

**RAYANA DAL' NEGRO JOECKEL**

**EFEITO DA PRECISÃO DOS CÁLCULOS EM CFD COM MÚLTIPLAS  
EXTRAPOLAÇÕES DE RICHARDSON**

Trabalho de graduação apresentado como requisito parcial para a conclusão do Curso de Engenharia Mecânica, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Henrique Marchi.

CURITIBA

2010

# **FOLHA DE APROVAÇÃO**

**Trabalho de Conclusão de Curso defendido pela Aluna**

**RAYANA DAL' NEGRO JOECKEL**

**e aprovado em 7 de dezembro de 2010**

**pela banca julgadora:**

Eng. Leandro Alberto Novak, M. Eng.

Prof. Luciano Kiyoshi Araki, Dr. Sc.

Prof. Carlos Henrique Marchi, Dr. Eng.

## RESUMO

Neste trabalho aborda-se o problema do escoamento recirculante em uma cavidade quadrada, cujo fluido escoar em seu interior devido ao movimento da tampa. São dois os problemas de interesse do trabalho: o problema de Shih, no qual a velocidade da tampa da cavidade é variável e a solução analítica é conhecida, e o problema de Kawaguti, no qual a velocidade da tampa da cavidade é constante e a solução analítica ainda não é conhecida. O modelo matemático do problema consiste nas leis de conservação da massa e da quantidade de movimento linear, caracterizadas pelas equações de Navier-Stokes. O modelo numérico caracteriza-se pelo emprego do método dos Volumes Finitos com arranjo co-localizado de variáveis, solver MSI e diversas malhas, foram usadas malhas uniformes, com refino de malha constante e igual a dois. Os dois problemas de interesse foram resolvidos numericamente com uso de funções de interpolação CDS com correção adiada e UDS, com uso de precisão dupla e quádrupla. O principal objetivo do trabalho é avaliar o efeito de funções de interpolação de primeira e segunda ordem de acurácia, com uso de precisão dupla e quádrupla, sobre o erro de discretização, com e sem múltiplas extrapolações de Richardson. As variáveis de interesse são as componentes do vetor velocidade, seus valores mínimos e máximos, e o valor mínimo da função de corrente. Para isso, usaram-se malhas de até 1024x1024 nós para o caso de precisão dupla e de até 512x512 nós para precisão quádrupla. Concluiu-se então que o uso de precisão quádrupla não é efetivo na redução do erro de discretização para os dois problemas em questão, com ou sem múltiplas extrapolações de Richardson. Verifica-se que o uso de função de interpolação CDS gera resultados numéricos mais acurados do que o uso de UDS.

Palavras-chave: Extrapolação de Richardson, erro numérico, erro de discretização, precisão.

## ABSTRACT

This work addresses the problem of flow recirculation in a square cavity, whose fluid flows inside due to the movement of the lid. There are two problems of interest in this work: the problem of Shih, in which the speed of the cavity lid is variable and the analytical solution is known and the problem of Kawaguti, where the speed of the lid of the cavity is constant and the analytical solution is not known. The mathematical model of the problem is the conservation laws of mass and linear momentum, characterized by Navier-Stokes equations. The numerical model is characterized by the use of the Finite Volume Method with co-located arrangement of variables, MSI solver and several uniform grids were used with refinement ratio constant and equal to two. The two problems of interest were solved numerically using interpolation functions of CDS and UDS with deferred correction, using double and quadruple precision. The main aim is to evaluate the effect of interpolation functions of the first and second order accuracy, using double precision and quadruple over the discretization error, with and without MER. The variables of interest are the components of the speed vector, its minimum and maximum and minimum value of stream function. Up to  $1024 \times 1024$  nodes for the case of double precision and up to  $512 \times 512$  nodes to quadruple precision were used. The conclusion is that the use of quadruple precision is not effective in reducing the discretization error for the two problems involved, with or without MER. It appears that the use of CDS interpolation function generates numerical results more accurate than the use of UDS.

Keywords: Richardson extrapolation (MER), numerical error, discretization error, accuracy.

## LISTA DE SÍMBOLOS

- A matriz dos coeficientes
- $a, b$  coeficientes e termos fontes resultantes da discretização
- B matriz do termo fonte
- C coeficiente da Equação Geral do Erro
- CDS *Central Difference Scheme*
- CFD *Computational Fluid Dynamics*
- $E$  erro de discretização
- E ponto localizado à direita do ponto geral nodal
- Eq. equação
- $g$  aceleração da gravidade
- $h$  espaçamento da malha
- MDF Método de Diferenças Finitas
- MEF Método dos Elementos Finitos
- MER Múltiplas Extrapolações de Richardson
- MVF Método dos Volumes Finitos
- MSI *Modified Strongly Implicit Method*
- N ponto localizado acima do ponto geral nodal
- $p$  pressão
- P ponto geral do volume de controle
- $p_E$  ordem efetiva
- $p_L$  ordem assintótica
- $p_V$  ordens verdadeiras
- $p_U$  ordem aparente
- $r$  razão de refino de malha
- Re Número de Reynolds
- S ponto localizado abaixo do ponto geral nodal
- $t$  tempo
- $U_i$  vetor velocidade
- $u$  componente do vetor velocidade na direção  $x$ .
- $Uh$  Erro estimado
- UDS *Upwind Differencing Scheme*
- W ponto localizado à esquerda do ponto geral nodal

- $x$  coordenada espacial horizontal do sistema cartesiano
- $v$  componente do vetor velocidade na direção  $y$
- $y$  coordenada espacial vertical do sistema cartesiano
- $z$  profundidade da cavidade

### Letras Gregas

- $\Delta x$  distância entre dois nós consecutivos na horizontal
- $\Delta y$  distância entre dois nós consecutivos na vertical
- $\phi$  solução numérica da variável de interesse
- $\Phi$  solução analítica exata da variável de interesse
- $\psi$  linha de corrente
- $\phi_\infty$  estimativa do valor da solução analítica da variável de interesse
- $\rho$  massa específica do fluido
- $\mu$  viscosidade do fluido

### Subíndices

- $n$  face localizada acima do ponto geral nodal
- $s$  face localizada abaixo do ponto geral nodal
- $e$  face localizada à direita do ponto geral nodal
- $w$  face localizada à esquerda do ponto geral nodal
- $i$  posição do nó na direção  $x$
- $j$  posição do nó na direção  $y$
- 1 malha fina
- 2 malha grossa
- 3 malha supergrossa

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	9
1.1	PROBLEMA .....	9
1.2	MOTIVAÇÃO.....	9
1.3	OBJETIVO .....	11
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO .....	12
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	13
2.1	O PROBLEMA DA CAVIDADE QUADRADA .....	13
2.2	MODELO NUMÉRICO.....	14
2.2.1	O Método dos Volumes Finitos.....	15
2.2.2	Acoplamento Pressão-Velocidade.....	18
2.2.3	Condições de Contorno e Uso de Volumes Fictícios .....	20
2.2.4	Arranjo Co-Localizado de Variáveis Dependentes na Malha .....	21
2.3	ERROS DA SOLUÇÃO NUMÉRICA .....	21
2.4	MÚLTIPLAS EXTRAPOLAÇÕES DE RICHARDSON .....	25
3	METODOLOGIA .....	28
3.1	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.....	28
3.2	O PROBLEMA DE SHIH.....	35
3.3	O PROBLEMA DE KAWAGUTI .....	37
3.4	OBTENÇÃO DAS SEIS VARIÁVEIS DE INTERESSE .....	38
4	RESULTADOS DO PROBLEMA DE SHIH .....	41
4.1	DADOS E PARÂMETROS UTILIZADOS .....	41
4.2	ERROS DA SOLUÇÃO NUMÉRICA .....	44
4.3	VERIFICAÇÃO DAS ORDENS DE ERRO .....	48
5	RESULTADOS DO PROBLEMA DE KAWAGUTI.....	51
5.1	DADOS E PARÂMETROS UTILIZADOS .....	51
5.2	INCERTEZA DA SOLUÇÃO NUMÉRICA .....	52
5.3	VERIFICAÇÃO DAS ORDENS DE ERRO .....	55

6	CONCLUSÃO .....	58
6.1	CONCLUSÃO SOBRE O PROBLEMA DE SHIH .....	58
6.2	CONCLUSÃO SOBRE O PROBLEMA DE KAWAGUTI.....	59
6.3	CONCLUSÃO GERAL .....	59
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	61
	APÊNDICE .....	65
A.	ERRO DA SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA O PROBLEMA DE SHIH .....	65
B.	ORDEM EFETIVA PARA O PROBLEMA DE SHIH.....	67
C.	INCERTEZA DA SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA O PROBLEMA DE KAWAGUTI.....	71
D.	ORDEM APARENTE PARA O PROBLEMA DE KAWAGUTI .....	73

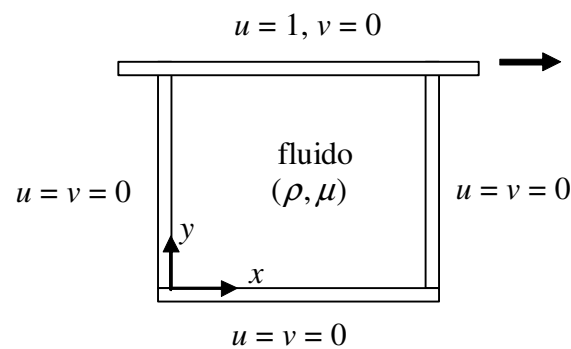


## 1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo define-se o problema tratado no presente trabalho, em seguida são apresentados sua motivação e seus objetivos. Por fim se descreve a estrutura aplicada a este documento.

### 1.1 PROBLEMA

Aborda-se neste trabalho o problema do escoamento recirculante em uma cavidade quadrada, cujo fluido escoa em seu interior devido ao movimento da tampa da cavidade. O problema está representado na Fig. 1.1., onde  $u$  e  $v$  são as componentes do vetor velocidade nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente;  $\rho$  é a massa específica e  $\mu$  é a viscosidade do fluido.



**Figura 1.1** Problema clássico da cavidade quadrada com tampa móvel (Marchi *et al.*, 2009).

Serão abordados dois problemas para verificação do efeito da precisão numérica, o primeiro problema tem solução analítica conhecida (SHIH *et al.*, 1989) e o segundo tem solução analítica desconhecida (KAWAGUTI, 1961).

### 1.2 MOTIVAÇÃO

Na solução de problemas de engenharia pode-se contar fundamentalmente com três tipos de métodos, sendo eles:

- ✓ Métodos experimentais;
- ✓ Métodos analíticos e
- ✓ Métodos numéricos.

Cada um desses métodos apresenta suas vantagens e desvantagens sobre os demais dependendo do problema e dos recursos disponíveis para resolvê-lo (MARCHI, 2001).

Métodos experimentais envolvem a configuração real do fenômeno, buscando reproduzi-lo com base em experimentos realizados em laboratório, com uso de modelos em dimensões reais ou em escala reduzida. Empregam equipamentos ou sistemas de medição para obter resultados experimentais. Mas muitas vezes, os custos dos métodos experimentais são altos, e em outras existem dificuldades de reprodução adequada do fenômeno.

Métodos analíticos e numéricos são também chamados de métodos teóricos, pois trabalham com uma representação matemática do fenômeno real, chamada modelo matemático. Um modelo matemático pode ser definido como uma formulação que expressa as características essenciais de um sistema ou processo físico em termos matemáticos.

Os métodos analíticos permitem determinar a solução exata de problemas que envolvem equações, geometrias e condições de contorno e/ou condições iniciais simples. Para os demais problemas os métodos analíticos requerem muitas simplificações.

Os fenômenos relacionados a escoamentos têm sua modelagem representada por equações diferenciais parciais, cujas soluções analíticas são conhecidas somente para poucos casos especiais. Na maioria das vezes, esta solução só é encontrada após uma série de simplificações do fenômeno físico, o que acaba afastando o resultado obtido do modelo real (MALISKA, 2004).

Os métodos numéricos são ferramentas extremamente poderosas na resolução de problemas, uma vez que apresentam menos restrições que os métodos analíticos. Eles são capazes de lidar com um grande número de equações, não linearidades e geometrias complicadas que não são incomuns na prática da engenharia e, em geral, são impossíveis de se resolver analiticamente. Dessa forma eles aumentam enormemente a capacidade de resolver problemas.

A Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD – *Computational Fluid Dynamics*) é uma área de dinâmica dos fluidos que utiliza técnicas computacionais e métodos numéricos para simulação de problemas de transferência de calor e mecânica dos fluidos (FORTUNA, 2000; VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007).

A Dinâmica dos Fluidos Computacional é uma importante ferramenta na avaliação e simulação numérica de problemas de engenharia para a indústria e para a comunidade acadêmica. Com o uso de técnicas de CFD, a análise de problemas pode ser feita com grande detalhamento e considerável redução de custos (VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007).

As equações de Navier-Stokes modelam escoamentos turbulentos e laminares de fluidos compressíveis e incompressíveis; são equações diferenciais parciais não lineares de segunda ordem. Essas equações têm então uma complexidade tal que impede a determinação da solução analítica do problema modelado através delas. Encontra-se solução analítica das equações de Navier-Stokes somente para escoamentos simples.

O problema clássico (KAWAGUTI, 1961; BURGGRAF, 1966; RUBIN e KHOSLA, 1977; BENJAMIN e DENNY, 1979; GHIA *et al*, 1982) do escoamento laminar no interior de uma cavidade quadrada, devido ao movimento da tampa é amplamente utilizado para avaliar métodos numéricos e para validar métodos de resolução das equações de Navier-Stokes (BOTELLA e PEYRET, 1998, MARCHI *et al.*, 2009).

Um fato de extrema importância a ser observado quando se trabalha com métodos numéricos é se os resultados obtidos são confiáveis. O processo de validação avalia o quão bem o modelo matemático representa o fenômeno real, é um processo puramente físico (MALISKA, 2004). O processo que quantifica o erro numérico é chamado de verificação (FORTUNA, 2000). A verificação avalia o quão bem o método numérico resolve o modelo matemático, é um processo puramente matemático.

### 1.3 OBJETIVO

Este trabalho tem por objetivo geral verificar o efeito da precisão em CFD com múltiplas extrapolações de Richardson para o problema clássico da cavidade com solução analítica conhecida (SHIH *et al.*, 1989) e com solução analítica desconhecida (KAWAGUTI, 1961).

Os objetivos específicos do presente trabalho estão descritos de forma sintetizada abaixo:

1. Verificar o efeito da precisão dos cálculos (precisão dupla versus precisão quádrupla) sobre o erro de discretização ( $E$ ), com e sem múltiplas extrapolações de Richardson (MER).
2. Verificar o efeito do uso de funções de interpolação de primeira e de segunda ordem de acurácia (UDS - *Upstream Differencing Scheme* e CDS - *Central Differencing Scheme*).
3. Verificar as ordens verdadeiras do erro de discretização das variáveis de interesse.

4. Comparar os resultados das variáveis de interesse com soluções analíticas e numéricas da literatura.

#### 1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

O restante do presente trabalho está organizado da seguinte forma:

- O capítulo 2 é uma revisão bibliográfica dos trabalhos que abordam o problema da cavidade, erros e múltiplas extrapolações de Richardson; visando contemplar os trabalhos que motivaram e embasaram a pesquisa do presente documento.
- O capítulo 3 aborda a metodologia do trabalho, isto é, as equações utilizadas, simplificações utilizadas, condições de contorno, variáveis de interesse e resultados esperados.
- No capítulo 4 são expostos os resultados numéricos encontrados para o problema de Shih.
- No capítulo 5 são expostos os resultados numéricos encontrados para o problema de Kawaguti.
- O capítulo 6 é a conclusão do presente trabalho.
- O capítulo seguinte traz as referências bibliográficas.
- Em seguida apresentam-se os apêndices, os quais contêm as tabelas com os valores de erro numérico, incerteza numérica, ordem efetiva e ordem aparente.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 O PROBLEMA DA CAVIDADE QUADRADA

O problema do escoamento no interior de uma cavidade quadrada gerado pelo movimento da tampa já foi amplamente estudado. Como se pode ver na Tab. 2.1, muitos foram os modelos numéricos já utilizados para resolver o problema clássico da cavidade quadrada, incluindo o método de diferenças finitas (MDF), o método dos volumes finitos (MVF), método dos elementos finitos (MEF), o método de lattice Boltzmann (LB) e o método espectral (Espectral). Também foram usadas diferentes formulações matemáticas, incluindo função de corrente e vorticidade ( $\psi-\omega$ ), função de corrente e velocidade ( $\psi-V$ ), equação de lattice Boltzmann (ELB) e as equações de Navier-Stokes ( $u,v,p$ ) (MARCHI *et al*, 2009).

**Tabela 2. 1** Formulação dos autores e malhas para o problema clássico - adaptado de Marchi, Suero e Araki (2009).

Autores	Ref.	Formulação	Re	Método	Malhas
Kawaguti (1961)	1	$\psi-\omega$	0 - 64	MDF	11x11
Burggraf (1966)	2	$\psi-\omega$	0 - 700	MDF	11x11 - 51x51
Rubin e Khosla (1977)	3	$\psi-\omega$	100 & 1.000	MDF etc	17x17 - 128x128
Benjamin e Denny (1979)	4	$\psi-\omega$	1.000 - 10.000	MDF	61x61 - 151x151
Ghia <i>et al</i> (1982)	5	$\psi-\omega$	100 - 10.000	MDF	129x129 & 257x257
Schreiber e Keller (1983)	6	$\psi-\omega$	1 - 10.000	MDF	121x121 - 180x180
Vanka (1986)	7	$u,v,p$	100 - 5.000	MDF	41x41 - 321x321
Hayase <i>et al</i> (1992)	8	$u,v,p$	100 - 10.000	MVF	10x10 - 80x80
Nishida e Satofuka (1992)	9	$\psi-\omega$	100 - 3.200	MDF	65x65 & 129x129
Hou <i>et al</i> . (1995)	10	LBE	100 - 7.500	LB	256x256
Wright e Gaskell (1995)	11	$u,v,p$	100 & 1.000	MVF	1024x1024
Goyon (1996)	12		1.000	MDF	129x129
Barragy & Carey (1997)	13	$\psi-\omega$	1,0e-4 - 10.000	MEF	257x257
Botella & Peyret (1998)	14	$u,v,p$	100 & 1.000	Espectral	160
Zhang (2003)	15	$\psi-\omega$	100 - 7.500	MDF	17x17 - 129x129
Erturk <i>et al</i> (2005)	16	$\psi-\omega$	1.000 - 21.000	MDF	401x401 - 601x601
Gupta e Kalita (2005)	17	$\psi-V$	100 - 10.000	MDF	41x41 - 161x161
Bruneau e Saad (2006)	18	$u,v,p$	1.000 - 10.000	MDF	128x128 - 2048x2048
Marchi <i>et al</i> (2009)	19	$u,v,p$	1,0e-2 - 1.000	MVF	2x2 - 1024x1024
Presente trabalho		$u,v,p$	1.000	MVF	2x2 - 1024x1024

Marchi *et al* (2009) foram ao que tudo indica os únicos autores até hoje a estimar o erro numérico da solução de cada variável de interesse do problema clássico, trabalhando com malhas até 1024 x 1024 volumes de controle e com vários valores para o número de Reynolds. Outros autores apresentaram o erro numérico para algumas variáveis, em duas ou três malhas, sem, entretanto, fazer uso de estimadores de erro de discretização. O erro estimado ( $Uh$ ) pode ser visto na Tabela 2.2.

Somente Bruneau e Saad (2006), e Wright e Gaskell (1995) apresentaram malhas tão finas como as de Marchi *et al* (2009), e somente para Reynolds de 1000, poucas variáveis e sem o uso de múltiplas extrapolações de Richardson. Na Tabela 2.2, a coluna RE mostra se os autores usaram extrapolação de Richardson ou não, e caso tenham usado, quantas extrapolações foram feitas.

**Tabela 2. 2 Erros numéricos para o problema clássico - adaptado de Marchi, Suero e Araki(2009).**

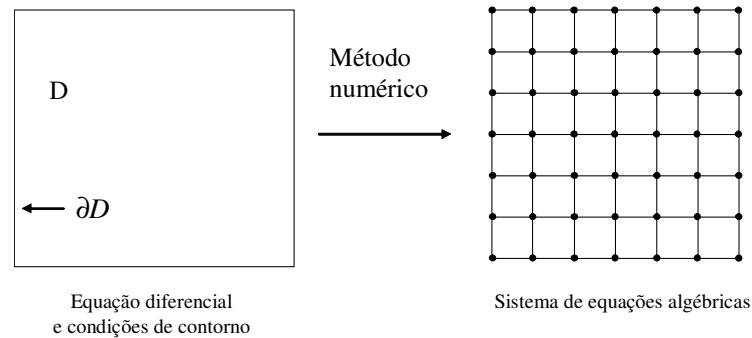
Ref.	$p_L$	Precisão	$U_i$	dígitos	$U_h$	RE
1	2	?	?	5	?	Não
2	2	simples	R: 5,0e-6	4	?	Não
3	2	?	?	3-4	?	Não
4	2	?	?	6	?	Sim=1
5	2	?	R: 1,0e-4	5	?	Não
6	2	?	?	5	?	Sim=3
7	2	?	R: 1,0e-3	4	?	Não
8	2	?	R: 1,0e-5	?	?	Não
9	2-10	?	R: 1,0e-8	6	?	Não
10	1	simples	?	4	8,7e-3	Não
11	2	?	R: 1,0e-10	6	?	Não
12	2	?	?	4	?	Não
13	8	?	R: 1,0e-6	5-7	1,0e-5	Não
14	160	dupla	R: 1,0e-8	7	1,0e-6	Não
15	4	dupla	$\Delta\psi, \Delta\omega$ : 1,0e-4	6	?	Não
16	2	?	R: 1,0e-10	6	?	Sim=2
17	2	?	$\Delta\psi$ : 5,0e-7	3	?	Não
18	3	?	1,0e-12	5	?	Não
19	2	dupla	erro de máquina	6-10	7,3e-6 a 3,7e-12	Sim=6-9

A maioria dos autores parou o processo iterativo pelo critério de resíduo (identificado na Tabela 2.2 pela letra R) ou baseados em um valor de tolerância de alguma variável. Em Marchi *et al* (2009), o processo iterativo foi realizado até ser atingido o erro de máquina. Na Tab. 2.2, “dígitos” representa o número de algarismos significativos para cada solução, o maior valor está em Marchi *et al* (2009); e  $p_L$  é a ordem assintótica do erro de discretização. Marchi *et al* (2009) conseguiram obter uma estimativa de erro confiável e com múltiplas extrapolações de Richardson chegaram a uma redução do erro de discretização de  $1,6 \times 10^3$  a  $3,8 \times 10^6$  vezes para algumas das variáveis de interesse (perfis de velocidade  $u$  e  $v$ , fluxo de massa  $M$  e força de arrasto viscoso  $F_s$ ), e chegaram a ordens aparentes muito próximas às ordens assintóticas verdadeiras teóricas.

## 2.2 MODELO NUMÉRICO

O objetivo de um método numérico é obter a solução de uma ou mais equações diferenciais através da substituição das derivadas existentes por expressões algébricas que

envolvem a função incógnita (MALISKA, 2004). A tarefa do método numérico é então transformar uma equação diferencial definida em um domínio  $D$  (Fig. 2.1) em um sistema de equações algébricas, uma para cada ponto de interesse.



**Figura 2.1 Tarefa do método numérico (MALISKA, 2004).**

A forma de obter as expressões que substituem as derivadas do modelo matemático caracteriza o método numérico. O sistema de equações diferenciais é obtido com a discretização do modelo matemático sobre cada um dos volumes de controle, essa discretização é realizada com auxílio de métodos como, por exemplo, diferenças finitas, volumes finitos e elementos finitos.

### 2.2.1 O Método dos Volumes Finitos

Segundo Maliska (2004) qualquer método que, para obter as expressões que substituem as derivadas do modelo matemático, satisfaz a conservação das propriedades físicas em nível de volumes elementares é um método de volumes finitos, considerando como volume elementar, o menor volume de fluido ainda tratado como meio contínuo.

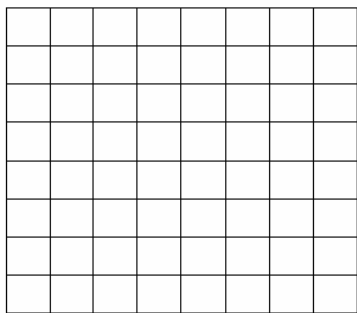
A obtenção da solução numérica pelo método dos volumes finitos pode ser dividida nas seguintes etapas:

- ✓ Discretização do domínio de cálculo
- ✓ Discretização do modelo matemático
- ✓ Obtenção da solução numérica.

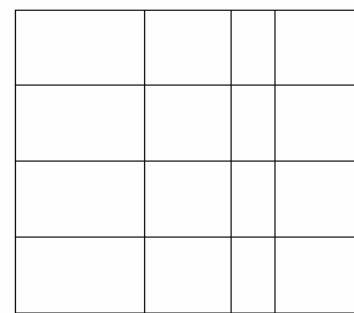
### Discretização do Domínio de Cálculo

Esta etapa consiste em definir em quais pontos se deseja conhecer a variável dependente ao longo do domínio. Divide-se o domínio de cálculo em volumes de controle discretos.

A solução numérica é obtida sobre um conjunto de nós; e a esse conjunto de nós e suas faces dá-se o nome de malha. Dependendo da distribuição dos pontos discretos no domínio, a malha pode ser classificada como estruturada ou não estruturada. Uma malha estruturada é aquela em que os volumes de controle seguem uma estrutura fixa, de forma que, se os volumes de controle forem numerados, cada volume será consecutivo ao seu vizinho. Malhas estruturadas podem ser ainda classificadas como: uniformes, uniformes por direção, ou não-uniformes. Três diferentes tipos de malhas podem ser observados nas Fig. 2.2 e Fig. 2.3.



a) malha estruturada e uniforme.



b) malha estruturada e uniforme na direção y.

Figura 2.2 Exemplos de malhas estruturadas: (a) uniforme e (b) não-uniforme - OLIVEIRA (2010).

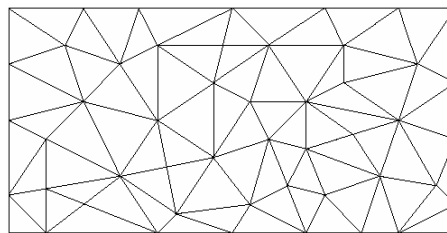
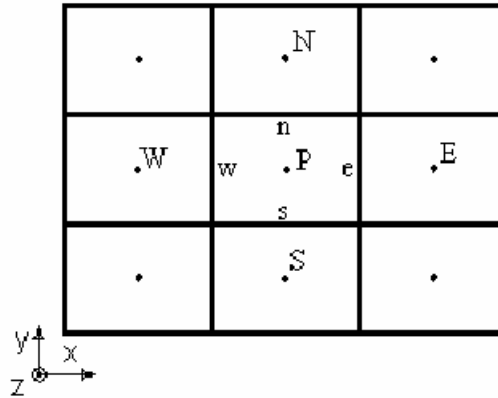


Figura 2.3 Exemplo de malha não-estruturada - OLIVEIRA (2010).

Os centros dos volumes são pontos nodais, sobre os quais se deseja conhecer a variável dependente. Um ponto nodal geral é identificado por P e seus vizinhos na horizontal são identificados por W no lado esquerdo, e por E no lado direito. Seus vizinhos na vertical



são os pontos N acima, e S abaixo. As faces norte, sul, leste e oeste do volume de controle, são respectivamente identificadas por: n, s, e, w. Conforme pode ser observado na Fig. 2.4.



**Figura 2.4** Malha estruturada uniforme por direção, bidimensional, com ponto nodal geral P e seus vizinhos..

Duas outras possibilidades na geração de malhas através do método dos volumes finitos são: malhas de nós centrados e malhas de faces centradas, ambas representadas na Fig. 2.5. As malhas de nós centrados são geradas quando os nós estão localizados no ponto médio entre as faces de cada volume de controle. Já as de face centradas são originadas quando a malha é gerada posicionando-se inicialmente os nós, e depois se centrando as faces dos volumes de controle no ponto médio entre os nós. As malhas estruturadas uniformes são simultaneamente do tipo de nós centrados e de faces centradas.



**Figura 2.5** Volume de nó centrado e de face centrada.

### Discretização do Modelo Matemático

Depois de gerada a malha, é necessário discretizar as equação diferenciais parciais do modelo matemático. Ou seja, é necessário escrever a ou as equações em função dos pontos, nos quais se resolverá o problema. Para isso integram-se as equações do modelo matemático para cada um dos volumes de controle e aproximam-se suas derivadas numericamente. Esse

processo gera um sistema de equações algébricas, denominado sistema de equações discretizadas, um exemplo de uma equação discretizada de um problema bidimensional no ponto nodal P é dado por

$$a_p^V \phi_P = a_w^V \phi_W + a_e^V \phi_E + a_s^V \phi_S + a_n^V \phi_N + b_p^\phi \quad (2.1)$$

onde  $\phi$  é a variável de interesse e  $a$ 's são coeficientes, que dependem da equação de interesse e  $b$  é o termo fonte.

### Obtenção da solução do sistema

Os termos das equações que constituem o modelo matemático e suas condições de contorno são aproximados numericamente através de um modelo numérico, gerando assim, um sistema de equações algébricas, também denominado sistema de equações discretizadas, representado por

$$[A] \cdot [X] = [B] \quad (2.2)$$

onde  $A$  é a matriz de coeficientes,  $X$  é o vetor incógnita e  $B$  é o vetor do termo fonte.

O conjunto de equações algébricas lineares, obtido a partir da aplicação da discretização do modelo matemático, pode ser resolvido através de métodos diretos e iterativos. Os métodos diretos são aqueles que não precisam de uma estimativa inicial das variáveis para obter a solução. Os métodos iterativos requerem uma estimativa inicial para dar andamento ao processo de solução.

Para resolver o sistema de equações lineares que surge da discretização das equações diferenciais, no presente trabalho é usado um método iterativo, o MSI (*Modified Strongly Implicit Method*), também conhecido como método fortemente implícito (SCHNEIDER e ZEDAN, 1981).

#### 2.2.2 Acoplamento Pressão-Velocidade

Com a discretização do modelo matemático, cada uma das equações diferenciais é representada por um sistema de equações algébricas lineares. Tem-se, portanto um sistema de sistemas de equações algébricas a ser resolvido. Para resolver essas equações, precisa-se

decidir quanto à natureza da solução, segregada ou acoplada. A solução acoplada cria uma única matriz envolvendo todos os coeficientes e resolvendo todas as incógnitas simultaneamente.

Pelo tamanho das matrizes envolvidas nos problemas reais de engenharia, soluções acopladas tornam-se inviáveis e a alternativa é de se recorrer à solução segregada. Nessa alternativa, resolvem-se todos os sistemas lineares um a um, atualizando os coeficientes. Mas optando-se pela solução segregada, destaca-se o problema dos acoplamentos entre as variáveis.

Em mecânica dos fluidos, um dos principais problemas de acoplamento entre variáveis é o acoplamento pressão-velocidade para escoamentos incompressíveis. O desafio é então, determinar um campo de pressões que, quando inserido nas equações do movimento, origine um campo de velocidades que satisfaça a equação de conservação da massa.

A solução segregada das equações de Navier-Stokes gera o problema de acoplamento pressão-velocidade. Neste caso, para a determinação do campo de pressões, é necessário promover um acoplamento entre a equação de conservação da massa e as equações de conservação da quantidade de movimento, originando uma equação para a pressão.

Existem diversos métodos para tratar deste acoplamento. O objetivo de todos eles é criar uma equação para a pressão que permita que o processo iterativo avance, observando a conservação da massa (SUERO, 2006).

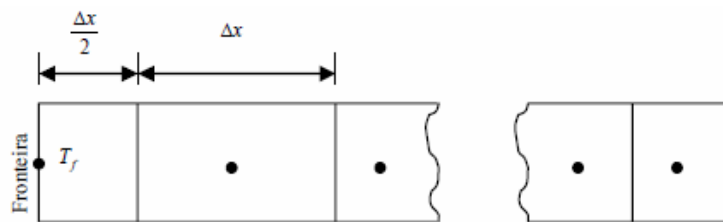
Patankar e Spalding (1972) desenvolveram o método SIMPLE para tratar do acoplamento pressão-velocidade. O método é baseado nas idéias e no método de Chorin (1971), no qual a pressão é escrita como a soma da melhor estimativa da pressão disponível mais uma correção, que é calculada de maneira a atender as equações da continuidade. Praticamente em todos os métodos do acoplamento pressão-velocidade, a seqüência de cálculos envolve dois passos distintos. No primeiro, as velocidades são corrigidas de maneira a satisfazer a equação de conservação da massa; e no segundo, as pressões são avançadas para completar o ciclo iterativo.

O algoritmo que será utilizado para o desenvolvimento deste trabalho é o SIMPLEC (SIMPLE - Consistente) de Van Doormaal e Raithby (1984). Neste algoritmo, os fluxos convectivos por unidade de massa através das faces das células, são calculados a partir das componentes de velocidade existentes. Um campo de pressões definido previamente é usado para resolver as equações de conservação da quantidade de movimento linear, e uma equação para correção da pressão, deduzida da equação da continuidade, é resolvida para obter um

campo de correção da pressão, que é usado para retornar os campos de velocidade e pressão. Enquanto o algoritmo é executado, a intenção será a de melhorar os campos supostos progressivamente (SUERO, 2006). O processo é repetido até a convergência dos campos de velocidade e pressão (VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007).

### 2.2.3 Condições de Contorno e Uso de Volumes Fictícios

Para se obter o sistema de equações algébricas completo, é também necessário obter as equações para os volumes que estão na fronteira. Existem diversas formas de aplicação das condições de contorno. Uma delas é criar uma malha na qual o ponto central do volume de controle fique sobre a fronteira. Esse procedimento dá origem a meio volume de controle perto da fronteira e a volumes internos inteiros, como se pode ver na Figura 2.6.



**Figura 2.6** Condições de contorno com meio volume de fronteira (SUERO, 2006; MALISKA, 2004).

Mas com uso deste procedimento aparecem problemas, como: a não uniformidade dos volumes, que se agrava para problemas bi e tridimensionais e gera um problema de uniformidade das sub-rotinas de cálculo dos coeficientes em nível computacional; e o problema que ocorre quando a variável de interesse na fronteira é conhecida (MALISKA, 2004).

Um dos procedimentos que respeita os princípios de conservação para todo o domínio se dá pelo uso de volumes fictícios, conforme pode ser visto na Fig. 2.7. Todos os volumes do domínio, inclusive os de fronteira, são interpretados como internos, uma vez que são criados volumes fictícios. A desvantagem é a criação de novas incógnitas, o que aumenta o tamanho do sistema linear.

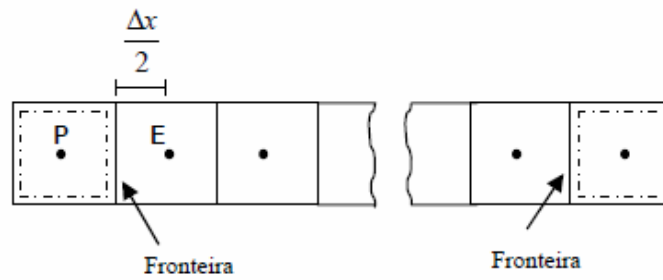


Figura 2.7 Condições de contorno com pontos fictícios (SUERO, 2006; MALISKA, 2005).

#### 2.2.4 Arranjo Co-Localizado de Variáveis Dependentes na Malha

A localização relativa das variáveis na malha computacional é conhecida como arranjo de variáveis, cuja característica principal é a posição relativa entre as componentes do vetor velocidade e a pressão.

No arranjo co-localizado todas as variáveis dependentes de todas as equações diferenciais parciais são localizadas no mesmo volume de controle. Com isso, usa-se um único volume de controle para realizar todas as integrações.

### 2.3 ERROS DA SOLUÇÃO NUMÉRICA

Na solução de um problema de engenharia por qualquer um dos três métodos apresentados neste trabalho estão envolvidos erros e incertezas. O erro que separa a solução experimental do valor verdadeiro é o erro experimental. Os métodos teóricos sofrem influência de erros de modelagem e à solução numérica ainda está associado o erro numérico. A estimativa quantitativa do erro numérico é dever dos analistas de CFD.

A diferença entre a solução analítica exata ( $\Phi$ ) de uma variável de interesse e a sua solução numérica ( $\phi$ ) é denominada por Ferziger e Peric (1999) de erro da solução numérica ( $E$ ), ou simplesmente erro numérico (MARCHI, 2001), isto é,

$$E(\phi) = \Phi - \phi \quad (2.3)$$

A solução numérica ideal é, portanto, aquela em que o erro numérico é nulo; isto é, aquela que é igual à solução analítica. O valor do erro numérico só pode ser obtido quando a solução analítica de um modelo matemático é conhecida (MARCHI, 2001). Na prática é necessário estimar o valor da solução analítica; assim, em vez do erro numérico, calcula-se o

erro estimado, também chamado de incerteza ( $U$ ). A incerteza da solução numérica de uma variável de interesse é avaliada pela diferença entre a sua solução analítica estimada ( $\phi_\infty$ ) e a própria solução numérica ( $\phi$ ), isto é,

$$U(\phi) = \phi_\infty - \phi \quad (2.4)$$

A incerteza de uma solução numérica é calculada com uso de estimadores de erro, dos quais dois exemplos são: o estimador GCI (*Grid Convergence Index*) e o estimador de Richardson.

De acordo com o estimador CGI, a incerteza de uma solução numérica é calculada através de (ROACHE, 1998)

$$U_{GCI}(\phi_1) = F_s \frac{|\phi_1 - \phi_2|}{(r^{p_L} - 1)} \quad (2.5)$$

onde  $F_s$  é um fator de segurança com valor igual a três para aplicações em geral,  $\phi_1$  é a solução numérica na malha fina e  $\phi_2$  na malha grossa,  $r$  é a razão de refino de malha ( $r=h1/h2$ ) e  $p_L$  é a ordem assintótica do erro de discretização. A razão entre o valor de incerteza calculada pelo estimador CGI e o erro de discretização tende ao valor do fator de segurança  $F_s$  quando  $h \rightarrow 0$ .

O erro numérico ( $E$ ) é causado por diversas fontes: erros de truncamento ( $\epsilon_\tau$ ), erros de iteração ( $\epsilon_n$ ), erros de arredondamento ( $\epsilon_\pi$ ) e erros de programação ( $\epsilon_p$ ). O erro numérico pode então ser representado como uma função das fontes de erro por

$$E(\phi) = E(\epsilon_\tau, \epsilon_n, \epsilon_\pi, \epsilon_p) \quad (2.6)$$

Essas quatro fontes de erro podem ter magnitudes e sinais diferentes, podendo haver cancelamentos parciais ou totais entre esses erros (MARCHI, 2001). A definição, o efeito e a origem de cada uma destas quatro fontes de erro são explicados a seguir de forma isolada, isto é, o erro da solução numérica em cada exemplo depende apenas de uma fonte de erro.

- ✓ **O erro de iteração** é definido como a diferença entre a solução exata das equações discretizadas e a solução numérica em uma dada iteração. É causado principalmente pelo emprego de métodos iterativos para resolução do sistema de equações algébricas, pela existência de não-linearidades no modelo matemático e pelo uso de métodos segregados em modelos com mais de uma equação (MARCHI, 2001).
- ✓ **O erro de programação** ocorre pela implementação incorreta do modelo numérico no programa computacional, pelo uso incorreto de um modelo numérico na aproximação do modelo matemático, pelo uso incorreto do programa computacional na obtenção da solução numérica, entre outros.
- ✓ **O erro de truncamento** origina-se das aproximações numéricas empregadas na discretização do modelo matemático (MARCHI e SILVA, 2002) e é decorrente do truncamento de um processo infinito.
- ✓ **O erro de arredondamento** ocorre principalmente devido à representação finita dos números reais nas computações. A magnitude do erro de arredondamento depende do compilador (software) usado para gerar o código computacional e do computador (hardware) empregado em sua execução. Estão relacionados ao número de bits usados para representar as variáveis nos computadores e ao número de termos empregados no cálculo de séries infinitas de funções pré-definidas da linguagem de programação. **Quanto maior é a precisão usada para representar as variáveis, menores são os erros de arredondamento; entretanto, maior é a memória computacional necessária para o armazenamento destas variáveis.**

Tanto as aproximações numéricas quanto seus erros de truncamento podem ser obtidos a partir da série de Taylor, que é uma série infinita e definida genericamente por (KREYSZIG, 1999; FORTUNA, 2000; MARCHI, 2001)

$$\Lambda_x = \Lambda_j + \Lambda_j^i (x - x_j) + \Lambda_j^{ii} \frac{(x - x_j)^2}{2!} + \dots + \Lambda_j^M \frac{(x - x_j)^M}{M!} \quad (2.7)$$

onde  $\Lambda$  é a variável dependente nos modelos matemáticos,  $\Lambda_x$  é o valor analítico exato obtido em qualquer coordenada  $x$  com expansão da série de Taylor a partir do nó  $j$ , onde são conhecidos os valores analíticos exatos de  $\Lambda_j$  e suas derivadas ( $\Lambda_j^i, \Lambda_j^{ii}, \dots, \Lambda_j^M$ ). A Eq. (2.7) é válida se  $\Lambda$  é uma função contínua de  $x$  no intervalo fechado  $[x_0, x_L]$  e possui derivadas contínuas até a ordem  $M$  nesse intervalo (MARCHI, 2001).

Quando o erro da solução numérica é gerado apenas pelos erros de truncamento, ou todos os outros erros são desprezíveis em relação a ele, o erro numérico será então chamado erro de discretização. O erro de discretização ( $E_h$ ) é causado pelo uso de aproximações numéricas não exatas sobre o modelo matemático e pode ser representado genericamente por

$$E(\phi) = C_1 h^{p_L} + C_2 h^{p_2} + C_3 h^{p_3} + \dots \quad (2.8)$$

onde  $\phi$  é a variável de interesse;  $h$  é o tamanho dos volumes de controle da malha;  $C_1, C_2, C_3$  são coeficientes que dependem da variável ( $\Phi$ ), mas independem de  $h$ ;  $p_L, p_2, p_3$  são as ordens verdadeiras do erro de discretização ( $p_v$ ); e  $p_L$  é a ordem assintótica do erro de discretização, dada pelo menor expoente da Eq. (2.8).

As ordens verdadeiras são geralmente números inteiros e maiores ou iguais a 1 e representam valores de uma série aritmética. A ordem assintótica ( $p_L$ ) é atingida quando  $h \rightarrow 0$ . Na prática,  $p_L$  representa a inclinação da curva do erro em um gráfico  $\log(|E_h|)$  versus  $\log(h)$ , quando  $h \rightarrow 0$ .

Normalmente, define-se a ordem de um esquema como a ordem do erro de truncamento da função de interpolação em relação à série de Taylor. Marchi (2001) demonstrou que as ordens verdadeiras do esquema CDS são  $p_v=2,4,6$ , etc, portanto a ordem assintótica do esquema é  $p_L=2$ . Por isso o erro de arredondamento da função CDS é dito de 2ª ordem. Já para função de interpolação UDS as ordens verdadeiras são  $p_v=1,2,3$ , etc e a ordem assintótica do esquema é  $p_L=1$ , o erro de arredondamento da função UDS é dito então de 1ª ordem.

As estimativas do erro de discretização podem ser de dois tipos básicos: estimativas *a priori* ou *a posteriori* da obtenção da solução numérica (MARCHI, 2001). As estimativas *a priori* permitem prever, antes mesmo de se obter qualquer solução numérica, o comportamento assintótico do erro de discretização com relação ao tamanho ( $h$ ) dos elementos da malha. Realiza-se esse tipo de estimativa com auxílio da série de Taylor.

Quando se conhece a solução analítica do problema, é possível determinar a ordem efetiva do erro ( $p_E$ ) com uso de duas soluções numéricas. Para duas malhas diferentes,  $h_1$  (malha fina) e  $h_2$  (malha grossa), a ordem efetiva do erro de discretização é dada por



$$p_E(h_1) = \frac{\log\left[\frac{E(\phi_2)}{E(\phi_1)}\right]}{\log(r)} \quad (2.9)$$

onde  $E(\phi_2)$  e  $E(\phi_1)$  são os erros numéricos nas malhas grossa e fina, respectivamente, e  $r$  é a razão de refino de malha, calculada por

$$r = \frac{h_2}{h_1} \quad (2.10)$$

O valor de  $p_E$  representa a inclinação média da curva do erro de discretização, *versus*  $h$ , entre  $h_1$  e  $h_2$ . A ordem efetiva é função do erro verdadeiro de discretização da variável de interesse, requer por tanto o valor da solução analítica. Nos casos em que não se conhece a solução analítica, calcula-se a ordem aparente ( $p_U$ ). O cálculo da ordem aparente requer o uso de três soluções numéricas e razão de refino de malha constante. O cálculo da ordem aparente é dado por

$$p_U(h_1) = \frac{\log\left(\frac{\phi_2 - \phi_3}{\phi_1 - \phi_2}\right)}{\log(r)} \quad (2.11)$$

onde,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $\phi_3$  são as soluções numéricas obtidas com malha fina ( $h_1$ ), grossa ( $h_2$ ) e super-grossa ( $h_3$ ), respectivamente. Na teoria (MARCHI, 2001) espera-se que a ordem efetiva ( $p_E$ ) e a ordem aparente ( $p_U$ ) tendam à ordem assintótica ( $p_L$ ) quando o tamanho de malha ( $h$ ) tende a zero.

#### 2.4 MÚLTIPLAS EXTRAPOLAÇÕES DE RICHARDSON

A técnica de múltiplas extrapolações de Richardson foi consequência dos trabalhos de Richardson (1910) e de Richardson e Gaunt (1927) com objetivo de reduzir o erro de discretização (ROACHE, 1998) de soluções numéricas. Mas segundo Joyce (1971), as idéias da técnica da extrapolação são muito mais antigas.

A extrapolação de Richardson é utilizada para gerar resultados com alta acurácia, ainda que sejam utilizadas fórmulas de baixa ordem (BURDEN e FAIRES, 2008). A

extrapolação pode ser aplicada sempre que se saiba que uma técnica de aproximação tem um termo indicativo de erro de uma forma como o da Eq. (2.8), normalmente em função do tamanho de malha ( $h$ ). Isto é, a técnica pode ser utilizada quando se sabe que o erro da solução numérica é gerado apenas pelos erros de truncamento, ou que todos os outros erros são desprezíveis em relação a ele.

Múltiplas extrapolações de Richardson (MER) é uma técnica de pós-processamento da solução numérica, baseada na extrapolação de Richardson, capaz de diminuir o erro de discretização. Para se usar MER é necessário ter a solução numérica da variável de interesse em três ou mais malhas com números de nós diferentes (Marchi *et al*, 2008). A solução numérica ( $\phi$ ) para qualquer variável de interesse na malha  $g$ , com  $m$  extrapolações de Richardson, é dada por

$$\phi_{g,m} = \phi_{g,m-1} + \frac{\phi_{g,m-1} - \phi_{g-1,m-1}}{r^{p_{m-1}} - 1} \quad (2.12)$$

onde  $r=h_{g-1}/h_g$  é a razão de refino de malha, a variável  $p_m$  representa as ordens verdadeiras do erro de discretização,  $g$  representa cada uma das malhas e  $m$  é o número de extrapolações. Em  $g=1$  tem-se a malha mais fina (a qual apresenta o maior valor de  $h$ ) e  $g=G$  tem-se a malha mais grossa (com menor valor de  $h$ ). A Eq. (2.12) é válida para o intervalo  $g=[2,G]$  e para  $m=[1,g-1]$ . A solução para  $m=0$  é a solução sem extrapolação. Para  $m=1$ , tem-se a extrapolação de Richardson, que é comumente utilizada para estimar o erro de discretização ou para melhorar a solução de cada malha. Para um determinado valor de  $g$ , a Eq. (2.12) pode ser aplicada até  $g-1$  vezes, realizando  $m$  extrapolações de Richardson (Marchi *et al*, 2008).

A ordem teórica de acurácia da solução numérica extrapolada é dada por (Marchi *et al*, 2008)

$$p_v = p_L + m(p_1 - p_L) \quad (2.13)$$

onde  $m$  é o número de extrapolações.

O objetivo de se usar múltiplas extrapolações de Richardson é então encontrar uma maneira de combinar as melhores aproximações do erro de discretização que não sejam tão precisas, de modo a produzir fórmulas com um erro de truncamento de ordem mais elevada.

Ainda hoje, MER é muito pouco empregado. Alguns trabalhos citados em Marchi *et al* (2008) e em Marchi *et al* (2009) obtiveram bons resultados com a técnica sendo usada para diminuir o erro de discretização de problemas em CFD. Mas nestes trabalhos geraram-se resultados com no máximo quatro malhas, resultando em no máximo três extrapolações para a malha mais fina usada e em nenhum deles foi feita uma estimativa do erro numérico. Mas a estimativa quantitativa do erro numérico é um dever dos analistas de CFD (Marchi *et al*, 2008).

No trabalho de Marchi *et al* (2008) geram-se resultados numéricos com precisão dupla e quádrupla para a mesma variável de interesse em função do tamanho de malha, com o intuito de mostrar o efeito da precisão nos cálculos para as seis variáveis de interesse. Chegou-se então à conclusão que o erro de soluções numéricas obtidas com múltiplas extrapolações de Richardson é reduzido muito mais quando se usa precisão quádrupla do que quando a precisão usada é dupla. Mostra-se também que com o aumento do número de extrapolações, maior é a redução do erro de discretização, até que se atinja o erro de arredondamento de máquina.

No trabalho de Marchi e Germer (2009) avaliou-se o efeito de aproximações numéricas sobre a redução do erro de discretização da solução numérica da equação de advecção-difusão unidimensional, resolvida com precisão quádrupla, e avaliou-se também o efeito do pós-processamento da solução numérica com MER. Com isso, mostrou-se que: para o problema em questão MER é extremamente eficiente na redução do erro de discretização para todas as variáveis de interesse e esquemas advectivo-difusivos testados; a redução do erro resultante do uso de MER é maior quanto maior o número de nós da malha e quanto maior o número de extrapolações, e CDS é a função de interpolação de melhor desempenho com MER, isto é, CDS é o esquema que, para uma mesma malha, gera o menor erro numérico.

### 3 METODOLOGIA

Na formulação do problema é definido o modelo matemático, ou seja, as equações com suas condições de contorno, a geometria do domínio de cálculo, as propriedades dos meios envolvidos no problema e o uso de hipóteses simplificadoras.

#### 3.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O presente documento aborda o problema da cavidade em duas situações, quando a solução analítica é conhecida (Shih *et al.*, 1989), e quando não há solução analítica conhecida (Kawaguti, 1961). Por brevidade, no texto subsequente o primeiro problema será referenciado apenas por problema de Shih e o segundo será referenciado como problema de Kawaguti.

O problema do escoamento laminar em uma cavidade quadrada, criado pelo movimento da sua tampa é esquematizado na Fig. 1.1.

O modelo matemático do problema consiste nas leis da Conservação de Massa e da Conservação da Quantidade de Movimento Linear. A Equação da Continuidade ou Conservação da Massa expressa na forma diferencial é dada por (KUNDU, 1996)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad (3.1)$$

onde  $t$  é o tempo (s),  $\vec{\nabla}$  é o operador nabla e  $\vec{U}$  é o vetor velocidade do fluido (m/s).

As equações da Conservação de Quantidade de Movimento Linear são obtidas a partir da segunda Lei de Newton, sendo que, para um escoamento incompressível, tem-se (KUNDU, 1996)

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = -\vec{\nabla} p + \rho g + \mu \nabla^2 U_i \quad (3.2)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade e  $\mu$  é a viscosidade do fluido.

Todos os problemas que são considerados neste trabalho têm as seguintes características comuns:

- ✓ O regime é permanente
- ✓ As geometrias são bidimensionais

- ✓ O escoamento é incompressível
- ✓ As propriedades dos fluidos (massa específica  $\rho$ , e viscosidade  $\mu$ ) são constantes
- ✓ A variável tempo é usada como parâmetro de relaxação
- ✓ Os efeitos gravitacionais são desprezados

Como as geometrias são bidimensionais, apenas as componentes da velocidade nas direções  $x$  e  $y$  fazem-se necessárias ( $u$  e  $v$ ). Como o escoamento é considerado incompressível, as deformações volumétricas são nulas. E como os efeitos gravitacionais são desprezados, as forças de campo podem ser desprezadas, excluindo-se os termos fonte.

As equações de Conservação da Massa e de Conservação de Quantidade de Movimento Linear (QMLX e QLMY, respectivamente) são, com essas simplificações, respectivamente escritas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.3)$$

$$\rho \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \rho \frac{\partial(uv)}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.4)$$

$$\rho \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \rho \frac{\partial(v^2)}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + S \quad (3.5)$$

onde  $S$  é o termo fonte, que é zero para o problema de Kawaguti e é conhecido para o problema de Shih, e  $p$  é a pressão estática.

As equações do modelo matemático (Eq.(3.3), (3.4) e (3.5)) podem ser representadas de maneira mais geral por

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varphi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\varphi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v\varphi) = P^\varphi + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + S^\varphi \quad (3.6)$$

O significado dos símbolos  $\varphi$ ,  $P^\varphi$  e  $S^\varphi$  é mostrado na Tab. 3.1.

**Tabela 3.1 Símbolos da Eq. (3.6).**

	$\phi$	$P^\phi$	$S^\phi$
Massa	1	0	0
QMLX	$u$	$-\frac{\partial p}{\partial x}$	0
QMLY	$v$	$-\frac{\partial p}{\partial y}$	-S

As variáveis de interesse são: a componente horizontal da velocidade no centro da cavidade ( $u_c$ ), a componente vertical da velocidade no centro da cavidade ( $v_c$ ), velocidades mínimas em ambas as direções ( $u_{min}$  e  $v_{min}$ ), velocidade máxima na direção  $y$  ( $v_{max}$ ) e valor mínimo da função de corrente ( $\psi_{min}$ ).

As condições de contorno para as velocidades  $u$  e  $v$  são do tipo Dirichlet para os dois problemas. As componentes da velocidade ( $u$  e  $v$ ) assumem zero em todos os contornos, exceto no superior.

### Discretização da Equação de Conservação de Movimento Linear

Com a integração da Eq. (3.6) sobre o volume de controle P e considerando-se:

$$M_p = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \quad (3.7)$$

$$\dot{M}_e = \rho u_e \Delta y \Delta z \quad (3.8)$$

$$\dot{M}_w = \rho u_w \Delta y \Delta z \quad (3.9)$$

$$\dot{M}_n = \rho v_n \Delta x \Delta z \quad (3.10)$$

$$\dot{M}_s = \rho v_s \Delta x \Delta z \quad (3.11)$$

obtem-se:

$$\begin{aligned} \frac{M_p}{\Delta t} (\varphi_p - \varphi_p^0) + \dot{M}_e \varphi_e - \dot{M}_w \varphi_w + \dot{M}_n \varphi_n - \dot{M}_s \varphi_s = \\ \{L[P^\varphi]_p + L[S^\varphi]_p\} \Delta x \Delta y \Delta z + \mu \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_e - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_w \right] \Delta y \Delta z + \mu \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_n - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_s \right] \Delta x \Delta z \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde  $M_p$  é a massa do volume de controle  $P$  e  $\dot{M}$  são os fluxos de massa em cada direção;  $L[P^\varphi]_p$  e  $L[S^\varphi]_p$  representam as aproximações numéricas de  $P^\varphi$  e  $S^\varphi$  no volume de controle  $P$ .

As aproximações dos termos viscosos e dos termos de pressão são feitas com CDS e as aproximações dos termos advectivos são feitas com UDS, assim a Eq. (3.12) pode ser reescrita para como:

$$a_P^v \varphi_P^* = a_w^v \varphi_w^* + a_e^v \varphi_e^* + a_s^v \varphi_s^* + a_n^v \varphi_n^* + b_P^\varphi \quad (3.13)$$

Na Eq. (3.13) o asterisco acima da variável de interesse (\*) significa, que a variável é resolvida somente para a conservação de movimento linear. As equações foram discretizadas com CDS e UDS (CDS para os termos viscosos e de pressão e UDS para os termos advectivos), mas no presente trabalho testa-se também CDS para os termos viscosos e de pressão e CDS com correção adiada para os termos advectivos, isto é, deduzem-se os coeficientes com UDS e a diferença entre CDS e UDS é colocada no termo fonte. Esse procedimento é realizado, pois um esquema de alta ordem como CDS gera dificuldades no cálculo dos coeficientes do problema em questão.

A função  $sign(\phi)$  determina o sinal da função de  $\phi$ . A função retornará 1 se o número for positivo, 0 (zero) se o número for zero ou -1 se o número for negativo. Para os volumes internos os coeficientes terão os seguintes valores:

$$a_w^v = \dot{M}_w \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} sign(u_w) \right) + \mu \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \quad (3.14)$$

$$a_e^v = -\dot{M}_e \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} sign(u_e) \right) + \mu \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \quad (3.15)$$

$$a_s^v = \dot{M}_s \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} sign(v_s) \right) + \mu \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} \quad (3.16)$$

$$a_n^v = -\dot{M}_n \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{sign}(v_n) \right) + \mu \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} \quad (3.17)$$

$$a_p^v = a_w^v + a_e^v + a_s^v + a_n^v + \frac{M_p}{\Delta t} \quad (3.18)$$

$$b_p^\varphi = b_t^\varphi + b_p^\varphi + b^{s^\varphi} \quad (3.19)$$

onde:

$$b_t^\varphi = \frac{M_p}{\Delta t} \varphi_p^0 \quad (3.20)$$

$$b_{P_p}^u = -\frac{P_E - P_W}{2} \Delta y \Delta z \quad (3.21)$$

$$b_{P_p}^v = -\frac{P_N - P_S}{2} \Delta x \Delta z \quad (3.22)$$

$$b^{S^u} = 0 \quad (3.23)$$

$$b^{S^v} = -L \left[ S^v \right]_P \Delta x \Delta y \Delta z \quad (3.24)$$

A aplicação da condição de contorno ( $\varphi_{cc}$ ), seguindo a técnica de volumes fictícios, resulta para o contorno norte em:

$$a_p^v = 1; \quad a_s^v = -1; \quad a_w^v = a_e^v = a_n^v = 0; \quad b_p^\varphi = 2\varphi_{cc} \quad (3.25)$$

### Discretização da Equação de Conservação da Massa

Para iniciar a discretização da equação de conservação da massa, considera-se:

$$\dot{M}_e - \dot{M}_w + \dot{M}_n - \dot{M}_s = 0 \quad (3.26)$$

Com as Eq. (3.7) a (3.11), obtém-se:



$$u_e \Delta y - u_w \Delta y + v_n \Delta x - v_s \Delta x = 0 \quad (3.27)$$

Usam-se então as aproximações das velocidades nas faces com o SIMPLEC,

$$u_e = u_e^* - d_e (p'_E - p'_P) \quad (3.28)$$

$$u_w = u_w^* - d_w (p'_P - p'_W) \quad (3.29)$$

$$v_n = v_n^* - d_n (p'_N - p'_P) \quad (3.30)$$

$$v_s = v_s^* - d_s (p'_P - p'_S) \quad (3.31)$$

A Eq.(3.26) pode, então, ser reescrita como:

$$a_P^p p'_P = a_w^p p'_W + a_e^p p'_E + a_s^p p'_S + a_n^p p'_N + b_P^p \quad (3.32)$$

onde, para os volumes internos os coeficientes são calculados por

$$a_w^p = d_w \Delta y \quad (3.33)$$

$$a_e^p = d_e \Delta y \quad (3.34)$$

$$a_s^p = d_s \Delta x \quad (3.35)$$

$$a_n^p = d_n \Delta x \quad (3.36)$$

$$a_P^p = a_w^p + a_e^p + a_s^p + a_n^p \quad (3.37)$$

$$b_P^p = (u_w^* - u_e^*) \Delta y + (v_s^* - v_n^*) \Delta x \quad (3.38)$$

E para os contornos:

$$\text{Contorno norte: } a_p^p = a_s^p = 1; a_e^p = a_w^p = a_n^p = 0; b_p^p = p'_s - p'_{ss} \quad (3.39)$$

$$\text{Contorno sul: } a_p^p = a_n^p = 1; a_e^p = a_w^p = a_s^p = 0; b_p^p = p'_{NN} - p'_N \quad (3.40)$$

$$\text{Contorno leste: } a_p^p = a_w^p = 1; a_e^p = a_n^p = a_s^p = 0; b_p^p = p'_W - p'_{WW} \quad (3.41)$$

$$\text{Contorno oeste: } a_p^p = a_e^p = 1; a_w^p = a_n^p = a_s^p = 0; b_p^p = p'_{EE} - p'_E \quad (3.42)$$

### Acoplamento Pressão-Velocidade com o método SIMPLEC

O objetivo de um método de acoplamento pressão velocidade é de transformar a equação de conservação da massa em uma equação para a correção da pressão.

Utilizando o método SIMPLEC, chega-se a

$$u_p = u_p^* - d_p^u \frac{(p'_E - p'_W)}{2} \quad (3.43)$$

$$v_p = v_p^* - d_p^v \frac{(p'_N - p'_S)}{2} \quad (3.44)$$

onde

$$d_p^u = \frac{\Delta y \Delta z}{(a_p^v - \sum a_{nb}^v)} \quad (3.45)$$

$$d_p^v = \frac{\Delta x \Delta z}{(a_p^v - \sum a_{nb}^v)} \quad (3.46)$$

$$\sum a_{nb}^v = a_w^v + a_e^v + a_s^v + a_n^v \quad (3.47)$$

Com as Eqs. (3.18), (3.47) e (3.7) nas Eqs. (3.45) e (3.46), chega-se a:

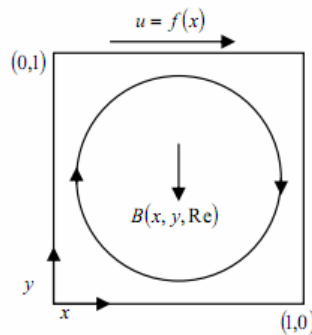
$$d_p^u = \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} \quad (3.48)$$

$$d_p^v = \frac{\Delta t}{\rho \Delta y} \quad (3.49)$$

onde  $d_p^u$  e  $d_p^v$  são os coeficientes do método SIMPLEX para as velocidades nodais, sendo somente necessários aos volumes reais.

### 3.2 O PROBLEMA DE SHIH

O problema de Shih consiste em uma cavidade quadrada, na qual a parede superior se movimenta com velocidade variável conhecida e um termo fonte atua sobre o escoamento. O problema de Shih tem solução analítica conhecida.



**Figura 3.1** Domínio de cálculo para o problema da cavidade quadrada (Shih *et.al*, 1989)

Segundo Shih *et al.* (1989) o problema é governado pelas seguintes equações adimensionais:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.50)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} u = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 v - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.51)$$

$$\bar{u} \cdot \bar{\nabla} v = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 v - \frac{\partial p}{\partial y} - B(x, y, \text{Re}) \quad (3.52)$$

As condições de contorno para as velocidades  $u$  e  $v$  são do tipo Dirichlet e assumem zero em todos os contornos, exceto no superior, onde a velocidade é variável. As condições de contorno para o problema de Shih são dadas por

$$u(x, 1) = 16(x^4 - 2x^3 + x^2) \quad (3.53)$$

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = 0 \quad (3.54)$$

$$v(0, y) = v(1, y) = v(x, 0) = v(x, 1) = 0 \quad (3.55)$$

O termo fonte na Eq (3.50) vem da existência de uma força de corpo na direção  $y$ , sendo definido por

$$B(x, y, \text{Re}) = -\frac{8}{\text{Re}} [24FF(x) + 2f'(x)g''(y) + f'''(x)g(y)] - 64[F_2(x)G_1(y) - g(y)F_1(x)] \quad (3.56)$$

onde

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 \quad (3.57)$$

$$g(y) = y^4 - y^2 \quad (3.58)$$

$$FF(x) = \int f(x) dx = 0,2x^5 - 0,5x^4 + \frac{x^3}{3} \quad (3.59)$$

$$F_1(x) = f(x)f''(x) - [f(x)]^2 = -4x^6 + 12x^5 - 14x^4 + 8x^3 - 2x^2 \quad (3.60)$$

$$F_2(x) = \int f(x)f'(x) dx = 0,5[f(x)]^2 \quad (3.61)$$

$$G_1(y) = g(y)g''(y) = -24y^5 + 8y^3 - 4y \quad (3.62)$$

Os dados fixos para resolução deste problema são apresentados na Tab. 3.2. As soluções analíticas de  $u$ ,  $v$  e de  $\psi$  são dadas pelas Eqs. (3.63), (3.64) e (3.65), foram obtidas com uso do software Maple e seus valores estão representados na Tab. 3.3.

**Tabela 3. 2 dados fixos do problema de Shih.**

Número de Reynolds	1
Comprimento do domínio de Cálculo	1 m
Largura do domínio de Cálculo	1 m
Massa específica do fluido ( $\rho$ )	1 kg/m <sup>3</sup>
Viscosidade ( $\mu$ )	1 Pa.s

$$u(x, y) = 8(x^4 - 2x^3 + x^2)(4y^3 - 2y) \quad (3.63)$$

$$v(x, y) = -8(4x^3 - 6x^2 + 2x)(y^4 - y^2) \quad (3.64)$$

$$\psi(x, y) = 8(x^4 - 2x^3 + x^2)(y^4 - y^2) \quad (3.65)$$

**Tabela 3. 3 Soluções analíticas para as variáveis.**

$\Psi_{min}$	-1,25000000000000000000000000000000E-01	M <sup>2</sup> /s
$u_c$	-2,50000000000000000000000000000000E-01	m/s
$v_c$	0,00000000000000000000000000000000E+00	m/s
$u_{min}$	-2,721655269759086226422084564547E-01	m/s
$v_{min}$	-2,886751345948128822545743902510E-01	m/s
$v_{max}$	2,886751345948128822545743902510E-01	m/s

### 3.3 O PROBLEMA DE KAWAGUTI

O problema de Kawaguti consiste em uma cavidade quadrada onde a placa superior se movimenta com velocidade constante e a velocidade nos demais contornos é nula (condições de contorno de Dirichlet). Para este problema a solução analítica ainda não é conhecida.

Os dados para resolução deste problema são apresentados na Tab. 3.4 e o número de Reynolds é dado pela Eq. (3.66), onde  $U_T$  é a velocidade da tampa e  $L$  é a dimensão do lado da cavidade quadrada.

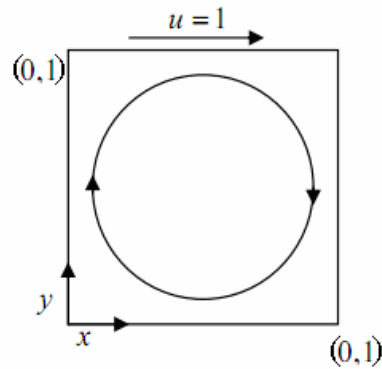


Figura 3. 2 Domínio de cálculo para o problema de Kawaguti (SUERO 2006).

Tabela 3. 4 Dados do problema de Kawaguti.

Comprimento do domínio de Cálculo	1 m
Largura do domínio de Cálculo	1 m
Massa específica do fluido ( $\rho$ )	1 kg/m <sup>3</sup>
Número de Reynolds ( $Re$ )	1000
Viscosidade ( $\mu$ )	0,001 Pa.s

$$Re = \rho U_{\tau} \frac{L}{\mu} \quad (3.66)$$

O modelo numérico é o mesmo descrito na seção 3.1, o termo fonte para a Eq. (3.17) assume então o seguinte valor:

$$b^{S^{\varphi}} = 0 \quad (3.67)$$

### 3.4 OBTENÇÃO DAS SEIS VARIÁVEIS DE INTERESSE

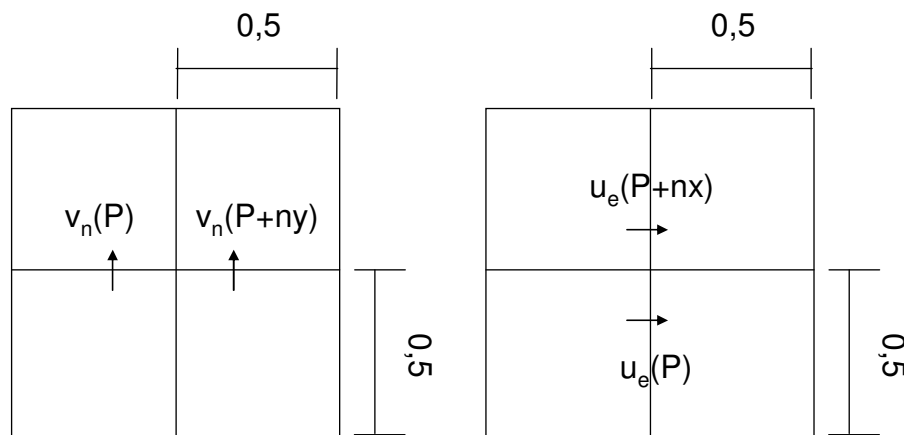
As variáveis de interesse do presente trabalho são: as componentes horizontal e vertical da velocidade no centro da cavidade ( $u_c$  e  $v_c$ ), seus valores mínimos ( $u_{min}$  e  $v_{min}$ ), o valor máximo da componente vertical da velocidade ( $v_{max}$ ) e o valor mínimo da função linha de corrente ( $\psi_{min}$ ).

Com a discretização das Eq. (3.3), (3.4) e (3.5) para cada nó interno e para os volumes fictícios, cria-se um sistema de equações a ser resolvido para a obtenção das variáveis  $u$ ,  $v$  e  $p$  para os respectivos nós. Após a resolução do sistema, calculam-se numericamente os valores de  $u_c$  e  $v_c$ , que são obtidos através de média aritmética das componentes das velocidades nas

faces, de acordo com as Eqs. (3.68) e (3.69). Nas Eqs. (3.68) e (3.69)  $u_e(P)$  é a velocidade na face direita do volume de controle P,  $nx$  é o comprimento do volume na direção  $x$ ; e  $v_n(P)$  é a velocidade na face acima do volume de controle P e  $ny$  é o comprimento do volume na direção  $y$ . A Fig. 3.3 ilustra o significado de  $u_e(P)$ ,  $u_e(P+nx)$ ,  $v_n(P)$  e de  $v_n(P+ny)$ .

$$u_c = u_e(P) + u_e(P + nx) \quad (3.68)$$

$$v_c = v_n(P) + v_n(P + ny) \quad (3.69)$$



**Figura 3.3 – Velocidade no centro do domínio.**

Para o cálculo do valor mínimo e máximo das componentes da velocidade ( $u_{min}$ ,  $v_{min}$  e  $v_{max}$ ) analisam-se os menores valores das componentes nas faces dos os diversos nós, isto é, procura-se o menor valor para  $u_e(P)$ , e o maior e o menor valor para  $v_n(P)$ .

Considerando-se a definição da função linha de corrente, dada por

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (3.70)$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.71)$$

obtém-se  $\psi$  através da integração das respectivas equações, isto é,

$$\psi = \int u \, dy = \int v \, dx \quad (3.72)$$

A solução numérica de  $\psi$  é feita através da aproximação da integral da Eq. (3.72), usando a velocidade na face do volume de controle ( $u_e(P)$ ), pela regra do retângulo. Pela regra do retângulo considera-se  $\psi_p$  constante no volume de controle. A variável  $\psi_{min}$  é então calculada pelo menor valor encontrado para  $\psi$ . A solução numérica de  $\psi$  é dada por

$$\psi = \frac{1}{L} \sum_{P=1}^{ny} u_e(P) \, dy \quad (3.73)$$



## 4 RESULTADOS DO PROBLEMA DE SHIH

### 4.1 DADOS E PARÂMETROS UTILIZADOS

Para a obtenção da solução numérica das seis variáveis de interesse foi utilizado o Método dos Volumes Finitos, cujo modelo numérico foi descrito no capítulo 3. Foram testados dois esquemas de aproximações numéricas na discretização das Eqs (3.3), (3.4) e (3.5): um esquema de segunda ordem, CDS para os termos viscosos e de pressão, com CDS com correção adiada para os termos advectivos; e um esquema de primeira ordem, UDS para os termos advectivos e CDS para os termos viscosos e de pressão. Para tratar do acoplamento pressão-velocidade foi usado o método SIMPLEC. E para resolver o sistema de equações que surge da discretização das equações diferenciais envolvidas foi utilizado o método MSI (*Modified Strongly Implicit Method*).

Para monitorar o processo iterativo, foi utilizado o critério de convergência baseado no resíduo, sendo que o procedimento foi iterado até que o erro de máquina fosse atingido; isso é verificado monitorando a norma  $l_1$  da soma do resíduo ( $R$ ) das variáveis de interesse. Foi fixado um número de iterações de acordo com o tamanho da malha.

O programa computacional foi implementado em linguagem FORTRAN/95, versão 11.0.074, com o aplicativo Microsoft Visual Studio 2005, com precisão dupla e quádrupla. O tipo de projeto utilizado para criar todos os programas compilados foi o Fortran Console Application e a versão empregada foi a release. O código computacional usado tem o nome de Stokes 1.5. O computador empregado para a resolução deste trabalho foi o CFD18 do LENA-1 (Laboratório de Experimentação Numérica - UFPR) com processador Intel Core 2 Duo com memória de 2 GB RAM.

Os dados numéricos fixos para o problema estão representados na Tab. 4.1.

**Tabela 4.1** Dados numéricos fixos para o problema de Shih.

Número de iterações no ciclo da massa	2
Tolerância do MSI para $u$ e $v$	0,1
Tolerância MSI para $p'$	0,01
Número máximo de iterações internas no MSI para $u$ e $v$	5
Número máximo de iterações internas no MSI para $p'$	10

A memória computacional utilizada na resolução deste problema foi observada através do gerenciador de tarefas do Windows, que foi acessado durante a resolução do

problema. O tempo de processamento foi medido usando-se a função TIMEF da biblioteca PORTLIB do FORTRAN/95.

Para a análise do problema de Shih foram realizadas as simulações representadas nas Tabs. 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5. Nestas tabelas  $N_x$  e  $N_y$  são o tamanho da malha nas direções x e y,  $dt$  é o incremento de tempo, RAM é a memória computacional,  $Itmax$  é o número total de iterações externas,  $tCPU$  é o tempo de processamento e  $h$  é o tamanho dos volumes de controle.

**Tabela 4. 2 – Simulações realizadas para o problema de Shih, com aproximação CDS e precisão dupla.**

Caso	$N_x=N_y$	$dt$ (s)	RAM (MB)	$Itmax$	tCPU	$h$ (m)
STOKES_1p5_01	2	0,05	2,41	200	0,00 s	0,5
STOKES_1p5_02	4	0,05	2,45	300	0,02 s	0,25
STOKES_1p5_03	8	0,05	2,43	1.000	0,11 s	0,125
STOKES_1p5_04	16	0,05	2,50	3.000	0,91 s	0,0625
STOKES_1p5_05	32	0,02	2,90	4.000	4,12 s	0,03125
STOKES_1p5_06	64	0,01	3,80	7.000	35,9 s	0,015625
STOKES_1p5_07	128	0,005	6,73	12.000	5 m 4 s	0,007813
STOKES_1p5_08	256	0,002	19,2	17.000	40 m 2 s	0,003906
STOKES_1p5_09	512	0,001	68,7	32.000	8 h 28 m	0,001953
STOKES_1p5_10	1024	0,0005	265	60.000	4 d 6 h 52 m	0,000977

**Tabela 4. 3 - Simulações realizadas para o problema de Shih, com aproximação CDS e precisão quádrupla.**

Caso	$N_x=N_y$	$dt$ (s)	RAM (MB)	$Itmax$	tCPU	$h$ (m)
STOKES_1p5_11	2	0,05	2,47	200	0,08 s	0,5
STOKES_1p5_12	4	0,05	2,45	600	0,73 s	0,25
STOKES_1p5_13	8	0,05	2,41	1.500	5,67 s	0,125
STOKES_1p5_14	16	0,05	2,64	6.000	1 m 15 s	0,0625
STOKES_1p5_15	32	0,02	3,02	12.000	11 m 33 s	0,03125
STOKES_1p5_16	64	0,01	4,67	20.000	1 h 15 m 24 s	0,015625
STOKES_1p5_17	128	0,005	10,97	35.000	8 h 24 m 38 s	0,007813
STOKES_1p5_18	256	0,002	32,37	60.000	2d 13h 6m29s	0,003906

**Tabela 4. 4 - Simulações realizadas para o problema de Shih, com aproximação UDS e precisão dupla.**

Caso	Nx=Ny	Dt (s)	RAM (MB)	Itmax	tCPU	h (m)
STOKES_1p5_20	2	0,05	2,43	500	0,02 s	0,5
STOKES_1p5_21	4	0,05	2,45	500	0,03 s	0,25
STOKES_1p5_22	8	0,05	2,43	1.000	0,11 s	0,125
STOKES_1p5_23	16	0,05	2,50	3.000	0,91 s	0,0625
STOKES_1p5_24	32	0,02	2,87	4.000	4,03 s	0,03125
STOKES_1p5_25	64	0,01	3,81	7.000	35,3 s	0,015625
STOKES_1p5_26	128	0,005	6,73	11.955	5 m 4 s	0,007813
STOKES_1p5_27	256	0,002	19,2	25.000	66 m 29 s	0,003906
STOKES_1p5_28	512	0,001	68,7	40.000	10 h 46 m	0,001953

**Tabela 4. 5 - Simulações realizadas para o problema de Shih, com aproximação UDS e precisão quádrupla.**

Caso	Nx=Ny	dt (s)	RAM (MB)	Itmax	tCPU	h (m)
STOKES_1p5_30	2	0,05	2,47	300	0,08 s	0,5
STOKES_1p5_31	4	0,05	2,01	500	0,73 s	0,25
STOKES_1p5_32	8	0,05	2,41	1.500	5,67 s	0,125
STOKES_1p5_33	16	0,05	2,74	5.500	1 m 15 s	0,0625
STOKES_1p5_34	32	0,02	2,90	8.000	11 m 33 s	0,03125
STOKES_1p5_35	64	0,01	2,32	16.000	1 h 15 m 24 s	0,015625
STOKES_1p5_36	128	0,005	6,73	25.000	8 h 24 m 38 s	0,007813
STOKES_1p5_37	256	0,002	30,8	55.000	2d 6h 4m42s	0,003906

As Tabs. 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5 mostram que com o refino de malha, existe um considerável aumento do uso de memória e de tempo computacional, esse aumento é representado graficamente nas Figs 4.1 e 4.2. O uso de precisão quádrupla eleva consideravelmente o tempo computacional para as malhas mais finas. Com precisão dupla, o uso de função de interpolação CDS usou um tempo computacional 1,27 vez maior que o uso de UDS e com precisão quádrupla o uso de UDS usou um tempo computacional 1,13 vez maior que o uso de CDS.

Para todos os gráficos apresentados no presente documento as legendas terão os significados mostrados na Tab. 4.6.

**Tabela 4. 6 – Significado das Legendas.**

r8cds	Função de interpolação CDS e Precisão dupla.
r16cds	Função de interpolação CDS e Precisão quádrupla.
r8uds	Função de interpolação UDS e Precisão dupla.
r16uds	Função de interpolação UDS e Precisão quádrupla.

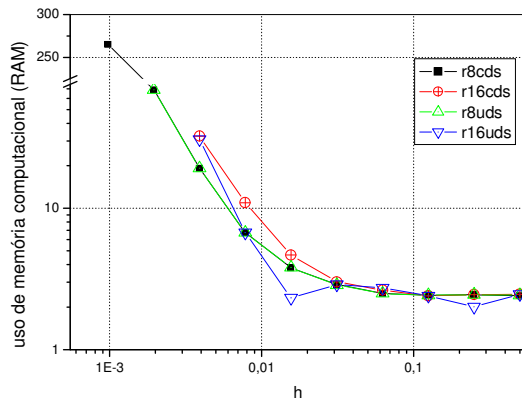


Figura 4. 1 Uso de memória Computacional.

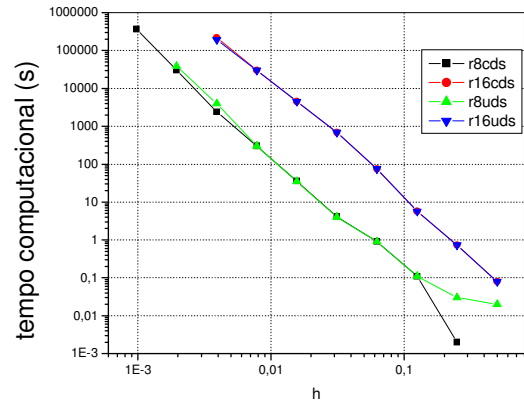


Figura 4. 2 Tempo Computacional.

## 4.2 ERROS DA SOLUÇÃO NUMÉRICA

O programa Richardson 3.2 foi utilizado para fazer o pós-processamento das soluções numéricas nas diversas malhas empregadas. Este programa computacional foi implementado em linguagem FORTRAN/95, versão 11.0.074, com o aplicativo Microsoft Visual Studio 2005. O tipo de projeto utilizado para criar todos os programas compilados foi o Fortran Console Application e a versão empregada foi a release.

O pós-processamento se baseia na Eq. (2.12), empregada recursivamente para calcular as soluções numéricas extrapoladas, através das soluções numéricas de cada variável nas diversas malhas empregadas e da solução analítica da variável em questão.

Para as seis variáveis de interesse, nas Figs. 4.3 a 4.8 se apresentam gráficos do erro da solução numérica sem qualquer extrapolação ( $Eh$ ), calculado com a Eq. (2.3), e o erro da solução numérica com extrapolação (a solução numérica extrapolada é obtida através da Eq.(2.10) e o seu erro calculado através da Eq. (2.3)) em função do tamanho de malha  $h$ .

A Tab. 4.7 traz o significado das legendas. No capítulo 8 estão os apêndices do trabalho, onde se encontra a seção “erro da solução numérica para o problema de shih” com tabelas para os valores de  $Eh$  e  $Emer$  para todas as variáveis de interesse.

**Tabela 4. 7 – Legenda relativa às Figs. 4.8 a 4.19.**

Eh - r8cds	Módulo do Erro - Função de interpolação CDS e Precisão dupla.
Emer - r8cds	Módulo do Erro com MER - Função de interpolação CDS e Precisão dupla.
Eh - r16cds	Módulo do Erro - Função de interpolação CDS e Precisão quádrupla.
Emer - r16cds	Módulo do Erro com MER - Função de interpolação CDS e Precisão quádrupla.
Eh - r8uds	Módulo do Erro - Função de interpolação UDS e Precisão dupla.
Emer - r8uds	Módulo do Erro com MER - Função de interpolação UDS e Precisão dupla.
Eh - r16uds	Módulo do Erro - Função de interpolação UDS e Precisão quádrupla.
Emer - r16uds	Módulo do Erro com MER - Função de interpolação UDS e Precisão quádrupla.
Eh - r8cds	Módulo do Erro - Função de interpolação CDS e Precisão dupla.
Emer - r8cds	Módulo do Erro com MER - Função de interpolação CDS e Precisão dupla.
Uh - r8cds	Módulo da Incerteza – Função de interpolação CDS e Precisão dupla.
Umer - r8cds	Módulo da Incerteza com MER - Função de interpolação CDS e Precisão dupla.
Eh - r8uds	Módulo do Erro - Função de interpolação UDS e Precisão dupla.
Emer - r8uds	Módulo do Erro com MER - Função de interpolação UDS e Precisão dupla.
Uh - r8uds	Módulo da Incerteza – Função de interpolação UDS e Precisão dupla.
Umer - r8uds	Módulo da Incerteza com MER - Função de interpolação UDS e Precisão dupla.

Como esperado, o erro da solução numérica se torna menor com a diminuição do tamanho dos volumes de controle. Por exemplo, na Fig. 4.3 o módulo do erro da solução sem MER com esquema CDS e precisão dupla tem na malha mais grossa (2x2) é de  $2,5 \times 10^{-1}$ , e na malha mais fina (1024x1024) é de aproximadamente  $1,6 \times 10^{-6}$ .

O comportamento do erro numérico para as variáveis  $\psi_{min}$ ,  $u_{min}$ ,  $v_{min}$  e  $v_{max}$  é tal que para os casos com função de interpolação UDS, MER não é eficiente na redução do erro de discretização. E o uso de precisão quádrupla não gera resultados mais acurados que o uso de precisão dupla. Esse comportamento é explicado pela dificuldade de se calcular a posição dos pontos de máximo e mínimo com o uso de MER a cada extrapolação.

Analisando-se a Fig 4.1 (variável  $u_c$ ) percebe-se que nos casos com uso de função de interpolação CDS o erro numérico é menor que nos casos com uso de função de interpolação UDS e esse efeito se torna mais pronunciado quando a solução numérica é extrapolada.

Para a variável  $v_c$ , Fig. 4.2, o uso de MER só é eficiente a partir da malha 64x64 com UDS ( $h = 1,5625 \times 10^{-2}$ ) e a partir da malha 8x8 ( $h = 1,25 \times 10^{-1}$ ) com CDS. E para o caso de solução numérica extrapolada, a função de interpolação CDS tem erro numérico menor que o esquema UDS, onde a malha mais fina com CDS apresenta erro com ordem de grandeza  $10^{-13}$  e com UDS  $10^{-11}$ .

Na Fig. 4.2 percebe-se que há uma queda do erro numérico para a malha mais grossa nos seguintes casos: precisão dupla e função de interpolação UDS com e sem extrapolação, e

precisão dupla e função de interpolação CDS sem extrapolação. Esse comportamento é dado pelo cancelamento parcial de erros numéricos, explicado na seção 2.3.

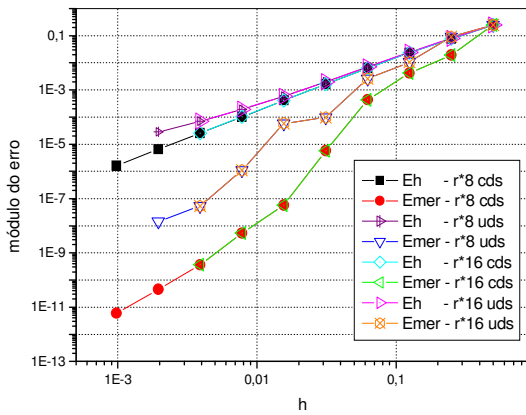


Figura 4.3 Módulo do erro de  $u_c$  versus tamanho de malha.

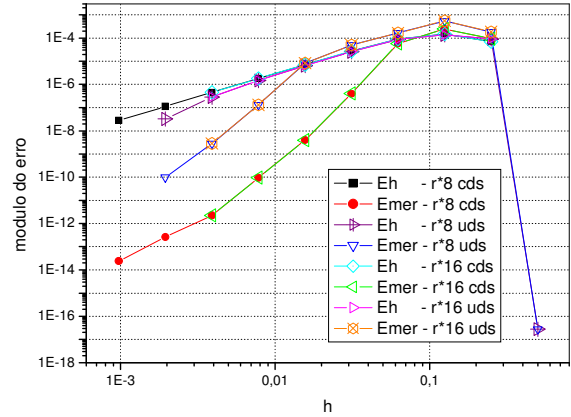


Figura 4.4 Módulo do erro de  $v_c$  versus tamanho de malha.

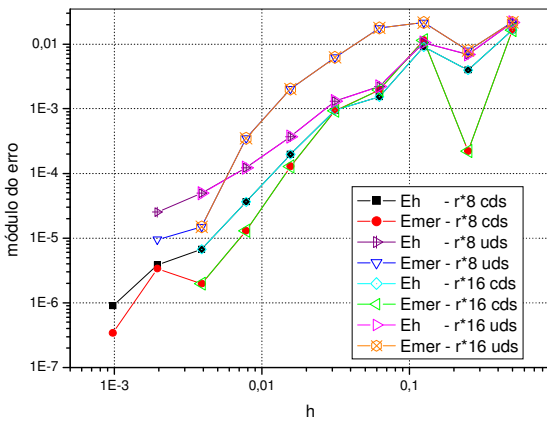


Figura 4.5 Módulo do erro de  $u_{\min}$  versus tamanho de malha.

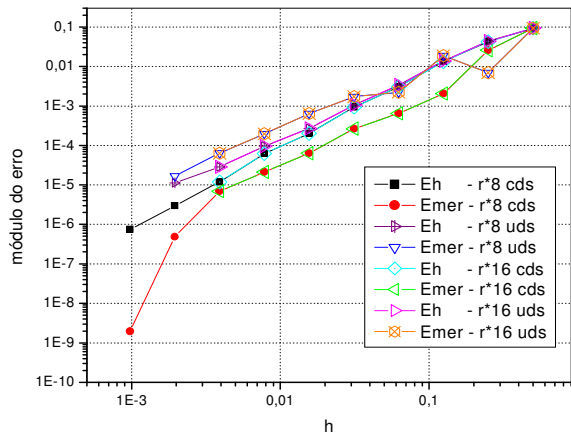


Figura 4.6 Módulo do erro de  $\psi_{\min}$  versus tamanho de malha.

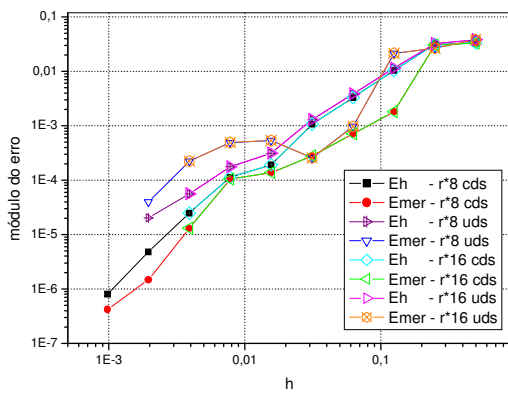


Figura 4.7 Módulo do erro de  $v_{\min}$  versus tamanho de malha

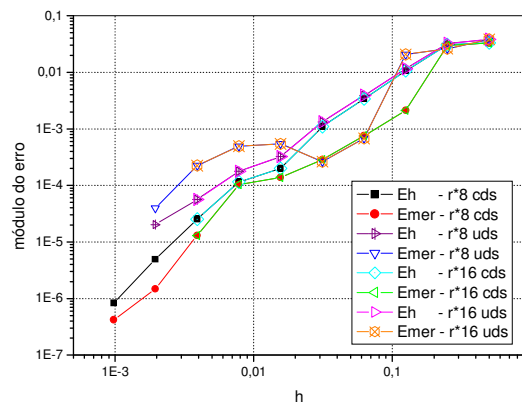


Figura 4.8 Módulo do erro de  $v_{\max}$  versus tamanho de malha.

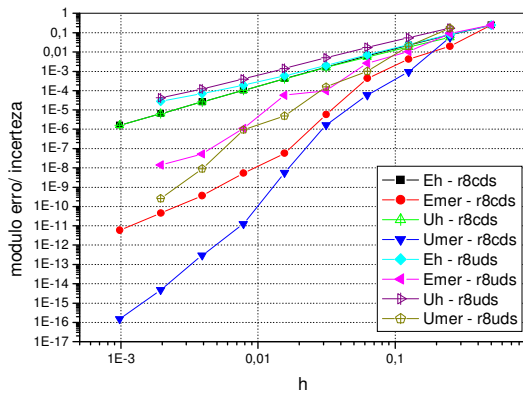


Figura 4. 9 Módulo do erro/incerteza de  $u_c$  versus tamanho de malha.

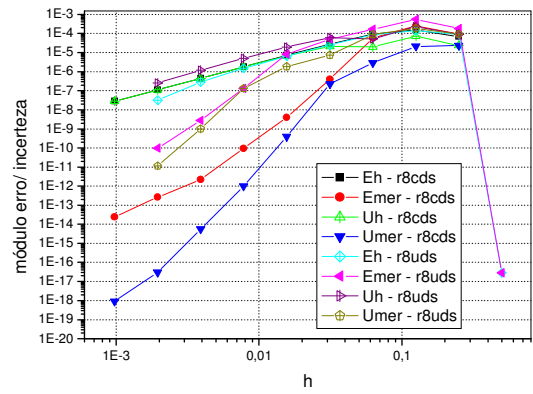


Figura 4. 10 Módulo do erro/incerteza de  $v_c$  versus tamanho de malha.

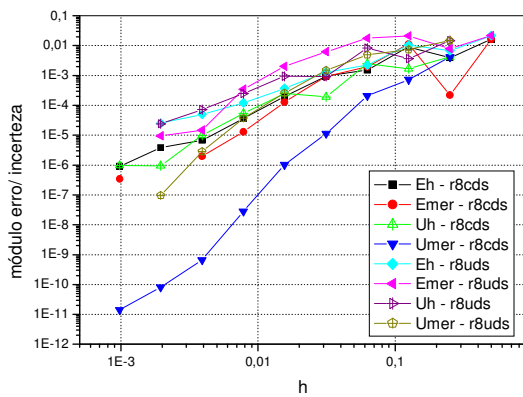


Figura 4. 11 Módulo do erro/incerteza de  $u_{\min}$  versus tamanho de malha.

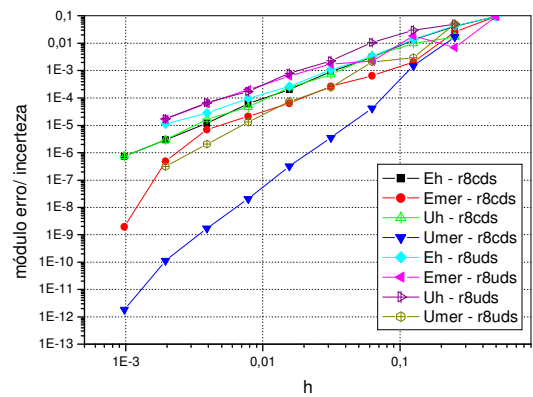


Figura 4. 12 Módulo do erro/incerteza de  $\psi_{\min}$  versus tamanho de malha.

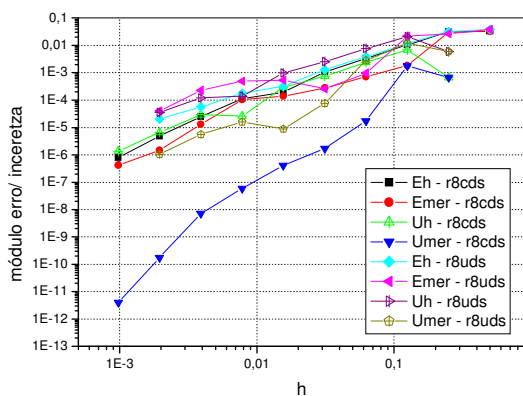


Figura 4. 13 Módulo do erro/incerteza de  $v_{\min}$  versus tamanho de malha

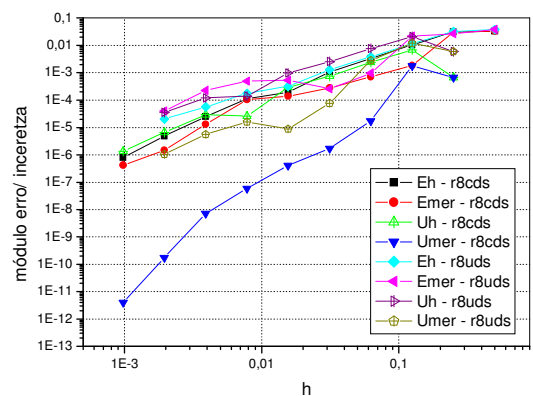


Figura 4. 14 Módulo do erro/incerteza de  $v_{\max}$  versus tamanho de malha.

As Figs 4.8 a 4.13 trazem para cada variável uma comparação do comportamento do módulo do erro numérico em relação ao comportamento da incerteza numérica calculada através do estimador de erro GCI em relação ao tamanho de malha para o problema de Shih. As figuras são todas para o caso de precisão dupla e nelas mostram-se curvas para a solução com esquema CDS e UDS. A incerteza numérica subestima o erro numérico e é menos acurada que o erro numérico.

### 4.3 VERIFICAÇÃO DAS ORDENS DE ERRO

Utilizando resultados do pós-processamento, feito através do programa Richardson 3.2, calculou-se também o valor das ordens verdadeiras a *posteriori*, isso é, depois da obtenção da solução numérica, para compará-las com as ordens verdadeiras teóricas.

Como visto no capítulo 2 as ordens verdadeiras do esquema CDS (obtidas a *priori*) são  $p_v=2,4,6, \text{ etc.}$  Mas muitas vezes um esquema de alta ordem, como o CDS, gera dificuldades nos cálculos dos coeficientes. Por isso, usou-se no presente trabalho CDS com correção adiada, isto é, deduziram-se os coeficientes através de um esquema UDS e a diferença entre os esquemas CDS e UDS é colocada no termo fonte, para facilitar a convergência.

As ordens verdadeiras do esquema CDS com correção adiada são  $p_v=2,4,6, \text{ etc.}$  E para função de interpolação UDS, as ordens verdadeiras são  $p_v=1,2,3, \text{ etc.}$  Teoricamente, à medida que  $h \rightarrow 0$ , os valores de  $p_E$  devem tender às ordens verdadeiras.

Para o problema de Shih, a solução analítica é conhecida. Pode-se, então calcular as ordens efetivas. As ordens efetivas foram calculadas através da Eq (2.9), na qual  $p_e$  é definido como logaritmo decimal do quociente entre a solução na malha grossa e na malha fina, dividido pelo logaritmo decimal da razão de refino. O logaritmo é uma função de domínio de zero a infinito, isso é só existe logaritmo de número positivo. Como algumas dessas divisões resultaram em valores negativos, usou-se o módulo do erro numérico para calcular as ordens efetivas. A ordem efetiva foi calculada para cada par de pontos vizinhos das curvas das Figs. 4.3 a 4.8.

As Figs. 4.15 a 4.20 mostram a ordem efetiva em função do tamanho de malha para as seis variáveis de interesse. Para todas as variáveis, as curvas de ordem efetiva com precisão dupla e quádrupla são extremamente próximas ou coincidentes, com e sem uso de MER.



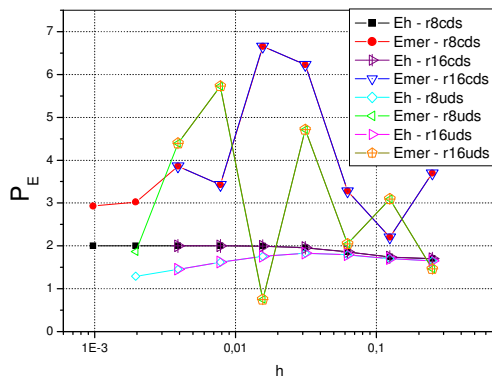


Figura 4.15 Ordem efetiva  $u_c$ .

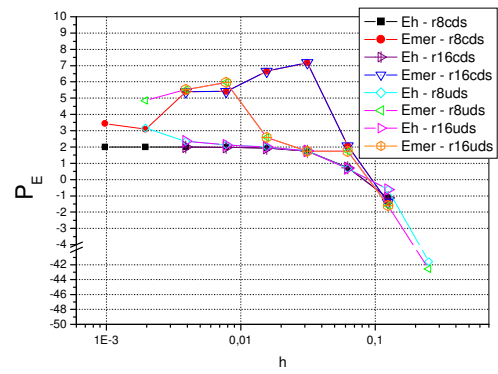


Figura 4. 16 Ordem efetiva  $v_c$ .

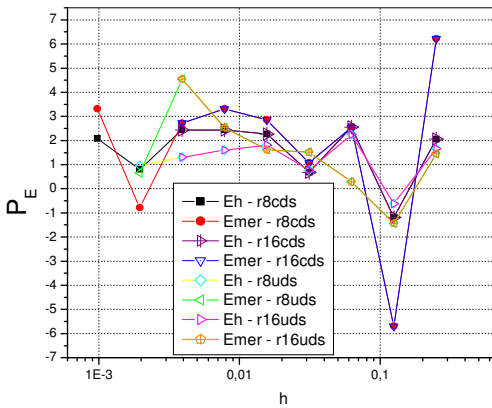


Figura 4. 17 Ordem efetiva  $u_{min}$ .

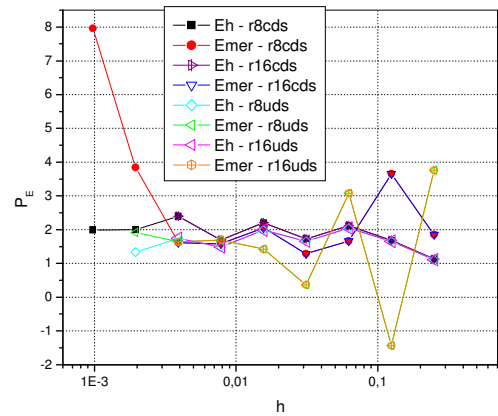


Figura 4. 18 Ordem efetiva  $\psi_{min}$ .

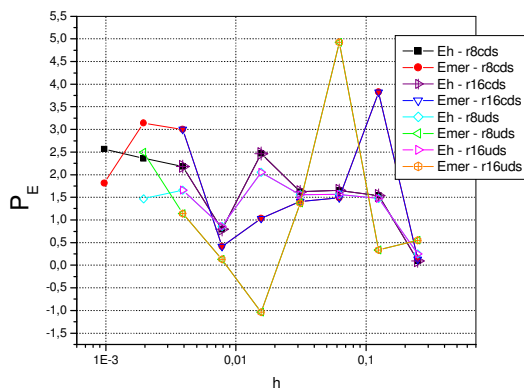


Figura 4. 19 Ordem efetiva  $v_{max}$ .

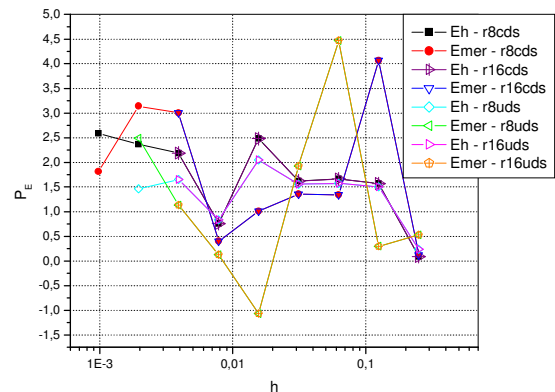


Figura 4. 20 Ordem efetiva  $v_{min}$ .

Para os casos de precisão dupla, com função de interpolação CDS, sem MER as variáveis  $u_c$ ,  $v_c$ ,  $u_{min}$  e  $\psi_{min}$  tem seus valores de ordem efetiva tendendo a 2, assim confirma-se *a posteriori* as ordens verdadeiras com base nas ordens efetivas. Já as variáveis  $v_{min}$  e  $v_{max}$  têm

ordens efetivas com CDS e precisão dupla tendentes a 3. Esse resultado reproduz os resultados de Marchi *et al*, 2009, para a mesma situação. Os casos com função de interpolação CDS, precisão quádrupla, sem MER têm comportamento semelhante, mas para esses casos não se chegou até a malha mais fina (1024x1024). Para os casos de uso de esquema CDS, precisão dupla e quádrupla, com MER a ordem efetiva é degenerada para todas as variáveis.

Para os casos de precisão dupla, com função de interpolação UDS, sem MER as variáveis  $u_c$ ,  $u_{min}$  e  $\psi_{min}$  tem seus valores de ordem efetiva tendendo a 1, assim confirma-se a posteriori as ordens verdadeiras com base nas ordens efetivas. Já as variáveis  $v_{min}$  e  $v_{msx}$  têm ordens efetivas com CDS e precisão dupla tendentes a 2. E para variável  $v_c$ , a ordem efetiva tende a 3. Os casos com função de interpolação UDS, precisão quádrupla, sem MER têm comportamento semelhante, mas para esses casos não se chegou até a malha mais fina (1024x1024).

Para os casos de uso de esquema UDS, precisão dupla e quádrupla, com MER a ordem efetiva é degenerada para todos os casos e para todas as variáveis. O uso de função de interpolação CDS gera ordens efetivas com melhor comportamento, isto é, com comportamento mais próximo do esperado, em relação à inclinação da curva de ordem efetiva e o uso de precisão quádrupla não afeta no valor das ordens efetivas e na inclinação da curva das ordens.

No capítulo 8 existe uma seção chamada “ordem efetiva para o problema de shih” contendo as tabelas com os valores das ordens efetivas para o problema de Shih para cada um dos casos analisados.

## 5 RESULTADOS DO PROBLEMA DE KAWAGUTI

### 5.1 DADOS E PARÂMETROS UTILIZADOS

O código computacional Stokes 1.5 foi implementado também para gerar resultados para o problema de Kawaguti com a mesma linguagem, versão e aplicativo usados no problema de Shih. O computador empregado para a resolução deste trabalho também foi o CFD18 do LENA-1 (Laboratório de Experimentação Numérica - UFPR). E para monitorar o processo iterativo, foi também utilizado o critério de convergência baseado no resíduo, sendo que o procedimento foi iterado até que o erro de máquina fosse atingido.

Para a obtenção da solução numérica das seis variáveis de interesse foi utilizado o Método dos Volumes Finitos, resolvido com esquema CDS com correção adiada, e com esquema UDS para os termos advectivos e CDS para os termos viscosos e de pressão, com precisão dupla e quádrupla. O método SIMPLEC foi usado para tratar do acoplamento pressão velocidade e o solver MSI para resolver o sistema de equações, gerado da discretização das Eq. (3.3), (3.4) e (3.5).

Os dados numéricos fixos para o problema em diferentes malhas estão representados na Tab. 4.1.

**Tabela 5. 1 Dados numéricos fixos para o problema de Kawaguti.**

Malhas ( $N_x = N_y$ )	de 2 a 64	128	256	512
Número de iterações no ciclo da massa	2	2	2	4
Tolerância do MSI para $u$ e $v$	0,1	0,1	0,1	0,1
Tolerância MSI para $p'$	0,01	0,01	0,01	0,01
Número máximo de iterações internas no MSI para $u$ e $v$	5	10	50	50
Número máximo de iterações internas no MSI para $p'$	2	50	150	150

Para a análise do problema de Kawaguti foram realizadas as simulações representadas nas Tabs. 5.2 a 5.5. Nestas tabelas  $N_x$  e  $N_y$  são o tamanho da malha nas direções  $x$  e  $y$ ,  $dt$  é o incremento de tempo, RAM é a memória computacional,  $It_{max}$  é o número total de iterações externas,  $t_{CPU}$  é o tempo de processamento e  $h$  é o tamanho dos volumes de controle. Nestas tabelas pode-se perceber que com o refino de malha, existe um considerável aumento do uso de memória computacional e de tempo computacional. O uso de precisão quádrupla altera consideravelmente o tempo computacional para as malhas mais finas.

Tabela 5. 2 Simulações realizadas para o problema de Kawaguti, com CDS e precisão dupla.

Caso	Nx=Ny	dt (s)	RAM (MB)	Itmax	tCPU	h (m)
STOKES_1p5_40	2	4,0	2,43	1.000	0,05 s	0,5
STOKES_1p5_41	4	4,0	2,44	600	0,00 s	0,25
STOKES_1p5_42	8	1,0	2,43	700	0,08 s	0,125
STOKES_1p5_43	16	0,5	2,50	2.000	0,84 s	0,0625
STOKES_1p5_44	32	0,2	2,86	3.000	5,23 s	0,03125
STOKES_1p5_45	64	0,2	2,96	3.000	26,06 s	0,015625
STOKES_1p5_46	128	0,1	6,35	5.000	13 m 47 s	0,007813
STOKES_1p5_47	256	0,05	17,6	9.000	2 h 52 m	0,003906
STOKES_1p5_48	512	0,2	36,4	8.000	20 h 21 m 18 s	0,001953

Tabela 5. 3 Simulações realizadas para o problema de Kawaguti, com CDS e precisão quádrupla.

Caso	Nx=Ny	Dt (s)	RAM (MB)	Itmax	tCPU	h (m)
STOKES_1p5_50	2	4,0	2,46	2.000	0,78 s	0,5
STOKES_1p5_51	4	4,0	2,45	2.000	2,30 s	0,25
STOKES_1p5_52	8	1,0	2,45	3.000	13,09 s	0,125
STOKES_1p5_53	16	0,5	2,65	3.000	59,94 s	0,0625
STOKES_1p5_54	32	0,2	2,65	6.000	8 m 52 s	0,03125
STOKES_1p5_55	64	0,2	4,48	10.000	59 m55s	0,015625
STOKES_1p5_56	128	0,1	8,02	13.000	12 h 9 m 19 s	0,007813
STOKES_1p5_57	256	0,05	17,6	19.000	5 d 22 h 58,5 m	0,003906

Tabela 5. 4 Simulações realizadas para o problema de Kawaguti, com UDS e precisão dupla.

Caso	Nx=Ny	dt (s)	RAM (MB)	Itmax	tCPU	h (m)
STOKES_1p5_60	2	4,0	2,42	1.000	0,03 s	0,5
STOKES_1p5_61	4	4,0	2,45	1.000	0,05 s	0,25
STOKES_1p5_62	8	1,0	2,42	2.000	0,23 s	0,125
STOKES_1p5_63	16	0,5	2,50	3.000	1,12 s	0,0625
STOKES_1p5_64	32	0,2	2,87	3.000	5,23 s	0,03125
STOKES_1p5_65	64	0,2	3,48	4.000	35,11 s	0,015625
STOKES_1p5_66	128	0,1	5,50	9.000	9 m 18 s	0,007813
STOKES_1p5_67	256	0,05	10,0	10.000	2 h 52 m 16s	0,003906

Tabela 5. 5 - Simulações realizadas para o problema de Kawaguti, com UDS e precisão quádrupla.

Caso	Nx=Ny	dt (s)	RAM (MB)	Itmax	tCPU	h (m)
STOKES_1p5_70	2	4,0	2,46	1.000	0,33 s	0,5
STOKES_1p5_71	4	4,0	2,45	1.000	1,02 s	0,25
STOKES_1p5_72	8	1,0	1,01	2.000	8,33 s	0,125
STOKES_1p5_73	16	0,5	2,66	3.000	54,12 s	0,0625
STOKES_1p5_74	32	0,2	2,83	4.000	4 m 12 s	0,03125
STOKES_1p5_75	64	0,2	2,57	4.000	21 m 25 s	0,015625
STOKES_1p5_76	128	0,1	8,03	5.000	8h 31 m 3 s	0,007813

## 5.2 INCERTEZA DA SOLUÇÃO NUMÉRICA

O programa Richardson 3.2 foi utilizado para fazer o pós-processamento das soluções numéricas nas diversas malhas empregadas. Este programa computacional foi implementado em linguagem FORTRAN/95, versão 11.0.074, com o aplicativo Microsoft Visual Studio 2005. O tipo de projeto utilizado para criar todos os programas compilados foi

o Fortran Console Application e a versão empregada foi a release. O pós-processamento se baseia na Eq. (2.12), empregada recursivamente para calcular as soluções numéricas extrapoladas, através das soluções numéricas de cada variável nas diversas malhas empregadas e da solução analítica da variável em questão.

No problema de Kawaguti não se conta com a solução analítica, por isso calculam-se incertezas numéricas através do estimador de erro GCI e por isso também se calcula a ordem aparente da solução numérica nas diferentes malhas não extrapoladas e depois com uso de MER.

As Fig. 5.1 a 5.6 são gráficos do módulo da incerteza em função do tamanho de malha para cada variável com e sem MER ( $U_h$  e  $U_{mer}$ , respectivamente). O significado das legendas é apresentado na Tab. 5.7. No capítulo 8 existe em apêndice chamado “incerteza da solução numérica para o problema de Kawaguti,” onde se mostram os valores de  $U$ .

**Tabela 5. 6 – Legenda para as Figs 5.1 – 5.12.**

Uh - r8cds	Módulo da Incerteza - Função de interpolação CDS e Precisão dupla.
Umer - r8cds	Módulo da Incerteza com MER - Função de interpolação CDS e Precisão dupla.
Uh - r16cds	Módulo da Incerteza - Função de interpolação CDS e Precisão quádrupla.
Umer - r16cds	Módulo da Incerteza com MER - Função de interpolação CDS e Precisão quádrupla.
Uh - r8uds	Módulo da Incerteza - Função de interpolação UDS e Precisão dupla.
Umer - r8uds	Módulo da Incerteza com MER - Função de interpolação UDS e Precisão dupla.
Uh - r16uds	Módulo da Incerteza - Função de interpolação UDS e Precisão quádrupla.
Umer - r16uds	Módulo da Incerteza com MER - Função de interpolação UDS e Precisão quádrupla.

O comportamento geral das incertezas para as soluções numéricas das seis variáveis de interesse para o problema de Kawaguti é o de que a incerteza diminui com a diminuição do tamanho dos volumes de controle. Mas como pode ser visto nas figuras acima existem casos em que a incerteza numérica da solução em uma malha mais fina é maior que a incerteza numérica da solução em uma malha mais grossa. Isso acontece, por exemplo, com a variável  $v_c$ , que tem na malha 16x16 uma incerteza de 0,002 e na malha 32x 32 a incerteza passa para 0,006.

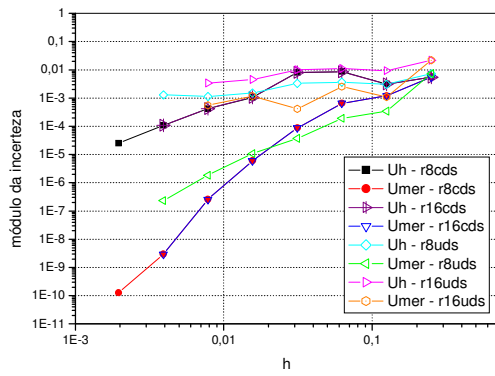


Figura 5. 1 módulo da incerteza de  $u_c$  versus tamanho de malha

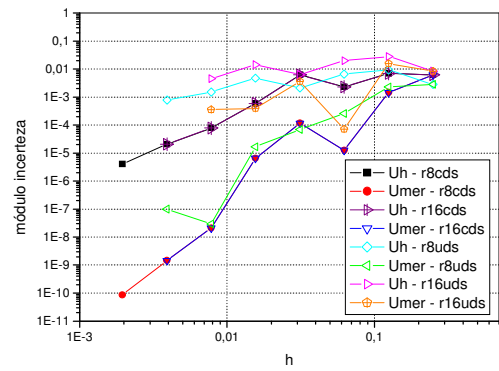


Figura 5. 2 módulo da incerteza de  $v_c$  versus tamanho de malha.

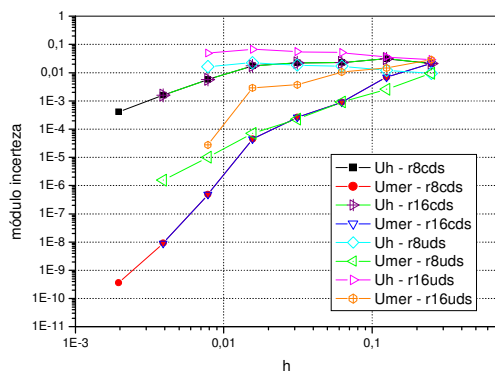


Figura 5. 3 módulo da incerteza de  $u_{min}$  versus tamanho de malha.

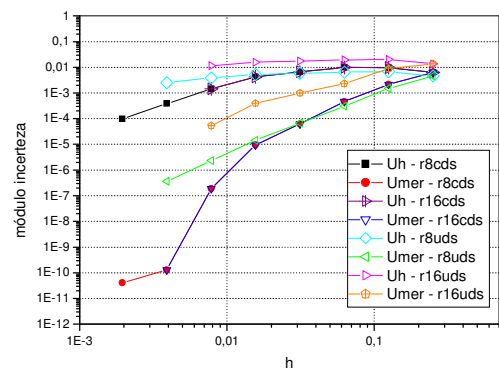


Figura 5. 4 módulo da incerteza de  $\psi_{min}$  versus tamanho de malha.

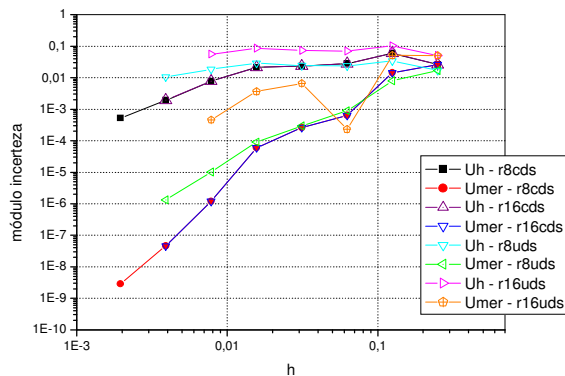


Figura 5. 5 módulo da incerteza de  $v_{min}$  versus tamanho de malha.

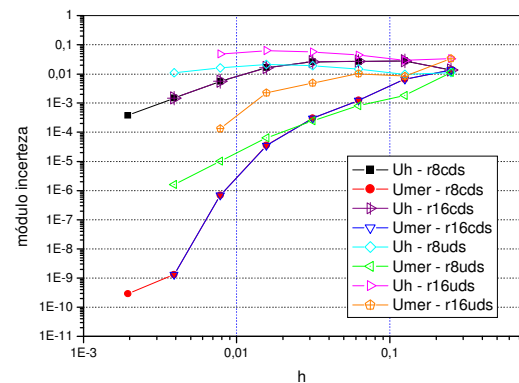


Figura 5. 6 módulo da incerteza de  $v_{max}$  versus tamanho de malha.

Para todos os casos o uso de MER se mostra eficiente na redução da incerteza numérica, que é uma estimativa do erro numérico; logo, se espera que MER seja eficiente na

redução do erro de discretização das soluções numéricas para o problema de Kawaguti. Mas baseando-se nas Figs. 4.9 a 4.14 para o problema de Shih, é possível dizer-se que a incerteza numérica subestima e é menos acurada que o erro numérico, por isso a eficiência de MER sobre o erro de discretização pode não ser tão satisfatória como para a incerteza numérica. Espera-se que o erro numérico seja maior que as incertezas numéricas calculadas no problema de Kawaguti. O efeito de MER sobre a diminuição da incerteza numérica se torna mais pronunciado com o refino de malha. A redução da incerteza com uso de MER para as malhas mais finas de soluções obtidas com esquema CDS é em geral da ordem de  $10e-6$ .

O uso de precisão quádrupla não é eficiente na redução do erro numérico e chega a ser prejudicial para o caso em que se usa esquema UDS, onde a incerteza numérica é maior que com o uso de UDS precisão simples.

### 5.3 VERIFICAÇÃO DAS ORDENS DE ERRO

Utilizando resultados do pós-processamento, feito através do programa Richardson 3.2, calculou-se também o valor das ordens verdadeiras *a posteriori*, isso é, depois da obtenção da solução numérica, para compará-las com as ordens verdadeiras teóricas.

Como visto no capítulo 2 as ordens verdadeiras do esquema CDS (obtidas *a priori*) são  $p_v=2,4,6, \text{ etc.}$  Mas muitas vezes um esquema de alta ordem, como o CDS, gera dificuldades nos cálculos dos coeficientes. Por isso, usou-se no presente trabalho CDS com correção adiada, isto é, deduziram-se os coeficientes através de um esquema UDS e a diferença entre os esquemas CDS e UDS é colocada no termo fonte, para facilitar a convergência.

As ordens verdadeiras do esquema CDS com correção adiada são  $p_v=2,3,4, \text{ etc.}$  E para função de interpolação UDS, as ordens verdadeiras são  $p_v=1,2,3, \text{ etc.}$

Para o problema de Kawaguti, a solução analítica não é conhecida. Por isso, calcula-se a ordem aparente do erro da solução numérica. As ordens aparentes foram calculadas através da Eq (2.11). Nessa equação manipulam-se as soluções numéricas em três malhas com logaritmo, por isso, assim como para o caso da ordem efetiva, pode surgir o problema de se obter um quociente negativo. Como algumas dessas divisões resultaram em valores negativos, usou-se o módulo das soluções numéricas para calcular as ordens aparentes. As ordens aparentes ( $P_U$ ) foram calculadas para as curvas das Figs. 5.1 a 5.6 e o significado das legendas se encontra na Tab. 5.6. No capítulo 8 encontra-se um apêndice chamado “ordem aparente para o problema de kawaguti” onde estão os valores calculados de  $P_U$ .

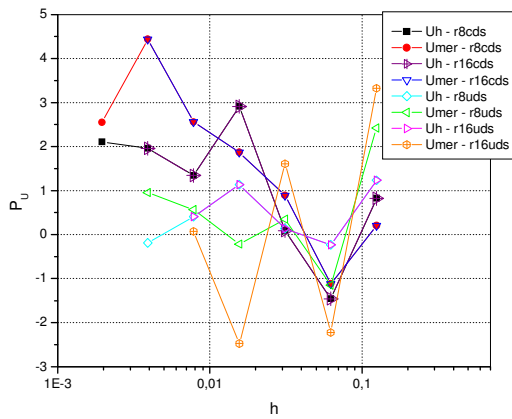


Figura 5.7 Ordem aparente de  $u_c$ .

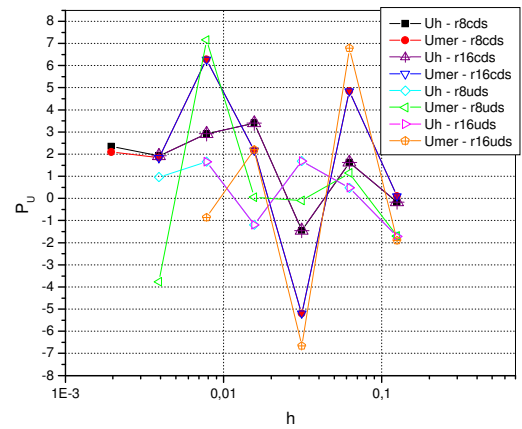


Figura 5.8 Ordem aparente de  $v_c$ .

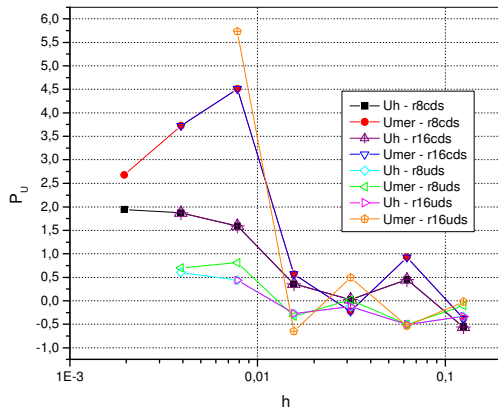


Figura 5.9 Ordem aparente de  $u_{min}$ .

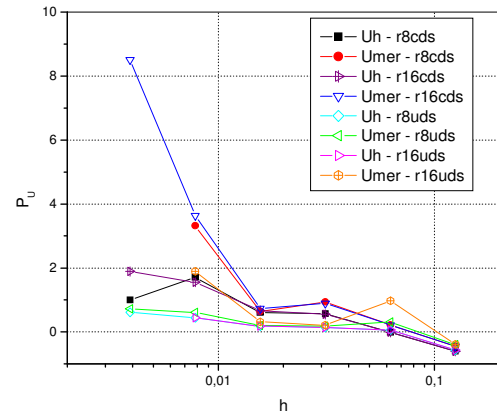


Figura 5.10 Ordem aparente de  $\psi_{min}$ .

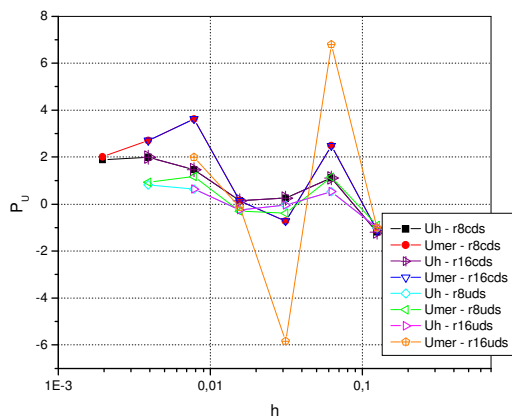


Figura 5.11 Ordem aparente de  $v_{min}$ .

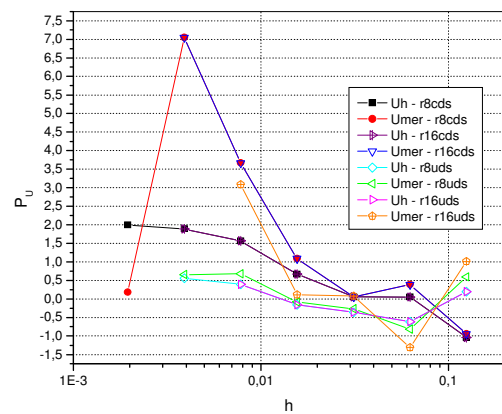


Figura 5.12 Ordem aparente de  $v_{max}$ .

As Figs. 5.7 a 5.12 mostram a ordem aparente em função do tamanho de malha para as seis variáveis de interesse.



As ordens aparentes de  $u_c$  tendem a 2 para os casos de precisão dupla com CDS com e sem MER e para o caso de precisão quádrupla com CDS sem MER, confirmando a *posteriori* as ordens verdadeiras com base nas ordens aparentes. O caso de precisão quádrupla com MER tem ordem aparente tendente a 4. Para o caso de uso de função de interpolação UDS sem MER as ordens aparentes tendem a 1, confirmando a *posteriori* as ordens verdadeiras com base nas ordens aparentes, e para os casos com MER tendem a 0.

As ordens de  $v_c$  têm um comportamento semelhante às de  $u_c$  para os casos de CDS com precisão dupla com e sem MER e CDS precisão quádrupla sem MER. Para o caso de CDS com precisão quádrupla com MER a ordem aparente tende a 2, confirmando a *posteriori* as ordens verdadeiras. Para o caso de UDS com precisão dupla a ordem aparente tende a 1, como previsto à *priori* e para os outros casos com UDS há degeneração das ordens aparentes.

Para a variável  $u_{min}$  as ordens aparentes dos casos de CDS precisão dupla e quádrupla sem MER tendem a 2 e as ordens aparentes dos casos de UDS precisão dupla com e sem MER e UDS precisão quádrupla sem MER tendem a 1, confirmando a *posteriori* as ordens verdadeiras com base nas ordens aparentes. Para os outros casos há degeneração das ordens aparentes.

Para  $\psi_{min}$  as ordens aparentes de UDS precisão dupla com e sem MER e UDS COM precisão quádrupla sem MER tendem a 1 e com CDS precisão quádrupla sem MER tende a 2, confirmando as ordens verdadeiras. Para os outros casos há degeneração da ordem aparente.

Para  $v_{min}$  todos os casos com uso de CDS tendem a 2 e os casos de UDS com precisão dupla com e sem MER e UDS com precisão quádrupla sem MER tendem a 1, confirmando as ordens verdadeiras. O caso de UDS com precisão quádrupla com MER tem ordem aparente degenerada tendente a 2.

O comportamento das ordens aparentes de  $v_{max}$  é semelhante ao das ordens aparentes de  $v_{min}$ , mas há degeneração das ordens aparentes nos casos de CDS precisão dupla e quádrupla com MER e UDS precisão quádrupla com MER.

## 6 CONCLUSÃO

### 6.1 CONCLUSÃO SOBRE O PROBLEMA DE SHIH

O uso de múltiplas extrapolações de Richardson (MER) se mostrou eficiente na redução do erro de discretização das soluções numéricas de todas as variáveis de interesse do problema de Shih com uso de função de interpolação CDS e não foi efetivo para as variáveis  $\psi_{min}$ ,  $u_{min}$ ,  $v_{min}$  e  $v_{max}$  com uso de função de interpolação UDS ; mas o efeito de MER não foi o mesmo para todas as variáveis. O módulo do erro da solução numérica extrapolada da componente horizontal da velocidade  $u_c$ , calculada com CDS e precisão dupla, teve na malha mais fina uma diminuição do módulo do erro numérico de  $2,74 \times 10^5$  vezes em relação à sua solução não extrapolada na mesma situação. O módulo do erro da solução numérica extrapolada de  $v_c$  na mesma situação foi  $1,17 \times 10^6$  vezes menor que o erro da solução não extrapolada. Enquanto essa diminuição para  $u_{min}$ ,  $v_{min}$ ,  $v_{max}$  e  $\psi_{min}$  na mesma situação foi de 2,64; 2,66; 1,91; 1,98 e  $3,83 \times 10^2$  vezes respectivamente. Essa diferença de comportamento de MER para as variáveis já era esperada, uma vez que existe uma dificuldade para se calcular pontos de máximos e mínimos com uso de MER.

O uso de precisão quádrupla não se mostrou eficiente na redução do erro de arredondamento para o problema de Shih para nenhum dos casos analisados. As curvas do módulo de erro numérico para os casos com precisão dupla e quádrupla se sobrepõe, com e sem o uso de MER, para todas as variáveis analisadas.

O uso de função de interpolação CDS para as variáveis sem MER  $u_c$ ,  $u_{min}$ ,  $v_{min}$ ,  $v_{max}$  e  $\psi_{min}$  gera erros numéricos menores que o uso de UDS na mesma situação. Para a variável  $u_c$  o erro com CDS é  $1,8 \times 10^1$  vezes menor que o uso de UDS, com precisão dupla e sem o uso de MER. Para a variável  $v_c$  o uso de função de interpolação CDS gera erros numéricos maiores que UDS, 3,51 vezes para precisão dupla na malha  $512 \times 512$ . O uso de função de interpolação CDS com uso de MER também gera erros numéricos menores em relação à UDS na mesma situação para todas as variáveis para toas as variáveis de interesse.

O uso de precisão quádrupla não altera significativamente as ordens efetivas dos erros numéricos das variáveis analisadas.

No presente trabalho, as variáveis  $u_c$  e  $v_c$  são obtidas com médias temperaturas nas faces dos volumes de controle e isso acaba por gerar resultados menos acurados que resultados calculados sobre os nós. Supõe-se também que pela complexidade do problema em questão o uso de precisão quádrupla não seja efetivo, pois se trata de um problema bidimensional, com acoplamento pressão velocidade.

## 6.2 CONCLUSÃO SOBRE O PROBLEMA DE KAWAGUTI

O uso de múltiplas extrapolações de Richardson (MER) se mostrou eficiente na redução da incerteza numérica para todas as variáveis de interesse, com efeito pronunciado dessa eficiência nas malhas mais finas de cada variável. Mas o efeito de MER foi diferente para cada variável e com cada função de interpolação. O caso em que MER se mostrou mais efetivo foi com uso de aproximação CDS, caso em que o uso de MER gerou uma diminuição da incerteza numérica da ordem de  $10^5$  ( $u_c$ ,  $v_c$  e  $u_{min}$ ) a  $10^6$  ( $v_{max}$ ,  $v_{min}$  e  $\psi_{min}$ ) para todas as variáveis de interesse, na malha mais fina. Enquanto o uso de MER com função de interpolação UDS gerou uma diminuição da incerteza numérica da ordem de  $10^4$  a  $10^5$  em relação à solução não extrapolada para a malha mais fina de todas as variáveis de interesse.

O uso de precisão quádrupla não se mostrou eficiente na redução do erro de arredondamento para o problema de Kawaguti. O erro da solução numérica com precisão dupla é igual ao erro da solução numérica com precisão quádrupla, com e sem o uso de MER para as soluções numéricas com esquema CDS. Para as soluções numéricas com UDS e com MER, o uso de precisão quádrupla acarretou em aumento da incerteza da ordem de  $10^5$  para todas as variáveis nas malhas mais finas em relação ao uso de UDS, precisão dupla e MER.

O uso de função de interpolação CDS gera incertezas menores que o uso de função de interpolação UDS. Para o caso de UDS com MER a função de interpolação CDS gera incertezas numéricas menores na ordem de  $10^5$  em relação a mesma situação com MER. Para os casos de CDS sem MER a incerteza é da ordem de  $10^2$  menor que com UDS na mesma situação. E para CDS com MER de  $10^2$  a  $10^3$  menor que para o mesmo caso com UDS.

## 6.3 CONCLUSÃO GERAL

O uso de precisão quádrupla não se mostrou eficiente na redução do erro numérico e da incerteza numérica para nenhuma das seis variáveis em nenhum dos problemas abordados no presente trabalho. Supõe-se que pela complexidade do problema em questão o uso de precisão quádrupla não seja efetivo, pois se trata de um problema bidimensional, com acoplamento pressão velocidade. Supõe-se também que a maneira com a qual se calculou as variáveis de interesse tenha gerado menor acurácia e tenha influenciado nesse comportamento, pois nenhuma das variáveis foi calculada sobre os nós, mas sim sobre as faces dos volumes de controle ou ainda com média dos respectivos valores nas faces dos respectivos volumes de controle.

O uso de múltiplas extrapolações de Richardson se mostrou eficiente na redução do erro de discretização para quase todos os casos dos dois problemas, não foi eficiente somente para o problema de Shih com as variáveis  $\psi_{min}$ ,  $u_{min}$ ,  $v_{min}$  e  $v_{max}$  calculadas com UDS. O efeito de MER foi mais pronunciado nas malhas mais finas, isto é, nas malhas mais finas o erro e a incerteza numérica têm uma redução mais pronunciada em relação aos mesmos casos de solução não extrapolada.

A função de interpolação CDS teve um comportamento melhor que a UDS, tendo as soluções numéricas geradas com aproximação numérica de segunda ordem erros numéricos e incertezas numéricas menores. Para o problema de Kawaguti a função UDS com precisão quádrupla e MER gerou erros maiores que em precisão dupla para o mesmo caso. Em geral para os dois problemas, o esquema CDS gerou erros e incertezas menores e foi o esquema que para o caso de solução não extrapolada em mais casos, as ordens efetivas e aparentes se aproximaram das ordens teóricas, com o refino de malha.

Em resumo este trabalho teve com contribuições: o cálculo do erro numérico para o problema de Shih e da incerteza numérica para o problema de Kawaguti, testando esquemas de aproximações numéricas de primeira e de segunda ordem de acurácia, com precisão dupla e quádrupla, com e sem MER; o cálculo das ordens efetivas para o problema de Shih e para o problema de Kawaguti com CDS e UDS, precisão dupla e quádrupla, com e sem MER.

Como sugestão para trabalho futuros tem-se o uso de malhas mais finas para obter resultados mais acurados em precisão quádrupla com MER e deve-se testar outras formas de obtenção das variáveis de interesse, possibilitando o cálculo direto da velocidade no centro da cavidade, sem usar média das temperaturas nos nós, para comparar com os resultados deste trabalho.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARRAGY, E.; CAREY, G. F. **Stream Function-Vorticity Driven Cavity Solution Using P Finite Elements**, *Computers & Fluids*, Vol.26, pp. 453-468, 1977.
- BENJAMIN, A. S.; DENNY, V. E. **On the Convergence of Numerical Solutions for 2-D Flows in a Cavity at Large Re**, *Journal of Computational Physics*, Vol.33, pp. 340-358, 1979.
- BOTELLA, O.; PEYRET, R. **Benchmark Spectral Results on the Lid-Driven Cavity Flow**, *Computers & Fluids*, Vol.27, pp. 421-433, 1998.
- BRUNEAU, C. H.; SAAD, M. **The 2D Lid-Driven Cavity Problem Revisited**, *Computers & Fluids*, Vol.35, pp. 326-348, 2006.
- BURGGRAF, O. R. **Analytical and Numerical Studies of the Structure of Steady Separated Flows**, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol.24, pp. 113-151, 1966.
- BURDEN, L. B.; FAIRES, J. D. **Análise Numérica**, 8ª Edição, pg173-180, 2008.
- DE VAHL DAVIS, G. **Natural Convection of Air in a Square Cavity: a Bench Mark Numerical Solution**, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.3, pp. 249-264, 1983.
- ERTURK, E.; CORKE, T. C.; GÖKÇÖL, C. **Numerical Solutions of 2-D Steady Incompressible Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers**, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.48, pp. 747-774, 2005.
- FERZIGER, J. H.; PERIC, M. **Computational Methods for Fluid Dynamics**, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2 ed., 389 p, 1999.
- FORTUNA, A. O. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos**, São Paulo, Edusp, 2000.
- GHIA, U.; GHIA, K.N.; SHIN, C.T. **High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method**, *Journal of Computational Physics*, Vol.48, pp. 387-411, 1982.

GOYON, O. **High-Reynolds Number Solutions of Navier-Stokes Equations Using Incremental Unknowns**, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.130, pp. 319-335, 1996.

GUPTA, M.M.; KALITA, J.C. **A New Paradigm for Solving Navier-Stokes Equations: Streamfunction-Velocity Formulation**, *Journal of Computational Physics*, Vol.207, pp. 52-68, 2005.

HAYASE, T.; HUMPHREY, J. A.; GREIF, R. **A Consistently Formulated QUICK Scheme for Fast and Stable Convergence Using Finite-Volume Iterative Calculation Procedures**, *Journal of Computational Physics*, Vol.98, pp. 108-118, 1992.

HOU, S.; ZOU, Q.; CHEN, S.; DOOLEN, G.; COGLEY, A.C. **Simulation of Cavity Flow by Lattice Boltzmann Method**, *Journal of Computational Physics*, Vol.118, pp. 329-347, 1995.

JOYCE, D. C. **Survey of extrapolation processes in numerical analysis**, *SIAM Review* 13, n.4, pp. 435-490, 1971.

KAWAGUTI, M. **Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations for the Flow in a Two-Dimensional Cavity**, *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol.16, pp. 2307-2315, 1961.

KHOSLA, P. K.; RUBIN, S. G. **A Diagonally Dominant Second-Order Accurate Implicit Scheme**, *Computers & Fluids*, Vol. 2, pp. 207-209, 1974.

KREYSZIG, E. **Advanced Engineering Mathematics**, Wiley, New York, USA, 8 ed., 1156 p, 1999.

KUNDU, P. K., **Fluid Mecanics**, Academic Press, 1990.

MALISKA, C. R., **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**. 2. ed., Rio de Janeiro, LTC, 2004.

MARCHI, C. H., **Verificação de Soluções Numéricas Unidimensionais em Dinâmica dos Fluidos**. Tese de doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, UFSC, Florianópolis, 2001.

MARCHI, C. H., GERMER, E. M., **Verificação de Esquemas Advectivo-Difusivo 1D com e sem Múltiplas Extrapolações de Richardson.** Cilandce, 2009, Armação dos Búzios. XXX CILAMCE – Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia – 2009, 2009.

MARCHI, C. H.; NOVAK, L. A. e SANTIAGO, C. D. **Múltiplas extrapolações de Richardson para reduzir e estimar o erro de discretização da equação de Laplace 2D,** XXIX CILANCE, novembro, 2008.

MARCHI, C. H.; SILVA, A.F.C. **Unidimensional Numerical Solution Error Estimation for Convergent Apparent Order,** *Numerical Heat Transfer, Parte B*, Vol.42, pp. 167-188, 2002.

MARCHI, C.H.; SUERO, R.; ARAKI, L.K. **The Lid-Driven Square Cavity Flow: Numerical Solution with a 1024 x 1024 Grid,** *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, XXXI, N.3, pp 186 a 198, 2009.

NISHIDA, H. e SATOFUKA, N. **Higher-order Solutions of Square Driven Cavity Flow using a Variable-order Multi-grid method.** *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 34, pp. 637-653, 1992.

PATANKAR, S. V., SPALDING, D. B. **A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows.** *Int. J Heat Mass Transfer*, Vol. 15, pp 1787-1806, 1972.

RICHARDSON, L. F. **The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems involving Differential Equation, with an Application to the Stresses in a masonry Dam.** *Philosophical Proceedings of the Royal Society of London Serial A*, Vol 210, pp 307 – 357, 1910.

RICHARDSON, L. F.; GAUNT, J. A. **The Differed Approach to the Limit.** *Philosophical Proceedings of the Royal Society of London Serial A*, Vol 226, pp 299 – 361, 1927.

ROACHE, P. J., **Verification and Validation in Computational Science and Engineering.** Albuquerque, USA: Hermosa, 1998.

- RUBIN, S. G. e KHOSLA, P. K. **Polynomial Interpolation Methods for Viscous Flow Calculations.** Journal of Computational Physics, Vol. 24, pp. 217-244, 1997.
- SCHNEIDER, G. E.; ZEDAN, M. **A Modified Strongly Implicit Procedure for Numerical Solution of Field Problems.** Numerical Heat Transfer, v. 4, pp. 1-19, 1981.
- SCHREIBER, R. e KELLER, H. B. **Driven Cavity Flows by Efficient Numerical Techniques.** Journal of Computational Physics, Vol. 49, pp. 310-333, 1983.
- SHIH, T. M., TAN, C. H. e HWANG, B. C. **Effects of Grid Staggering on Numerical Schemes,** International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 9, pp 193-212, 1989.
- SUERO, R., **Verificação de Soluções Numéricas de escoamentos bidimensionais laminares em malhas uniformes.** Dissertação de mestrado, Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia, UFPR, Curitiba, 2006.
- VAN DOORMAL, J. P. e RAITHBY, G. D. **Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flows.** Numerical Heat Transfer 7, pp. 147-163, 1984.
- VANKA, S. P. **Block-implicit Multgrid Solution of Navier-Stokes Equations and in Primitives Variables.** Journal of Computational Physics, Vol. 65, pp. 138-158, 1986.
- VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W., **An introduction to Computational Fluid Dynamics: The finite volume method,** 2 ed., Harlow, England: Pearson/Prentice Hall, 2007.
- WRIGHT, N. G. e GASKELL, P. H. **An Efficient Multgrid Approach to solving Highly Recirculating Flows.** Computers e Fluids, Vol. 65, pp. 138-158, 1995.
- ZHANG, J. **Numerical Simulation of 2D Square Driven Cavity using Fourth-order Compact Finite Difference Scheme.** Computers and Mathematics with Applications, Vol. 45, pp. 43-52, 2003.



## APÊNDICE

### A. ERRO DA SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA O PROBLEMA DE SHIH

Este apêndice traz tabelas com o erro da solução numérica em função do tamanho de malha para cada variável e em cada caso analisado do problema de Shih.

**Tabela 8. 1 Erro da solução numérica de  $u_c$  versus  $h$  para o problema de Shih.**

h	Eh - r8cds	Emer - r8cds	Eh - r16cds	Emer - r16cds
5,000000000E-01	-2,500000000E-01	-2,500000000E-01	-2,500000000E-01	-2,500000000E-01
2,500000000E-01	-7,6957140179E-02	-1,9276186905E-02	-7,6957140179E-02	-1,9276186905E-02
1,250000000E-01	-2,3089437424E-02	-4,1906931457E-03	-2,3089437424E-02	-4,1906931457E-03
6,250000000E-02	-6,3581444267E-03	-4,3215359754E-04	-6,3581444267E-03	-4,3215359754E-04
3,125000000E-02	-1,6366761130E-03	-5,7540780132E-06	-1,6366761130E-03	-5,7540780132E-06
1,562500000E-02	-4,1226446117E-04	5,6999131402E-08	-4,1226446117E-04	5,6999131534E-08
7,812500000E-03	-1,0325815442E-04	5,3041524574E-09	-1,0325815442E-04	5,3041531565E-09
3,906200000E-03	-2,5826248040E-05	3,6502499659E-10	-2,5826248040E-05	3,6502331440E-10
1,953100000E-03	-6,4572569529E-06	4,4920867299E-11		
9,765600000E-04	-1,6143528659E-06	5,9008078623E-12		
h	Eh - r8uds	Emer - ruds	Eh - r16uds	Emer - r16uds
5,000000000E-01	-2,500000000E-01	-2,500000000E-01	-2,500000000E-01	-2,500000000E-01
2,500000000E-01	-7,9638098659E-02	9,0723802682E-02	-7,9638098659E-02	9,0723802682E-02
1,250000000E-01	-2,4493755156E-02	1,0626183568E-02	-2,4493755156E-02	1,0626183568E-02
6,250000000E-02	-7,0733332857E-03	2,5725512968E-03	-7,0733332857E-03	2,5725512968E-03
3,125000000E-02	-1,9926260058E-03	9,7912509223E-05	-1,9926260058E-03	9,7912509223E-05
1,562500000E-02	-5,9021062960E-04	-5,8256415813E-05	-5,9021062960E-04	-5,8256415812E-05
7,812500000E-03	-1,9223281378E-04	1,0984343763E-06	-1,9223281378E-04	1,0984343771E-06
3,906200000E-03	-7,0329025477E-05	-5,2190274071E-08	-7,0329025480E-05	-5,2190284046E-08
1,953100000E-03	-2,8712214197E-05	1,4337616842E-08		

**Tabela 8. 2 Erro da solução numérica de  $v_c$  versus  $h$  para o problema de Shih.**

h	Eh - r8cds	Emer - r8cds	Eh - r16cds	Emer - r16cds
5,000000000E-01	0,000000000E+00	0,000000000E+00	0,000000000E+00	0,000000000E+00
2,500000000E-01	6,9280551159E-05	9,2374068212E-05	6,9280551159E-05	9,2374068212E-05
1,250000000E-01	-1,5009012952E-04	-2,4425287361E-04	-1,5009012952E-04	-2,442528736E-04
6,250000000E-02	-9,0964932982E-05	-5,8219282229E-05	-9,0964932982E-05	-5,821928223E-05
3,125000000E-02	-2,7186547675E-05	-4,0062940760E-07	-2,7186547675E-05	-4,006294075E-07
1,562500000E-02	-7,0909618541E-06	3,9766249082E-09	-7,0909618541E-06	3,9766248143E-09
7,812500000E-03	-1,7914515475E-06	-9,3211370487E-11	-1,7914515479E-06	-9,321191080E-11
3,906200000E-03	-4,4903909640E-07	-2,2174515405E-12	-4,4903909705E-07	-2,218208880E-12
1,953100000E-03	-1,1233358211E-07	-2,6136064946E-13		
9,765600000E-04	-2,8088030671E-08	-2,4052507727E-14		
h	Eh - r8uds	Emer - r8uds	Eh - r16uds	Emer - r16uds
5,000000000E-01	-2,7755575616E-17	-2,7755575616E-17	0,000000000E+00	0,000000000E+00
2,500000000E-01	9,1034971783E-05	1,8206994357E-04	9,1034971783E-05	1,8206994357E-04
1,250000000E-01	-1,3922469672E-04	-5,5333580148E-04	-1,3922469672E-04	-5,533358015E-04
6,250000000E-02	-8,7214587365E-05	1,6615900142E-04	-8,7214587365E-05	1,6615900142E-04
3,125000000E-02	-2,5748148710E-05	4,9669636053E-05	-2,5748148710E-05	4,9669636053E-05
1,562500000E-02	-6,4298357597E-06	-8,2160307216E-06	-6,4298357596E-06	-8,216030721E-06
7,812500000E-03	-1,4682107421E-06	1,3039900811E-07	-1,4682107419E-06	1,3039900878E-07
3,906200000E-03	-2,8826472020E-07	2,8191281198E-09	-2,8826472035E-07	2,8191267679E-09
1,953100000E-03	-3,2037868993E-08	-9,8013585707E-11		

Tabela 8. 3 Erro da solução numérica de  $u_{min}$  versus  $h$  para o problema de Shih.

$h$	Eh - r8cds	Emer - r8cds	Eh - r16cds	Emer - r16cds
5,0000000000E-01	-1,6468829355E-02	-1,6468829355E-02	-1,6468829355E-02	-1,6468829355E-02
2,5000000000E-01	-3,9513249381E-03	2,2117653420E-04	-3,9513249381E-03	2,2117653420E-04
1,2500000000E-01	-9,0136068150E-03	-1,1429181483E-02	-9,0136068150E-03	-1,1429181483E-02
6,2500000000E-02	-1,5263041133E-03	1,9566502455E-03	-1,5263041133E-03	1,9566502455E-03
3,1250000000E-02	-9,5034673937E-04	-9,2641511826E-04	-9,5034673937E-04	-9,2641511826E-04
1,5625000000E-02	-1,9751132581E-04	1,2822813153E-04	-1,9751132581E-04	1,2822813153E-04
7,8125000000E-03	-3,6338670679E-05	1,2943394696E-05	-3,6338670679E-05	1,2943394696E-05
3,9062000000E-03	-6,7030962524E-06	1,9663812058E-06	-6,7030962545E-06	1,9663812028E-06
1,9531000000E-03	-3,8216750611E-06	-3,3788434778E-06		
9,7656000000E-04	-9,0242304552E-07	3,4138100482E-07		
$h$	Eh - r8uds	Emer - r8uds	Eh - r16uds	Emer - r16uds
5,0000000000E-01	-2,1691130612E-02	-2,1691130612E-02	-2,1691130612E-02	-2,1691130612E-02
2,5000000000E-01	-6,8653681442E-03	7,9603943241E-03	-6,8653681442E-03	7,9603943241E-03
1,2500000000E-01	-1,0518708051E-02	-2,1549528718E-02	-1,0518708051E-02	-2,1549528718E-02
6,2500000000E-02	-2,2258757196E-03	1,7722265781E-02	-2,2258757196E-03	1,7722265781E-02
3,1250000000E-02	-1,3028268451E-03	-6,2165788545E-03	-1,3028268451E-03	-6,2165788545E-03
1,5625000000E-02	-3,7096603232E-04	2,0235196698E-03	-3,7096603232E-04	2,0235196698E-03
7,8125000000E-03	-1,2239510618E-04	-3,4878753063E-04	-1,2239510618E-04	-3,4878753063E-04
3,9062000000E-03	-4,9580365043E-05	1,4936275505E-05	-4,9580365046E-05	1,4936275492E-05
1,9531000000E-03	-2,5301552805E-05	-9,5211158177E-06		

Tabela 8. 4 Erro da solução numérica de  $v_{min}$  versus  $h$  para o problema de Shih.

$h$	Eh - r8cds	Emer - r8cds	Eh - r16cds	Emer - r16cds
5,0000000000E-01	-3,2978436974E-02	-3,2978436974E-02	-3,2978436974E-02	-3,2978436974E-02
2,5000000000E-01	-3,0982813096E-02	-3,0317605137E-02	-3,0982813096E-02	-3,0317605137E-02
1,2500000000E-01	-1,0438780284E-02	-1,8089802937E-03	-1,0438780284E-02	-1,8089802937E-03
6,2500000000E-02	-3,2914616683E-03	-7,1311610415E-04	-3,2914616683E-03	-7,1311610415E-04
3,1250000000E-02	-1,0671674707E-03	-2,7811318905E-04	-1,0671674707E-03	-2,7811318905E-04
1,5625000000E-02	-1,9118981507E-04	1,3787950960E-04	-1,9118981507E-04	1,3787950960E-04
7,8125000000E-03	-1,1292012816E-04	-1,0419887888E-04	-1,1292012816E-04	-1,0419887888E-04
3,9062000000E-03	-2,4801783804E-05	1,3012858022E-05	-2,4801783805E-05	1,3012858021E-05
1,9531000000E-03	-4,8076587736E-06	1,4759893593E-06		
9,7656000000E-04	8,0205197448E-07	4,1961231747E-07		
$h$	Eh - r8uds	Emer - r8uds	Eh - r16uds	Emer - r16uds
5,0000000000E-01	-3,8200738231E-02	-3,8200738231E-02	-3,8200738231E-02	-3,8200738231E-02
2,5000000000E-01	-3,2336372978E-02	-2,6472007724E-02	-3,2336372978E-02	-2,6472007724E-02
1,2500000000E-01	-1,1419473569E-02	2,1487237027E-02	-1,1419473569E-02	2,1487237027E-02
6,2500000000E-02	-3,8337259994E-03	-9,7030607311E-04	-3,8337259994E-03	-9,7030607311E-04
3,1250000000E-02	-1,3031506497E-03	2,5520173288E-04	-1,3031506497E-03	2,5520173288E-04
1,5625000000E-02	-3,1460602111E-04	5,3467844845E-04	-3,1460602111E-04	5,3467844845E-04
7,8125000000E-03	-1,7606962696E-04	-4,9033235249E-04	-1,7606962696E-04	-4,9033235249E-04
3,9062000000E-03	-5,5973804498E-05	2,2364143308E-04	-5,5973804500E-05	2,2364143307E-04
1,9531000000E-03	-2,0293517103E-05	-3,9782356441E-05		

Tabela 8. 5 Erro da solução numérica de  $v_{max}$  versus  $h$  para o problema de Shih.

$h$	Eh - r8cds	Emer - r8cds	Eh - r16cds	Emer - r16cds
5,000000000E-01	3,2978436974E-02	3,2978436974E-02	3,2978436974E-02	3,2978436974E-02
2,500000000E-01	3,0844251994E-02	3,0132857000E-02	3,0844251994E-02	3,0132857000E-02
1,250000000E-01	1,0616426164E-02	2,1232149246E-03	1,0616426164E-02	2,1232149246E-03
6,250000000E-02	3,3824923439E-03	7,5631414686E-04	3,3824923439E-03	7,5631414686E-04
3,125000000E-02	1,0980246662E-03	2,8470977721E-04	1,0980246662E-03	2,8470977721E-04
1,562500000E-02	1,9873166148E-04	-1,3901540934E-04	1,9873166148E-04	-1,3901540934E-04
7,812500000E-03	1,1475951477E-04	1,0416870989E-04	1,1475951477E-04	1,0416870989E-04
3,906200000E-03	2,5270801411E-05	-1,2994375438E-05	2,5270801412E-05	-1,2994375436E-05
1,953100000E-03	4,9259756068E-06	-1,4756476934E-06		
9,765600000E-04	8,3175861558E-07	-4,1953695845E-07		
$h$	Eh - r8uds	Emer - r8uds	Eh - r16uds	Emer - r16uds
5,000000000E-01	3,8200738231E-02	3,8200738231E-02	3,8200738231E-02	3,8200738231E-02
2,500000000E-01	3,2154303034E-02	2,6107867837E-02	3,2154303034E-02	2,6107867837E-02
1,250000000E-01	1,1581516798E-02	-2,0690981864E-02	1,1581516798E-02	-2,0690981864E-02
6,250000000E-02	3,9204375182E-03	6,8107451181E-04	3,9204375182E-03	6,8107451181E-04
3,125000000E-02	1,3322323211E-03	-2,6354847642E-04	1,3322323211E-03	-2,6354847642E-04
1,562500000E-02	3,2137113394E-04	-5,4016058213E-04	3,2137113394E-04	-5,4016058213E-04
7,812500000E-03	1,7754029614E-04	4,9298228274E-04	1,7754029614E-04	4,9298228274E-04
3,906200000E-03	5,6256757553E-05	-2,2382328023E-04	5,6256757555E-05	-2,2382328022E-04
1,953100000E-03	2,0318248152E-05	3,9759379793E-05		

Tabela 8. 6 Erro da solução numérica de  $\psi_{min}$  versus  $h$  para o problema de Shih.

$h$	Eh - r8cds	Emer - r8cds	Eh - r16cds	Emer - r16cds
5,000000000E-01	-9,3037912797E-02	-9,3037912797E-02	-9,3037912797E-02	-9,3037912797E-02
2,500000000E-01	-4,2582426266E-02	-2,5763930755E-02	-4,2582426266E-02	-2,5763930755E-02
1,250000000E-01	-1,3293448715E-02	-2,0482245606E-03	-1,3293448715E-02	-2,0482245606E-03
6,250000000E-02	-3,0642349118E-03	6,4599752386E-04	-3,0642349118E-03	6,4599752386E-04
3,125000000E-02	-9,2406112689E-04	-2,6482418300E-04	-9,2406112689E-04	-2,6482418300E-04
1,562500000E-02	-2,0083763285E-04	6,3388128657E-05	-2,0083763285E-04	6,3388128657E-05
7,812500000E-03	-6,2097230814E-05	-2,1231624241E-05	-6,2097230814E-05	-2,1231624241E-05
3,906200000E-03	-1,1789288523E-05	6,9249124793E-06	-1,1789288524E-05	6,9249124786E-06
1,953100000E-03	-2,9518787931E-06	-4,8285001213E-07		
9,765600000E-04	-7,4226724050E-07	1,9388403737E-09		
$h$	Eh - r8uds	Emer - ruds	Eh - r16uds	Emer - r16uds
5,000000000E-01	-9,3690700455E-02	-9,3690700455E-02	-9,3690700455E-02	-9,3690700455E-02
2,500000000E-01	-4,3378897654E-02	6,9329051458E-03	-4,3378897654E-02	6,9329051458E-03
1,250000000E-01	-1,3812752250E-02	1,8693555823E-02	-1,3812752250E-02	1,8693555823E-02
6,250000000E-02	-3,3350910523E-03	2,2121158079E-03	-3,3350910523E-03	2,2121158079E-03
3,125000000E-02	-1,0568140783E-03	-1,7155066885E-03	-1,0568140783E-03	-1,7155066885E-03
1,562500000E-02	-2,6734205193E-04	6,3852026018E-04	-2,6734205193E-04	6,3852026018E-04
7,812500000E-03	-9,5322782327E-05	-1,9719791506E-04	-9,5322782327E-05	-1,9719791506E-04
3,906200000E-03	-2,8392706788E-05	6,3320930662E-05	-2,8392706789E-05	6,3320930659E-05
1,953100000E-03	-1,1254420642E-05	-1,6789261638E-05		

## B. ORDEM EFETIVA PARA O PROBLEMA DE SHIH

Este apêndice contém as tabelas com as ordens efetivas calculadas de todas as variáveis em todos os casos para o problema Shih, nestas PL representa a ordem verdadeira teórica.

Tabela 8. 7 Ordem efetiva de  $u_c$  para o problema de Shih.

h	Pe - Eh(r8cds)	Pe - Emer(r8cds)	Pe - Eh(r16cds)	Pe - Emer(r16cds)
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01	1,6998010020E+00	3,6970364949E+00	1,6998010020E+00	3,6970364949E+00
1,2500000000E-01	1,7368221656E+00	2,2015589026E+00	1,7368221656E+00	2,2015589026E+00
6,2500000000E-02	1,8605553290E+00	3,2775728108E+00	1,8605553290E+00	3,2775728108E+00
3,1250000000E-02	1,9578369374E+00	6,2308155799E+00	1,9578369374E+00	6,2308155799E+00
1,5630000000E-02	1,9891268449E+00	6,6575010364E+00	1,9891268449E+00	6,6575010330E+00
7,8100000000E-03	1,9973143830E+00	3,4257457859E+00	1,9973143831E+00	3,4257455991E+00
3,9100000000E-03	1,9993088237E+00	3,8609837772E+00	1,9993088236E+00	3,8609906158E+00
1,9500000000E-03	1,9998447259E+00	3,0225375743E+00		
9,7656000000E-04	1,999950258E+00	2,9284446570E+00		
PL	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00
	Pe - Eh(r8uds)	Pe - Emer(r8uds)	Pe - Eh(r16uds)	Pe - Emer(r16uds)
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01	1,6503974123E+00	1,4623750778E+00	1,6503974123E+00	1,4623750778E+00
1,2500000000E-01	1,7010448059E+00	3,0938575712E+00	1,7010448059E+00	3,0938575712E+00
6,2500000000E-02	1,7919518257E+00	2,0463517909E+00	1,7919518257E+00	2,0463517909E+00
3,1250000000E-02	1,8277192833E+00	4,7155628454E+00	1,8277192833E+00	4,7155628455E+00
1,5630000000E-02	1,7553691486E+00	7,4907624580E-01	1,7553691486E+00	7,4907624581E-01
7,8100000000E-03	1,6183752813E+00	5,7288963567E+00	1,6183752813E+00	5,7288963557E+00
3,9100000000E-03	1,4506357024E+00	4,3954427242E+00	1,4506357024E+00	4,3954424495E+00
1,9500000000E-03	1,2924556355E+00	1,8639757348E+00		
PL	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00

Tabela 7. 8 Ordem efetiva de  $v_c$  para o problema de Shih.

h	Pe - Eh(r8cds)	Pe - Emer(r8cds)	Pe - Eh(r16cds)	Pe - Emer(r16cds)
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01				3,6970364949E+00
1,2500000000E-01	-1,1153067906E+00	-1,4028157236E+00	-1,4028157237E+00	2,2015589026E+00
6,2500000000E-02	7,2244670506E-01	2,0688065774E+00	2,0688065774E+00	3,2775728108E+00
3,1250000000E-02	1,7424175328E+00	7,1830849188E+00	7,1830849192E+00	6,2308155799E+00
1,5630000000E-02	1,9388397198E+00	6,6545800261E+00	6,6545800598E+00	6,6575010330E+00
7,8100000000E-03	1,9848523110E+00	5,4148947231E+00	5,4148863262E+00	3,4257455991E+00
3,9100000000E-03	1,9961791951E+00	5,3934318741E+00	5,3929475977E+00	3,8609906158E+00
1,9500000000E-03	1,9990517756E+00	3,0847887267E+00		
9,7656000000E-04	1,9997914474E+00	3,4418335691E+00		
PL	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00
	Pe - Eh(r8uds)	Pe - Emer(r8uds)	Pe - Eh(r16uds)	Pe - Emer(r16uds)
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01	-4,1576780400E+01	-4,2576780400E+01		
1,2500000000E-01	-6,1292237065E-01	-1,6036624916E+00	-6,1292237065E-01	-1,6036624916E+00
6,2500000000E-02	6,7477378688E-01	1,7355908199E+00	6,7477378688E-01	1,7355908199E+00
3,1250000000E-02	1,7601007516E+00	1,7421283702E+00	1,7601007516E+00	1,7421283702E+00
1,5630000000E-02	2,0016149147E+00	2,5958506944E+00	2,0016149147E+00	2,5958506944E+00
7,8100000000E-03	2,1307228239E+00	5,9774367754E+00	2,1307228241E+00	5,9774367680E+00
3,9100000000E-03	2,3485495071E+00	5,5314378935E+00	2,3485495060E+00	5,5314385927E+00
1,9500000000E-03	3,1695441860E+00	4,8461234991E+00		
PL	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00

Tabela 8. 9 Ordem efetiva de  $u_{min}$  para o problema de Shih.

h	Pe - Eh(r8cds)	Pe - Emer(r8cds)	Pe - Eh(r16cds)	Pe - Emer(r16cds)
5,000000000E-01				
2,500000000E-01	2,0593296117E+00	6,2183958677E+00	2,0593296117E+00	6,2183958677E+00
1,250000000E-01	-1,1897680277E+00	-5,6913799460E+00	-1,1897680277E+00	-5,6913799460E+00
6,250000000E-02	2,5620620741E+00	2,5462642867E+00	2,5620620741E+00	2,5462642867E+00
3,125000000E-02	6,8351655509E-01	1,0786551927E+00	6,8351655509E-01	1,0786551927E+00
1,563000000E-02	2,2665186014E+00	2,8529459924E+00	2,2665186014E+00	2,8529459925E+00
7,810000000E-03	2,4423578337E+00	3,3084248533E+00	2,4423578337E+00	3,3084248533E+00
3,910000000E-03	2,4385610574E+00	2,7185509067E+00	2,4385610569E+00	2,7185509089E+00
1,950000000E-03	8,1062253220E-01	-7,8098648845E-01		
9,765600000E-04	2,0823600654E+00	3,3071236865E+00		
PL	2,000000000E+00	2,000000000E+00	2,000000000E+00	2,000000000E+00
	Pe - Eh(r8uds)	Pe - Emer(r8uds)	Pe - Eh(r16uds)	Pe - Emer(r16uds)
5,000000000E-01				
2,500000000E-01	1,6596962632E+00	1,4461934503E+00	1,6596962632E+00	1,4461934503E+00
1,250000000E-01	-6,1554852830E-01	-1,4367445157E+00	-6,1554852830E-01	-1,4367445157E+00
6,250000000E-02	2,2405125700E+00	2,8209325500E-01	2,2405125700E+00	2,8209325500E-01
3,125000000E-02	7,7272769059E-01	1,5113703122E+00	7,7272769059E-01	1,5113703122E+00
1,563000000E-02	1,8122863554E+00	1,6192539731E+00	1,8122863554E+00	1,6192539731E+00
7,810000000E-03	1,5997412170E+00	2,5364465040E+00	1,5997412171E+00	2,5364465040E+00
3,910000000E-03	1,3036810016E+00	4,5453721771E+00	1,3036810015E+00	4,5453721783E+00
1,950000000E-03	9,7054296491E-01	6,4961788018E-01		
PL	1,000000000E+00	1,000000000E+00	1,000000000E+00	1,000000000E+00

Tabela 8. 10 Ordem efetiva de  $v_{min}$  para o problema de Shih.

h	Pe - Eh(r8cds)	Pe - Emer(r8cds)	Pe - Eh(r16cds)	Pe - Emer(r16cds)
5,000000000E-01				
2,500000000E-01	9,0054883186E-02	1,2136722736E-01	9,0054883186E-02	1,2136722736E-01
1,250000000E-01	1,5695149896E+00	4,0669071989E+00	1,5695149896E+00	4,0669071989E+00
6,250000000E-02	1,6651528488E+00	1,3429678023E+00	1,6651528488E+00	1,3429678023E+00
3,125000000E-02	1,6249418004E+00	1,3584648207E+00	1,6249418004E+00	1,3584648207E+00
1,563000000E-02	2,4807090199E+00	1,0122640912E+00	2,4807090199E+00	1,0122640912E+00
7,810000000E-03	7,5970299979E-01	4,0406831739E-01	7,5970299980E-01	4,0406831739E-01
3,910000000E-03	2,1867464980E+00	3,0012745698E+00	2,1867464979E+00	3,0012745699E+00
1,950000000E-03	2,3670374778E+00	3,1401836310E+00		
9,765600000E-04	2,5836050378E+00	1,8145801951E+00		
PL	2,000000000E+00	2,000000000E+00	2,000000000E+00	2,000000000E+00
	Pe - Eh(r8uds)	Pe - Emer(r8uds)	Pe - Eh(r16uds)	Pe - Emer(r16uds)
5,000000000E-01				
2,500000000E-01	2,4044265128E-01	5,2913290098E-01	2,4044265128E-01	5,2913290098E-01
1,250000000E-01	1,5016617225E+00	3,0098763445E-01	1,5016617225E+00	3,0098763445E-01
6,250000000E-02	1,5746770101E+00	4,4688962706E+00	1,5746770101E+00	4,4688962706E+00
3,125000000E-02	1,5567433546E+00	1,9268017771E+00	1,5567433546E+00	1,9268017771E+00
1,563000000E-02	2,0503856879E+00	-1,0670334011E+00	2,0503856879E+00	-1,0670334011E+00
7,810000000E-03	8,3740022485E-01	1,2491157162E-01	8,3740022485E-01	1,2491157162E-01
3,910000000E-03	1,6532918115E+00	1,1325515457E+00	1,6532918114E+00	1,1325515457E+00
1,950000000E-03	1,4637328874E+00	2,4909868554E+00		
PL	1,000000000E+00	1,000000000E+00	1,000000000E+00	1,000000000E+00

Tabela 8. 11 Ordem efetiva de  $v_{max}$  para o problema de Shih.

h	Pe - Eh(r8cds)	Pe - Emer(r8cds)	Pe - Eh(r16cds)	Pe - Emer(r16cds)
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01	9,6521363507E-02	1,3018555697E-01	9,6521363507E-02	1,3018555697E-01
1,2500000000E-01	1,5387034702E+00	3,8270151443E+00	1,5387034702E+00	3,8270151443E+00
6,2500000000E-02	1,6501396158E+00	1,4891929070E+00	1,6501396158E+00	1,4891929070E+00
3,1250000000E-02	1,6231762051E+00	1,4094935673E+00	1,6231762051E+00	1,4094935673E+00
1,5630000000E-02	2,4660168207E+00	1,0342472283E+00	2,4660168207E+00	1,0342472283E+00
7,8100000000E-03	7,9220796472E-01	4,1632282213E-01	7,9220796471E-01	4,1632282212E-01
3,9100000000E-03	2,1830301378E+00	3,0029073347E+00	2,1830301377E+00	3,0029073349E+00
1,9500000000E-03	2,3589900283E+00	3,1384670653E+00		
9,7656000000E-04	2,5662105850E+00	1,8145053162E+00		
PL	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00
	Pe - Eh(r8uds)	Pe - Emer(r8uds)	Pe - Eh(r16uds)	Pe - Emer(r16uds)
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01	2,4858870025E-01	5,4911587746E-01	2,4858870025E-01	5,4911587746E-01
1,2500000000E-01	1,4731876072E+00	3,3548253314E-01	1,4731876072E+00	3,3548253314E-01
6,2500000000E-02	1,5627376390E+00	4,9250456554E+00	1,5627376390E+00	4,9250456554E+00
3,1250000000E-02	1,5571689786E+00	1,3697442907E+00	1,5571689786E+00	1,3697442907E+00
1,5630000000E-02	2,0515334337E+00	-1,0353200121E+00	2,0515334337E+00	-1,0353200121E+00
7,8100000000E-03	8,5609384090E-01	1,3185256533E-01	8,5609384090E-01	1,3185256533E-01
3,9100000000E-03	1,6580175827E+00	1,1391546610E+00	1,6580175826E+00	1,1391546611E+00
1,9500000000E-03	1,4692503854E+00	2,4929929437E+00		
PL	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00

Tabela 8. 12 Ordem efetiva de  $\psi_{max}$  para o problema de Shih.

h	Pe - Eh(r8cds)	Pe - Emer(r8cds)	Pe - Eh(r16cds)	Pe - Emer(r16cds)
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01	1,1275605778E+00	1,8524660124E+00	1,1275605778E+00	1,8524660124E+00
1,2500000000E-01	1,6795427231E+00	3,6529069181E+00	1,6795427231E+00	3,6529069181E+00
6,2500000000E-02	2,1171166238E+00	1,6647733562E+00	2,1171166238E+00	1,6647733562E+00
3,1250000000E-02	1,7294667075E+00	1,2864937640E+00	1,7294667075E+00	1,2864937640E+00
1,5630000000E-02	2,2019586634E+00	2,0627502885E+00	2,2019586634E+00	2,0627502885E+00
7,8100000000E-03	1,6934287871E+00	1,5779979343E+00	1,6934287871E+00	1,5779979343E+00
3,9100000000E-03	2,3970080141E+00	1,6163171524E+00	2,3970080140E+00	1,6163171525E+00
1,9500000000E-03	1,9977712658E+00	3,8421488188E+00		
9,7656000000E-04	1,9916523046E+00	7,9603548743E+00		
PL	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00
	Pe - Eh(r8uds)	Pe - Emer(r8uds)	Pe - Eh(r16uds)	Pe - Emer(r16uds)
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01	1,1109124644E+00	3,7563739289E+00	1,1109124644E+00	3,7563739289E+00
1,2500000000E-01	1,6509925802E+00	-1,4310090924E+00	1,6509925802E+00	-1,4310090924E+00
6,2500000000E-02	2,0502027569E+00	3,0790421995E+00	2,0502027569E+00	3,0790421995E+00
3,1250000000E-02	1,6580045588E+00	3,6679216427E-01	1,6580045588E+00	3,6679216427E-01
1,5630000000E-02	1,9829628994E+00	1,4258304484E+00	1,9829628994E+00	1,4258304484E+00
7,8100000000E-03	1,4877938188E+00	1,6950880988E+00	1,4877938188E+00	1,6950880988E+00
3,9100000000E-03	1,7472684027E+00	1,6388596694E+00	1,7472684026E+00	1,6388596695E+00
1,9500000000E-03	1,3350286021E+00	1,9151436752E+00		
PL	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00

### C. INCERTEZA DA SOLUÇÃO NUMÉRICA PARA O PROBLEMA DE KAWAGUTI

Este apêndice traz tabelas com a incerteza da solução numérica em função do tamanho de malha para cada variável e em cada caso analisado do problema de Kawaguti.

**Tabela 8. 13 Incerteza da solução numérica de  $u_c$  versus  $h$  para o problema de Kawaguti.**

$h$	$U_h - r8c ds$	$U_{mer} - r8c ds$	$U_h - r16c ds$	$U_{mer} - r16c ds$
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01	-5,529453280E-03	-5,529453280E-03	-5,529453280E-03	-5,529453280E-03
1,2500000000E-01	3,123997080E-03	1,201696107E-03	3,123997080E-03	1,201696107E-03
6,2500000000E-02	-8,580659303E-03	-6,530916300E-04	-8,580659303E-03	-6,530916300E-04
3,1250000000E-02	-8,064539653E-03	-8,810873786E-05	-8,064539653E-03	-8,810873786E-05
1,5625000000E-02	-1,070415838E-03	6,036973555E-06	-1,070415838E-03	6,036973555E-06
7,8125000000E-03	-4,223502646E-04	-2,566183140E-07	-4,223502646E-04	-2,566183140E-07
3,9062000000E-03	-1,086652334E-04	2,963577918E-09	-1,086652334E-04	2,963577918E-09
1,9531000000E-03	-2,529995470E-05	1,265096464E-10		
$h$	$U_h - r8uds$	$U_{mer} - ruds$	$U_h - r16uds$	$U_{mer} - r16uds$
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01	-7,323108701E-03	-7,323108701E-03	-2,196932610E-02	-2,196932610E-02
1,2500000000E-01	-3,112703663E-03	-3,418470633E-04	-9,338110989E-03	1,097701376E-03
6,2500000000E-02	-3,660356746E-03	-1,897691716E-04	-1,098107024E-02	-2,561391527E-03
3,1250000000E-02	-3,325755676E-03	-3,716949801E-05	-9,977267029E-03	-4,202202676E-04
1,5625000000E-02	1,515050011E-03	1,080637339E-05	4,545150033E-03	1,169061374E-03
7,8125000000E-03	-1,141961561E-03	-1,828167309E-06	-3,425884684E-03	-5,566618509E-04
3,9062000000E-03	-1,301787746E-03	-2,357291122E-07		

**Tabela 8. 14 Incerteza da solução numérica de  $u_{min}$  versus  $h$  para o problema de Kawaguti.**

$h$	$T_h - r8c ds$	$T_{mer} - r8c ds$	$U_h - r16c ds$	$U_{mer} - r16c ds$
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01	6,241250065E-03	6,241250065E-03	6,241250065E-03	6,241250065E-03
1,2500000000E-01	7,007624631E-03	1,452616564E-03	7,007624631E-03	1,452616564E-03
6,2500000000E-02	2,279146743E-03	1,264989313E-05	2,279146743E-03	1,264989313E-05
3,1250000000E-02	-6,234486465E-03	-1,162661295E-04	-6,234486465E-03	-1,162661295E-04
1,5625000000E-02	-5,904597732E-04	6,495096459E-06	-5,904597732E-04	6,495096459E-06
7,8125000000E-03	-7,772836293E-05	-2,100435118E-08	-7,772836294E-05	-2,100435118E-08
3,9062000000E-03	-2,048766881E-05	-1,462320990E-09	-2,048766881E-05	-1,462320990E-09
1,9531000000E-03	-4,010844490E-06	8,580430752E-11		
$h$	$U_h - r8uds$	$U_{mer} - ruds$	$U_h - r16uds$	$U_{mer} - r16uds$
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01	2,830447058E-03	2,830447058E-03	8,491341174E-03	8,491341174E-03
1,2500000000E-01	9,322438136E-03	2,297287032E-03	2,796731441E-02	1,581442921E-02
6,2500000000E-02	6,700546406E-03	2,594885231E-04	2,010163922E-02	7,145564209E-05
3,1250000000E-02	-2,086320392E-03	-6,959580181E-05	-6,258961176E-03	-3,629251591E-03
1,5625000000E-02	-4,771081805E-03	-1,673934928E-05	-1,431324541E-02	-3,942887542E-04
7,8125000000E-03	-1,512767023E-03	2,935738571E-08	-4,538301069E-03	3,581940160E-04
3,9062000000E-03	-7,729807082E-04	-9,945767135E-08		

Tabela 8. 15 Incerteza da solução numérica de  $u_{min}$  versus  $h$  para o problema de Kawaguti.

$h$	$U_h - r8c ds$	$U_{mer} - r8c ds$	$U_h - r16c ds$	$T_{mer} - r16c ds$
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01	-2,112853393E-02	-2,112853393E-02	-2,112853393E-02	-2,112853393E-02
1,2500000000E-01	-3,106884597E-02	-6,876456662E-03	-3,106884597E-02	-6,876456662E-03
6,2500000000E-02	-2,274943800E-02	-9,055192024E-04	-2,274943800E-02	-9,055192024E-04
3,1250000000E-02	-2,235498231E-02	-2,638423795E-04	-2,235498231E-02	-2,638423795E-04
1,5625000000E-02	-1,739858155E-02	-4,449933423E-05	-1,739858155E-02	-4,449933423E-05
7,8125000000E-03	-5,765430879E-03	-4,872573805E-07	-5,765430879E-03	-4,872573805E-07
3,9062000000E-03	-1,577590394E-03	-9,200693903E-09	-1,577590394E-03	-9,200693903E-09
1,9531000000E-03	-4,092552629E-04	-3,594752544E-10		
$h$	$U_h - r8uds$	$U_{mer} - ruds$	$U_h - r16uds$	$U_{mer} - r16uds$
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01	-9,594671898E-03	-9,594671898E-03	-2,878401570E-02	-2,878401570E-02
1,2500000000E-01	-1,209158448E-02	-2,584777735E-03	-3,627475344E-02	-1,458849706E-02
6,2500000000E-02	-1,713139328E-02	-9,144678858E-04	-5,139417983E-02	-1,058518732E-02
3,1250000000E-02	-1,864872472E-02	-2,256112970E-04	-5,594617415E-02	-3,750932086E-03
1,5625000000E-02	-2,247263297E-02	-7,082193123E-05	-6,741789891E-02	-2,934819567E-03
7,8125000000E-03	-1,657797953E-02	-1,010563069E-05	-4,973393858E-02	2,755966543E-05
3,9062000000E-03	-1,088237108E-02	-1,555678502E-06		

Tabela 8. 16 Incerteza da solução numérica de  $v_{min}$  versus  $h$  para o problema de Kawaguti.

$h$	$U_h - r8c ds$	$U_{mer} - r8c ds$	$U_h - r16c ds$	$U_{mer} - r16c ds$
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01	-2,610680920E-02	-2,610680920E-02	-2,610680920E-02	-2,610680920E-02
1,2500000000E-01	-6,006012823E-02	-1,427558025E-02	-6,006012823E-02	-1,427558025E-02
6,2500000000E-02	-2,777292218E-02	-6,374299094E-04	-2,777292218E-02	-6,374299094E-04
3,1250000000E-02	-2,333931175E-02	-2,626411763E-04	-2,333931175E-02	-2,626411763E-04
1,5625000000E-02	-2,118642419E-02	-5,964658497E-05	-2,118642419E-02	-5,964658497E-05
7,8125000000E-03	-7,681491705E-03	-1,204952391E-06	-7,681491705E-03	-1,204952391E-06
3,9062000000E-03	-1,924466254E-03	4,609175802E-08	-1,924466254E-03	4,609175802E-08
1,9531000000E-03	-5,211318084E-04	-2,852021894E-09		
$h$	$U_h - r8uds$	$U_{mer} - ruds$	$U_h - r16uds$	$U_{mer} - r16uds$
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01	-1,682043981E-02	-1,682043981E-02	-5,046131943E-02	-5,046131943E-02
1,2500000000E-01	-3,390356184E-02	-7,919587170E-03	-1,017106855E-01	-5,098668387E-02
6,2500000000E-02	-2,352616223E-02	-8,935699317E-04	-7,057848668E-02	-2,297666532E-04
3,1250000000E-02	-2,426228006E-02	-2,929358474E-04	-7,278684017E-02	-6,601431095E-03
1,5625000000E-02	-2,883596018E-02	-9,052323876E-05	-8,650788054E-02	-3,632342052E-03
7,8125000000E-03	-1,855986621E-02	-1,008946767E-05	-5,567959863E-02	4,564623246E-04
3,9062000000E-03	-1,053736374E-02	-1,325330832E-06		

Tabela 8. 17 Incerteza da solução numérica de  $v_{max}$  versus  $h$  para o problema de Kawaguti.

$h$	$U_h - r8c ds$	$U_{mer} - r8c ds$	$U_h - r16c ds$	$U_{mer} - r16c ds$
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01	1,362430907E-02	1,362430907E-02	1,362430907E-02	1,362430907E-02
1,2500000000E-01	2,803532113E-02	6,567798363E-03	2,803532113E-02	6,567798363E-03
6,2500000000E-02	2,705184911E-02	1,253160031E-03	2,705184911E-02	1,253160031E-03
3,1250000000E-02	2,605319826E-02	3,016809110E-04	2,605319826E-02	3,016809110E-04
1,5625000000E-02	1,639617486E-02	3,541541214E-05	1,639617486E-02	3,541541214E-05
7,8125000000E-03	5,548116890E-03	6,965690714E-07	5,548116890E-03	6,965690714E-07
3,9062000000E-03	1,499058511E-03	1,315366296E-09	1,499058511E-03	1,315366296E-09
1,9531000000E-03	3,777787653E-04	-2,900858706E-10		
$h$	$U_h - r8uds$	$U_{mer} - ruds$	$U_h - r16uds$	$U_{mer} - r16uds$
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01	1,115954569E-02	1,115954569E-02	3,347863708E-02	3,347863708E-02
1,2500000000E-01	9,727577464E-03	1,850050944E-03	2,918273239E-02	8,295609235E-03
6,2500000000E-02	1,490862464E-02	8,156190194E-04	4,472587392E-02	1,029472543E-02
3,1250000000E-02	1,911145766E-02	2,450432452E-04	5,733437297E-02	4,888350944E-03
1,5625000000E-02	2,130577420E-02	6,500236011E-05	6,391732261E-02	2,262322751E-03
7,8125000000E-03	1,623527355E-02	1,016611500E-05	4,870582065E-02	1,334106893E-04
3,9062000000E-03	1,100801836E-02	1,612531558E-06		



Tabela 8. 18 Incerteza da solução numérica de  $\psi_{min}$  versus  $h$  para o problema de Shih.

h	Uh - r8cds	Umer - r8cds	Uh - r16cds	Umer - r16cds
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01	-6,360000000E-03	-6,360000000E-03	-6,356837755E-03	-6,356837755E-03
1,2500000000E-01	-9,700000000E-03	-2,160000000E-03	-9,701268254E-03	-2,163215684E-03
6,2500000000E-02	-9,810000000E-03	-4,660000000E-04	-9,806704725E-03	-4,655667461E-04
3,1250000000E-02	-6,710000000E-03	-6,270000000E-05	-6,706914511E-03	-6,266152249E-05
1,5625000000E-02	-4,240000000E-03	-9,460000000E-06	-4,239959974E-03	-9,458205351E-06
7,8125000000E-03	-1,450000000E-03	-1,902799825E-07	-1,445894187E-03	-1,902799825E-07
3,9062000000E-03	-3,900000000E-04	1,304137670E-10	-3,895906781E-04	1,304137669E-10
1,9531000000E-03	-9,860000000E-05	4,130218912E-11		
h	Uh - r8uds	Umer - ruds	Uh - r16uds	Umer - r16uds
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01	-4,566124391E-03	-4,566124391E-03	-1,369837317E-02	-1,369837317E-02
1,2500000000E-01	-6,777058066E-03	-1,502807191E-03	-2,033117420E-02	-8,987991740E-03
6,2500000000E-02	-6,514254283E-03	-3,025790870E-04	-1,954276285E-02	-2,288258609E-03
3,1250000000E-02	-5,913733072E-03	-6,653055156E-05	-1,774119922E-02	-9,904130029E-04
1,5625000000E-02	-5,222322005E-03	-1,445583111E-05	-1,566696602E-02	-3,980705271E-04
7,8125000000E-03	-3,837912583E-03	-2,369141404E-06	-1,151373775E-02	-5,357080940E-05
3,9062000000E-03	-2,516463496E-03	-3,593531820E-07		

## D. ORDEM APARENTE PARA O PROBLEMA DE KAWAGUTI

Este apêndice contém as tabelas com as ordens aparentes calculadas de todas as variáveis em todos os casos para o problema Kawaguti, nestas PL representa a ordem verdadeira teórica.

Tabela 8. 19 Ordem aparente de  $u_c$  para o problema de Kawaguti.

h	Pu - Eh(r8cds)	Pu - Emer(r8cds)	Pu - Eh(r16cds)	Pu - Emer(r16cds)
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01				
1,2500000000E-01	8,2374373730E-01	2,0206473895E-01	8,2374373730E-01	2,0206473895E-01
6,2500000000E-02	-1,4576953978E+00	-1,1202852204E+00	-1,4576953978E+00	-1,1202852204E+00
3,1250000000E-02	8,9496320312E-02	8,8992841333E-01	8,9496320311E-02	8,8992841333E-01
1,5630000000E-02	2,9134208149E+00	1,8673877138E+00	2,9134208149E+00	1,8673877138E+00
7,8100000000E-03	1,3416595078E+00	2,5561294418E+00	1,3416595078E+00	2,5561294418E+00
3,9100000000E-03	1,9585133530E+00	4,4360584161E+00	1,9585133530E+00	4,4360584162E+00
1,9500000000E-03	2,1026837280E+00	2,5500206884E+00		
PL	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00
	Pu - Eh(r8uds)	Pu - Emer(r8uds)	Pu - Eh(r16uds)	Pu - Emer(r16uds)
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01				
1,2500000000E-01	1,2342879756E+00	2,4210332739E+00	1,2342879756E+00	3,3229330821E+00
6,2500000000E-02	-2,3381602820E-01	-1,1508946109E+00	-2,3381602820E-01	-2,2224421668E+00
3,1250000000E-02	1,3830207716E-01	3,5205453350E-01	1,3830207716E-01	1,6077101450E+00
1,5630000000E-02	1,1343167692E+00	-2,1776323296E-01	1,1343167692E+00	-2,4761330202E+00
7,8100000000E-03	4,0785132691E-01	5,6341242366E-01	4,0785132691E-01	7,0477550377E-02
3,9100000000E-03	-1,8897665916E-01	9,5517862389E-01		
PL	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00

Tabela 8. 20 Ordem aparente de  $v_c$  para o problema de Kawaguti.

h	Pu- Eh(r8cds)	Pu - Emer(r8cds)	Pu- Eh(r16cds)	Pu - Emer(r16cds)
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01				
1,2500000000E-01	-1,6709048133E-01	1,0318108050E-01	-1,6709048133E-01	1,0318108050E-01
6,2500000000E-02	1,6204316822E+00	4,8433849295E+00	1,6204316822E+00	4,8433849295E+00
3,1250000000E-02	-1,4517769146E+00	-5,2002337730E+00	-1,4517769146E+00	-5,2002337730E+00
1,5630000000E-02	3,4003600500E+00	2,1619361127E+00	3,4003600500E+00	2,1619361127E+00
7,8100000000E-03	2,9253257385E+00	6,2725189190E+00	2,9253257385E+00	6,2725189190E+00
3,9100000000E-03	1,9236497717E+00	1,8443222312E+00	1,9236497717E+00	1,8443222312E+00
1,9500000000E-03	2,3527779010E+00	2,0910661421E+00		
PL	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00
Pu- Eh(r8uds)	Pu - Emer(r8uds)	Pu- Eh(r16uds)	Pu - Emer(r16uds)	
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01				
1,2500000000E-01	-1,7196773791E+00	-1,6989011850E+00	-1,7196773791E+00	-1,8971771410E+00
6,2500000000E-02	4,7642857106E-01	1,1461884878E+00	4,7642857106E-01	6,7899778405E+00
3,1250000000E-02	1,6833180204E+00	-1,0140145553E-01	1,6833180204E+00	-6,6664803319E+00
1,5630000000E-02	-1,1933556962E+00	5,5756835471E-02	-1,1933556962E+00	2,2023476044E+00
7,8100000000E-03	1,6571266037E+00	7,1553042296E+00	1,6571266037E+00	-8,6148867293E-01
3,9100000000E-03	9,6866761778E-01	-3,7602897119E+00		
PL	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00

Tabela 8. 21 Ordem aparente de  $u_{min}$  para o problema de Kawaguti.

h	Pu- Eh(r8cds)	Pu - Emer(r8cds)	Pu- Eh(r16cds)	Pu - Emer(r16cds)
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01				
1,2500000000E-01	-5,5627598950E-01	-3,8054459689E-01	-5,5627598950E-01	-3,8054459689E-01
6,2500000000E-02	4,4963774921E-01	9,2484821637E-01	4,4963774921E-01	9,2484821637E-01
3,1250000000E-02	2,5234501103E-02	-2,2093107978E-01	2,5234501103E-02	-2,2093107978E-01
1,5630000000E-02	3,6162671132E-01	5,6782065819E-01	3,6162671132E-01	5,6782065819E-01
7,8100000000E-03	1,5934693561E+00	4,5129559034E+00	1,5934693561E+00	4,5129559034E+00
3,9100000000E-03	1,8696712328E+00	3,7267287365E+00	1,8696712328E+00	3,7267287365E+00
1,9500000000E-03	1,9466497976E+00	2,677783045E+00		
PL	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00
Pu- Eh(r8uds)	Pu - Emer(r8uds)	Pu- Eh(r16uds)	Pu - Emer(r16uds)	
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01				
1,2500000000E-01	-3,3369792996E-01	-1,0780675591E-01	-3,3369792996E-01	-1,9563383019E-02
6,2500000000E-02	-5,0263918141E-01	-5,0096418306E-01	-5,0263918141E-01	-5,3721553869E-01
3,1250000000E-02	-1,2243448681E-01	1,9093197006E-02	-1,2243448681E-01	4,9672575285E-01
1,5630000000E-02	-2,6909218964E-01	-3,2842878067E-01	-2,6909218964E-01	-6,4602266673E-01
7,8100000000E-03	4,3890097918E-01	8,0903682214E-01	4,3890097918E-01	5,7345696244E+00
3,9100000000E-03	6,0726404296E-01	6,9953059744E-01		
PL	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00

Tabela 8. 22 Ordem aparente de  $v_{min}$  para o problema de Kawaguti.

h	Pu- Eh(r8cds)	Pu - Emer(r8cds)	Pu- Eh(r16cds)	Pu - Emer(r16cds)
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01				
1,2500000000E-01	-1,2019814143E+00	-1,1291232460E+00	-1,2019814143E+00	-1,1291232460E+00
6,2500000000E-02	1,1127285739E+00	2,4851388621E+00	1,1127285739E+00	2,4851388621E+00
3,1250000000E-02	2,5091696305E-01	-7,2082640220E-01	2,5091696305E-01	-7,2082640220E-01
1,5630000000E-02	1,3962190591E-01	1,3858167193E-01	1,3962190591E-01	1,3858167193E-01
7,8100000000E-03	1,4636817053E+00	3,6293914889E+00	1,4636817053E+00	3,6293914889E+00
3,9100000000E-03	1,9968912525E+00	2,7082735273E+00	1,9968912525E+00	2,7082735273E+00
1,9500000000E-03	1,8847381530E+00	2,0144518336E+00		
PL	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00
	Pu- Eh(r8uds)	Pu - Emer(r8uds)	Pu- Eh(r16uds)	Pu - Emer(r16uds)
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01				
1,2500000000E-01	-1,0112214193E+00	-9,1328170433E-01	-1,0112214193E+00	-1,0149425800E+00
6,2500000000E-02	5,2717085209E-01	1,1477726823E+00	5,2717085209E-01	6,7938072691E+00
3,1250000000E-02	-4,4449138743E-02	-3,9100411047E-01	-4,4449138743E-02	-5,8445374785E+00
1,5630000000E-02	-2,4915392750E-01	-3,0577535681E-01	-2,4915392750E-01	-1,3812125154E-01
7,8100000000E-03	6,3568275130E-01	1,1654381441E+00	6,3568275130E-01	1,9923323720E+00
3,9100000000E-03	8,1665725383E-01	9,2840847594E-01		
PL	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00

Tabela 8. 23 Ordem aparente de  $v_{max}$  para o problema de Kawaguti

h	Pu- Eh(r8cds)	Pu - Emer(r8cds)	Pu- Eh(r16cds)	Pu - Emer(r16cds)
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01				
1,2500000000E-01	-1,0410625268E+00	-9,4729867257E-01	-1,0410625268E+00	-9,4729867257E-01
6,2500000000E-02	5,1518383604E-02	3,8983917451E-01	5,1518383604E-02	3,8983917451E-01
3,1250000000E-02	5,4266724941E-02	5,4475344223E-02	5,4266724941E-02	5,4475344223E-02
1,5630000000E-02	6,6810120581E-01	1,0905741754E+00	6,6810120581E-01	1,0905741754E+00
7,8100000000E-03	1,5632891924E+00	3,6679671046E+00	1,5632891924E+00	3,6679671046E+00
3,9100000000E-03	1,8879066244E+00	7,0485278347E+00	1,8879066244E+00	7,0485278343E+00
1,9500000000E-03	1,9884431795E+00	1,8091267732E-01		
PL	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00
	Pu- Eh(r8uds)	Pu - Emer(r8uds)	Pu- Eh(r16uds)	Pu - Emer(r16uds)
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01				
1,2500000000E-01	1,9812582693E-01	5,9264139255E-01	1,9812582693E-01	1,0128209539E+00
6,2500000000E-02	-6,1599470219E-01	-8,1840232467E-01	-6,1599470219E-01	-1,3114855099E+00
3,1250000000E-02	-3,5829064762E-01	-2,6514096042E-01	-3,5829064762E-01	7,4485584950E-02
1,5630000000E-02	-1,5680665791E-01	-8,5527627331E-02	-1,5680665791E-01	1,1154309857E-01
7,8100000000E-03	3,9211278385E-01	6,7672364428E-01	3,9211278385E-01	3,0838585942E+00
3,9100000000E-03	5,6056655983E-01	6,5635703532E-01		
PL	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00

Tabela 8. 24 Ordem aparente de  $\psi_{min}$  para o problema de Kawaguti.

h	Pu- Eh(r8cds)	Pu - Emer(r8cds)	Pu- Eh(r16cds)	Pu - Emer(r16cds)
5.0000000000E-01				
2.5000000000E-01				
1.2500000000E-01	-6,0744651487E-01	-4,4594354086E-01	-6,0986409710E-01	-4,4486824969E-01
6.2500000000E-02	-1,4797001928E-02	2,1545970717E-01	-1,5595075404E-02	2,1611759673E-01
3,1250000000E-02	5,7031572476E-01	9,3376630160E-01	5,4811922659E-01	8,9333628639E-01
1,5630000000E-02	6,0698880705E-01	6,4154602909E-01	6,6159856759E-01	7,2794145319E-01
7,8100000000E-03	1,7004397181E+00	3,3219280949E+00	1,5520886686E+00	3,6353707623E+00
3,9100000000E-03	9,9998153373E-01		1,8918959771E+00	8,5106547462E+00
1,9500000000E-03				
PL	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00	2,0000000000E+00
	Pu- Eh(r8uds)	Pu - Emer(r8uds)	Pu- Eh(r16uds)	Pu - Emer(r16uds)
5,0000000000E-01				
2,5000000000E-01				
1,2500000000E-01	-5,6968897021E-01	-3,9668976261E-01	-5,6968897021E-01	-3,9206613570E-01
6,2500000000E-02	5,7059096217E-02	3,1227574189E-01	5,7059096217E-02	9,7374869032E-01
3,1250000000E-02	1,3953091014E-01	1,8522337871E-01	1,3953091014E-01	2,0814794784E-01
1,5630000000E-02	1,7937770998E-01	2,0236543814E-01	1,7937770998E-01	3,1500619624E-01
7,8100000000E-03	4,4436956474E-01	6,0921534126E-01	4,4436956474E-01	1,8935050601E+00
3,9100000000E-03	6,0891293678E-01	7,2087663125E-01		
PL	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00	1,0000000000E+00