma variação maior no $\sigma_{ótimo}$ com a variação do número

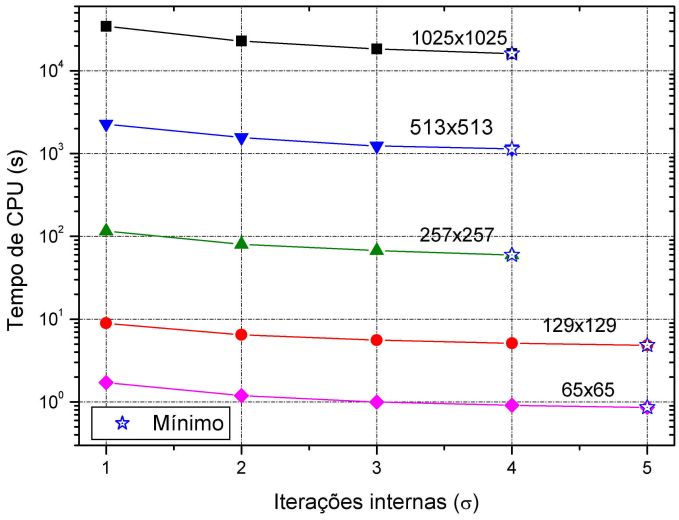



Figura 47: Efeito de $\sigma$ sobre o tempo de CPU para $Re = 400$ na formulação $\psi - \omega$.

de pontos da malha, onde pode-se recomendar $\sigma_{ótimo} = 2$ ou 4.

Em todas as malhas e números de Reynolds o tempo de CPU tende a diminuir assintoticamente para o $\sigma_{ótimo}$, contudo, deve-se ressaltar também que para $\sigma > \sigma_{ótimo}$ o processo iterativo divergiu, com exceção apenas na malha $65 \times 65$ com $Re = 100$, que obteve-se convergência também com $\sigma = 4$, mas divergiu para $\sigma > 4$.

Embora seja fácil ver os valores de $\sigma_{ótimo}$ nas respectivas figuras, esses valores também estão mostrados na Tab. 9 para cada número de Reynolds e tamanho de malha.

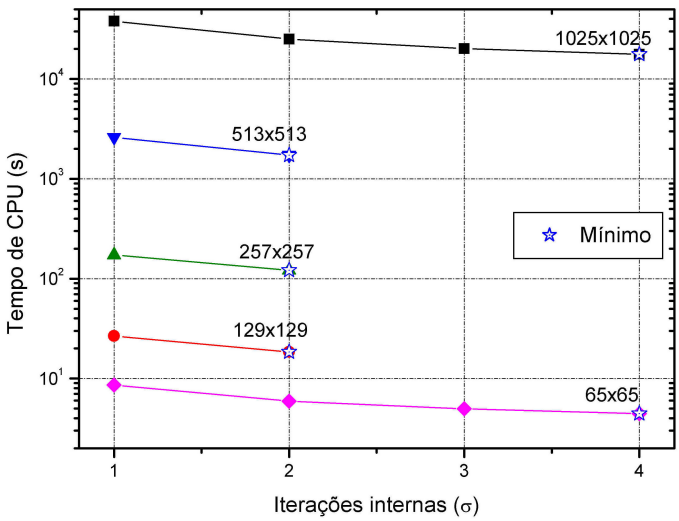



Figura 48: Efeito de $\sigma$ sobre o tempo de CPU para $Re = 1000$ na formulação $\psi - \omega$.

Tabela 9: Número ótimo de iterações internas na formulação $\psi - \omega$.

| Malha | $\sigma_{ótimo}$ | | |
|---|---|---|---|
| | $Re = 100$ | $Re = 400$ | $Re = 1000$ |
| $65 \times 65$ | 3 | 5 | 4 |
| $129 \times 129$ | 4 | 5 | 2 |
| $257 \times 257$ | 4 | 4 | 2 |
| $513 \times 513$ | 4 | 4 | 2 |
| $1025 \times 1025$ | 4 | 4 | 4 |

### 5.2.2 Número de níveis ($L$)

O estudo sobre a influência do número de níveis de malha ($L$), assim como a análise feita na Etapa I, seção 5.1.2, leva em consideração o número de iterações internas ótimo ($\sigma_{ótimo}$) encontrado na seção 5.2.1.

No caso das equações de Navier-Stokes, mesmo com o método *multigrid*, o tempo computacional necessário em malhas muito finas ($h \to 0$) é demasiadamente alto. Por este motivo, obter soluções em malhas finas com poucos níveis, por exemplo $L = 2$ ou 3 na malha $1025 \times 1025$, demanda tempo de CPU proibitivo do ponto de vista computacional.

#### 5.2.2.1 Função Corrente e Velocidade: $\psi - \mathbf{v}$

As Figs. 49, 50 e 51 ilustram o efeito do número de níveis ($L$) sobre o tempo de CPU para $Re = 100$, 400 e 1000, respectivamente. O símbolo "estrela" indica o $L$ que resultou no menor tempo de CPU em cada curva, ou seja, o $L_{ótimo}$. Para $Re = 100$, Fig. 49, assim como verificado no estudo do $\sigma$, seção 5.2.1.1, as curvas exibem um padrão coerente com a literatura em estudos feitos com outros problemas, independente de $N$ (SANTIAGO e MARCHI, 2008; PINTO e MARCHI, 2007): o valor ótimo do número de níveis foi obtido com o *multigrid* percorrendo todos os níveis de malhas, ou seja, $L_{ótimo} = L_{máximo}$. Contudo, a diferença relativa entre o tempo de CPU para $L_{ótimo}$ e $L_{máximo} - (1 \text{ a } 4)$ é em média 5%, para qualquer malha. Quando $L < L_{máximo} - 4$ o tempo de CPU apresenta um aumento significativo.

As Figs. 50 e 51 ilustram os resultados para $Re = 400$ e 1000, respectivamente. Nota-se que o tempo de CPU também apresenta uma variação pouco significativa à medida

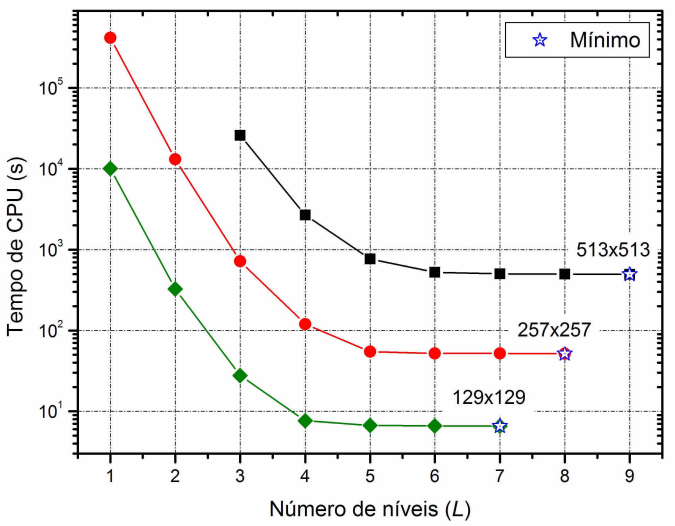



Figura 49: Efeito do número de níveis sobre o tempo de CPU na formulação $\psi-\mathbf{v}$ com $Re = 100$.

que se diminui o número de níveis até um certo $L$, ficando praticamente estável quando $L > L_{máximo} - (1 \text{ a } 4)$. Ou seja, o número de níveis ótimo pode ser considerado $L_{ótimo} = L_{máximo} - (1 \text{ a } 4)$. Quando $N = 513 \times 513$, observa-se um intervalo maior para o número de níveis ótimo, isto é, $L_{ótimo} = L_{máximo} - (1 \text{ a } 6)$, permanecendo com o tempo de CPU praticamente estável com uma variação, em média, menor que 3% entre $L_{máximo} - (1 \text{ a } 6)$ e $L_{ótimo}$. Quando $N = 129 \times 129$ é mais evidente que o menor tempo de CPU ocorre com o máximo número de níveis, isto é, $L_{ótimo} = L_{máximo}$.

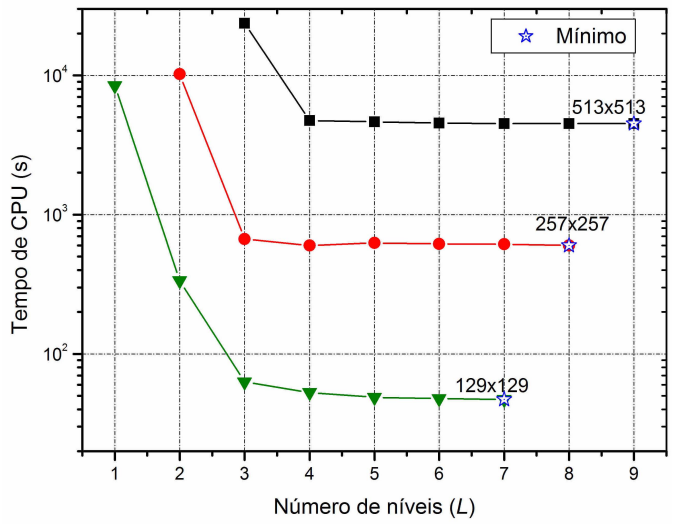



Figura 50: Efeito do número de níveis na formulação $\psi - \mathbf{v}$ com $Re = 400$.

Os resultados obtidos para o parâmetro $L$ na formulação $\psi - \mathbf{v}$, com o *multigrid*, estão coerentes com resultados da literatura, mais precisamente para $Re = 100$.

Tannehill et al. (1997) afirmam que o uso de $L = 4$ ou 5 níveis na equação de

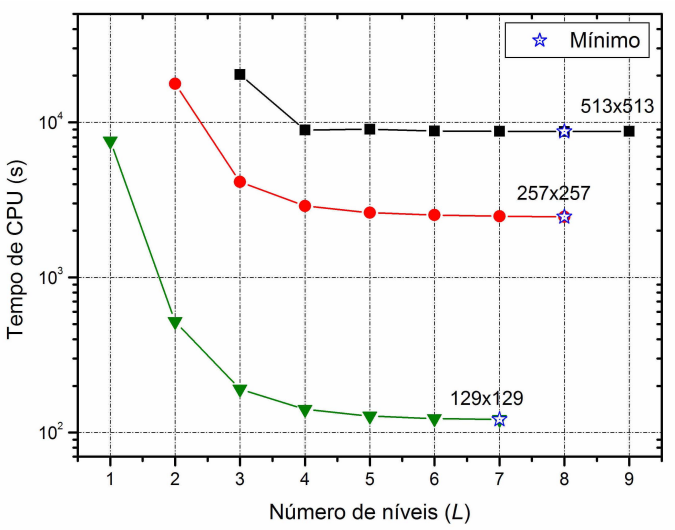



Figura 51: Efeito do número de níveis na formulação $\psi - \mathbf{v}$ com $Re = 1000$.

Laplace bidimensional, com $N = 129 \times 129$ pontos, requer quase que o mesmo tempo de CPU que com $L = 7$ níveis. Em um estudo do *multigrid* realizado com o problema bidimensional de advecção-difusão Rabi e De-Lemos (2001) sugerem não menos que 4 níveis. Pinto e Marchi (2006, 2007) também encontraram que o tempo de CPU $L_{ótimo}$ é próximo do tempo de CPU $L_{máximo}$ no problema de Laplace bidimensional. Santiago e Marchi (2007, 2008) encontraram os mesmos resultados para as equações de Navier e de Burgers. Os resultados encontrados para este parâmetro concordam com os resultados de Pinto e Marchi (2006, 2007), principalmente quando $Re = 400$ ou 1000.

#### 5.2.2.2 Função de Corrente e Vorticidade: $\psi - \omega$

As Figs. 52, 53 e 54 ilustram a influência do número de níveis ($L$) sobre o tempo de CPU, para $Re = 100$, 400 e 1000, respectivamente. O símbolo "estrela" indica o $L$ que resultou no menor tempo de CPU em cada curva, ou seja, o $L_{ótimo}$.

As curvas apresentam padrões semelhantes em todos os tamanhos de malha testado, independente do número de Reynolds. O número de níveis que resultou no menor tempo de CPU, em qualquer malha e qualquer número de Reynolds, foi o máximo possível, ou seja, em qualquer caso, $L_{ótimo} = L_{máximo}$. A variação do tempo de CPU entre $L_{máximo} - (1$ a $3)$ e $L_{ótimo}$ mantém-se praticamente estável de uma malha para a outra. Na malha $N = 513 \times 513$ por exemplo, considerando os três números de Reynolds, a variação média foi de 7,4%; na malha $257 \times 257$ foi de 8,3% e na malha $129 \times 129$ a variação média foi de

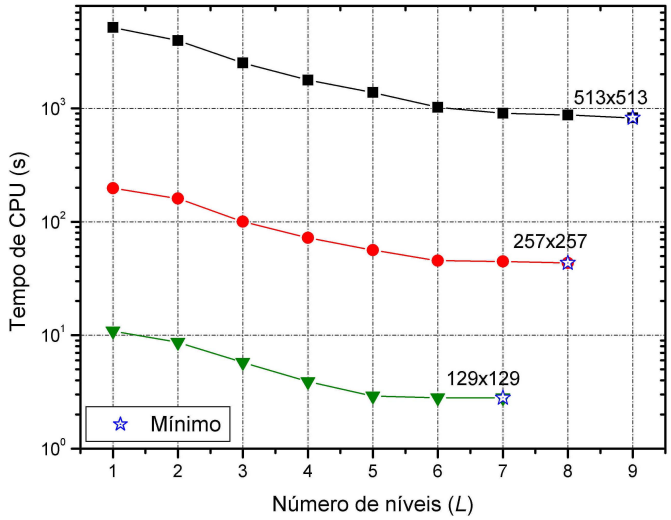



Figura 52: Número de níveis com $Re = 100$, formulação $\psi - \omega$.

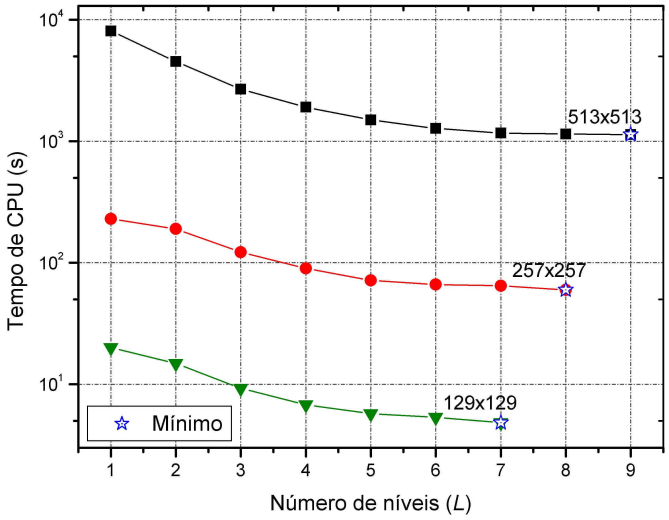



Figura 53: Número de níveis com $Re = 400$ na formulação $\psi - \omega$.

17,3%, sendo maior quando $Re = 1000$. Aparentemente, quanto mais fina a malha, menor será a diferença do tempo de CPU entre $L_{ótimo}$ e $L_{máximo} - (1 \text{ a } 3)$, com qualquer número de Reynolds.

### 5.2.3 Tamanho do problema ($N$)

A presente análise é concernente à influência do tamanho do problema sobre o tempo de CPU. São considerados o número ótimo de iterações internas ($\sigma_{ótimo}$) e o número ótimo de níveis de malha ($L_{ótimo}$) obtidos nas seções 5.2.1 e 5.2.2. Para malhas muito grossas, em alguns casos, não foi possível obter solução numérica para $Re = 400$ ou 1000. Altos

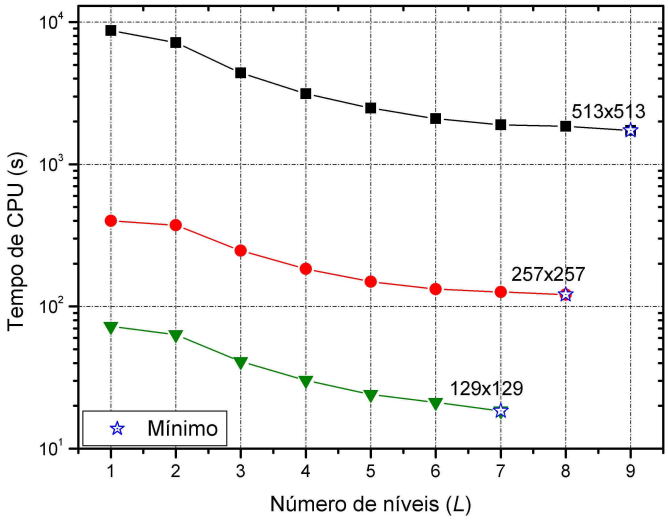
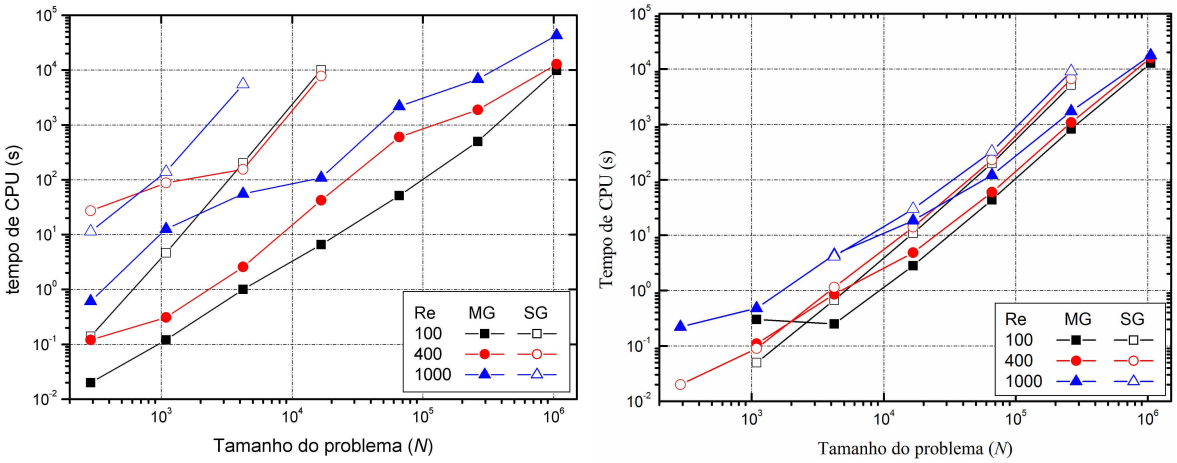



Figura 54: Número de níveis com $Re = 1000$ na formulação $\psi - \omega$.

números de Reynolds em malhas muito grossas produzem erros de discretização grosseiros ou o processo iterativo diverge.

Por outro lado, o método *singlegrid* requer tempo de CPU demasiadamente alto em malhas finas (quando $N$ é grande), por isso, a análise limitou-se a problemas de tamanhos $N = 17 \times 17$ até $N = 129 \times 129$ na formulação $\psi - \mathbf{v}$; e até $N = 513 \times 513$ na formulação $\psi - \omega$. No método *multigrid* os resultados são mostrados para $N = 17 \times 17$ até $N = 1025 \times 1025$ nas duas formulações. Na Fig. 55, são apresentadas as curvas do tempo de CPU dos métodos *multigrid* e *singlegrid* das duas formulações.




(a) Formulação $\psi - \mathbf{v}$ (b) Formulação $\psi - \omega$

Figura 55: Tempo de CPU ($s$) *versus* tamanho do problema $N$.

De acordo com Ferziger e Peric (2001), quanto mais fina a malha, isto é, quanto maior o número de pontos da malha computacional, maior é a vantagem do método *multigrid* em relação ao método *singlegrid*, ou seja, maior é o valor de $S$ na Eq. (5.1).

Esta propriedade pode ser observada nas curvas da Fig. 55, sendo mais acentuada na Fig. 55a da formulação $\psi - \mathbf{v}$ e menos acentuada na Fig. 55b da formulação $\psi - \omega$. Nota-se que as curvas relativas ao *singlegrid* se distanciam das curvas do método *multigrid*, crescendo muito mais rápido, na medida em que a malha é refinada, independente do número de Reynolds. Por exemplo, na formulação $\psi - \mathbf{v}$, com $Re = 100$ e 400, na malha $65 \times 65$, verificou-se que o método *multigrid* é 203 e 60 vezes mais rápido que o *singlegrid*; e na malha $129 \times 129$ esses valores são 1543 e 185, respectivamente. Estes resultados são suficientes para dar uma idéia do quão demorado seria encontrar a solução em malha muito refinada, sem usar o método *multigrid*. Com a formulação $\psi - \mathbf{v}$, Gupta e Kalita (2005) obtiveram soluções com o método *singlegrid* em malhas com no máximo $161 \times 161$ pontos. No presente trabalho apresenta-se análises dos parâmetros do método *multigrid* em malhas com até $1025 \times 1025$ pontos e $Re \leq 1000$. Na malha $513 \times 513$ pontos, apresenta-se solução inclusive com $Re = 5000$ (seção 4.2 e Tab. 4 do apêndice A), neste caso o tempo de CPU foi de 5,3 horas de processamento. Soluções com $Re > 5000$ também foram obtidas em malhas mais grossas, no entanto, para elevados números de Reynolds foi necessário $\theta \ll 1$, como observado também por Gupta e Kalita (2005).

No caso da formulação $\psi - \omega$, o desempenho do método *multigrid* em relação ao *singlegrid* não foi tão bom quanto o esperado, mas semelhante ao encontrado também por Ghia et al. (1982). Este comportamento pode estar relacionado com o tipo de formulação, ou seja, resolução de duas equações diferenciais parciais do tipo Poisson e o cálculo das condições de contornos da vorticidade, que é acoplado com a função de corrente e calculado iterativamente. Na Fig. 55b pode-se observar o desempenho do método *multigrid* nessa formulação. A partir de $N = 65 \times 65$, percebe-se uma melhora com o aumento do número de pontos da malha, mas diminui com o aumento do número de Reynolds; este comportamento também foi observado por outros autores (VANKA, 1986; YAN et al., 2007). Destaca-se que para $Re > 100$, o tempo de CPU para obter a solução numérica com a formulação $\psi - \omega$ é, em geral, menor que com a formulação $\psi - \mathbf{v}$. Na Tab. 10 estão os fatores de aceleração ($S$), Eq. (5.1), encontrados para as duas formulações. Como já comentado anteriormente, obter soluções numéricas na formulação $\psi - \mathbf{v}$, em malhas refinadas, são demoradas para alcançar convergência.

Na Tab. 10 tem-se uma visão geral do tempo de CPU do método *multigrid* e *singlegrid* e os respectivos fatores de aceleração. Nas duas formulações, observa-se que o tempo de CPU cresce significativamente com o aumento do número de Reynolds, em qualquer malha. O mesmo ocorre com o fator de aceleração: ele aumenta com o aumento do número de pontos da malha, mas diminui com o aumento do número de Reynolds.

Tabela 10: Tempo de CPU ($s$) dos métodos *multigrid* e *singlegrid* das duas formulações com os respectivos fatores de aceleração.

| Malha | $Re$ | $\psi - \mathbf{v}$ | | | $\psi - \omega$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | MG/CPU | SG/CPU | $S$ | MG/CPU | SG/CPU | $S$ |
| $33 \times 33$ | 100 | 0,12 | 4,64 | 38,7 | 0,3 | 0,05 | 0,2 |
| | 400 | 0,31 | 87,78 | 283,2 | 0,11 | 0,09 | 0,8 |
| | 1000 | 12,7 | 139,48 | 11,0 | — | — | — |
| $65 \times 65$ | 100 | 1 | 203,42 | 203,4 | 0,25 | 0,67 | 2,7 |
| | 400 | 2,59 | 154,3 | 59,6 | 0,86 | 1,14 | 1,3 |
| | 1000 | 55,25 | 4878,89 | 88,3 | 4,45 | 4,12 | 0,9 |
| $129 \times 129$ | 100 | 6,55 | 10108,77 | 1543,3 | 2,81 | 10,88 | 3,9 |
| | 400 | 42,25 | 7805,25 | 184,7 | 4,84 | 14,04 | 2,9 |
| | 1000 | 108,55 | 7506,58 | 69,2 | 18,44 | 29,89 | 1,6 |
| $257 \times 257$ | 100 | 51,45 | — | — | 43,34 | 197,36 | 4,6 |
| | 400 | 599,8 | — | — | 59,64 | 229,8 | 3,9 |
| | 1000 | 2465,28 | — | — | 121,33 | 322,92 | 2,7 |
| $513 \times 513$ | 100 | 496,33 | — | — | 826,06 | 5152,58 | 6,2 |
| | 400 | 1888,52 | — | — | 1080,89 | 6646,33 | 6,1 |
| | 1000 | 6839,41 | — | — | 1727,64 | 9147,41 | 5,3 |

Comportamento como este foi observado também por outros autores (VANKA, 1986; YAN et al., 2007). Deve-se ressaltar que apesar da formulação $\psi - \mathbf{v}$ apresentar maiores fatores de aceleração que a formulação $\psi - \omega$, o tempo de execução do *singlegrid* com a $\psi - \omega$ é menor que a de $\psi - \mathbf{v}$.

### 5.2.4 Esforço computacional

A ordem do *solver* associado ao método e o comportamento da curva em função do tempo de CPU, é feito aqui da mesma forma como na seção 5.1.5, ou seja, realizou-se um ajuste geométrico da curva de mínimos quadrados cuja função considerada é dada pela Eq. (5.2). O coeficiente $c$ e a ordem $p$ do *solver*, dado pela Eq. (5.2), para as duas formulações com $N > 17 \times 17$ pontos, então mostrados na Tab. 11.

Os resultados da Tab. 11 indicam que o tempo de CPU do método *multigrid* com o *solver* SOR não cresce proporcionalmente com o aumento do número de pontos da malha. Para um crescimento linear o valor de $p$ deveria ser igual a 1 ou muito próximo da unidade, que é o ideal para o método *multigrid*. Pode-se observar na Tab. 11 que a ordem $p$ no método *multigrid* decresce com o aumento do número de Reynolds nas duas formulações.

Tabela 11: Expoente ($p$) da Eq. 5.2 para o *solver* SOR.

| $Re$ | $\psi - \mathbf{v}$ | | | | $\psi - \omega$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | MG | | SG | | MG | | SG | |
| | $c$ | $p$ | $c$ | $p$ | $c$ | $p$ | $c$ | $p$ |
| 100 | 2,1E-06 | 1,6 | 2,1E-08 | 2,8 | 1,4E-08 | 2,0 | 9,0E-09 | 2,2 |
| 400 | 1,5E-05 | 1,5 | 1,1E-02 | 1,3 | 4,0E-07 | 1,7 | 5,4E-08 | 2,0 |
| 1000 | 7,3E-04 | 1,3 | 2,0E-05 | 2,3 | 8,2E-06 | 1,5 | 5,9E-07 | 1,9 |

Verifica-se no caso do *multigrid*, que a ordem $p$ aproxima-se do valor esperado ($p = 1$) quando $Re = 1000$, mas para os números de Reynolds menores os valores de $p$ não são bons. No caso do *singlegrid* na formulação $\psi - \mathbf{v}$ verifica-se uma oscilação significativa no valor $p$ com a variação do número de Reynolds. Na formulação $\psi - \omega$ os valores de $p$ no método *singlegrid* apresentam um comportamento mais estável, próximo de 2.

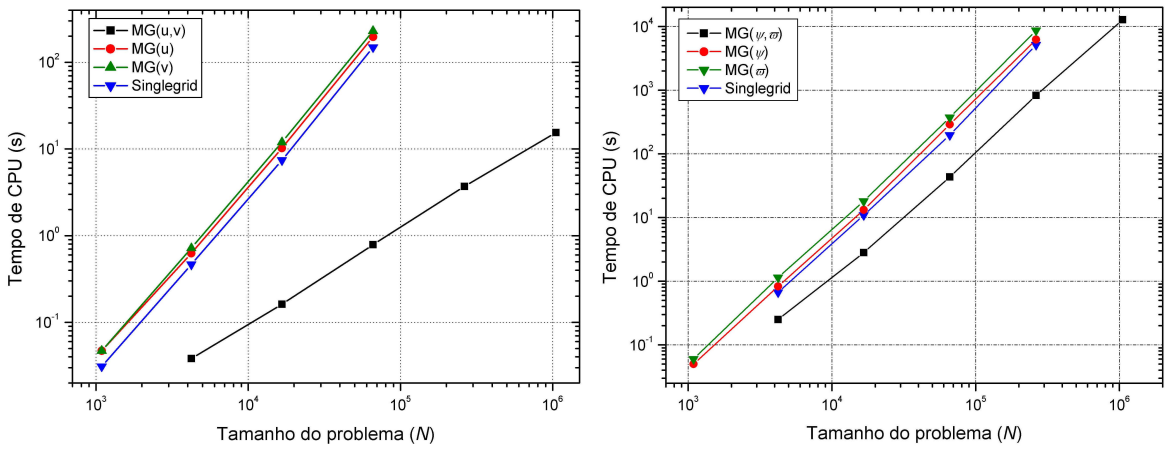
Ainda que os resultados obtidos para o *multigrid* não tenham se aproximado da desejável convergência linear, deve-se destacar que houve uma considerável redução no tempo de CPU em relação ao método *singlegrid*. O ganho tende a ser menor com elevados números de Reynolds, mas continua sendo importante à medida que um número maior de pontos é utilizado na malha computacional, como pode ser observado na Fig. 55

### 5.2.5 Estudo em modelos com duas equações e *multigrid* apenas em uma

Aqui, brevemente, é feita uma análise da performance do método *multigrid* aplicado somente a uma equação, quando se resolve modelos matemáticos com duas equações acopladas. Alguns autores utilizam o método *multigrid* somente em uma equação, em modelos matemáticos acoplados envolvendo a equação de Poisson. Em geral, justificam o seu uso com a afirmação de que a equação de Poisson é a que demanda mais tempo de CPU (SOUZA, 2003; LARSSON et al., 2005).

Para a presente análise utilizou-se as equações de Burgers, que envolvem o acoplamento das equações de conservação da Quantidade de Movimento Linear nas direções coordenadas, e as equações de Navier-Stokes na formulação $\psi - \omega$, que envolvem o acoplamento da função de corrente e da vorticidade. As simulações foram realizadas com $N \geq 33 \times 33$, exceto na formulação $\psi - \omega$ cujo tempo de CPU nessa malha é nulo no *singlegrid* e no *multigrid*.

Foram escritos códigos computacionais específicos para cada caso. O procedimento consiste em atualizar uma das variáveis, $u$ ou $v$ (equações de Burgers), ou $\psi$ ou $\omega$ (formulação $\psi - \omega$), somente na malha mais fina, enquanto a outra percorre o ciclo V do Algoritmo 2.5.1, com $\gamma = 1$.




(a) Equações de Burgers

(b) Navier-Stokes $\psi - \omega$

Figura 56: Análise do desempenho do método *multigrid* aplicado em apenas uma equação em problemas com duas equações.

A Fig. 56 mostra a evolução do tempo de CPU com o refinamento da malha obtido para os dois problemas testados. Na Fig. 56a tem-se os resultados para as equações de Burgers e na Fig. 56b da formulação $\psi - \omega$. Na legenda da Fig. 56a, MG$(u, v)$ significa que o problema foi resolvido com o *multigrid* nas duas variáveis; MG$(u)$ somente em $u$ e MG$(v)$ somente em $v$; de forma análoga na legenda da Fig. 56b.

Para os dois problemas analisados, os resultados mostram que a ordem de convergência ($p = 1$) do *multigrid* foi degenerada, ou seja, não é vantajoso usar o método *multigrid* em apenas uma equação quando o modelo matemático envolve duas. As curvas do tempo de CPU do *singlegrid* e do *multigrid* em apenas uma equação estão muito próximas, e crescem com a mesma inclinação, independente da variável que é resolvida com o *multigrid*. O pequeno aumento no tempo de CPU observado nas curvas do MG$(u)$ e MG$(v)$, MG$(\psi)$ e MG$(\omega)$, Figs. 56a e 56b, respectivamente, pode ser explicado pelo aumento da complexidade no processo iterativo.

### 5.2.6 Conclusão da Etapa II

Nesta Etapa estudou-se a influência de alguns parâmetros do método *multigrid* geométrico sobre o tempo de CPU necessário para resolver as equações de Navier-Stokes com

a recente formulação $\psi - \mathbf{v}$ e com a formulação $\psi - \omega$. As equações foram discretizadas com o Método de Diferenças Finitas, em malhas uniformes com aproximações de segunda ordem. Os parâmetros analisados foram: número de iterações intenas ($\sigma$); número de níveis de malha ($L$); tamanho do problema ($N$) e números de Reynolds ($Re$).

Os resultados mostraram que na formulação $\psi - \mathbf{v}$ o parâmetro "número de iterações internas"é afetado pelo tamanho do problema e pelo número de Reynolds. Em contraste com as análises feitas na seção 5.1 para o $\sigma$, não foi possível estabelecer um valor ótimo para o $\sigma$ para todas as malhas e todos os números de Reynolds. Na formulação $\psi - \omega$ tem-se uma menor variação no $\sigma_{ótimo}$, mostrando-se menos sensível ao tamanho do problema e ao número de Reynolds.

No estudo do parâmetro $L$, com a formulação $\psi - \mathbf{v}$, pôde-se notar uma forte influência do número de Reynolds. Além disso, quando aumenta-se o número de Reynolds percebe-se uma menor variação no tempo de CPU para $L$ próximo de $L_{máximo}$. Em todos os casos, o menor tempo de CPU foi obtido com $L$ próximo de $L_{máximo}$. Na formulação $\psi - \omega$, para qualquer número de Reynolds e qualquer tamanho de $N$, o menor tempo de CPU foi obtido com $L = L_{máximo}$, ou seja $L_{ótimo} = L_{máximo}$.

Em relação a influência do tamanho do problema ($N$) no tempo de CPU, verificou-se que na formulação $\psi - \mathbf{v}$ o método *singlegrid* tem taxa de convergência muito lenta, entretanto, o método *multigrid* apresenta uma redução bastante significativa no tempo de CPU na comparação com o *singlegrid*. Na formulação $\psi - \omega$ nota-se que o tamanho do problema influencia muito pouco na taxa de convergência do *multigrid*. Nota-se também que o número de Reynolds é o principal responsável pela redução no fator de aceleração, nas duas formulações, mas menos acentuado na formulação $\psi - \omega$.

Uma importante constatação que se faz neste estudo, é que não existe vantagens em utilizar o método *multigrid* em apenas uma equação em problemas que envolvem acoplamento de duas equações. Ao optar pelo método *multigrid* para acelerar a convergência do método iterativo, deve-se usar nas duas equações envolvidas.

# 6 CONCLUSÃO

O principal objetivo desta tese foi o estudo de parâmetros do método *multigrid* para cinco modelos matemáticos. Para alcançar os objetivos primeiramente foi realizado um estudo preliminar em que analisou-se o desempenho do método *multigrid* para três modelos com diferentes características e complexidades, ambos bidimensionais em estado estacionário: equação de Laplace (problema linear com uma equação); equações de Navier (ou termoelasticidade linear com duas equações); equações de Burgers (problema não-linear com duas equações). Em seguida foi estudado o método *multigrid* aplicado a duas formulações alternativas das equações de Navier-Stokes.

O trabalho foi desenvolvido em duas Etapas:

- Etapa I - Estudo preliminar;
- Etapa II - Navier-Stokes.

Os resultados obtidos na Etapa I foram comparados entre si e utilizados como motivação para a análise de parâmetros do método *multigrid* na Etapa II.

O Método de Diferenças Finitas foi adotado como padrão para discretização de todas as equações com as condições de contorno do tipo Dirichlet. As aproximações dos termos de derivadas parciais foram realizadas em malhas uniformes nas duas direções coordenadas. Foram apresentados dois algoritmos para o método *multigrid*, sendo um deles para resolver problemas com duas equações, ambos com a possibilidade de escolha, com um parâmentro, entre os esquemas CS e FAS.

Na Etapa I foram feitas aproximações numéricas de primeira e segunda ordem de acurácia, respectivamente para os termos advectivos e difusivos. Os sistemas de equações algébricas foram resolvidos com o método MSI (*Modified Strongly Implicit*) associado ao método *multigrid* geométrico com ciclo V, restrição por injeção, prolongação por interpolação bilinear e razão de engrossamento dois.

Analisou-se a influência de vários parâmetros do método *multigrid*, com os esquemas CS (*Correction Scheme*) e FAS (*Full Approximation Scheme*), no tempo de CPU necessário para resolver cada equação. Os parâmetros analisados foram: número de iterações intenas ($\sigma$); número de níveis de malha ($L$); tamanho do problema ($N$); o desempenho dos esquemas CS e FAS nos problemas lineares e; a influência do número de equações diferenciais.

Na Etapa II adotou-se esquemas de aproximações de segunda ordem de acurácia sendo que, na formulação $\psi - \mathbf{v}$ foi utilizado um esquema de Diferenças Finitas Compacto envolvendo nove pontos. Os sistemas de equações algébricas foram resolvidos com o método SOR (*Successive Over-Relaxation*) associado ao método *multigrid* geométrico, com ciclo V. A restrição foi realizada com ponderação completa na formulação $\psi - \mathbf{v}$ e por injeção na formulação $\psi - \omega$ e, a prolongação por interpolação bilinear nas duas formulações e razão de engrossamento dois.

Sobre o tempo de CPU necessário para resolver as equações de Navier-Stokes, nas duas formulações, foram analisados os seguintes parâmetros: número de iterações internas ($\sigma$); número de níveis de malha ($L$); tamanho do problema ($N$) e números de Reynolds.

Com base nos resultados deste trabalho, verificou-se que:

Etapa I:

1. Para o esquema CS, e as equações de Laplace e de Navier, obteve-se $\sigma_{ótimo} = 2$. Para o esquema FAS, obteve-se $\sigma_{ótimo} = 2$ para as equações de Navier; $\sigma_{ótimo} = 5$ para as equações de Burgers e $\sigma_{ótimo} = 6$ ou 8 para a equação de Laplace. Quando se diminui ou aumenta o valor de $\sigma$ em relação a $\sigma_{ótimo}$, aumenta-se o tempo de CPU. Este aumento do tempo de CPU com o número de iterações internas pode ser significativo, dependendo do valor usado para $\sigma$.
2. Para os dois esquemas (CS e FAS), as três malhas e os três problemas, o valor ótimo do número de níveis de malha é $L_{ótimo} = L_{máximo} - (3 \text{ ou } 4)$. Para $L < L_{ótimo}$, o tempo de CPU aumenta significativamente. Mas para $L > L_{ótimo}$, o tempo de CPU é praticamente o mesmo. Ao se utilizar $L_{máximo}$ em vez de $L_{ótimo}$, tem-se no máximo um aumento de 0,3% no tempo de CPU.
3. A ordem $p$ do *solver* MSI varia entre 1,92 e 2,06 para o método *singlegrid*, dependendo do problema, e entre 1,05 e 1,15 para o método *multigrid*, dependendo do problema e do esquema; estes resultados estão coerentes com a literatura.
4. Nos problemas lineares, o esquema FAS resulta em menor tempo de CPU do que o esquema CS.
5. Para o método *multigrid*, o número de equações envolvidas em cada problema (problemas acoplados) não afeta significativamente: a ordem $p$, na

Eq. (5.2); os valores ótimos de $\sigma$ e $L$ e o fato do esquema FAS ser mais rápido que o CS.

Etapa II:

1. As soluções numéricas, verificadas na seção 4.2 para a duas formulações, apresentam boa concordância com aquelas disponíveis na literatura, inclusive com as mais acuradas.
2. Na formulação $\psi - \mathbf{v}$, os parâmetros $\sigma$, $L$, $N$ e $Re$ influenciam fortemente o tempo de CPU. Porém, na formulação $\psi - \omega$ a influência destes parâmetros é bem menos significativa.
3. Na formulação $\psi - \mathbf{v}$, $\sigma_{ótimo}$ não é o mesmo em todas as malhas e varia com $Re$. Na formulação $\psi - \omega$ o parâmetro $\sigma_{ótimo}$ é menos sensível ao número de Reynolds e ao tamanho do problema.
4. Na formulação $\psi - \mathbf{v}$, quaisquer que sejam $N$ e $Re$, o tempo de CPU mínimo é ou está muito próximo do mínimo quando se usa $L$ máximo. Na formulação $\psi - \omega$ o tempo de CPU mínimo é obtido com $L = L_{máximo}$, para quaisquer $N$ e $Re$.
5. Na formulação $\psi - \mathbf{v}$, o fator de aceleração do método *multigrid*, em relação ao *singlegrid*, é muito bom, e aumenta com o aumento de $N$, mas diminui com o aumento de $Re$. Na formulação $\psi - \omega$, o fator de aceleração não é significativo: aumenta com o tamanho do problema, mas diminui com o aumento do número de Reynolds.
6. Apesar de a formulação $\psi - \mathbf{v}$ apresentar maiores fatores de aceleração que a formulação $\psi - \omega$, o tempo de execução com a formulação $\psi - \omega$ é menor que na formulação $\psi - \mathbf{v}$.
7. A redução da eficiência (redução no fator de aceleração) do método *multigrid* é causado principalmente pelo aumento do número de Reynolds, nas duas formulações, ou seja, a taxa de convergência do *multigrid* mostrou ser dependente do número de Reynolds.
8. Quando o modelo matemático envolve duas equações, o uso do método *multigrid* em apenas uma equação degenera a ordem $p = 1$ na Eq. (5.2). Não é vantajoso usar o método *multigrid* em apenas uma equação em modelos com duas.

9. O ótimo desempenho do método *multigrid* verificado com os problemas acoplados estudados na Etapa I, não foi confirmado para as equações de Navier-Stokes escritas na formulação $\psi - \omega$, além disso, o fato da formulação $\psi - \mathbf{v}$ envolver apenas uma equação diferencial parcial no ciclo *multigrid* não foi suficiente para garantir a ordem $p = 1$ da Eq. (5.2).

**Principais contribuições desta tese:**

Nesta tese o método *multigrid* foi implementado e realizou-se estudos de parâmetros para importantes problemas de Dinâmica dos Fluidos Computacional. Assim, contribui-se com a literatura existente no sentido de que:

- As equações de Navier (linear) e de Burgers (não-linear) envolvendo acoplamentos foram resolvidas com o método *multigrid* e, soluções em malhas de até $2049 \times 2049$ pontos foram obtidas em pouquíssimo tempo de CPU.
- O esforço computacional proporcional ao número de pontos da malha, para o método *multigrid*, foi confirmado para a equação de Laplace e dois problemas envolvendo mais de uma equação diferencial (Equações de Navier e de Burgers).
- Foram apresentadas soluções para as equações de Navier-Stokes com o método *multigrid* em malhas finas e $Re \leq 5000$, em duas diferentes formulações. Esta tese é o primeiro trabalho que disponibilizará na literatura soluções com a formulação $\psi - \mathbf{v}$, em malhas maiores que $161 \times 161$ pontos.
- As análises do método *multigrid* utilizando problemas com e sem acoplamentos, lineares e não-lineares, evidenciaram que a redução da eficiência do *multigrid* na resolução numérica das equações de Navier-Stokes, é causado principalmente pelo aumento do número de Reynolds.
- Com dois problemas envolvendo duas equações diferenciais cada um, mostrou-se que não há vantagem em aplicar o método *multigrid* em apenas uma equação diferencial.

**Trabalhos futuros:**

Como sugestão para trabalhos futuros, pode-se citar:

- Testar outros *solvers* tanto na formulação $\psi - \mathbf{v}$ quanto na $\psi - \omega$ para tentar melhorar o fator de aceleração, inclusive com altos números de Reynolds.
- Incluir o termo transiente nos modelos matemáticos abordados e fazer uma nova análise de desempenho do *multigrid*, inclusive com outros tipos de ciclos.
- Fazer um estudo detalhado do parâmetro de relaxação no método SOR para as duas formulações usando o método *multigrid*.
- Utilizar o *multigrid* na formulação $\psi - \mathbf{v}$ com discretizações de alta ordem.
- Estudar o método *multigrid* algébrico na formulação $\psi - \mathbf{v}$ utilizando geometrias irregulares.
- Estudar os parâmetros do *multigrid* utilizando-se modelos de turbulência.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


BOTELLA, O.; PEYRET, R. Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow. **Computers and Fluids**, v. 27, p. 421–433, 1998.

BRANDT, A. Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. **Mathematics of Computation**, v. 31, p. 333–390, 1977.

BRANDT, A. Barriers to achieving textbook multigrid efficiency (TME) in CFD. **NASA/CR, ICASE Interim Report**, v. 32, 1998.

BRANDT, A. Multiscale methods of data assimilation and feedback optimal control. **Computer Science and Applied Mathematics, Technical Report MCS06-04**, 2006.

BRANDT, A.; DISKIN, T.; THOMAS, J. L. Recent advances in achieving textbook multigrid efficiency for computational simulations. **NASA/CR, ICASE Report**, v. 16, 2002.

BRIGGS, W.; HENSON, V.; MCCORMICK, S. **A Multigrid Tutorial**. 2ª. ed.: SIAM, 2000.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise Numérica**. 2ª. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

CHAN, T. F.; XU, J.; ZIKATANOV, L. An agglomeration multigrid method for unstructured grids. **Contemporary Mathematics, AMS**, v. 218, p. 67–81, 1998.

CHEN, S.; DOOLEN, G. D. Lattice boltzmann method for fluid flows. **Annu. Rev. Fluid mechanical**, v. 30, p. 329–64, 1998.

CHEN, S.; TOLKE, J.; KRAFCZYK, M. A new method for the numerical solution of vorticity-streamfunction formulations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, p. 367–376, 2008.

CHORIN, A. Numerical simulation of the Navier-Stokes equations. **Math. Comput**, v. 22, p. 745–762, 1968.

DAVIES, C. F.; CARPENTER, P. W. A novel velocity-vorticity formulation of the Navier-Stokes equations with applications to boundary layer disturbance evolution. **Journal of Computational Physics**, v. 172, p. 119–165, 2001.

EFE, M. O. Observer-based boundary control for 2D Burgers equation. **Transactions of the Institute of Measurement and Control**, v. 28, p. 177–185, 2006.

ERN, A.; SMOOKE, M. D. Vorticity-velocity formulation for three-dimensional steady compressible flows. **Journal of Computational Physics**, v. 105, p. 58–71, 1993.

ERTURK, E. Numerical solutions of 2D steady incompressible flow over a backward-facing step, part i: High Reynolds number solutionsy. **Computers & Fluids**, v. 37, p. 633–655, 2008.

ERTURK, E. Discussions on driven cavity flow. **International Journal Numerical Methods in Fluids**, v. 60, p. 275–294, 2009.

ERTURK, E.; CORKE, T. C.; GOKCOL, C. Numerical solutions of 2D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers. **International Journal For Numerical Methods in Fluids**, v. 48, p. 747–774, 2005.

ERTURK, E.; DURSUN, B. Numerical solutions of 2D steady incompressible flow in a driven skewed cavity. **ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics**, v. 87, p. 377–392, 2007.

ERTURK, E.; GOKCOL, C. Fourth-order compact formulation of Navier-Stokes equations and driven cavity flow at high Reynolds numbers. **International Journal For Numerical Methods in Fluids**, v. 50, p. 421–436, 2006.

FASEL, H. Investigation of the stability of boundary layers by a finite-difference model of the Navier-Stokes equations. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 78, n. 23, p. 355–383, 1976.

FEDORENKO, R. P. On the speed of convergence of an iteration process. **USSR Computational Math. and Math. Phys**, v. 4, n. 3, p. 227–235, 1964.

FERZIGER, J. H.; PERIC, M. **Computational Methods for Fluids Dynamics**. 3ª. ed.: Springer, 2001.

FLETCHER, C. **Computational Techniques for Fluid Dynamics**. 2ª. ed.: Springer-Verlag, 1991.

FORTUNA, A. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos**. São Paulo: Edusp, 2000.

FOX, R. W.; MCDONALD, A. T. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**: Guanabara Koogan, 1995.

GATSKI, T. B. Review of incompressible fluid flow computations using the vorticity-velocity formulation. **Applied Numerical Methods**, v. 227, n. 7, 1991.

GHIA, U.; GHIA, N.; SHIN, C. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. **Journal of Computational Physics**, v. 48, p. 387–411, 1982.

GOLUB, G. H.; LOAN, C. V. **Matrix computations**. 2ª. ed. Baltimore: Johns Hopkins Press, 1989.

GREENBERG, M. D. **Advanced engineering mathematics**. 2ª. ed. New Jersey: Ed., Prentice Hall, Inc., 1998.

GUJ, G.; STELLA, F. A vorticity-velocity method for the numerical solution of 3D incompressible flows. **Journal of Computational Physics**, v. 106, p. 286–298, 1993.

GUPTA, M. M. High accuracy solutions of incompressible navier-stokes equations. **NASA Technical Memorandum 102539**, p. 1–25, 1990.

GUPTA, M. M.; KALITA, J. C. A new paradigm for solving Navier-Stokes equations: streamfunction-velocity formulation. **Journal of Computational Physics**, v. 207, p. 52–68, 2005.

GUPTA, M. M.; MANOHAR, R. P. Direct solution of biharmonic equation using non-coupled approach. **Journal of Computational Physics**, v. 33, p. 236–248, 1979.

HACKBUSCH, W. **Multi-Grid Methods and Applications**. Berlin: Springer-Verlag, 1985.

HIRSCH, C. **Numerical computational of internal and external flows**: Wiley, 1988.

HORTMANN, M.; PERIC, M.; SCHEURER, G. Finite volume multigrid prediction of laminar natural convection: Bench-march solutions. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 11, p. 189–207, 1990.

HUGHES, T. J. R. **The Finite Element Method : Linear Static And Dynamic Finite Element Analysis**: Prentice-Hall, 2000.

KIM, Y.; KIM, D. W.; JUN, S.; LEE, J. H. Meshfree point collocation method for the stream-vorticity formulation of 2D incompressible Navier-Stokes equations. **Computer Methods in Applied Mechanics And Engineering**, v. 196, p. 3095–3109, 2007.

KUMAR, D.; KUMAR, K.; DAS, M. A fine grid solution for a lid-driven cavity flow using multigrid method. **Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics**, v. 3, p. 336–354, 2009.

KUNDU, P. K. **Fluid Mechanics**: Academic Press, 1990.

LARSSON, J.; LIEN, F. S.; YEE, E. Conditional semicoarsening multigrid algorithm for the poisson equation on anisotropic grids. **Journal of Computational Physics**, v. 208, p. 368–383, 2005.

LELE, S. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. **Journal of Computational Physics**, v. 103, p. 16–42, 1992.

LILEK, Z.; MUZAFERIJA, S.; PERIC, M. Efficiency and accuracy aspects of a full multigrid simple algorithm for three-dimensional flows. **Numerical Heat Transfer, Part B**, v. 31, p. 23–42, 1997.

MALISKA, C. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. 2ª. ed.: LTC, 2004.

MARCHI, C. H. **Verificação de soluções numéricas unidimensionais em dinâmica dos fluidos.** Florianópolis, SC, Brasil: Universidade Federal de Santa Catarina - Tese de Doutorado, 2001.

MARCHI, C. H.; SUERO, R.; ARAKI, K. L. The lid-driven square cavity flow: Numerical solution with a 1024x1024 grid. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engeneering**, v. 31, n. 3, p. 186–198, 2009.

MCDONOUGH, J. M. **LECTURES in COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS OF INCOMPRESSIBLE FLOW: Mathematics, Algorithms and Implementations**: Departments of Mechanical Engineering and Mathematics University of Kentucky, 2003.

MEITZ, H. L.; FASEL, H. F. A compact-difference scheme for the Navier-Stokes equations in vorticity-velocity formulation. **Journal of Computational Physics**, v. 157, p. 371–403, 2000.

MESQUITA, M. S.; DE-LEMOS, M. J. S. Optimal multigrid solutions of two-dimensional convection-conduction problems. **Applied Mathematics and Computation**, v. 152, p. 725–742, 2004.

MONTERO, R. S.; LLORENSE, I. M.; SALAS, M. D. Robust multigrid algorithm for Navier-Stokes equations. **Journal of Computational Physics**, v. 173, p. 412–432, 2001.

NAPOLITANO, M.; CATALANO, L. A. A multigrid solver for the vorticity-velocity Navier-Stokes equations. **International Journal for Numerical Methods in Fluid**, v. 13, p. 49–59, 1991.

NAPOLITANO, M.; PASCAZIO, G. A. Numerical method for the vorticity-velocity Navier-Stokes equations in two and three dimensions. **Computers & Fluids**, v. 19, p. 489–495, 1991.

OLIVEIRA, F.; PINTO, M. A. V.; SANTIAGO, C. D.; MARCHI, C. H. Efeito de parâmetros do método multigrid cs e fas sobre o tempo de CPU em problemas 1d lineares e não-lineares. **Proceedings of Cilamce**, 2006.

PALMA, P. D.; PASCAZIO, G.; NAPOLITANO, M. Accurate and efficient solutions of unsteady viscous flows. **International Journal of Numerical Methods For Heat & Fluid Flow**, v. 11, p. 286–307, 2001.

PANDIT, S. K. On the use of compact streamfunction-velocity formulation of steady Navier-Stokes equations on geometries beyond rectangular. **Journal of Scientific Computing**, Plenum Press, New York, USA, v. 36, n. 2, p. 219–242, 2008. ISSN 0885-7474.

PATANKAR, S. **Numerical heat transfer and fluid flow**: Taylor and Francis, 1980.

PAVLOV, A. N.; SAZHIN, S.; FEDORENKO, R.; HEIKAL, M. R. A conservative finite difference method and its application for the analysis of a transient flow around a square prism. **International Journal of Numerical - Methods for Heat & Fluid Flow**, v. 10, n. 1, p. 6–46, 2001.

PINTO, M. A. V.; MARCHI, C. H. Efeito dos parâmetros do método multigrid cs e fas sobre o tempo de CPU para a equação de laplace bidimensional. **Proceedings of ENCIT**, p. Paper Cit 06–0348, 2006.

PINTO, M. A. V.; MARCHI, C. H. Optimum parameters of a geometric multigrid for the two-dimensional laplace's equation. **Proceedings of 19th International Congress of Mechanical Engineering - Proceedings of COBEM 2007**, Brasília, Brazil, 2007.

PINTO, M. A. V.; SANTIAGO, C. D.; MARCHI, C. H. Effect of parameters of a multigrid method on CPU time for one-dimensional problems. **Proceedings of COBEM**, 2005.

PONTA, F. L. The kinematic laplacian equation method. **Journal of Computational Physics**, v. 204, p. 405–426, 2005.

RABI, J. A.; DE-LEMOS, M. J. S. Optimization of convergence acceleration in multigrid numerical solutions of conductive-convective problems. **Applied Mathematics and Computation**, v. 124, p. 215–226, 2001.

ROACHE, P. J. Perspective: a method for uniform reporting of grid refinement studies. **ASME Journal of Fluids Engineering**, v. 116, p. 405–413, 1994.

ROACHE, P. J. **Fundamentals of Computational Fluid Dynamics**: Hermosa Publishers, 1998.

ROACHE, P. J. Code verification by the method of manufactured solutions. **Journal of Fluids Engineering**, v. 124, p. 4–10, 2002.

RUBIN, S.; KHOSLA, P. Polynomial interpolation methods for viscous flow calculations. **Journal of Computational Physics**, v. 24, p. 217–244, 1977.

RUBIN, S. G.; KHOSLA, P. K. Navier-Stokes calculations with a coupled strongly implicit method. **Computers & Fluids**, v. 9, n. 2, p. 163–180, 1981.

RUBINI, P.; BECKER, H. A.; GRANDMAISON, E. W.; POLLARD, A.; SOBIESIAK, A.; THURGOOD, C. Multigrid acceleration of three-dimensional, turbulent, variable-density flows. **Numerical Heat Transfer**, v. 22, p. 163–177, 1992.

SALENÇON, J. **Handbook of Continuum Mechanics: General Concepts Thermoelasticity**Berlin, New York: , 2001.

SANTIAGO, C. D.; MARCHI, C. H. Optimum parameters of a geometric multigrid for a two-dimensional problem of two-equations. **Proceedings of COBEM 2007**, 2007.

SANTIAGO, C. D.; MARCHI, C. H. Parâmetros ótimos do método multigrid geométrico CS e FAS para problemas 2D com duas equações. **Proceedings of XXIX Iberian Latin American Congress in Computational Methods in Engineering**, 2008.

SANTIAGO, C. D.; MARCHI, C. H.; SOUZA, L. F. Análise do desempenho do método multigrid geométrico com a formulação função de corrente e velocidade. **Anais do VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica - CONEM 2010 (Aceito)**, 2010.

SHANKAR, O. N.; DESHPANDE, M. D. Fluid mechanics in the driven cavity. **Annual Review of Fluid Mechanics**, v. 32, p. 93–136, 2000.

SHEU, T. W. H.; CHIANG, T.; LIOU, S. A compact monotonic discretization scheme for solving second-order vorticity-velocity equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 11, p. 1407–1424, 2000.

SHIH, T. M.; TAN, C. H.; HWANG, B. C. Effects of grid staggering on numerical scheme. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 9, p. 193–212, 1989.

SOCKOL, P. Multigrid solution of the Navier-Stokes equations on highly stretched grids. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 17, p. 543–566, 1993.

SOUZA, L. F. **Instabilidade centrífuga e transição para turbulência em escoamentos laminares sobre superfícies côncavas**Tese de Doutorado em Engenharia Aeronáutica e Mecânica, Instituto Tecnológico da Aeronáutica - ITA, Brasil: , 2003.

SPEZIALE, C. G. On the advantages of the vorticity-velocity fomulation of the equations of fluid-dynamics. **Journal Computational Phys**, v. 73, 1987.

SPOTZ, W. F. Accuracy and performance of numerical wall boundary conditions for steady, 2D, incompressible streamfunction vorticity. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 28, p. 737–757, 1998.

STORTKUHL, T.; ZENGER, C.; ZIMMER, S. An asymptotic solution for the singularity at the angular point of the lid driven cavity. **International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow**, v. 4, n. 1, p. 47–59, 1993.

STUBEN, K. A review of algebraic multigrid. **Journal of Computation and Applied Mathematics**, v. 128, p. 281–309, 2001.

SUH, J. C.; KIM, K. S. A vorticity-velocity formulation for solving the two-dimensional Navier-Stokes equations. **Fluid Dynamics Research**, v. 25, n. 4, p. 195–216, 1999.

TANNEHILL, J. C.; ANDERSON, D. A.; PLETCHER, R. H. **Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer**. 2ª. ed.Washington: , 1997.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. **Theory of elasticity**, 1970.

TROTTENBERG, U.; OOSTERLEE, C. W.; SCHULLER, A. **Multigrid**, 2001.

VANKA, S. P. Block-implicit multigrid solution of Navier-Stokes equations in primitive variables. **Journal of Computational Physics**, v. 65, p. 138–158, 1986.

VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **An Introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method**. 2ª. ed.: Harlow, England: Prentice Hall, 2007.

VORST, V. D. H. A. BI-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. **SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing**, v. 13, n. 2, p. 631–644, 1992.

WANG, J.; ZHONG, W.; ZHANG, J. High order compact computation and nonuniform grids for streamfunction vorticity equations. **Applied Mathematics and Computation**, v. 179, p. 12–22, 2006.

WESSELING, P. Multigrid solution of the Navier-Stokes equations in the vorticity-streamfunction. **Proceedings of a GAMM-Seminar**, v. 128, p. 145–154, 1984.

WESSELING, P. **An Introduction to Multigrid Methods**, 1992.

WESSELING, P.; OOSTERLEE, C. W. Geometric multigrid with applications to Computational Fluid Dynamics. **Journal of Computation and Applied Mathematics**, v. 128, p. 311–334, 2001.

WOOD, V. A. Multigrid approach to incompressible viscous cavity flows. **NASA - Langley Research Center**, Hampton, Virginia 23681-0001, 1996.

YAN, J.; THIELE, F. Performance and accuracy of a modified multigrid algorithm for fluid flow and heat transfer. **Numerical Heat Transfer: Part B**, Copper Mountain, CO, USA, v. 34, p. 323–338, 1998.

YAN, J.; THIELE, F.; XUE, L. A modified full multigrid algorithm for the Navier-Stokes equations. **Computers & Fluids**, v. 36, p. 445–454, 2007.

YAVNEH, I. Why multigrid methods are so efficient. **Computing in Science and Engineering**, v. 8, n. 6, p. 12–22, 2006.

ZHANG, J. Multigrid acceleration techniques and applications to the numerical solution of partial differential equations. Ph.D. Thesis - Columbian School of Arts and Sciences of the George Washington University, 1997.

ZHANG, J. Numerical simulation of 2D square driven cavity using fourth-order compact finite difference schemes. **Computers and Mathematics with Applications**, v. 45, p. 43–52, 2003.

# APÊNDICE A – PERFIS TABULADOS

## A.1 PERFIL DA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE

Na Tab. 12 estão mostrados a soluções numérica $T$ e a analítica exata $T_a$, bem como o erro numérico $E_h$, ambas extraídos da linha vertical que passa pelo centro do domínio em pontos igualmente espaçados, na malha $65 \times 65$. A informações nos contornos são omitidas porque o erro numérico é naturalmente zero.

Tabela 12: Soluções numérica e analítica da equação de Laplace na linha vertical que passa pelo centro do domínio.

| $(0,5;y)$ | $65 \times 65$ | | |
|---|---|---|---|
| | $T$ | $T_a$ | $E_h$ |
| 0,0625 | 3,1250E-02 | 3,1250E-02 | 2,9837E-16 |
| 0,1250 | 6,2500E-02 | 6,2500E-02 | 6,3838E-16 |
| 0,1875 | 9,3750E-02 | 9,3750E-02 | 1,0270E-15 |
| 0,2500 | 1,2500E-01 | 1,2500E-01 | 1,4988E-15 |
| 0,3125 | 1,5625E-01 | 1,5625E-01 | 1,9429E-15 |
| 0,3750 | 1,8750E-01 | 1,8750E-01 | 2,2760E-15 |
| 0,4375 | 2,1875E-01 | 2,1875E-01 | 2,3315E-15 |
| 0,5000 | 2,5000E-01 | 2,5000E-01 | 2,3315E-15 |
| 0,5625 | 2,8125E-01 | 2,8125E-01 | 2,1649E-15 |
| 0,6250 | 3,1250E-01 | 3,1250E-01 | 1,8319E-15 |
| 0,6875 | 3,4375E-01 | 3,4375E-01 | 1,6098E-15 |
| 0,7500 | 3,7500E-01 | 3,7500E-01 | 1,3323E-15 |
| 0,8125 | 4,0625E-01 | 4,0625E-01 | 1,1657E-15 |
| 0,8750 | 4,3750E-01 | 4,3750E-01 | 8,3267E-16 |
| 0,9375 | 4,6875E-01 | 4,6875E-01 | 2,7756E-16 |

Pode-se ver na Tab 12 que o erro em relação a solução analítica exata está muito próximo de zero, oscilando entre $10^{-15}$ e $10^{-16}$. Este resultado indica uma ótima coerência entre a solução numérica e a solução analítica exata.

## A.2 PERFIS DE DESLOCAMENTO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER

As soluções numéricas de $u$ e $v$, e as respectivas soluções analíticas ($u_a$) e ($v_a$), bem como o erro numérico, nas linhashorizontal e vertical que passam pelo centro do domínio em pontos igualmente espaçados, nas malhas $65 \times 65$ e $1025 \times 1025$, estão nas Tabs. 13 e 14. O objetivo destas tabelas é mostrar, quantitativamente, a redução do erro numérico com o refino da malha. Pode-se notar que o erro numérico próximo ao contorno, nas duas malhas, é menor do que na região central do domínio.

Tabela 13: Perfil e erro numérico de $u$ das equações de Navier na linha que passa pelo centro do domínio.

| $(0,5;y)$ | $65 \times 65$ | | | $1025 \times 1025$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $u$ | $u_a$ | $E_h$ | $u$ | $u_a$ | $E_h$ |
| 0,0625 | 1,0087E-04 | 1,0095E-04 | 7,1896E-08 | 1,0094E-04 | 1,0095E-04 | 2,8118E-10 |
| 0,1250 | 2,0827E-04 | 2,0840E-04 | 1,3283E-07 | 2,0840E-04 | 2,0840E-04 | 5,1939E-10 |
| 0,1875 | 3,2260E-04 | 3,2279E-04 | 1,8721E-07 | 3,2279E-04 | 3,2279E-04 | 7,3191E-10 |
| 0,2500 | 4,4431E-04 | 4,4455E-04 | 2,3759E-07 | 4,4455E-04 | 4,4455E-04 | 9,2876E-10 |
| 0,3125 | 5,7388E-04 | 5,7417E-04 | 2,8519E-07 | 5,7416E-04 | 5,7417E-04 | 1,1147E-09 |
| 0,3750 | 7,1181E-04 | 7,1214E-04 | 3,3019E-07 | 7,1214E-04 | 7,1214E-04 | 1,2905E-09 |
| 0,4375 | 8,5864E-04 | 8,5902E-04 | 3,7194E-07 | 8,5901E-04 | 8,5902E-04 | 1,4536E-09 |
| 0,5000 | 1,0150E-03 | 1,0154E-03 | 4,0895E-07 | 1,0154E-03 | 1,0154E-03 | 1,5981E-09 |
| 0,5625 | 1,1814E-03 | 1,1818E-03 | 4,3887E-07 | 1,1818E-03 | 1,1818E-03 | 1,7149E-09 |
| 0,6250 | 1,3585E-03 | 1,3590E-03 | 4,5841E-07 | 1,3590E-03 | 1,3590E-03 | 1,7912E-09 |
| 0,6875 | 1,5471E-03 | 1,5475E-03 | 4,6316E-07 | 1,5475E-03 | 1,5475E-03 | 1,8096E-09 |
| 0,7500 | 1,7479E-03 | 1,7483E-03 | 4,4741E-07 | 1,7483E-03 | 1,7483E-03 | 1,7478E-09 |
| 0,8125 | 1,9616E-03 | 1,9620E-03 | 4,0383E-07 | 1,9620E-03 | 1,9620E-03 | 1,5774E-09 |
| 0,8750 | 2,1892E-03 | 2,1895E-03 | 3,2315E-07 | 2,1895E-03 | 2,1895E-03 | 1,2622E-09 |
| 0,9375 | 2,4314E-03 | 2,4316E-03 | 1,9359E-07 | 2,4316E-03 | 2,4316E-03 | 7,5604E-10 |

## A.3 PERFIS DE VELOCIDADE DAS EQUAÇÕES DE BURGERS

As Tabs. 15 e 16 mostram as soluções numérica e analítica, e o respectivo erro numérico, nas linhas horizontal e vertical, que passam pelo centro do domínio em pontos igualmente espaçados para as componentes de velocidade $u$ e $v$, respectivamente, nas malhas $65 \times 65$ e $1025 \times 1025$. O objetivo destas tabelas é mostrar, quantitativamente, a redução do erro numérico com o refino da malha; elas também poderão servir para referências futuras.

Tabela 14: Perfil e erro numérico de $v$ das equações de Navier na linha que passa pelo centro do domínio.

| $(x; 0,5)$ | $65 \times 65$ | | | $1025 \times 1025$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $v$ | $v_a$ | $E_h$ | $v$ | $v_a$ | $E_h$ |
| 0,0625 | 1,5625E-02 | 1,5625E-02 | 4,8087E-08 | 1,5625E-02 | 1,5625E-02 | 1,8853E-10 |
| 0,1250 | 3,1250E-02 | 3,1250E-02 | 1,0532E-0 | 3,1250E-02 | 3,1250E-02 | 4,1278E-10 |
| 0,1875 | 4,6875E-02 | 4,6875E-02 | 1,7211E-07 | 4,6875E-02 | 4,6875E-02 | 6,7441E-10 |
| 0,2500 | 6,2500E-02 | 6,2500E-02 | 2,4722E-07 | 6,2500E-02 | 6,2500E-02 | 9,6849E-10 |
| 0,3125 | 7,8125E-02 | 7,8125E-02 | 3,2797E-07 | 7,8125E-02 | 7,8125E-02 | 1,2846E-09 |
| 0,3750 | 9,3750E-02 | 9,3750E-02 | 4,1048E-07 | 9,3750E-02 | 9,3750E-02 | 1,6076E-09 |
| 0,4375 | 1,0937E-01 | 1,0938E-01 | 4,8985E-07 | 1,0937E-01 | 1,0938E-01 | 1,9183E-09 |
| 0,5000 | 1,2500E-01 | 1,2500E-01 | 5,6028E-07 | 1,2500E-01 | 1,2500E-01 | 2,1939E-09 |
| 0,5625 | 1,4062E-01 | 1,4062E-01 | 6,1521E-07 | 1,4062E-01 | 1,4062E-01 | 2,4089E-09 |
| 0,6250 | 1,5625E-01 | 1,5625E-01 | 6,4760E-07 | 1,5625E-01 | 1,5625E-01 | 2,5357E-09 |
| 0,6875 | 1,7187E-01 | 1,7188E-01 | 6,5015E-07 | 1,7187E-01 | 1,7188E-01 | 2,5457E-09 |
| 0,7500 | 1,8750E-01 | 1,8750E-01 | 6,1567E-07 | 1,8750E-01 | 1,8750E-01 | 2,4107E-09 |
| 0,8125 | 2,0312E-01 | 2,0312E-01 | 5,3761E-07 | 2,0312E-01 | 2,0312E-01 | 2,1051E-09 |
| 0,8750 | 2,1875E-01 | 2,1875E-01 | 4,1064E-07 | 2,1875E-01 | 2,1875E-01 | 1,6080E-09 |
| 0,9375 | 2,3437E-01 | 2,3438E-01 | 2,3150E-07 | 2,3437E-01 | 2,3438E-01 | 9,0659E-10 |

Tabela 15: Perfil e erro numérico de $u$ das equações de Burgers na linha que passa pelo centro do domínio.

| $(0,5; y)$ | $65 \times 65$ | | | $1025 \times 1025$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $u$ | $u_a$ | $E_h$ | $u$ | $u_a$ | $E_h$ |
| 0,0625 | -6,1995E-02 | -6,2012E-02 | 1,7201E-05 | -6,2009E-02 | -6,2012E-02 | 2,3924E-06 |
| 0,1250 | -1,2105E-01 | -1,2109E-01 | 4,4959E-05 | -1,2109E-01 | -1,2109E-01 | 5,3652E-06 |
| 0,1875 | -1,7423E-01 | -1,7432E-01 | 8,7317E-05 | -1,7431E-01 | -1,7432E-01 | 9,0956E-06 |
| 0,2500 | -2,1861E-01 | -2,1875E-01 | 1,4172E-04 | -2,1874E-01 | -2,1875E-01 | 1,3354E-05 |
| 0,3125 | -2,5126E-01 | -2,5146E-01 | 1,9988E-04 | -2,5145E-01 | -2,5146E-01 | 1,7563E-05 |
| 0,3750 | -2,6928E-01 | -2,6953E-01 | 2,4931E-04 | -2,6951E-01 | -2,6953E-01 | 2,0891E-05 |
| 0,4375 | -2,6974E-01 | -2,7002E-01 | 2,7542E-04 | -2,7000E-01 | -2,7002E-01 | 2,2395E-05 |
| 0,5000 | -2,4974E-01 | -2,5000E-01 | 2,6422E-04 | -2,4998E-01 | -2,5000E-01 | 2,1191E-05 |
| 0,5625 | -2,0634E-01 | -2,0654E-01 | 2,0528E-04 | -2,0653E-01 | -2,0654E-01 | 1,6642E-05 |
| 0,6250 | -1,3662E-01 | -1,3672E-01 | 9,4162E-05 | -1,3671E-01 | -1,3672E-01 | 8,5223E-06 |
| 0,6875 | -3,7665E-02 | -3,7598E-02 | 6,7096E-05 | -3,7601E-02 | -3,7598E-02 | 2,9456E-06 |
| 0,7500 | 9,3477E-02 | 9,3750E-02 | 2,7339E-04 | 9,3733E-02 | 9,3750E-02 | 1,7291E-05 |
| 0,8125 | 2,5975E-01 | 2,6025E-01 | 5,0661E-04 | 2,6022E-01 | 2,6025E-01 | 3,3134E-05 |
| 0,8750 | 4,6416E-01 | 4,6484E-01 | 6,8759E-04 | 4,6480E-01 | 4,6484E-01 | 4,5173E-05 |
| 0,9375 | 7,0982E-01 | 7,1045E-01 | 6,2990E-04 | 7,1041E-01 | 7,1045E-01 | 4,1277E-05 |

## A.4 PERFIS DE VELOCIDADE DA FORMULAÇÃO $\psi - \mathbf{v}$

Os perfis das componentes de velocidade $u$ e $v$, ao longo das linhas horizontal e vertical, que passam pelo centro da cavidade para as malhas $129 \times 129$ e $513 \times 513$ estão

Tabela 16: Perfil e erro numérico de $v$ das equações de Burgers na linha que passa pelo centro do domínio.

| $(x; 0,5)$ | $65 \times 65$ | | | $1025 \times 1025$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $v$ | $v_a$ | $E_h$ | $v$ | $v_a$ | $E_h$ |
| 0,0625 | 1,5378E-01 | 1,5381E-01 | 2,5334E-05 | 1,5381E-01 | 1,5381E-01 | 1,2258E-06 |
| 0,1250 | 2,4599E-01 | 2,4609E-01 | 1,0111E-04 | 2,4609E-01 | 2,4609E-01 | 5,5620E-06 |
| 0,1875 | 2,8544E-01 | 2,8564E-01 | 2,0324E-04 | 2,8563E-01 | 2,8564E-01 | 1,1773E-05 |
| 0,2500 | 2,8097E-01 | 2,8125E-01 | 2,8434E-04 | 2,8123E-01 | 2,8125E-01 | 1,6944E-05 |
| 0,3125 | 2,4139E-01 | 2,4170E-01 | 3,0495E-04 | 2,4168E-01 | 2,4170E-01 | 1,8543E-05 |
| 0,3750 | 1,7553E-01 | 1,7578E-01 | 2,4838E-04 | 1,7577E-01 | 1,7578E-01 | 1,5428E-05 |
| 0,4375 | 9,2162E-02 | 9,2285E-02 | 1,2365E-04 | 9,2277E-02 | 9,2285E-02 | 8,0706E-06 |
| 0,5000 | 3,9561E-05 | 0,0000E+00 | 3,9561E-05 | 1,7426E-06 | 0,0000E+00 | 1,7426E-06 |
| 0,5625 | -9,2085E-02 | -9,2285E-02 | 2,0006E-04 | -9,2274E-02 | -9,2285E-02 | 1,1482E-05 |
| 0,6250 | -1,7546E-01 | -1,7578E-01 | 3,1705E-04 | -1,7576E-01 | -1,7578E-01 | 1,8623E-05 |
| 0,6875 | -2,4134E-01 | -2,4170E-01 | 3,6218E-04 | -2,4168E-01 | -2,4170E-01 | 2,1397E-05 |
| 0,7500 | -2,8092E-01 | -2,8125E-01 | 3,2850E-04 | -2,8123E-01 | -2,8125E-01 | 1,9360E-05 |
| 0,8125 | -2,8541E-01 | -2,8564E-01 | 2,3489E-04 | -2,8563E-01 | -2,8564E-01 | 1,3668E-05 |
| 0,8750 | -2,4597E-01 | -2,4609E-01 | 1,2249E-04 | -2,4609E-01 | -2,4609E-01 | 6,8625E-06 |
| 0,9375 | -1,5377E-01 | -1,5381E-01 | 3,8261E-05 | -1,5381E-01 | -1,5381E-01 | 1,8856E-06 |

mostrados nas Tabs. 17 e 18, respectivamente. No caso das equações de Navier-Stokes a solução analítica não está disponível, portanto, o erro numérico não pode ser calculado.

As soluções em pontos igualmente espaçados de uma malha grossa e uma malha fina, são disponibilizados para evidenciar o quanto melhora a solução com o refinamento da malha. Além disso, estes resultados poderão servir como soluções de referências. Na comparação das soluções das duas malhas no ponto central $(x = 0,5; y = 0,5)$ por exemplo, pode-se constatar uma diferença muito pequena tanto em $u$ quanto em $v$ para qualquer número de Reynolds. Isso é um indicativo de que, na formulação $\psi - \mathbf{v}$, a acurácia da solução na malha grossa é quase tão boa quanto a da malha fina.

## A.5 PERFIS DE VELOCIDADE DA FORMULAÇÃO $\psi - \omega$

Nas Tabs. 19 e 20 estão tabulados os perfis de velocidade $u$ e $v$ ao longo das linhas horizontal e vertical que passam pelo centro da cavidade nas malhas $129 \times 129$ e $513 \times 513$, respectivamente. Da mesma forma como no caso da formulação $\psi - \mathbf{v}$ disponibiliza-se as soluções de uma malha grossa e uma malha fina em pontos igualmente espaçados para evidenciar o erro de discretização com o refinamento da malha, além de estes resultados servirem como soluções de referência. Na comparação das soluções das duas malhas no

Tabela 17: Perfil da velocidade $u$ ao longo da linha vertical que passa pelo centro da cavidade, com a formulação $\psi - \mathbf{v}$.

| $(0,5;y)$ | $129 \times 129$ | | | | $513 \times 513$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 100 | 400 | 1000 | 5000 | 100 | 400 | 1000 | 5000 |
| 1,0000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 |
| 0,9375 | 0,59742 | 0,46872 | 0,41995 | 0,45541 | 0,59746 | 0,46953 | 0,42278 | 0,46925 |
| 0,8750 | 0,31043 | 0,31621 | 0,36093 | 0,37023 | 0,31055 | 0,31679 | 0,36247 | 0,38070 |
| 0,8125 | 0,14028 | 0,25182 | 0,28724 | 0,28867 | 0,14042 | 0,25218 | 0,28838 | 0,29689 |
| 0,7500 | 0,02774 | 0,18095 | 0,20694 | 0,21571 | 0,02787 | 0,18129 | 0,20786 | 0,22196 |
| 0,6875 | -0,06037 | 0,10507 | 0,13274 | 0,14872 | -0,06026 | 0,10543 | 0,13353 | 0,15325 |
| 0,6250 | -0,13137 | 0,02980 | 0,06455 | 0,08591 | -0,13127 | 0,03022 | 0,06521 | 0,08890 |
| 0,5625 | -0,18216 | -0,04309 | -0,00003 | 0,02592 | -0,18209 | -0,04260 | 0,00053 | 0,02748 |
| 0,5000 | -0,20917 | -0,11570 | -0,06254 | -0,03229 | -0,20915 | -0,11509 | -0,06209 | -0,03211 |
| 0,4375 | -0,21291 | -0,19153 | -0,12378 | -0,08950 | -0,21296 | -0,19078 | -0,12344 | -0,09068 |
| 0,3750 | -0,19836 | -0,26705 | -0,18395 | -0,14626 | -0,19847 | -0,26635 | -0,18375 | -0,14882 |
| 0,3125 | -0,17257 | -0,32035 | -0,24592 | -0,20290 | -0,17270 | -0,32026 | -0,24572 | -0,20687 |
| 0,2500 | -0,14178 | -0,32022 | -0,31943 | -0,25958 | -0,14192 | -0,32117 | -0,31899 | -0,26506 |
| 0,1875 | -0,10967 | -0,26214 | -0,38336 | -0,31633 | -0,10980 | -0,26381 | -0,38436 | -0,32353 |
| 0,1250 | -0,07701 | -0,17694 | -0,34319 | -0,37532 | -0,07711 | -0,17864 | -0,34759 | -0,38350 |
| 0,0625 | -0,04191 | -0,09137 | -0,19738 | -0,41453 | -0,04197 | -0,09252 | -0,20204 | -0,43566 |
| 0,0000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 |

Tabela 18: Perfil da velocidade $v$ ao longo da linha vertical que passa pelo centro da cavidade com a formulação $\psi - \mathbf{v}$.

| $(x;0,5)$ | $129 \times 129$ | | | | $513 \times 513$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 100 | 400 | 1000 | 5000 | 100 | 400 | 1000 | 5000 |
| 1,0000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 |
| 0,9375 | -0,12311 | -0,26799 | -0,44917 | -0,50132 | -0,12330 | -0,27021 | -0,45575 | -0,50533 |
| 0,8750 | -0,21840 | -0,44736 | -0,46789 | -0,38457 | -0,21867 | -0,44891 | -0,46780 | -0,39480 |
| 0,8125 | -0,25354 | -0,40006 | -0,33076 | -0,31156 | -0,25375 | -0,40005 | -0,33153 | -0,31923 |
| 0,7500 | -0,22771 | -0,28120 | -0,25261 | -0,24187 | -0,22782 | -0,28101 | -0,25335 | -0,24755 |
| 0,6875 | -0,16298 | -0,18216 | -0,18126 | -0,17566 | -0,16301 | -0,18211 | -0,18166 | -0,17952 |
| 0,6250 | -0,08409 | -0,10088 | -0,11063 | -0,11204 | -0,08407 | -0,10089 | -0,11079 | -0,11421 |
| 0,5625 | -0,00780 | -0,02471 | -0,04188 | -0,05017 | -0,00775 | -0,02472 | -0,04185 | -0,05076 |
| 0,5000 | 0,05746 | 0,05207 | 0,02556 | 0,01073 | 0,05753 | 0,05206 | 0,02578 | 0,01167 |
| 0,4375 | 0,10868 | 0,13057 | 0,09253 | 0,07138 | 0,10877 | 0,13057 | 0,09294 | 0,07381 |
| 0,3750 | 0,14562 | 0,20647 | 0,15992 | 0,13238 | 0,14572 | 0,20657 | 0,16053 | 0,13630 |
| 0,3125 | 0,16901 | 0,26794 | 0,23049 | 0,19419 | 0,16912 | 0,26829 | 0,23123 | 0,19965 |
| 0,2500 | 0,17912 | 0,30024 | 0,30613 | 0,25727 | 0,17923 | 0,30092 | 0,30705 | 0,26431 |
| 0,1875 | 0,17423 | 0,29650 | 0,36616 | 0,32197 | 0,17433 | 0,29742 | 0,36777 | 0,33070 |
| 0,1250 | 0,14914 | 0,26126 | 0,36246 | 0,39271 | 0,14924 | 0,26219 | 0,36491 | 0,40280 |
| 0,0625 | 0,09475 | 0,18441 | 0,27847 | 0,41817 | 0,09480 | 0,18509 | 0,28059 | 0,43353 |
| 0,0000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 |

ponto central $(x = 0,5; y = 0,5)$ por exemplo, pode-se constatar uma diferença um pouco maior em relação a formulação $\psi - \mathbf{v}$, tanto em $u$ quanto em $v$, para qualquer número de Reynolds. Isso mostra que na formulação $\psi - \omega$ é necessário um melhor refinamento da malha para obter soluções mais acuradas, diferentemente da outra formulação, que possibilita soluções acuradas também em malhas mais grossas.

Tabela 19: Perfil da velocidade $u$ ao longo da linha vertical que passa pelo centro da cavidade com a formulação $\psi - \omega$.

| $(0,5; y)$ | $129 \times 129$ | | | | $513 \times 513$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 100 | 400 | 1000 | 5000 | 100 | 400 | 1000 | 5000 |
| 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 |
| 0,93750 | 0,59642 | 0,46406 | 0,40949 | 0,41571 | 0,59740 | 0,46921 | 0,42205 | 0,46538 |
| 0,87500 | 0,30953 | 0,31321 | 0,35279 | 0,34087 | 0,31049 | 0,31659 | 0,36191 | 0,37778 |
| 0,81250 | 0,13972 | 0,24950 | 0,28129 | 0,26598 | 0,14038 | 0,25203 | 0,28798 | 0,29461 |
| 0,75000 | 0,02740 | 0,17927 | 0,20277 | 0,19912 | 0,02784 | 0,18118 | 0,20758 | 0,22027 |
| 0,68750 | -0,06053 | 0,10400 | 0,12995 | 0,13767 | -0,06026 | 0,10536 | 0,13334 | 0,15209 |
| 0,62500 | -0,13134 | 0,02922 | 0,06301 | 0,08004 | -0,13126 | 0,03018 | 0,06511 | 0,08824 |
| 0,56250 | -0,18192 | -0,04331 | -0,00035 | 0,02499 | -0,18207 | -0,04261 | 0,00051 | 0,02729 |
| 0,50000 | -0,20876 | -0,11566 | -0,06169 | -0,02846 | -0,20912 | -0,11509 | -0,06203 | -0,03184 |
| 0,43750 | -0,21240 | -0,19116 | -0,12176 | -0,08103 | -0,21293 | -0,19075 | -0,12330 | -0,08997 |
| 0,37500 | -0,19785 | -0,26591 | -0,18081 | -0,13324 | -0,19843 | -0,26628 | -0,18353 | -0,14766 |
| 0,31250 | -0,17211 | -0,31786 | -0,24203 | -0,18545 | -0,17267 | -0,32010 | -0,24544 | -0,20529 |
| 0,25000 | -0,14141 | -0,31663 | -0,31460 | -0,23791 | -0,14190 | -0,32093 | -0,31865 | -0,26305 |
| 0,18750 | -0,10941 | -0,25870 | -0,37528 | -0,29060 | -0,10979 | -0,26358 | -0,38382 | -0,32111 |
| 0,12500 | -0,07684 | -0,17464 | -0,33362 | -0,34741 | -0,07711 | -0,17848 | -0,34693 | -0,38085 |
| 0,06250 | -0,04182 | -0,09028 | -0,19235 | -0,38230 | -0,04196 | -0,09245 | -0,20169 | -0,43195 |
| 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 |

Tabela 20: Perfil da velocidade $v$ ao longo da linha vertical que passa pelo centro da cavidade com a formulação $\psi - \omega$.

| $(x; 0,5)$ | $129 \times 129$ | | | | $513 \times 513$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 100 | 400 | 1000 | 5000 | 100 | 400 | 1000 | 5000 |
| 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 1,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 |
| 0,93750 | -0,12299 | -0,26597 | -0,44124 | -0,46276 | -0,12330 | -0,27007 | -0,45520 | -0,50213 |
| 0,87500 | -0,21811 | -0,44386 | -0,45967 | -0,35388 | -0,21865 | -0,44868 | -0,46725 | -0,39184 |
| 0,81250 | -0,25304 | -0,39707 | -0,32475 | -0,28558 | -0,25372 | -0,39985 | -0,33111 | -0,31679 |
| 0,75000 | -0,22711 | -0,27927 | -0,24718 | -0,22047 | -0,22778 | -0,28088 | -0,25297 | -0,24558 |
| 0,68750 | -0,16244 | -0,18066 | -0,17706 | -0,15888 | -0,16297 | -0,18201 | -0,18138 | -0,17800 |
| 0,62500 | -0,08372 | -0,09966 | -0,10767 | -0,09990 | -0,08404 | -0,10080 | -0,11059 | -0,11315 |
| 0,56250 | -0,00763 | -0,02380 | -0,04010 | -0,04273 | -0,00774 | -0,02465 | -0,04172 | -0,05016 |
| 0,50000 | 0,05744 | 0,05262 | 0,02614 | 0,01338 | 0,05753 | 0,05210 | 0,02582 | 0,01181 |
| 0,43750 | 0,10850 | 0,13063 | 0,09187 | 0,06912 | 0,10876 | 0,13058 | 0,09290 | 0,07349 |
| 0,37500 | 0,14531 | 0,20573 | 0,15806 | 0,12504 | 0,14570 | 0,20652 | 0,16040 | 0,13550 |
| 0,31250 | 0,16861 | 0,26611 | 0,22754 | 0,18161 | 0,16910 | 0,26817 | 0,23102 | 0,19835 |
| 0,25000 | 0,17866 | 0,29737 | 0,30156 | 0,23925 | 0,17920 | 0,30073 | 0,30674 | 0,26250 |
| 0,18750 | 0,17375 | 0,29312 | 0,35850 | 0,29821 | 0,17430 | 0,29719 | 0,36725 | 0,32836 |
| 0,12500 | 0,14871 | 0,25802 | 0,35252 | 0,36382 | 0,14921 | 0,26197 | 0,36423 | 0,39999 |
| 0,06250 | 0,09445 | 0,18192 | 0,26981 | 0,37404 | 0,09478 | 0,18492 | 0,27999 | 0,42928 |
| 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 |

# APÊNDICE B – ARTIGOS

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho os resultados parciais foram resumidos em artigos e publicados nos Proceedings de congressos internacionais e nacionais.

Os resultados da Etapa I foram publicados nos seguintes artigos:

- OPTIMUM PARAMETERS OF A GEOMETRIC MULTIGRID FOR A TWO-DIMENSIONAL PROBLEM OF TWO-EQUATIONS (COBEM 2007);
- PARÂMETROS ÓTIMOS DO MÉTODO MULTIGRID GEOMÉTRICO CS E FAS PARA PROBLEMAS 2D COM DUAS EQUAÇÕES (CILAMCE 2008)

Em relação aos resultados da Etapa II, um artigo foi aceito para publicação e outro está em fase de desenvolvimento. Os artigos são:

- ANÁLISE DO DESEMPENHO DO MÉTODO MULTIGRID GEOMÉTRICO COM A FORMULAÇÃO FUNÇÃO DE CORRENTE E VELOCIDADE (CONEM 2010);
- ANALYSIS OF THE PERFORMANCE OF MULTIGRID METHOD APPLIED TO NAVIER-STOKES EQUATIONS USING ALTERNATIVE FORMULATIONS (em desenvolvimento).

Os artigos publicados podem ser encontrados no diretório do grupo de pesquisa em CFD, cujo endereço é ftp://ftp.demec.ufpr.br/CFD/.