

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

IZABEL CECILIA FERREIRA DE SOUZA VICENTIN

**TRANSFERÊNCIA DE CALOR TEÓRICA E EXPERIMENTAL EM MOTOR-  
FOGUETE A PROPELENTE SÓLIDO**

CURITIBA

2016

IZABEL CECILIA FERREIRA DE SOUZA VICENTIN

**TRANSFERÊNCIA DE CALOR TEÓRICA E EXPERIMENTAL EM MOTOR-  
FOGUETE A PROPELENTE SÓLIDO**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, no Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Setor de Tecnologia, da Universidade Federal do Paraná, na área de concentração Fenômenos de Transporte e Mecânica dos Sólidos.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Henrique Marchi

CURITIBA

2016

---

V633t

Vicentin, Izabel Cecilia Ferreira de Souza  
Transferência de calor teórica e experimental em motor-foguete a  
propelente sólido / Izabel Cecilia Ferreira de Souza Vicentin. – Curitiba,  
2016.

120 f ; il. color : 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia,  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2016.

Orientador: Carlos Henrique Marchi  
Bibliografia: p. 93-97.

1. Câmaras de combustão. 2. Fluxo de calor. 3. Calor – Condução. 4.  
Calor – Transmissão. I. Universidade Federal do Paraná. II. Marchi, Carlos  
Henrique. III. Título.

CDD: 621.4022

---



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
Setor TECNOLOGIA  
Programa de Pós Graduação em ENGENHARIA MECÂNICA  
Código CAPES: 40001016040P5

### TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA MECÂNICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **IZABEL CECILIA FERREIRA DE SOUZA VICENTIN**, intitulada: "**TRANSFERÊNCIA DE CALOR TEÓRICA E EXPERIMENTAL EM MOTOR-FOGUETE A PROPELENTE SÓLIDO**", após terem inquirido a aluna e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO.

Curitiba, 27 de Setembro de 2016.

CARLOS HENRIQUE MARCHI  
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

LUCIANO KIYOSHI ARAKI  
Avaliador Interno (UFPR)

ADMILSON TEIXEIRA FRANCO  
Avaliador Externo (UTFPR)

## AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. Carlos Henrique Marchi pelo compartilhamento de conhecimento na orientação deste trabalho e, também, pela paciência e confiança a mim dispensadas.

Agradeço ao programa de pós-graduação em engenharia mecânica (PG-MEC) da Universidade Federal do Paraná (UFPR) por ter aceito a minha entrada no programa, pela disponibilidade de espaço físico e equipamentos.

Agradeço ao apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de mestrado.

Gostaria de agradecer aos membros da banca examinadora, Prof. Dr. Admilson Teixeira Franco e ao Prof. Dr. Luciano Kiyoshi Araki pelo tempo dispensado à leitura deste trabalho, suas críticas e sugestões, tão importantes para a formação do mesmo.

Agradeço também aos membros do grupo de foguetes Carl Sagan da Universidade Federal do Paraná, que projetaram os motores e realizaram os experimentos cujos resultados foram usados nesta dissertação.

Meus sinceros agradecimentos a todos os professores, em especial aos amigos do Laboratório de Análises Numéricas (LENA), que com seu apoio fizeram a caminhada mais produtiva.

Agradeço ao meu marido, ao meu filho e à minha sogra pela paciência e amor com que me trataram durante desenvolvimento deste trabalho, sem os quais nenhuma parte do mesmo poderia ser realizada.

E acima de tudo, agradeço a Deus pela oportunidade de vivenciar esta experiência, e por cuidar de cada detalhe.

*“Os céus manifestam a glória de Deus e o firmamento anuncia a obra das suas mãos”*

*Salmo 19:1*

## RESUMO

A determinação precisa do fluxo de calor é uma importante tarefa tanto para o projeto quanto para o cálculo do desempenho de motores-foguete. No presente trabalho, o fluxo de calor na câmara de combustão de motores-foguete com geometria cilíndrica será calculado utilizando-se o método inverso. Nesse tipo de abordagem, o fluxo de calor variando no tempo é determinado a partir de dados experimentais de temperatura tomadas na parede externa do motor-foguete. O fenômeno físico foi modelado pela equação da condução de calor em coordenadas cilíndricas unidimensional em regime transiente. As propriedades físicas do material da câmara são consideradas constantes. O problema inverso é resolvido pelo método dos mínimos quadrados modificado pela adição do termo de regularização de Tikhonov de ordem zero. Os coeficientes de sensibilidade foram obtidos pelo teorema de Duhamel, portanto a metodologia se aplica a problemas lineares. Mediante o uso do parâmetro de regularização, foi possível gerar bons resultados mesmo com dados contendo erros experimentais consideráveis. Os resultados obtidos com tal abordagem concordam satisfatoriamente com valores encontrados na literatura. Uma vez conhecidos o fluxo de calor e a temperatura da parede no lado interno, a temperatura de câmara foi calculada através de um processo iterativo. Os fluxos de calor teóricos de convecção e radiação são calculados por métodos disponíveis na literatura. A temperatura da câmara foi ajustada até que a soma dos fluxos de calor teóricos coincidissem com o fluxo obtido pelo método inverso. A temperatura na câmara calculada pelo procedimento iterativo forneceu erros de 4,66 e 13,69%. Pode-se verificar boa concordância entre a temperatura na câmara calculada e a temperatura experimental.

Palavras-chave: Câmara de combustão. Regularização de Thikonov. Fluxo de calor. Problema inverso de condução de calor. Temperatura na câmara.

## ABSTRACT

Accurate determination of heat flux is an important task not only in designing but also in calculation of the performance of rocket engines. In this work, the heat flux in combustion chamber is calculated using inverse method. In this approach, the heat flux varying in time is determined from experimental data measured at the outer side wall of the rocket engine. The physical phenomenon was modeled by the transient one dimensional heat equation in cylindrical coordinates. The properties of the material of the chamber were considered constant. The inverse problem is solved by least squares modified by the addition of Tikhonov regularization term of zero order. The sensitivity coefficients were obtained by Duhamel's theorem, so the methodology is applicable to linear problems. By using the regularization parameter, it was possible to generate good results even using data with considerable experimental errors. The results obtained with this approach agree well with literature data. Once known the heat flux and the inside wall temperature, the chamber temperature was calculated using an iterative process. The theoretical radiation and convection heat flux are calculated by methods available in the literature. The temperature chamber was adjusted until the sum of the theoretical heat fluxes coincide with the heat flux obtained by the inverse method. The temperature calculated in the chamber presented errors of 4,66 and 13,69%. It can be verified good agreement between the calculated chamber temperature and experimental temperature.

Keywords: Combustion chamber. Thikonov regularization. Heat flux. Inverse Heat Conduction Problem. Chamber temperature.

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A_b$	-	Área transversal de queima do grão-propelente [m <sup>2</sup> ]
$c$	-	Velocidade sônica local [m/s]
$C^*$	-	Velocidade característica [m/s]
$c_p$	-	Calor específico à pressão constante [J/(kg K)]
$D_t$	-	Diâmetro da tubeira [m]
$E(\cdot)$	-	Operador valor esperado
$F(\varepsilon)$	-	Função gaussiana
$f(r)$	-	Função que prescreve a temperatura no instante inicial [°C]
$h$	-	Coefficiente de transferência de calor por convecção [W/(m <sup>2</sup> K)]
$k$	-	Condutividade térmica do material [W/(mK)]
$L$	-	Espessura da parede da câmara de combustão [m]
$L_e$	-	Comprimento equivalente da câmara de combustão [m]
$L_{eq}$	-	Comprimento médio de feixe [m]
$L_2$	-	Norma L2
$M$	-	Quantidade total de medições [adimensional]
$M$	-	Número de Mach [adimensional]
$MO$	-	Massa molecular da espécie química [kg/kmol]
$n$	-	Número total de espécies químicas
$N$	-	Número de volumes de controle
$Nu$	-	Número de Nusselt [adimensional]
$\dot{m}$	-	Fluxo de massa [kg/s]
$\dot{m}_g$	-	Taxa na qual os gases são gerados durante a queima de propelente [kg/s]
$O$	-	Fração molar da espécie química [adimensional]
$P$	-	Pressão [Pa]
$Pr$	-	Número de Prandtl [adimensional]
$P_{H_2O}$	-	Pressão parcial da água [Pa]
$P_{CO_2}$	-	Pressão parcial do dióxido de carbono [Pa]
$q''$	-	Fluxo de calor, dos gases quentes para a parede [W/m <sup>2</sup> ]
$q''(t)$	-	Fluxo de calor, dos gases quentes para a parede [W/m <sup>2</sup> ]
$q''_0$	-	Fluxo de calor inicial [W/m <sup>2</sup> ]

$r$	-	Raio [m]
$r$	-	Taxa de queima [mm/s]
$R$	-	Constante de gás perfeito [J/(kg K)]
$r_c$	-	Raio de curvatura [m]
$r_g$	-	Raio da garganta [m]
$R_i$	-	Raio interno da câmara de combustão [m]
$R_o$	-	Raio externo da câmara de combustão [m]
$Re$	-	Numero de Reynolds [adimensional]
$rec$	-	Fator de recuperação [adimensional]
$S$	-	Área transversal do escoamento [m <sup>2</sup> ]
$S_\phi$	-	Termo fonte
$S(\cdot)$	-	Soma dos quadrados
$T$	-	Temperatura [°C]
$t$	-	Tempo [s]
$t_f$	-	Instante final [s]
$u$	-	Velocidade axial [m/s]
$\vec{V}$	-	Vetor velocidade [m/s]
$X$	-	Coefficiente de Sensitividade [(°C m <sup>2</sup> )/W]
$Y$	-	Temperatura medida na superfície em cada instante de tempo [°C]
$Z$	-	Fração molar [adimensional]

## Letras Gregas:

- $\alpha$  - Parâmetro de regularização [adimensional]
- $\alpha$  - Difusividade térmica [ $\text{m}^2/\text{s}$ ]
- $\delta$  - Covariância
- $\varepsilon$  - Emissividade da superfície [adimensional]
- $\xi$  - Erro experimental [ $^{\circ}\text{C}$ ]
- $\phi$  - Variável genérica
- $\theta$  - Formulação do modelo [adimensional]
- $\Gamma$  - Coeficiente de transporte
- $\gamma$  - Razão entre calores específicos do gás: calor específico à pressão constante por calor específico a volume constante [adimensional]
- $\mu$  - Viscosidade dinâmica [ $\text{Pa}\cdot\text{s}$ ]
- $\rho$  - Massa específica [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]
- $\delta$  - Constante de Stefan-Boltzmann,  $5,67 \cdot 10^{-8}$  [ $\text{W}/\text{m}^2\text{K}^4$ ]
- $\vec{\nabla}$  - Operador nabla

## Subscritos

- aw* - Parede adiabática
- CO<sub>2</sub>* - Relativo ao CO<sub>2</sub>
- conv* - Relativo a convecção
- E* - Propriedade do volume à direita (volume leste)
- e* - Propriedade na face direita (face leste)
- hw* - Parede em contato com os gases quentes da combustão
- H<sub>2</sub>O* - Relativo ao H<sub>2</sub>O
- Inicial* - Propriedade no instante inicial
- i* - Índice [adimensional]
- j* - Índice [adimensional]
- k* - Índice [adimensional]
- n* - Índice [adimensional]
- 0* - Propriedades de estagnação
- P* - Propriedade no volume atual (Volume *P*)

- p* - Propelente
- rad* - Relativo à radiação
- t*- Propriedade relativa ao termopar
- W*- Propriedade no volume à esquerda (volume oeste)
- w* - Propriedade na face esquerda (face oeste)

### **Superscritos**

- <sup>^</sup> - Indica valores estimados
- T* - Indica transposição
- <sup>\*</sup> - Indica propriedade na seção crítica

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>5</b>
1.1	MOTIVAÇÃO .....	7
1.2	PROBLEMA INVERSO (PI) .....	10
1.3	CLASSIFICAÇÃO DE MÉTODOS .....	13
1.4	RESUMO DOS CAPÍTULOS .....	15
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>17</b>
2.1	INTRODUÇÃO.....	17
2.2	MÉTODOS ANALÍTICOS .....	17
2.3	MÉTODOS NUMÉRICOS .....	18
2.4	MÉTODOS HÍBRIDOS E OUTROS .....	20
<b>3</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	<b>22</b>
3.1	DESCRIÇÃO DO PROBLEMA E HIPÓTESES .....	22
3.1.1	Discretização do Modelo Matemático.....	23
3.2	PROBLEMA INVERSO DE CONDUÇÃO DE CALOR PARA ESTIMATIVA DE FLUXO DE CALOR.....	27
3.2.1	Formulação do problema direto .....	27
3.2.2	Formulação do problema inverso .....	29
3.2.3	Utilização do método dos mínimos quadrados.....	30
3.2.4	Determinação dos coeficientes de sensibilidade .....	34
3.2.5	Hipóteses de erros .....	36
3.2.6	Análise da estabilidade .....	37
3.2.7	Determinação do parâmetro de regularização .....	40
3.2.8	Fonte de erros .....	43
3.2.9	Efeitos da quantidade de volumes e avanços no tempo .....	47
3.3	TEMPERATURA DE CÂMARA ( $T_0$ ) .....	55
3.3.1	Fluxos de calor teóricos.....	56
3.3.2	Outro modelo para o fluxo de calor radiativo .....	59
3.3.3	Cálculo das propriedades do gás .....	62
3.3.4	Algoritmo .....	63
<b>4</b>	<b>COMPARAÇÃO COM A LITERATURA</b> .....	<b>66</b>
4.1	INTRODUÇÃO.....	66

4.2	COMPARAÇÃO .....	66
<b>5</b>	<b>APARATO EXPERIMENTAL .....</b>	<b>74</b>
5.1	ENSAIOS REALIZADOS .....	75
5.2	POSICIONAMENTO DOS TERMOPARES .....	77
<b>6</b>	<b>RESULTADOS.....</b>	<b>81</b>
6.1	INTRODUÇÃO.....	81
6.2	ENSAIOS DE 04/06/2015.....	81
6.3	ENSAIOS DE 19/02/2016 E 16/07/2016.....	86
6.4	TEMPERATURA DE CÂMARA .....	88
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>91</b>
7.1	PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES.....	92
7.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	92
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>93</b>
	<b>APÊNDICE A – DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES .....</b>	<b>98</b>
	<b>APÊNDICE B – GAUSS SEIDEL .....</b>	<b>105</b>
	<b>APÊNDICE C – FORMULAÇÃOEM COORDENADAS RETANGULARES</b> <b>.....</b>	<b>106</b>
	<b>APÊNDICE D – ENSAIOS DE 11/07/2015 .....</b>	<b>109</b>
	<b>ANEXO A – CONDUTIVIDADE DAS LIGAS BINÁRIAS FE-NI E AL-MG</b> <b>.....</b>	<b>117</b>
	<b>ANEXO B – COEFICIENTE USADOS PARA DETERMINAÇÃO DAS</b> <b>PROPRIEDADES TERMO FÍSICAS DAS ESPÉCIES QUÍMICAS. ....</b>	<b>119</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Em 1 de setembro de 2014 no centro de lançamento de Alcântara, no Maranhão, foi lançado com sucesso o primeiro foguete com motor a propelente líquido brasileiro (movido à oxigênio líquido e etanol), o veículo sonda VS-30 V13. (AEB, 2015). Esta conquista coloca o Brasil na lista dos países que detém tecnologia própria para lançar e operar veículos espaciais a propelente líquido (AEB, 2015). A importância deste acontecimento reside no fato de que motores a propelente líquido permitem o controle do impulso total (capacidade de variar o empuxo) e conseqüentemente, a realização de manobras especiais e/ou inserção em órbita com maior precisão, características essenciais para atividades envolvendo veículos lançadores de satélites. Além disso, motores a propelente líquido possuem maior impulso específico, o que permite maior capacidade de carga. (SUTTON, 1992, p. 523). Dessa forma, o desenvolvimento e produção de motores a propelente líquido no Brasil são altamente estratégicos. Entretanto, os primeiros foguetes foram feitos à propelente sólido. O primeiro combustível sólido para foguetes foi a pólvora, feita por chineses e usada, a princípio, para fogos de artifício e mais tarde nas guerras do século XII. (TURNER, 2006, p.2).

Os foguetes foram introduzidos na Europa pelos árabes no século XIII, sendo usados em vários conflitos europeus logo após a guerra dos cem anos (1337-1453). Em 1804, o coronel inglês William Congreve desenvolveu com base nas experiências das guerras anglo-Mysore (1766 - 1769), um foguete utilizando pólvora negra, o foguete Congreve. O mesmo foi utilizado durante as guerras napoleônicas e na guerra anglo-americana de 1812 com algum sucesso (TURNER, 2006, p.2). Durante o fim do século XIX, devido ao advento das armas de fogo, o interesse militar por foguetes diminuiu (TURNER, 2006, p.2).

Apenas no final do século XIX e início do século XX cientistas apontaram a utilização de propulsores visando conquistas aeroespaciais, dentre os quais se destacam o russo Konstantin Eduardovich Tsiolkovsky, o estadunidense Robert Hutchings Goddard (1882-1945) e mais tarde, os russos Sergei Korolev (1906-1966), o alemães Hermann Oberth (1894-1992), e Wernher von Braun (1912-1977), (TURNER, 2006, p.4). Wernher von Braun, aos 22 anos de idade recebeu seu doutoramento em física e dois anos mais tarde participaria do programa de desenvolvimento de foguetes militares na Alemanha (WARD, 2005). Durante a guerra ele liderou o desenvolvimento do primeiro míssil movido à combustível líquido, o Aggregat 4 (A4) cujo combustível era uma mistura de álcool etílico e oxigênio líquido, que depois de suas primeiras missões sobre Londres ficou conhecido como V-2, Arma da

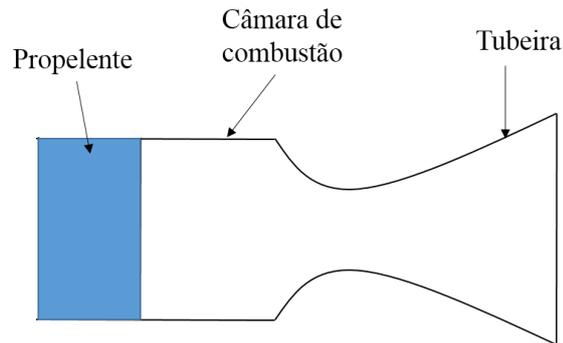
Vingança 2. Ao final da segunda guerra, quando as forças aliadas subjugarão a Alemanha, von Braun e sua equipe renderem-se aos Estados Unidos da América, onde puderam dar continuidade às suas pesquisas. No período pós-guerra, a tecnologia utilizada nos foguetes desenvolvidos durante a segunda guerra mundial foi utilizada como base para os foguetes projetados para o programa espacial dos Estados Unidos e União Soviética.

Em 1946, quando pisa em solo americano, von Braun, pela primeira vez, ouve falar do trabalho pioneiro de Robert Goddard. Nesta época Goddard já estudava a possibilidade de utilizar foguetes para sondar a atmosfera e o espaço, além de chegar à conclusão de que, para um foguete alcançar a altitude que planejara, o mesmo deveria ser impulsionado por combustível líquido. Inclusive, o primeiro foguete com combustível líquido de que se tem conhecimento foi feito e lançado por Goddard, em 1926. No início do século XX, um professor russo, Konstantin Tsiolkovsky, de forma independente, chegava às mesmas conclusões feitas por Goddard. (TURNER, 2006, p.3).

Na exploração espacial moderna, os foguetes a propelente sólido são frequentemente utilizados em aplicações militares, tais como mísseis, pois podem permanecer armazenados por longo período de tempo e serem lançados com pouca preparação. Foguetes a combustível sólido são utilizados ainda como veículos lançadores de pequeno porte ou como foguetes “reforçadores”, ou *boosters*. A importância dos motores a propelente sólido se deve à sua constituição simples, confiabilidade e principalmente, baixo custo de fabricação. Outras vantagens são o projeto, desenvolvimento e construção simples e rápidos, poucos subsistemas e facilidade no carregamento e realização de ensaios, entre outras.

Em um motor foguete a propelente sólido, a carga de material a ser queimado é contida na câmara de combustão. (SUTTON, 1992, p. 7). Suas partes principais são câmara de combustão e tubeira, como mostra a FIGURA 1.1. A câmara de combustão é o local onde o propelente é armazenado na forma de bloco. Nela, a energia química é transformada em energia térmica durante a queima do propelente. A tubeira é o componente cuja função é transformar energia térmica liberada pela combustão em energia cinética.

FIGURA 1.1 – DESENHO ESQUEMÁTICO DO MOTOR-FOGUETE E SUAS PARTES PRINCIPAIS



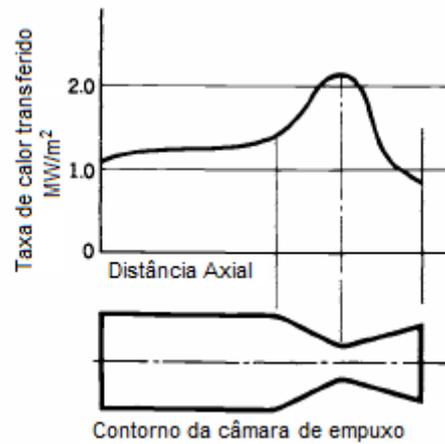
FONTE: A AUTORA (2016)

Neste trabalho, os motores-foguete que serão utilizados no estudo de caso, foram projetados para trabalhar com propelente sólido. Como mencionado anteriormente, motores a propelente sólido são mais simples, bem como a preparação para os testes estáticos. Apesar disso, as análises resultantes para os motores a propelente sólido podem ser válidas para motores a propelente líquido.

## 1.1 MOTIVAÇÃO

Na câmara de empuxo, o calor é transferido a todas as partes expostas aos gases quentes provenientes da combustão, ou seja, câmara de combustão e tubeira. A taxa na qual o calor é transferido varia dentro do motor foguete e é geralmente maior imediatamente antes da garganta e menor na saída da tubeira, conforme mostra a FIGURA 1.2. Sabe-se que apenas de 0,5 a 5% da energia total gerada é transferida na forma de calor para a parede da câmara. (SUTTON, 1992, p. 102). Apesar disso, a quantidade de energia transferida para as paredes pode ser suficiente para causar falha estrutural. Para um motor foguete típico, com empuxo de 44,82 kN, isto pode representar de 0,75 a 3,5MW de energia sendo transferida para a parede. Deste montante, o calor transmitido às paredes por condução é desprezível. De outro modo, a maior parte do calor é transferida por convecção, sendo uma parte (geralmente entre 5 a 35%) atribuída à radiação. (SUTTON, 1992, p. 105).

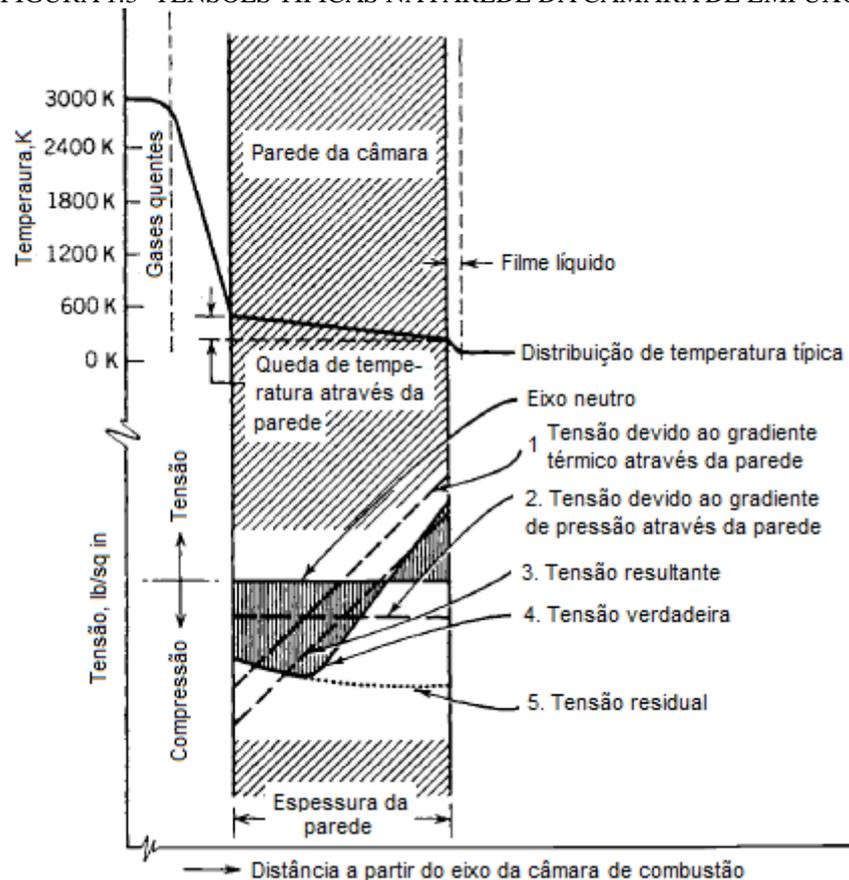
FIGURA 1.2 - DISTRIBUIÇÃO TÍPICA DA TAXA DE CALOR TRANSFERIDO EM CÂMRARAS DE EMPUXO EM MOTORES A PROPELENTE SÓLIDO E LÍQUIDO.



FONTE: Adaptado de SUTTON (1992).

A maioria dos materiais utilizados na construção de câmaras de empuxo se tornam menos resistentes com o aumento da temperatura. Caso as paredes da mesma se aqueçam muito, há possibilidade de que material do qual é feita não resista às tensões ou cargas impostas pelo aumento de pressão durante a queima de propelente, causando falha. A variação de temperatura na parte interna e externa da parede de câmara de combustão fica tipicamente entre 50 e 550K (SUTTON, 1992, p. 296) durante o início da queima do propelente. Esse gradiente térmico causa a perda da resistência mecânica severa e deformação local (SUTTON, 1992, p. 297). A FIGURA 1.3 mostra a distribuição típica da distribuição de tensões causada pela pressão e pelo gradiente térmico.

FIGURA 1.3- TENSÕES TÍPICAS NA PAREDE DA CÂMARA DE EMPUXO



FONTE: Adaptado de SUTTON (1992).

Com o objetivo de reduzir a temperatura a valores aceitáveis e garantir a integridade do propulsor, a maioria dos foguetes apresenta algum sistema para a sua proteção térmica. As paredes da câmara de combustão em propulsor a propelente sólido não podem ser resfriadas de forma regenerativa como em motores a propelente líquido. Neste último, a temperatura dos gases na combustão pode ser muito maior do que o ponto de fusão de muitos materiais (TURNER, 2006, p.107). No caso de motores a propelente sólido, a proteção térmica pode ser realizada com uma camada de material isolante colocada entre o grão propelente e as paredes do motor. Para casos em que o motor deve operar por um tempo mais longo, a proteção pode ser feita através de substâncias ablativas. Estas substâncias são compostas de material não metálico e possuem dupla função: prover isolamento e, quando expostas às altas temperaturas dos gases da combustão evaporar lentamente. Este processo extrai energia dos gases nas regiões mais próximas da superfície da câmara de combustão (TURNER, 2006, p.107). Entretanto, esse tipo de proteção (por material isolante e/ou ablativo) reflete em um aumento da espessura da parede e conseqüentemente da massa do sistema de propulsão (SUTTON, 1992, p. 105). Independentemente do sistema de proteção térmica, a previsão do fluxo de

calor é uma tarefa de extrema importância, tanto em motores foguete a propelente líquido quanto em motores a propelente sólido pois se trata de um aspecto que limita a performance do propulsor, forçando muitas vezes o processo de combustão ser ajustado para operar fora do ponto estequiométrico dos propelentes envolvidos para reduzir a temperatura dos gases quentes, evitando extrair a máxima eficiência energética dos propelentes (PATIRE JR, 2010).

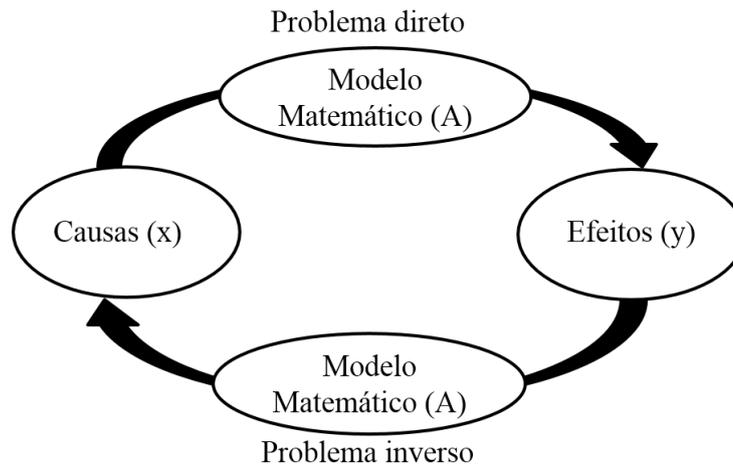
A determinação de parâmetros importantes tal como o fluxo de calor faz-se muitas vezes pelo uso de correlações empíricas, as quais requerem o conhecimento preciso das propriedades da mistura dos gases de combustão ao longo de todo escoamento (ARAKI e MARCHI, 2007), o que nem sempre é possível. De outra forma, a determinação do fluxo de calor através do método de problema inverso (PI) tem como vantagem evitar a utilização de correlações empíricas, como por exemplo, a equação de Bartz (1957). Outra vantagem é que os dados para resolução do PI não precisam ser completos e precisos para sua resolução.

## 1.2 PROBLEMA INVERSO (PI)

De acordo com Oleg Mikailivitch Alifanov (2015), proeminente pesquisador russo na área, um problema inverso pode ser definido como um problema que consiste em determinar as causas baseado na observação dos efeitos.

Pode-se mostrar na FIGURA 1.4 a relação entre os tipos de problemas:

FIGURA 1.4– RELAÇÃO ENTRE OS PROBLEMAS INVERSO E DIRETO



FONTE: VELHO (2015).

Tendo em consideração essa definição, é obviamente arbitrário qual dos dois problemas chamar de inverso. Geralmente, a distinção entre o que seja um problema inverso ou direto está ligada à nossa cultura, ou seja, trata-se do que se interpreta como causa e efeito. Na maioria das vezes convencionou-se como problema direto à forma de solução que se antecedeu historicamente (VELHO, 2015).

No entanto, no início do século, o matemático francês Jacques Hadamard definiu um problema bem posto como aquele que cumpre às condições de existência, unicidade e estabilidade em relação aos dados. Assim, o problema é dito mal posto se não cumpre uma ou mais das condições mencionadas. Problemas inversos pertencem à classe de problemas mal postos. Esses conceitos podem ser reduzidos a equações envolvendo os seguintes operadores:

$$Ax = y, \quad y \in Y \text{ e } x \in X \quad (1.1)$$

onde  $X$  e  $Y$  são espaços vetoriais e  $A: X \rightarrow Y$  é um operador (linear ou não linear).

$A$  pode ser entendido como o modelo físico que relaciona as causas e efeitos,  $x$  são as causas e  $y$  são os efeitos.

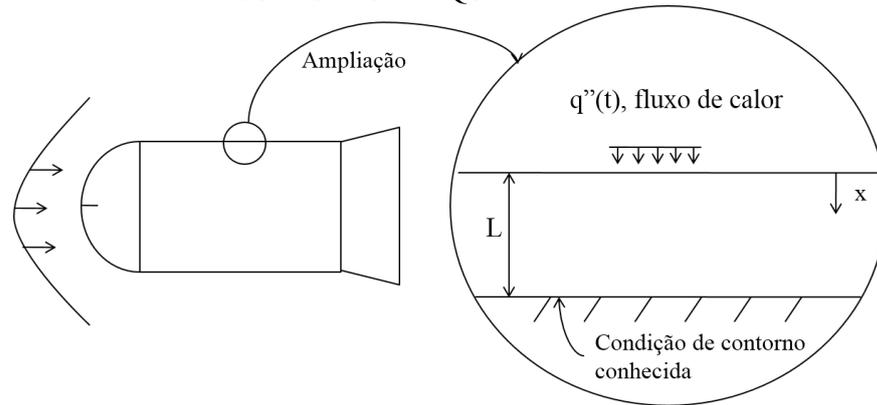
1. Existência: Para qualquer  $y \in Y$  existe (pelo menos um)  $x \in X$  tal que  $Ax = y$ .
2. Unicidade: Para qualquer  $y \in Y$  existe no máximo um  $x \in X$  tal que  $Ax = y$ , ou seja, se  $Ax_1 = Ax_2$ , então  $x_1 = x_2$ .
3. Estabilidade: A solução possui uma dependência contínua (suave) com os dados de entrada, ou seja, para qualquer sequência de  $x_n$ , se  $Ax_n \rightarrow Ax$ , com  $n \rightarrow \infty$ , então,  $x_n \rightarrow x$ .

Em problemas inversos, como os dados de entrada geralmente são valores finitos e ruidosos (contendo erros de medição), poderão existir vários modelos que se ajustem aos dados. A FIGURA 1.4 mostra o caso em que não há erros de medição. Então, ao invés de se procurar uma solução que torne a igualdade  $Ax = y$ , busca-se uma solução com erro menor possível, tal que  $|Ax - y| < \delta$ , sendo  $\delta$  uma tolerância aceitável. Os problemas de existência e unicidade podem ser resolvidos pela consideração de uma tolerância. O problema da estabilidade ocorre devido ao fato de pequenas oscilações (devido aos erros de medição) nos dados causarem grandes variações nos resultados (devido o problema ser mal posto). Esse problema pode ser resolvido pela utilização de métodos que utilizam parâmetro de regularização (THIKONOV e ARSENIN, 1977). Esse método pode ser entendido como a incorporação de informações adicionais disponíveis através com o objetivo de suavizar as instabilidades na função ou parâmetros desconhecidos.

O problema direto de condução de calor é o problema clássico em que se deseja o campo de temperatura em um corpo, tendo-se o modelo matemático (equação da difusão de calor), condições de contorno e temperatura inicial conhecida, bem como as propriedades do material. Considerando isso, podem existir problemas inversos de determinação da temperatura inicial com base em medições posteriores, *the backward heat equation* (MUNIZ, 1999); o problema inverso de determinação de propriedades do material com base em medições de temperatura e; o problema de determinação de temperatura ou fluxo de calor numa parte inacessível da fronteira, com base em medições de temperatura em outras partes do contorno, chamada *sideways heat equation* (MUNIZ, 1999); sendo este último tipo de problema, objeto de estudo deste trabalho.

Um exemplo de problema de engenharia que é resolvido através de PI do tipo *sideways heat equation* (MUNIZ, 1999), é aquele em que se deseja determinar o fluxo de calor em veículo espacial devido ao arrasto aerodinâmico durante a reentrada na atmosfera. A FIGURA 1.5 mostra de forma esquemática a ampliação da parede de um veículo espacial. Sensores não podem ser colocados diretamente na parte externa para medir o fluxo de calor pois seriam danificados. Sensores de temperatura são colocados abaixo da superfície, sendo a condição de contorno conhecida, e o fluxo de calor da parte externa é então estimado por PI. No presente trabalho o P.I. a ser resolvido é do tipo *sideways heat equation*, em que se busca determinar o fluxo de calor, com base em medidas de temperatura. Mais detalhes sobre os objetivos geral e específicos serão feitos no terceiro capítulo.

FIGURA 1.5 - EXEMPLO DE REENTRADA DE VEÍCULO EM QUE A CONDIÇÃO DE CONTORNO É REQUERIDA



FONTE: Adaptado de BECK (1985).

Embora a metodologia de problemas inversos seja interdisciplinar, é na área espacial que as técnicas de inversão mais se desenvolveram. Na pesquisa voltada ao estudo de propulsores, esta metodologia está sendo muito explorada para determinar parâmetros como: camada limite em superfícies não planas, transferência de calor e geometria da parede, combustão em fluxo turbulento, entre outras (PATIRE JR, 2010). Outros exemplos que denotam a importância dessa abordagem: a metodologia dos problemas inversos é, até agora, o único procedimento para identificar o ciclo bio-geoquímico dos gases do efeito estufa. Notou-se que as imagens obtidas pelo telescópio Hubble, que levou aproximadamente dez anos para ser construído, não possuíam a nitidez desejada. Esse problema foi solucionado por um software implementado por PI (VELHO, 2015).

### 1.3 CLASSIFICAÇÃO DE MÉTODOS

A principal dificuldade associada à implementação de um problema inverso consiste no fato de que as soluções ou resultados são sensíveis a mudanças nos dados de entrada, resultantes da medição experimental. Desse modo, para superar as dificuldades na resolução de problemas mal postos uma variedade de técnicas tem sido propostas. Devido à ampla gama de tipos de problemas inversos surgiu também uma grande variedade de técnicas de solução.

A escolha do melhor método para resolução de determinado problema depende, basicamente, do nível de erros experimentais, se o problema é linear ou não e se uma boa estimativa inicial está disponível. Por exemplo, o método de Newton pode apresentar

dificuldade de convergência caso a estimativa inicial não seja adequadamente escolhida. A escolha de uma estimativa inicial adequada pode ser extremamente difícil. Levenberg e Marquadt, para superar essa dificuldade, propuseram um algoritmo visando permitir a convergência do método para uma faixa mais ampla de valores da estimativa inicial (Neto *et al.*, 2005).

Uma possível classificação de problemas inversos divide o tipo de solução dos mesmos em iterativos e não iterativos. Dentre os iterativos, pode-se citar Método de Newton e Quase-Newton, Levenberg-Marquardt, Método do gradiente conjugado, entre outros. Dentre os não iterativos, pode-se citar o método de regularização de Tikhonov. Os métodos podem ainda ser classificados em relação à necessidade ou não de calcular a derivada das funções a cada iteração. Ambos os casos necessitam uma boa estimativa inicial (Neto *et al.*, 2005).

Uma classificação importante é aquela relativa a problemas lineares e não lineares. Em problemas de condução de calor, se as propriedades físicas (condutividade térmica,  $k$ , massa específica,  $\rho$ , calor específico,  $c_p$ ) são funções da posição, a linearidade não é afetada. No entanto se essas propriedades forem funções da temperatura, o problema inverso torna-se não linear. Existem técnicas específicas para problemas não-lineares, tal como o método de Newton. De outra forma, existem técnicas que são válidas apenas para solucionar problemas lineares, tais como aqueles baseados na Transformada de Laplace e métodos que utilizam o teorema de Duhamel. Um problema linear pode ser resolvido com um método não-linear, porém tempo computacional excessivo será utilizado em várias iterações desnecessárias.

Velho (2015) apresenta ainda uma classificação mais geral (não apenas para problemas de condução de calor):

1. Quanto à natureza matemática do método: explícito (inversão direta) e implícito;
2. Quanto à natureza estatística do método: Determinística ou Estocástica;
3. Quanto à natureza da propriedade estimada: Condição inicial, Condição de contorno, Termo-fonte/sumidouro, Propriedades do sistema;
4. Quanto à natureza da solução: Estimação de Parâmetros, Estimação da Função;
5. Quanto a natureza da dimensão do problema: Tipo 1, Tipo 2, Tipo 3.

As classificações 1 e 2 estão ligadas aos métodos de solução de PI. O item 3 é uma classificação com relação à causa a ser determinada. O item 4 foi formulado por Beck (1970) considera que a determinação de propriedades do material, tal como condutividade térmica se

caracterizaria como um problema de estimação de parâmetros, enquanto que a determinação de uma função desconhecida caracterizar-se-ia como estimação de função. A classificação indicada no item 5 foi proposta recentemente, (VELHO, 2015) e está baseada na dimensão do problema direto e na dimensão do problema inverso (finita ou infinita). A expressão dimensão infinita está ligada ao conceito de função contínua (ou contínua por partes).

Existe ainda uma classificação, (VELHO, 2015), baseada em métodos de resolução de PIs:

1. Inversão direta;
2. Decomposição em valores singulares (D.V.S.);
3. Mínimos quadrados e variantes (mínimos quadrados ponderados);
4. Métodos de regularização;
5. Métodos Variacionais;
6. Outros (molificação, filtros digitais, redes neurais, etc).

Métodos explícitos, ou inversão direta, como o método de transformada de Laplace são métodos mais gerais, utilizados em casos de interesse acadêmico por apresentar as características matemáticas de inversão. O método de D.V.S. consiste na fatoração a matriz  $A$  em valores singulares uma vez que a inversão  $x=A^{-1}y$  é impraticável quando  $A$  possui o determinante nulo, ou seja, é singular. No caso de  $A$  é singular, o método dos mínimos quadrados pode ser utilizado. Esse é o método de resolução empregado nesse trabalho e será detalhado posteriormente.

Métodos de regularização são aqueles que utilizam operadores de regularização para obter uma solução mais suave, pois transforma o problema mal posto em bem posto. Métodos variacionais podem ser descritos como uma técnica que associa o método do gradiente conjugado à equação adjunta. Outros métodos são baseados em análises estocásticas e heurísticas.

#### 1.4 RESUMO DOS CAPÍTULOS

Neste capítulo foi feita uma breve introdução sobre problemas inversos. Uma distinção entre problemas diretos (que tratam da determinação do campo de temperatura em sólido) e problemas inversos (que tratam da determinação da condição inicial ou condição de contorno ou propriedade física) em transferência de calor em sólidos foi apresentada. Também

foi mostrado que o problema a ser resolvido no presente trabalho é do tipo *sideways heat equation*, em que se busca determinar a condição de contorno (fluxo de calor). Foi mostrado que problemas inversos são problemas mal postos e por isso pequenas variações nos dados de entrada resultam em grandes variações na resposta. Vários métodos de resolução de PI's são desenvolvidos para superar essa dificuldade. Foi mostrado que existem vários tipos de classificação de PI's.

No capítulo que se segue é feita a revisão bibliográfica com alguns trabalhos realizados em PI na área de transferência de calor. Essa revisão tenta trazer a evolução de vários trabalhos ao longo de algumas décadas, visto que o desenvolvimento de PI's é relativamente recente. Apenas os trabalhos de problemas inversos na área de condução de calor serão citados.

No terceiro capítulo são apresentados a geometria do problema, os objetivos gerais e específicos e a fundamentação teórica. No mesmo serão mostradas as equações que modelam o problema bem como as hipóteses e considerações utilizadas. Um problema hipotético com condições de contorno conhecidas será resolvido de forma direta. Os valores de temperatura determinados de forma direta serão modificados para simular erros experimentais e então utilizados como dados de entrada para o problema inverso. Várias análises serão feitas com esse problema hipotético.

No capítulo quatro são feitas comparações entre os resultados do fluxo de calor obtidos com o método utilizado neste trabalho e com os métodos encontrados na literatura.

No quinto capítulo são mostrados e discutidos os resultados obtidos pela aplicação da metodologia desenvolvida em motores-foguete. Também serão mostrados valores de temperatura de câmara obtidos a partir dos dados do problema inverso. Os resultados da temperatura de câmara serão comparados com dados de temperatura coletados durante ensaio estático.

No sexto capítulo serão apresentadas as conclusões, considerações sobre as principais contribuições e as sugestões para trabalhos futuros.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 INTRODUÇÃO

Problemas inversos de condução de calor podem ser definidos como problemas que utilizam medições de temperatura ou fluxo de calor com objetivo de estimar alguma quantidade desconhecida para análise de problemas térmicos em engenharia. (OZISIK e ORLANDE, 2000). Um problema inverso de condução de calor clássico é aquele em que se procura determinar o fluxo de calor através de medidas de temperatura tomadas numa região do contorno. No presente trabalho um problema clássico será abordado. A revisão bibliográfica aqui apresentada reúne problemas de condução de calor de uma forma geral, ou seja, clássicos e não clássicos.

Uma variedade muito grande de abordagens analíticas e numéricas tem sido propostas. Vários métodos tem sido desenvolvidos e a principal diferença entre eles é a forma com que lidam com as instabilidades, uma vez que problemas inversos são mal postos. Os trabalhos serão apresentados em ordem de aumento complexidade e não necessariamente na ordem cronológica. A revisão bibliográfica foi dividida em três subgrupos: trabalhos analíticos, numéricos e híbridos e outros. Os trabalhos analíticos, de forma geral não possuem nenhum tratamento para melhorar a estabilidade. Os trabalhos que utilizam métodos numéricos permitiram que problemas não lineares fossem solucionados e variam em complexidade. A revisão bibliográfica termina com os métodos híbridos, que utilizam mistura de métodos. Alguns métodos heurísticos e estocásticos serão mostrados.

### 2.2 MÉTODOS ANALÍTICOS

Stolz (1960) foi um dos primeiros investigadores a desenvolver uma solução analítica para um problema inverso de condução de calor. Em seu trabalho, Stoltz utilizou o teorema de Duhamel uma vez que o princípio da superposição é válido para problemas lineares. A análise foi desenvolvida especificamente para esferas e depois aplicada para outras formas geométricas simples. A resolução do problema foi obtida tendo-se como dado o fluxo de calor versus tempo para determinar a temperatura versus tempo no interior do corpo. Vários exemplos foram demonstrados pelo autor. A solução de Stoltz é instável para pequenos

intervalos de tempo. Burggraf (1964) também apresenta uma solução analítica para o problema inverso de condução de calor, mas utilizando séries. O autor apresenta relações para várias formas geométricas: placa plana, cilindro, esfera. Burggraf (1964) mostrou que o truncamento no primeiro ou segundo termo da série aproxima bem o resultado comparado com a solução exata.

## 2.3 MÉTODOS NUMÉRICOS

As soluções analíticas de problemas inversos são restritas a problemas lineares. A técnica de solução de PI foi estendida para problemas não lineares pela utilização de métodos numéricos: diferenças finitas (MDF) e elementos finitos (MEF). O primeiro método para resolver problemas não lineares foi apresentado por Beck (1970) utilizando o MDF. Os autores fazem uma revisão bibliográfica abrangente sobre o problema inverso de condução de calor e resolvem um problema em que o calor específico e condutividade são dependentes da temperatura. Williams e Curry (1977) calcularam o fluxo de calor para o caso não linear em materiais de alta e baixa condutividade térmica utilizando o método dos mínimos quadrados a partir dos dados de temperatura experimentais. Os autores compararam seus resultados com os obtidos por Beck (1970), observando boa concordância. Soluções analíticas, apesar de proporcionarem uma boa compreensão na natureza dos PI's, não são muito úteis em aplicações práticas, uma vez que erros são inerentes a qualquer processo de medição.

Mehta (1981) calculou perfis de temperatura a partir de medidas de temperatura na superfície externa na parede da tubeira de um motor foguete através do MDF. O ajuste gradual do fluxo de calor é feito pelo método de Newton-Raphson. Kimura (1985), de maneira semelhante, determinou perfis de temperatura ao longo da seção transversal da tubeira de foguete a propelente sólido. A autora utilizou o método da bisseção e Newton-Raphson no processo de convergência dos fluxos de calor. Em sua análise, a autora verificou que tanto a distribuição de temperatura quanto o fluxo de calor são mais próximos dos reais (experimentais) à medida em que o ponto de medição é escolhido próximo da região da garganta. Kimura comparou os resultados obtidos pelo método inverso com os resultados obtidos pelo método direto. O método foi utilizado em um problema unidimensional linear embora possa ser estendido para problemas não lineares. Com relação à estabilidade, a autora

menciona que os incrementos no tempo e no espaço devem ser escolhidos suficientemente pequenos para que o parâmetro que os relaciona seja igual ou maior que 2.

O método dos mínimos quadrados modificado pela adição de um termo de regularização foi feito pela primeira vez por Tikhonov e Arsenin (1977). Os autores mostram que esse método é eficiente na resolução de sistemas de equações mal condicionadas, resultantes de dados com erros experimentais. A ênfase dos autores é desenvolver o método com rigor matemático e realizar uma análise da estabilidade dos métodos existentes (bastante limitados com relação à estabilidade) e do método proposto. Os autores também discutem métodos para a determinação de valores ótimos do parâmetro de regularização.

Alifanov e Rumyantsev (1988) apresentaram o método do gradiente conjugado. Esse método de minimização utiliza um problema adjunto para resolver a função objetivo. A vantagem do método consiste no fato de a regularização estar implícita, feita durante o procedimento iterativo. Recentemente, esse método tem sido utilizado com sucesso por muitos pesquisadores. Por exemplo, Alencar Jr. (1996) aplicou o método do gradiente conjugado em uma problema de condução de calor com geometria irregular bidimensional. O objetivo do autor era estimar o fluxo de calor utilizando diferenças finitas e coordenadas não ortogonais. Neto e Su. (2001) utilizaram o método do gradiente conjugado em um problema de condução de calor bidimensional transiente em cilindro circular reto. O problema abordado consistia em determinar o termo de geração, modelado no interior do cilindro.

Alifanov e Egorov (1985) estudaram o comportamento de algoritmos para resolver problemas inversos de condução de calor em termos do número de iterações. A geometria foi considerada foi bidimensional em coordenadas cartesianas. Eles compararam o método da máxima descida com o método do gradiente conjugado para quantidades de iterações variáveis. Os resultados para determinação do fluxo de calor usando o método da máxima descida é menos acurado em comparação com o método do gradiente conjugado para o mesmo número de iterações. O tempo de convergência do método do gradiente conjugado é ligeiramente maior apesar de gerar resultados mais precisos. Os autores verificaram uma deterioração da precisão na vizinhança do fim do intervalo de tempo. A deterioração verificada pode ser eliminada se o amortecimento causado pela regularização na solução for considerado durante a construção do algoritmo. Os autores mostraram que o algoritmo utilizado é adequado mesmo quando erros experimentais (distribuídos normalmente) estão presentes.

## 2.4 MÉTODOS HÍBRIDOS E OUTROS

Existem diversas técnicas para solucionar problemas inversos. Técnicas mais simples demandam menos tempo computacional e são mais simples de serem implementadas computacionalmente. Entretanto podem não gerar resultados satisfatórios. De outra forma, técnicas mais sofisticadas podem gerar resultados mais acurados apesar de geralmente demandar maior tempo computacional. O desafio atualmente é combinar as vantagens de duas ou mais abordagens, sofisticadas ou não, de modo que o algoritmo resultante (híbrido) seja mais competitivo.

Cheng e Chang (1990) desenvolveram um método combinando o uso da transformada de Laplace e Método dos elementos finitos para resolver um problema unidimensional linear de condução de calor. Neste método os termos dependentes do tempo foram removidos do problema utilizando o método da transformada de Laplace e o método dos elementos finitos é aplicado no domínio do espaço. A estimativa do fluxo de calor e temperatura são obtidos pelas medições de temperaturas dentro do sólido. Os resultados mostraram boa coerência com os resultados analíticos. Como os termos dependentes do tempo foram removidos, pelo método em questão é possível calcular diretamente as condições na superfície requerida em determinado instante sem a necessidade de resolver todo domínio de tempo.

Taler (1996) apresentou um método semi-numérico simples e preciso capaz de resolver problemas lineares contendo erros de medição. A abordagem apresentada não é iterativa e não necessita de nenhuma informação sobre a distribuição de temperatura inicial do corpo. O autor considerou um problema de condução unidimensional com propriedades constantes. A solução do PI consiste em discretizar o domínio em volumes de controle e aplicar o balanço de energia. O sistema de equações deve ser resolvido para determinar a variável de interesse. De acordo com o autor, o fluxo de calor pode ser determinado em um instante específico e pode ser diretamente calculado a partir de dados de temperatura. O efeito do erros de medição foi eliminado pela aplicação de spline cúbica para suavizar ou "filtrar" os dados de temperatura antes de utilizá-los no problema inverso. De acordo com o autor, algoritmo apresentado é muito rápido e pode ser facilmente estendido para problemas multidimensionais.

Cotta (2009) resolve um problema de condução de calor em um meio heterogêneo, visando a identificação de propriedades termofísicas e condições de contorno. A autora desenvolveu uma solução híbrida da solução do problema direto através da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT). A estimativa das propriedades foi feita através da técnica Bayesiana. Foi adotada a termografia por câmera de infravermelho para obter as medidas de temperatura durante os experimentos e para validar a solução desenvolvida.

Trabalhos que utilizam técnicas de PI, aplicados em propulsores têm sido desenvolvidos com algoritmos híbridos. Patire Jr. (2010) aplicou PI para determinar o fluxo de calor e perfis de temperatura no fluido de resfriamento e do perfil do coeficiente de transferência de calor em uma câmara de empuxo regenerativa. O autor elaborou um algoritmo híbrido, composto por: Otimização Extrema Generalizada (baseada na técnica de evolução natural) e Estratégias Evolutivas, em conjunto com um programa de simulação térmica para obter os perfis citados. O autor emprega a equação do tipo Boltzmann para determinar o perfil de filme de combustível e duas equações do tipo Lorentz para representar o perfil do coeficiente de transferência de calor por convecção. Os parâmetros livres dessas equações são as incógnitas otimizadas pelo PI, ou seja, otimização feita a partir de dados experimentais de temperatura tomados na parede externa do propulsor. Os resultados são comparados com dados obtidos em teste experimental, o qual foi realizado com auxílio de câmera de infravermelho. De acordo com o autor, bons resultados foram obtidos.

No presente trabalho, o método de solução de PI utilizado é o método dos mínimos quadrados, modificado pelo parâmetro de regularização. Tal método conta com a simplicidade dos mínimos quadrados e ao mesmo tempo é capaz de reduzir as oscilações inerentes de problemas mal postos. No problema a ser abordado, o modelo considerado é unidimensional, com propriedades constantes, em coordenadas cilíndricas e sem geração de calor. A maioria dos trabalhos que utilizam PI em motores-foguete na literatura apresentam soluções de fluxo de calor para a tubeira tais como os trabalhos de Mehta, (1981), Kimura (1985) e Patire (2010), mas são poucos os trabalhos para determinação do fluxo de calor na câmara de combustão e da temperatura na câmara.

### 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

No presente capítulo será apresentada a formulação do problema a ser resolvido. Este capítulo apresenta objetivos principais e secundários: no objetivo principal está o desenvolvimento da formulação para resolver o problema inverso. O objetivo secundário consiste no desenvolvimento da formulação para o cálculo do fluxo teórico de calor. Com a formulação do fluxo teórico de calor é possível obter um processo iterativo para cálculo da temperatura de câmara. Em resumo:

#### **Objetivos específicos:**

O objetivo principal é resolver o problema inverso. Será primeiramente realizada a descrição detalhada do problema. Para isso serão apresentadas a geometria do problema, a equação que o modela e as hipóteses consideradas no desenvolvimento da solução.

- a) Com os dados de temperatura medidos na superfície do motor-foguete, estimar o fluxo de calor;
- b) Obter a temperatura da parede do lado dos gases provenientes da combustão.

#### **Objetivos Secundários:**

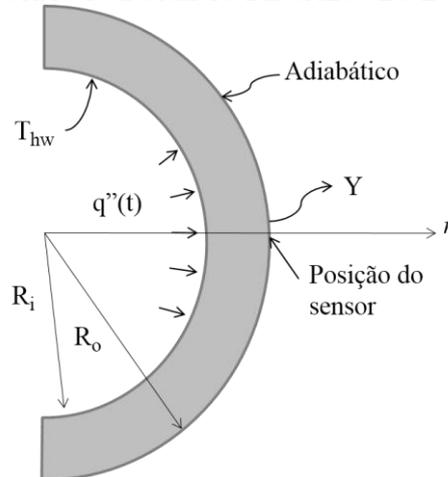
- a) Determinar o fluxo de calor teórico utilizando correlações disponíveis na literatura;
- b) Determinar a temperatura na câmara de combustão, utilizando resultados do problema inverso e fluxos teóricos através de um procedimento iterativo;
- c) Aplicar a metodologia em dados de testes estáticos com motores-foguete reais.

#### 3.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA E HIPÓTESES

O domínio de cálculo, pode ser visto na FIGURA 3.1, consiste em um cilindro com raio interno  $R_i$  e raio externo  $R_o$  a uma temperatura inicial,  $T_{inicial}$ . Para instantes maiores que zero, um fluxo desconhecido  $q''(t)$  varia com o tempo e é aplicado no contorno em  $R_i$  enquanto o contorno em  $R_o$  é mantido isolado termicamente. De modo a estimar o fluxo  $q''(t)$ , medidas de temperatura são realizadas com sensores posicionados sobre a superfície

isolada  $R_o$  por um período de tempo determinado,  $0 < t < t_f$  onde  $t_f$  é o tempo final das medidas de temperatura. As medidas de temperatura são realizadas em intervalos sucessivos  $t_j$  ( $j = 1, 2, \dots, M$ ).

FIGURA 3.1 - DOMÍNIO DE CÁLCULO E GEOMETRIA



FONTE: A AUTORA(2016).

As hipóteses para tratamento do problema são as seguintes:

- 1) O calor se propaga unidimensionalmente na direção radial;
- 2) As propriedades do material da parede da câmara de combustão são independentes da temperatura, ou seja, são constantes.
- 3) Condição de contorno adiabática em  $r=R_o$ . Essa condição de contorno na região onde o sensor de temperatura está posicionado permite que os erros relativos ao sistema de medição sejam incorporados à solução uma única vez. Além disso a hipótese pode ser apropriada para o caso de motores-foguete considerando-se que a transferência de calor entre a superfície externa do motor-foguete e o meio seja desprezível em relação a quantidade de calor transferido dos gases quentes à superfície interna, em  $r=R_i$ .

### 3.1.1 Discretização do Modelo Matemático

Modelos matemáticos são representações fenômenos físicos. A equação utilizada para representar fenômenos, na forma conservativa - na qual os termos relativos aos fluxos das propriedades aparecem dentro das derivadas pode ser escrita de forma geral como (VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007):

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \phi) = \vec{\nabla} \cdot (\Gamma \vec{\nabla} \phi) + S_\phi, \quad (3.1)$$

sendo  $\phi$  uma variável genérica, no caso da conservação da energia térmica corresponde à temperatura.  $\Gamma$  é o coeficiente de transporte, sendo nesse caso a condutividade térmica  $k$ , e  $S_\phi$  é o termo fonte, nulo no caso considerado.

Aplicando as hipóteses simplificadoras anteriormente mencionadas e considerando coordenadas cilíndricas, a equação se reduz a:

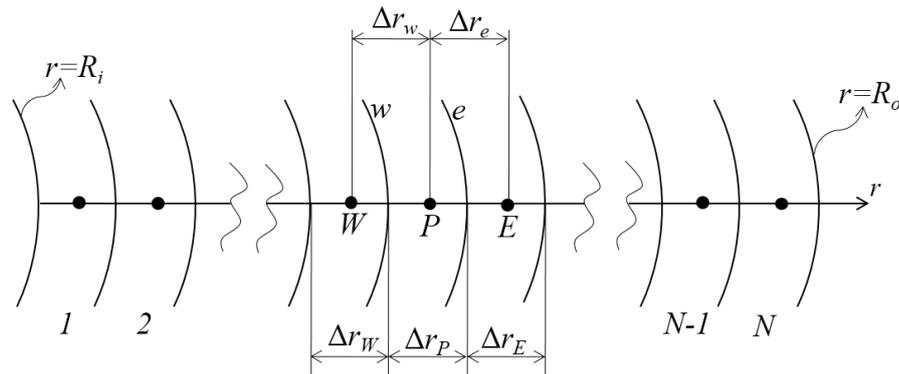
$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (3.2)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do material,  $c_p$  é o calor específico,  $T$  é a temperatura e  $r$  é raio.

A equação (3.2) será resolvida pelo Método dos Volumes Finitos (MVF). Nesse método, a conservação das propriedades é feita em nível de volumes elementares (MALISKA, 1995).

A FIGURA 3.2 mostra uma malha unidimensional uniforme de nós centrados entre faces utilizada para discretizar o domínio de cálculo do problema (FIGURA 3.1). Nesse caso  $\Delta r_w = \Delta r_e = \Delta r_p = \Delta r_w = \Delta r_e$  e serão substituídos por  $\Delta r_p$ . O nó de um volume qualquer é identificado por  $P$ , conforme FIGURA 3.2, sendo os nós vizinhos da esquerda e da direita identificados por  $W$  e  $E$  respectivamente. As faces do volume  $P$  estão com letras minúsculas,  $w$  e  $e$ , que correspondem às faces esquerda e direita respectivamente.

FIGURA 3.2 - MALHA UNIDIMENSIONAL DE NÓS CENTRADOS ENTRE FACES



FONTE: A AUTORA (2016).

Uma das formas de se obter a equação na forma conservativa é por integração sobre o volume de controle, no espaço e no tempo. Integrando no espaço e no tempo, pode-se chegar aos seguintes coeficientes e termo fontes (detalhes do desenvolvimento podem ser vistos no Apêndice A):

$$a_p T_p = a_w T_w + a_e T_e + b_p. \quad (3.3)$$

A equação (3.3) corresponde à forma geral do sistema de equações resultante, tanto para os volumes internos quanto para os volumes dos contornos. Os volumes internos são aqueles compreendidos entre os volumes 2 e N-1 inclusive. Os volumes dos contornos correspondem aos volumes 1 e N, conforme mostra FIGURA 3.2. Os coeficientes determinados para os volumes internos são:

#### Coeficientes dos volumes internos:

$$a_p = \frac{\Delta r^2 r_p}{\alpha \Delta t} + r_e \theta + r_w \theta, \quad (3.4)$$

$$a_e = r_e \theta, \quad (3.5)$$

$$a_w = r_w \theta, \quad (3.6)$$

$$b_p = T_E^0 r_e (1-\theta) + T_W^0 r_w (1-\theta) + T_P^0 (\theta-1) [r_e + r_w] + \frac{\Delta r^2 r_p}{\alpha \Delta t} T_P^0, \quad (3.7)$$

onde  $\theta$  é o parâmetro entre 0 e 1 que determina o tipo de formulação empregada no tempo.

A determinação dos coeficientes  $a_p$ ,  $a_e$ ,  $a_w$  e  $b_p$  do volumes do contorno é feita pela aplicação da condição de contorno. O contorno no volume 1, ou seja, em  $r = R_i$ , está submetido à condição de Neumann:

$$-k \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w = q''(t). \quad (3.8)$$

Os coeficientes resultantes para o volume 1 são mostrados a seguir. O método utilizado foi de condições de contorno incorporadas ao volume de controle. Detalhes no desenvolvimento podem ser vistos no Apêndice A.

Os Coeficientes do volume 1 são:

$$a_p = \frac{\Delta r^2 r_p}{r_e \alpha \Delta t} + \theta, \quad (3.9)$$

$$a_e = \theta, \quad (3.10)$$

$$a_w = 0, \quad (3.11)$$

$$b_p = T_E^0 (1 - \theta) + T_P^0 (\theta - 1) + T_P^0 \frac{\Delta r^2 r_p}{r_e \alpha \Delta t} + \frac{q''(t) r_w \Delta r}{r_e k}, \quad (3.12)$$

válidos para o volume do contorno em  $r = R_i$ .

Da mesma maneira que para o volume 1, a determinação dos coeficientes do volume N é feita pela aplicação da condição de contorno. O contorno no volume N, ou seja, em  $r = R_o$ , também está submetido à condição de Neumann:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e = 0. \quad (3.13)$$

Os coeficientes resultantes para o volume N são mostrados a seguir. O método utilizado foi de condições de contorno incorporadas ao volume de controle. Detalhes no desenvolvimento podem ser vistos no Apêndice A.

Os coeficientes do volume N são:

$$a_p = \frac{\Delta r^2 r_p}{r_w \alpha \Delta t} + \theta, \quad (3.14)$$

$$a_e = 0, \quad (3.15)$$

$$a_w = \theta, \quad (3.16)$$

$$b_p = T_w^0(1-\theta) + T_p^0(\theta-1) + T_p^0 \frac{\Delta r^2 r_p}{r_w \alpha \Delta t}, \quad (3.17)$$

válidos para o volume do contorno em  $r = R_o$ .

### 3.2 PROBLEMA INVERSO DE CONDUÇÃO DE CALOR PARA ESTIMATIVA DE FLUXO DE CALOR

Para solução do problema inverso, serão executados os seguintes passos (Ozisik, 1993):

1. Formulação do problema direto;
2. Formulação do Problema Inverso;
3. Utilização do método dos mínimos quadrados;
4. Determinação dos coeficientes de sensibilidade; e
5. Análise de Estabilidade.

#### 3.2.1 Formulação do problema direto

A resolução do método direto consiste na solução da equação (3.18), tendo-se as condições de contorno (equações (3.19) e (3.20) ) e condição inicial (equação (3.21)) conhecidas, bem como as propriedades físicas do material. O problema direto tem como dados conhecidos: as propriedades físicas do material, que são condutividade térmica, massa específica e calor específico,  $k$ ,  $\rho$  e  $c_p$ , respectivamente; condições de contorno,  $q''(t)$ ; e a

condição inicial, ou seja a função que descreve a temperatura no instante inicial,  $f(r)$ . Os dados da geometria também devem ser conhecidos, ou seja,  $R_o$  e  $R_i$ .

O modelo matemático do problema é descrito pela equação de transferência de calor unidimensional em coordenadas cilíndricas, equação (3.18) (OZISIK, 1993):

$$\frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}, \quad R_i \leq r \leq R_o \quad \text{para } 0 < t < t_f. \quad (3.18)$$

O problema direto (equação (3.18)) pode ser resolvido prontamente por técnicas amplamente conhecidas, tal como o teorema de Duhamel (BECK *et al.*, 1985).

As condições de contorno em  $r=R_i$  e  $r=R_o$  são fornecidas pelas Equações (3.19) e (3.20) respectivamente:

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = q''(t) \quad r = R_i \quad t > 0, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad r = R_o, \quad t > 0. \quad (3.20)$$

Como comentado anteriormente,  $f(r)$  é a condição inicial, ou seja, a função que descreve a temperatura no instante inicial, equação (3.21). Neste trabalho,  $f(r)$  será uma constante.

$$T = f(r), \quad t = 0, \quad R_i \leq r \leq R_o. \quad (3.21)$$

Além do campo de temperatura, as temperaturas nos contornos, ou seja, em  $r=R_o$  e  $r=R_i$  serão calculadas. A temperatura em  $r= R_o$  não é uma incógnita (pois é dada pelas medições de temperatura), mas deverá ser calculada para que a solução do problema inverso seja possível, conforme será visto na seção (3.2.3). Portanto, o problema direto pode ser enunciado da seguinte forma: a partir do fluxo de calor  $q''(t)$ , estimar a temperatura no contorno, em  $r= R_o$ . Esta temperatura do contorno, denotada por  $\hat{T}_j$  com  $j=1, 2, \dots, M$ , em

todo intervalo de tempo  $0 \leq t \leq t_f$ , é dita estimada pois o fluxo de calor para calculá-la será apenas uma estimativa obtida pelo método inverso. Aqui, o símbolo  $\hat{\phantom{x}}$  denota valores estimados.

### 3.2.2 Formulação do problema inverso

O modelo matemático do problema inverso é dado pelas equação (3.22):

$$\frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}, \quad R_i \leq r \leq R_o \quad \text{para } 0 < t < t_f. \quad (3.22)$$

Como pode ser visto, a formulação é idêntica ao do problema direto, com a diferença de que a condição de contorno na Equação (3.23), ou seja, o fluxo de calor  $q''(t)$  é desconhecido. O problema inverso consiste em determinar a condição de contorno  $q''(t)$  tendo-se os demais dados conhecidos (as propriedades físicas e dados geométricos).

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = q''(t), \quad r = R_i \text{ e } t > 0. \quad (3.23)$$

A condição de contorno em  $r=R_o$ , continua sendo de parede adiabática:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad r = R_o \text{ e } t > 0. \quad (3.24)$$

A temperatura  $f(r)$ , como comentado anteriormente é uma constante:

$$T = f(r), \quad t = 0, \quad R_i \leq r \leq R_o. \quad (3.25)$$

Para resolver o problema inverso, ou seja, determinar o fluxo desconhecido, será utilizado o histórico de temperaturas obtido por meio de medidas experimentais tomadas em  $r = R_o$ . As medidas experimentais tomadas em  $r = R_o$  são realizadas em instantes  $t_j$ , com  $j=1, 2, \dots, M$ , em todo intervalo de tempo  $0 \leq t \leq t_f$ . Nesse caso,  $M$  é a quantidade total de medições. Portanto, o problema inverso pode ser enunciado da seguinte forma: a partir de dados de temperatura obtidos por medição, estimar o fluxo de calor  $q''(t)$ .

### 3.2.3 Utilização do método dos mínimos quadrados

O problema inverso enunciado anteriormente é matematicamente mal posto pois sua existência, unicidade e/ou estabilidade não pode ser garantida. A solução bem sucedida de um problema inverso geralmente envolve a transformação de um problema mal posto em um problema bem posto.

A existência de uma solução inversa é garantida pela condição de minimização da norma dos mínimos quadrados ao invés de fazê-la necessariamente zero (OZISIK, 1993). A solução por este método requer que a temperatura estimada no contorno, em  $r = R_o$ ,  $(\hat{T}_j(q_i''), j=1, 2, \dots, M)$  calculada utilizando-se o problema direto, com fluxo de calor,  $q_i'', i=1, 2, \dots, M$  conhecido, possa se aproximar das temperaturas medidas  $Y_j, j=1, 2, \dots, M$ , tão próximo quanto possível em todo domínio.

Uma maneira de se aproximar as temperaturas medidas e estimadas (ou calculadas) pode ser feita pela utilização dos mínimos quadrados.

Considerou-se, neste trabalho, a norma dos mínimos quadrados modificada pela adição do termo de regularização de ordem zero (TIKHONOV e ARSENIN, 1977):

$$S(\hat{\mathbf{q}}'') = \sum_{j=1}^M [Y_j - \hat{T}_j(\hat{\mathbf{q}}'')]^2 + \alpha \sum_{j=1}^M \hat{q}_j''^2, \quad (3.26)$$

onde  $\hat{\mathbf{q}}'' = [\hat{q}_i'' \text{ para } i=1, 2, \dots, M]$  é o conjunto dos fluxos de calor em todos os instantes de tempo. O superscrito ^ denota os valores estimados. As outras quantidades são definidas por:

$S(\hat{\mathbf{q}}'')$  é a soma dos quadrados;

$\hat{q}_j'' = \hat{q}''(t_j)$  é o fluxo estimado no contorno;

$Y_j = Y(t_j)$  é a temperatura medida na superfície em  $r = R_o$  nos instantes  $t_j$ ;

$\hat{T}_j(\hat{\mathbf{q}}'')$  é a temperatura estimada na superfície em  $r = R_o$  nos instantes  $t_j$  determinados pela utilização do conjunto de fluxos de calor estimado  $\hat{\mathbf{q}}'' = [\hat{q}_i'' \text{ para } i = 1, 2, \dots, M]$ ;

$\alpha$  é o parâmetro de regularização.

Na equação (3.26), o primeiro termo do lado direito da igualdade corresponde ao tradicional método dos mínimos quadrados. O segundo termo é o parâmetro de regularização de ordem zero e foi adicionado para reduzir as instabilidades e oscilações inerentes de problemas mal postos (TIKHONOV e ARSENIN, 1977). O parâmetro de regularização  $\alpha$  quando tende a zero faz com que a solução se torne oscilatória e instável. Para valores maiores que zero, a solução é amortecida. Se  $\alpha$  tende a 1, o amortecimento pode ser excessivo, a solução pode se desviar demasiadamente do resultado exato. O valor ótimo deve ser avaliado para minimizar erros (OZISIK, 1993). Uma discussão sobre a determinação do valor ótimo para o parâmetro de regularização será realizada oportunamente em uma seção a seguir.

O próximo passo é a minimização da equação dos mínimos quadrados, equação (3.26), derivando em relação ao fluxo de calor  $\hat{q}_i''$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ , e igualando a expressão a zero.

$$\frac{\partial S(\hat{\mathbf{q}}'')}{\partial \hat{q}_i''} = 2 \sum_{j=1}^M \frac{\partial \hat{T}_j(\hat{\mathbf{q}}'')}{\partial \hat{q}_i''} [\hat{T}_j(\hat{\mathbf{q}}'') - Y_j] + 2\alpha \sum_{j=1}^M \hat{q}_j'' \frac{\partial \hat{q}_j''}{\partial \hat{q}_i''} = 0, \quad (3.27)$$

sendo:

$$\frac{\partial \hat{q}_j''}{\partial \hat{q}_i''} = \begin{cases} 0 & \text{para } i \neq j \\ 1 & \text{para } i = j \end{cases}, \quad (3.28)$$

O número total de medidas de temperatura deve ser igual ou maior que o número de valores a serem estimados (Ozisik, 1993). Neste trabalho, o número de valores a serem estimados é igual ao número de valores de temperaturas tomadas, ou seja,  $i=j$ .

A equação (3.27) pode ser rearranjada resultando em:

$$\sum_{j=1}^M \frac{\partial \hat{T}_j(\hat{\mathbf{q}}'')}{\partial \hat{q}_i''} [Y_j - \hat{T}_j(\hat{\mathbf{q}}'')] = \alpha \sum_{j=1}^M \hat{q}_j'' \frac{\partial \hat{q}_j''}{\partial \hat{q}_i''}, \quad (3.29)$$

sendo:

$$\frac{\partial \hat{T}_j(\hat{\mathbf{q}}'')}{\partial \hat{q}_i''} = \frac{\partial \hat{T}_j(\hat{q}_1'', \hat{q}_2'', \hat{q}_3'', \dots, \hat{q}_M'')}{\partial \hat{q}_i''} \equiv X_{ji}, \quad (3.30)$$

onde  $X_{ji}$  é denominada de matriz de coeficientes de sensibilidade.

Substituindo os coeficientes de sensibilidade, equação (3.30), na equação (3.29) e escrevendo na forma matricial, tem-se:

$$\mathbf{X}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{T}) = \alpha \mathbf{q}'', \quad (3.31)$$

onde os vetores são dados por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \hat{T}_1 \\ \hat{T}_2 \\ \vdots \\ \hat{T}_M \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_M \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}'' = \begin{bmatrix} \hat{q}_1'' \\ \hat{q}_2'' \\ \vdots \\ \hat{q}_M'' \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

e a matriz de sensibilidade é dada por:

$$\mathbf{X} \equiv \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{q}''^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial q_1''} & \frac{\partial T_1}{\partial q_2''} & \dots & \frac{\partial T_1}{\partial q_M''} \\ \frac{\partial T_2}{\partial q_1''} & \frac{\partial T_2}{\partial q_2''} & & \frac{\partial T_2}{\partial q_M''} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial T_M}{\partial q_1''} & \frac{\partial T_M}{\partial q_2''} & \dots & \frac{\partial T_M}{\partial q_M''} \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

Como será discutido a seguir, os termos acima da diagonal principal da matriz de sensibilidade devem ser zero por que as temperaturas  $T_i$  calculadas em qualquer instante de tempo  $t_i$  devem ser independentes de quaisquer fluxos de calor futuros.

A equação (3.29) ou a equação (3.31) pode ser expressa em uma forma mais conveniente para o cálculo de  $\hat{q}_i''$ : pode ser obtida pela expansão de  $\hat{T}_i(\hat{\mathbf{q}}'')$  na série de Taylor:

$$\hat{T}_j = \hat{T}_{0j} + \sum_{k=1}^M \frac{\partial \hat{T}_j}{\partial \hat{q}_k''} (\hat{q}_k'' - \hat{q}_{inicial}''), \quad (3.34)$$

Escrevendo este resultado na forma matricial:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{inicial} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{q}''^T} (\mathbf{q}'' - \mathbf{q}_{inicial}''), \quad (3.35)$$

Fazendo-se  $\mathbf{q}_{inicial}'' = 0$ , as Equações (3.34) e (3.35) se reduzem a:

$$\hat{T}_j = \sum_{k=1}^M \frac{\partial \hat{T}_j}{\partial q_k''} \hat{q}_k'' + T_{inicial}, \quad (3.36)$$

$$\mathbf{T} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{q}''^T} \mathbf{q}'' \equiv \mathbf{X} \mathbf{q}'' + \mathbf{T}_{inicial} \mathbf{1}, \quad (3.37)$$

onde  $\mathbf{1}$  é um vetor com valores unitários.

Substituindo a equação (3.37) na equação (3.35), tem-se, na forma matricial:

$$\mathbf{X}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X} \mathbf{q}'' - \mathbf{T}_{inicial} \mathbf{1}) = \alpha \mathbf{q}'' . \quad (3.38)$$

A solução da equação (3.38) fornece os valores dos fluxos de calor estimados  $\hat{q}_i$  em cada instante de tempo  $t_i (i=1, 2, \dots, M)$ . A solução em  $\mathbf{q}''$  pode ser expressa por:

$$\mathbf{q}'' = (\mathbf{X}^T \mathbf{X} + \alpha \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{T}_{inicial} \mathbf{1}), \quad (3.39)$$

A equação (3.39) é a solução do problema inverso de condução considerado, em que se deseja o fluxo de calor num intervalo de tempo determinado. Tendo-se os coeficiente de sensibilidade, o parâmetro de regularização e as medidas de temperatura, o fluxo de calor pode ser determinado pela equação (3.39). Na realidade, como cálculo de matrizes inversas é evitado devido ao seu alto custo computacional, ao invés de se resolver a equação (3.39), o sistema de equações lineares fornecido pela equação (3.38) é resolvido. Neste trabalho utilizou-se o método de Gauss-Seidel, que encontra-se no Apêndice B.

### 3.2.4 Determinação dos coeficientes de sensibilidade

Os coeficientes de sensibilidade são, por definição, a primeira derivada da variável dependente em relação à variável que se deseja determinar:

$$\frac{\partial \hat{T}_j(\hat{q}'')}{\partial \hat{q}_i''} \equiv X_{ji}. \quad (3.40)$$

Neste caso, o coeficiente de sensibilidade é a derivada da temperatura  $T_i$  em relação ao fluxo de calor,  $q_i''$ . De acordo com Ozisik (1993), os sensores devem estar localizados onde as leituras de temperatura se mostrem mais sensíveis às mudanças de fluxo. Um pequeno valor deste coeficiente indica pouca sensibilidade da variável dependente em relação ao parâmetro desconhecido. Em tais casos o PI se torna muito suscetível a erros de medição. Portanto, para determinar os melhores locais para os sensores é necessário examinar os efeitos das medições e seus coeficientes de sensibilidade.

Quando os coeficientes de sensibilidade são funções dos parâmetros a serem estimados, então o problema resultante é não linear. Neste trabalho, como os coeficientes de sensibilidade não são funções dos parâmetros a serem estimados, o problema direto associado a esse PI é linear. Nesse caso os coeficientes de sensibilidade podem ser determinados pelo teorema de Duhamel (BECK *et al.* 1985).

A solução do problema direto pelo teorema de Duhamel torna-se:

$$T(x,t) = \int_{\lambda=0}^t q''(\lambda) \frac{\partial \phi(x,t-\lambda)}{\partial t} d\lambda, \quad (3.41)$$

onde  $\phi(x,t)$  é a solução do problema auxiliar a seguir:

$$\frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \rho c_p \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad R_i \leq r \leq R_o, \quad (3.42)$$

$$-k \frac{\partial \phi}{\partial r} = 1 \quad r = R_i \quad t > 0, \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad r = R_o \quad t > 0, \quad (3.44)$$

$$T = 1 \quad t = 0 \quad R_i \leq r \leq R_o, \quad (3.45)$$

O teorema de Duhamel dado pela equação (3.41) pode ser escrito de uma forma alternativa por:

$$T(x,t) = \int_{\lambda=0}^t q''(\lambda) \frac{\partial \phi(x,t-\lambda)}{\partial \lambda} d\lambda. \quad (3.46)$$

Uma vez que:

$$\frac{\partial \phi(x,t-\lambda)}{\partial t} = - \frac{\partial \phi(x,t-\lambda)}{\Delta \lambda}. \quad (3.47)$$

A integral da equação (3.46) pode ser discretizada:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^M q_n \frac{\phi(x,t_M - \lambda_{n-1}) - \phi(x,t_M - \lambda_n)}{\Delta \lambda} \Delta \lambda, \quad (3.48)$$

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^M q_n \left[ \phi(x,t_{M-(n-1)}) - \phi(x,t_{M-n}) \right], \quad (3.49)$$

o qual pode ser mais compactamente escrito por:

$$T_n = \sum_{n=1}^M q_n \Delta\phi_{M-n} \quad n = 1, 2, \dots, M, \quad (3.50)$$

onde  $q_n$  é avaliado nos instantes  $(n-1/2)\Delta t$ . A equação (3.50) pode ser escrita na forma matricial por:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ T_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\phi_0 & & & & \\ \Delta\phi_1 & \Delta\phi_0 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \Delta\phi_0 & \\ \Delta\phi_{M-1} & \cdots & \cdots & \Delta\phi_1 & \Delta\phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ q_M \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

onde  $\Delta\phi_i = \phi_{i+1} - \phi_i$  e  $\phi_i \equiv \phi(x, t_i)$ . Portanto,  $\phi_i$  representa o aumento de temperatura no sólido por aumento unitário de fluxo térmico. Conclui-se que a matriz de sensibilidade é a matriz de coeficientes da equação (3.50):

$$X_{ij} = \begin{bmatrix} \Delta\phi_0 & & & & \\ \Delta\phi_1 & \Delta\phi_0 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \Delta\phi_0 & \\ \Delta\phi_{M-1} & \cdots & \cdots & \Delta\phi_1 & \Delta\phi_0 \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

Os coeficientes que compõem a matriz de sensibilidade são determinados a partir da solução do problema auxiliar. O problema auxiliar neste trabalho foi resolvido numericamente pelo método dos volumes finitos. A metodologia abordada foi implementada em linguagem FORTRAN.

### 3.2.5 Hipóteses de erros

Assume-se que o erro apresentado pelo sistema de medição possui as seguintes características (VELHO, 2016), (OZISIK, 1993):

1. É aditivo, ou seja;

$$Y_i = T_i + \xi_i \quad 3.53$$

onde  $Y_i$  é a temperatura medida,  $T_i$  é a temperatura sem erro e  $\xi$  é o erro. O índice  $i$  refere-se ao instante em que a medida é realizada.

2. É independente ou não correlata;

Duas medidas de erro,  $\xi_i$  e  $\xi_j$ , para  $i \neq j$ , são ditas independentes ou não correlatas se a covariância entre elas é zero, ou seja:

$$\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = E\left[(\xi_i - E(\xi_i)) - (\xi_j - E(\xi_j))\right] = 0, \quad 3.54$$

onde o operador  $E(\cdot)$  é o operador do valor esperado e  $\text{cov}$  é a covariância.

3. Possui distribuição normal ou gaussiana;

$$F(\xi_i) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\xi_i^2}{2\delta^2}\right), \quad 3.55$$

onde  $\delta$  é a covariância e  $F$  é a função normal.

A solução dada pelo método de mínimos quadrados será de máxima verossimilhança (VELHO, 2016), ou seja, será a solução mais provável do sistema, quando o erro apresentar as características listadas anteriormente.

### 3.2.6 Análise da estabilidade

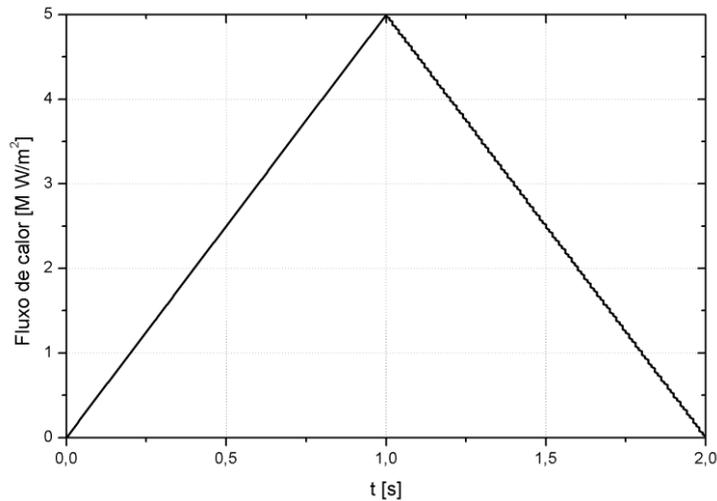
Para avaliar quão acurada pode ser a determinação do fluxo de calor  $q''(t)$  utilizando-se a abordagem anteriormente apresentada, um problema hipotético será analisado.

Considere a mesma geometria apresentada na FIGURA 3.1. Supondo que o fluxo de calor  $q''(t)$  que atinge a parede do tubo em  $r = R_i$ , escolhido de forma arbitrária, tem duração de 2 segundos, é conhecido e dado em MW/m<sup>2</sup> pela seguinte função:

$$q''(t) = \begin{cases} 5.t & 0 \leq t \leq 1 \\ -5.t + 10 & 1 < t \leq 2 \end{cases}, \quad (3.56)$$

A equação (3.56) mostra a função do fluxo de calor que deveremos obter pela aplicação da metodologia de PI. Esse fluxo de calor conhecido denominaremos fluxo de calor exato, pode ser visto na FIGURA 3.3.

FIGURA 3.3 - PERFIL TEMPORAL DO FLUXO DE CALOR UTILIZADO NO PROBLEMA HIPOTÉTICO



FONTE: A AUTORA (2016).

Considere as características e propriedades do material conhecidos e constantes, mostrados na TABELA 3.1 (CALLISTER, 2000).

TABELA 3.1- DADOS DO MATERIAL E DIMENSÕES UTILIZADOS NO PROBLEMA HIPOTÉTICO.

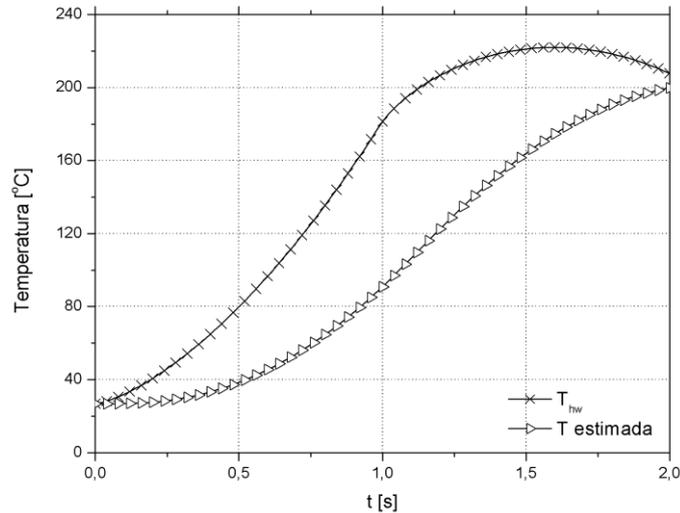
Material: Tubo de alumínio ABNT 6061-T5
Temperatura inicial: 300K
Massa específica: 2700,0 [kg/m <sup>3</sup> ]
Calor específico: 896,0 [J/kg.K]
Condutividade térmica: 180,0 [W/m.K]
Raio externo: 40,0 [mm]
Raio interno: 30,0 [mm]

FONTE: A AUTORA (2016).

Quando as condições de contorno são conhecidas é possível resolver o problema direto (PD), determinando-se as temperaturas nas paredes interna ( $T_{hw}$ ) e externa ( $\hat{T}$ ).

A temperatura na parede interna ( $T_{hw}$ ) e externa ( $\hat{T}$ ) em função do tempo foram determinadas pelo PD utilizando-se o fluxo exato como condição de contorno, conforme pode ser visto na FIGURA 3.4. (Na FIGURA 3.4,  $\hat{T}$  está identificada como T estimada):

FIGURA 3.4 - - TEMPERATURAS NAS PAREDES INTERNA E EXTERNA OBTIDAS PELO PROBLEMA DIRETO.



FONTE: A AUTORA (2016).

Outros dados utilizados no programa podem ser vistos na TABELA 3.2:

TABELA 3.2 - OUTROS DADOS UTILIZADOS NO PROBLEMA HIPOTÉTICO

Número de volumes de controle	10
Número de avanços no tempo	100
Formulação totalmente implícita ( $\theta$ )	1

FONTE: A AUTORA (2016).

Os dados provenientes de medições sempre contém erros, tais como imprecisões do próprio instrumento de medição, entre outros. Para examinar a estabilidade dos resultados, os dados da temperatura na parede externa  $\hat{T}$  (obtido a partir do PD) foram “poluídos”, ou seja, aos dados de temperatura foram somados valores ( $\xi$ ) obtidos aleatoriamente para simular erros experimentais, como mostra a equação (3.57). Os valores aleatórios  $\varepsilon$  foram obtidos através da geração de números pela função RANDOM do FORTRAN, que gera valores de forma randômica.

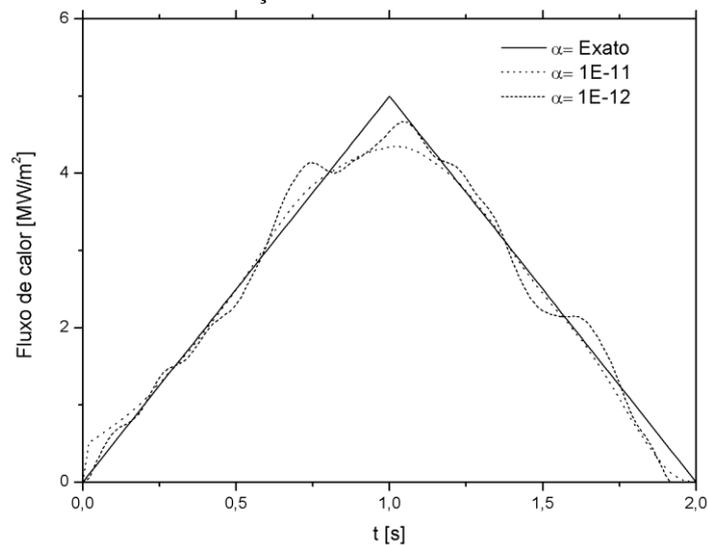
$$Y = \hat{T} + \xi, \quad (3.57)$$

e  $\xi$  é dado por:

$$-2,5 < \xi < 2,5 \quad (3.58)$$

A FIGURA 3.5 mostra o fluxo de calor obtido através de P.I., empregando-se como dado de entrada a temperatura "medida"  $Y$ . Os diferentes resultados apresentados na FIGURA 3.5 foram alcançados variando-se o parâmetro de regularização  $\alpha$ . Pode-se verificar que valores maiores desse parâmetro fazem com que a solução seja amortecida e se desvie muito da curva exata, como com  $\alpha = 1.10^{-11}$ . Com valores menores, como com  $\alpha = 1.10^{-12}$ , a solução exhibe comportamento oscilatório, o que é indesejável. Existe, portanto um valor ótimo para o parâmetro de regularização.

FIGURA 3.5 - EFEITO DO PARÂMETRO DE REGULARIZAÇÃO NA ESTABILIDADE DA SOLUÇÃO INVERSA.



FONTE: A AUTORA (2016).

### 3.2.7 Determinação do parâmetro de regularização

Existem vários métodos para determinação do parâmetro ótimo de regularização, tal como o princípio da discrepância (TIKHONOV, 1977), também conhecido como princípio da discrepância de Morozov, método *error free*, *cross validation*, entre outros (MUNIZ, 1999). O método mais amplamente utilizado é o método da discrepância, sendo que há na literatura uma grande quantidade de variações desse princípio. O método da discrepância é baseado em determinar um parâmetro cuja solução gere a mesma diferença em relação aos dados experimentais (erro) que a solução exata geraria. A norma  $L_2$  pode ser usada na determinação do parâmetro de regularização mais adequado (MUNIZ, 1999). Claramente, esta abordagem requer que os erros experimentais sejam determinados precisamente.

No presente trabalho apenas uma estimativa para os erros experimentais está disponível, portanto, por simplicidade, o parâmetro de regularização é calculado com base no princípio da discrepância da seguinte forma: busca-se um parâmetro que gere um fluxo de calor, cuja diferença em relação a solução exata seja mínimo (com base no valor da norma  $L_2$  do erro).

Considera-se que exista um valor aceitável para os erros experimentais para o problema em questão  $Ax=y$ , e que  $x \in X$  seja a solução exata para dado  $y \in Y$ , exatos. Contudo, sabe-se que apenas uma solução aproximada é possível para  $y$ , ou seja  $\hat{y}$ . Assim busca-se um parâmetro  $\alpha$  cuja solução gere um erro com norma mínima.

Um procedimento iterativo poderia ser construído. Porém não há necessidade de se determinar  $\alpha$  precisamente, visto que a influência desse parâmetro sobre os resultados pode ser negligenciado para pequenas variações do mesmo (MUNIZ, 1999).

A norma do erro é dado por:

$$L_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^M (q_i'' - \hat{q}_i'')^2}, \quad (3.59)$$

onde  $L_2$  é a norma  $L_2$ ;  $q_i''$  é o fluxo exato, fornecido pela equação (3.56);  $\hat{q}_i''$  é calculado por PI, utilizando determinado valor de  $\alpha$ ;  $i$  corresponde ao  $i$ -ésimo componente do fluxo de calor; e  $M$  é a quantidade total de componentes dos fluxos de calor.

O problema hipotético foi resolvido utilizando-se diferentes parâmetros de regularização. A norma do erro foi calculada para cada caso. Os valores podem ser vistos na TABELA 3.3e na FIGURA 3.6. Para gerar esses resultados, o erro experimental considerado foi superestimado em  $\pm 5,0^\circ\text{C}$ .

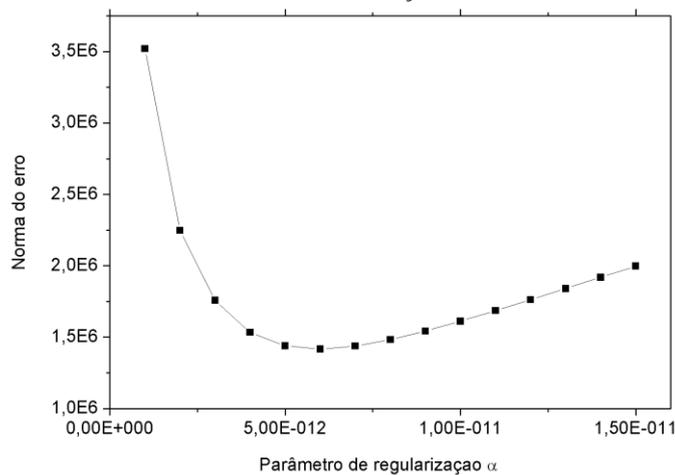
Pode-se notar que conforme os valores de parâmetro de regularização aumentam, a norma do erro diminui e depois volta a crescer de forma mais lenta.

TABELA 3.3 - PARÂMETRO DE REGULARIZAÇÃO E NORMA DO ERRO PARA VARIAÇÃO ENTRE  $\pm 5^{\circ}\text{C}$ 

Parâmetro de Regularização	Norma do erro
1.00E-12	3521815,172
2.00E-12	2247813,666
3.00E-12	1758506,239
4.00E-12	1533360,383
5.00E-12	1438452,959
6.00E-12	1416580,392
7.00E-12	1437229,367
8.00E-12	1482847,381
9.00E-12	1543139,972
1.00E-11	1612023,337
1.10E-11	1685869,812
1.20E-11	1762491,435
1.30E-11	1840552,348
1.40E-11	1919227,733
1.50E-11	1998003,787

FONTE: A AUTORA (2016).

FIGURA 3.6 - COMPORTAMENTO DA NORMA DO ERRO EM RELAÇÃO AO PARÂMETRO DE REGULARIZAÇÃO.

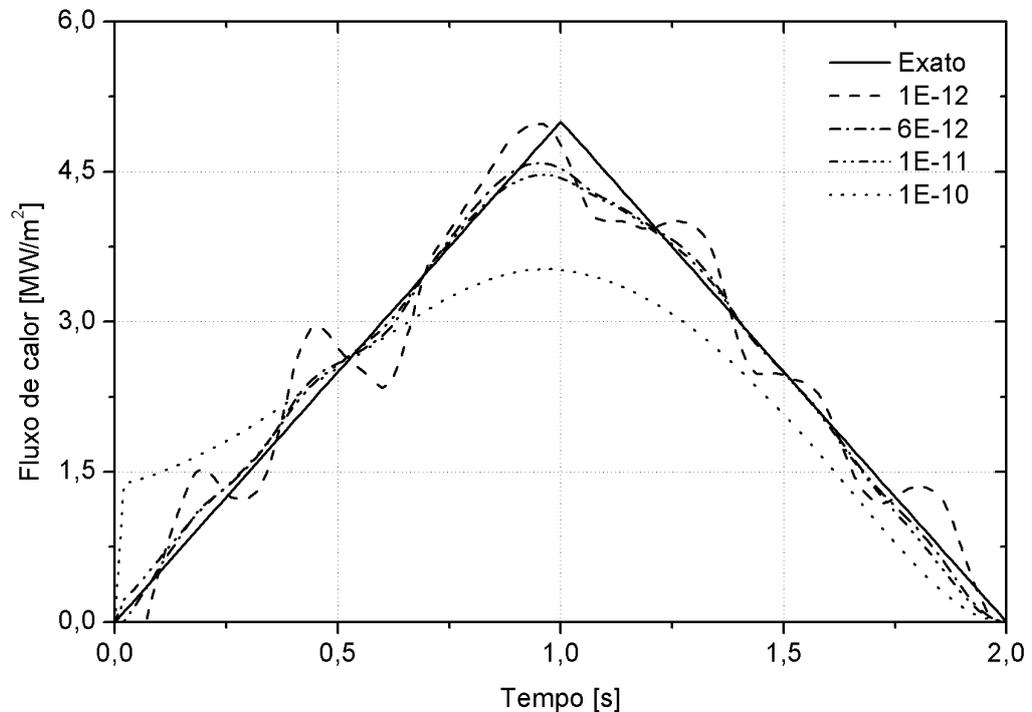


FONTE: A AUTORA (2016).

A FIGURA 3.7 mostra algumas curvas de fluxo de calor em função do tempo obtidas com diferentes parâmetros de regularização. Pode-se notar que na região de pico há uma piora na adequação das curvas. Pode-se verificar também que ocorre instabilidade na curva utilizando  $\alpha = 1.E-12$  e um distanciamento exagerado da solução exata com  $\alpha=1E-10$ . Optou-

se em utilizar o parâmetro de regularização de  $1E-11$ , que apresentou pouca oscilação e possui norma do erro próxima do valor mínimo. A FIGURA 3.7 também mostra a curva obtida com parâmetro de  $6E-12$ , que entre os parâmetros testados obteve menor erro e portanto está mais próxima da curva ótima. Pode-se notar que as curvas com parâmetro de regularização de  $6E-12$  e  $1E-11$  estão bem próximas. Como comentado anteriormente, um valor ótimo poderia ser obtido através de um procedimento iterativo, mas se busca simplesmente um parâmetro que não permita oscilações e não se distancie demasiadamente da solução ideal. O parâmetro de regularização  $1E-11$  é empregado para obter os resultados deste trabalho.

FIGURA 3.7- CURVAS UTILIZANDO DIFERENTES PARÂMETROS DE REGULARIZAÇÃO



FONTE: A AUTORA.

### 3.2.8 Fonte de erros

Pode-se dizer que problemas inversos são aqueles em que se busca a causa baseado em efeitos (VELHO, 2015). Os efeitos entretanto, tendem a ser contaminados por erros ou ruídos, causados por imprecisões no sistema de medição e/ou por limitações na modelagem, o que dificulta a obtenção precisa do parâmetro ou função que se deseja determinar (VALLE, 2009). No caso de problemas inversos, pelo fato de serem mal postos, a existência de erros mesmo

pequenos, pode alterar sensivelmente os resultados ou até mesmo invalidá-los (VALLE, 2009). As imprecisões podem ser causadas por diversos fatores. Pode-se citar:

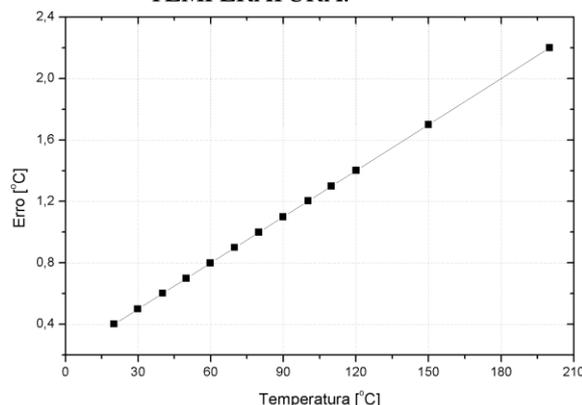
### **Erros experimentais:**

Esse tipo de erro é inerente ao sistema de medição e pode estar relacionado à conversão de sinais e calibração dos sensores.

A simples presença do sensor de temperatura pode modificar as condições térmicas no ponto e na região circunvizinha, levando a uma distribuição de temperatura diferente daquela que seria esperada caso a sonda lá não estivesse (KIMURA, 1985). Esse tipo de erro pode ser minimizado se os sensores utilizados forem pequenos (o que garante um tempo de resposta mais rápido) e que tenham propriedades térmicas semelhantes ao do material sendo medido, e que não interfiram na dissipação de calor do corpo.

O sensores de temperatura utilizados no presente trabalho são termopares tipo K, especificados pelo fabricante para a temperatura nominal de 175°C (temperatura de longo prazo). Termopares tipo K são compostos de dois materiais condutores, um deles composto de uma liga de cromo e outro, de alumínio. Com base em laudo de calibração é possível mostrar que o erro do sensor apresenta um comportamento linear com aumento de temperatura conforme FIGURA 3.8. Os últimos dois pontos foram obtidos por extrapolação.

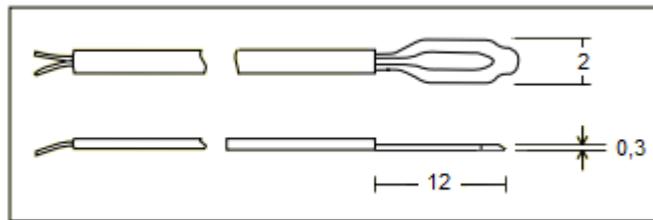
FIGURA 3.8 - COMPORTAMENTO DO TERMOPAR UTILIZADO COM A VARIAÇÃO DE TEMPERATURA.



FONTE: A AUTORA.

O termopar utilizado nos testes possui tempo de resposta na ordem de 0,3 segundos, segundo o fabricante. Este termopar não possui nenhum sistema de isolamento térmica, sendo fixado diretamente na superfície do motor foguete com fita adesiva. As dimensões, em milímetros, dos termopares podem ser vistos na FIGURA 3.9.

FIGURA 3.9 - DIMENSÕES DOS TERMOPARES UTILIZADOS (EM MM)



FONTE: A AUTORA (2016).

**Erros na modelagem:**

Há ainda os erros provenientes da modelagem do problema:

a) A condução de calor foi modelada como unidimensional. Essa hipótese é mais realista para o caso de cilindros muito longos. Quando o comprimento e o diâmetro do cilindro são comparáveis, os efeitos bi ou tridimensionais podem ser relevantes. A solução da temperatura multidimensional transiente pode ser expressa como um produto de soluções unidimensionais e é uma função dos números de Biot e Fourier (INCROPERA *et al.*, 1992), portanto dependendo desses números adimensionais e das equações envolvidas, os efeitos bi ou tridimensionais podem ser maiores ou menores.

b) A parede em  $r=R_o$  foi modelada como adiabática. O fluxo radiativo pode ser desprezado à temperaturas abaixo de 800K (BARTZ, 1992, p. 115). Nos experimentos realizados, a temperatura da parede externa, em  $r=R_o$ , atinge no máximo, cerca de 400K, portanto desconsiderar o fluxo de calor por radiação na parede externa é uma hipótese admissível.

A hipótese do fluxo de calor por convecção nulo em  $r=R_o$ , pode ser considerado em instantes iniciais, mas passa a ser maior conforme a diferença entre a temperatura da parede externa e o meio ambiente aumenta. Apesar disso, o fluxo de calor causado pela convecção natural, em termos relativos, é bem inferior quando comparado ao fluxo de calor causado pela combustão.

c) Propriedades físicas constantes. A condutividade e o calor específico do aço AISI 4340 e da liga de alumínio 6061-T5 foram consideradas constantes. Como comentado em capítulos anteriores, quando as propriedades são independentes da temperatura, o problema inverso pode ser modelado como linear, caso contrário, uma abordagem não linear deve ser utilizada.

Não é possível calcular o erro associado à hipótese de propriedades constantes pois as equações que relacionam as propriedades com a temperatura não estão disponíveis na

literatura para os materiais dos motores testados, que são o aço 4340 e a liga de alumínio 6061-T5. Entretanto, ligas binárias com composição semelhante ao do aço 4340 (TABELA 3.4) e à liga de alumínio 6061-T5 (TABELA 3.5), podem ser utilizadas para analisar o comportamento da condutividade. O comportamento da condutividade com a temperatura das ligas binárias ferro-níquel e alumínio-magnésio estão no Anexo A. Pode-se verificar que a hipótese de condutividade constante é razoável para essas ligas na faixa entre 300 e 500K.

TABELA 3.4- COMPOSIÇÃO AÇO 4340.

<b>Componente</b>	<b>% em peso</b>
C	0,37-0,43
Cr	0,7-0,9
Fe	96
Mn	0,7
Mo	0,2-0,3
Ni	1,83
P	Máximo: 0,035
S	Máximo: 0,04
Si	0,23

FONTE: ASM(2016).

TABELA 3.5 - COMPOSIÇÃO LIGA 6061-T5.

<b>Componente</b>	<b>% em peso</b>
Al	Máximo: 97,5
Cr	Máximo: 0,1
Cu	Máximo: 0,1
Fe	Máximo: 0,35
Mg	0,45-0,9
Mn	0,1
Si	0,2-0,6
Ti	Máximo: 0,1
Zn	Máximo: 0,1

FONTE: ASM (2016).

### **Erros Numéricos**

Existe ainda os erros numéricos, causados pelos erros de discretização, de iteração e de arredondamento (MARCHI & SCHNEIDER, 2004). O erro de discretização resulta das aproximações numéricas feitas na discretização do modelo matemático, tais como o *CDS* (*Central Differencing Scheme*), (VERSTEEG & MALALASEKERA, 2007), que foi utilizado

para obter o sistema de equações (equação (3.3)). O erro de discretização pode ser calculado como a diferença entre a solução numérica e a solução analítica, caso esta última fosse obtida. Como espera-se que o erro de discretização seja muito menor que os erros de modelagem e experimental, por simplicidade, optou-se em resolver o problema auxiliar, dado pelas equações (3.42), (3.43), (3.44) e (3.45) numericamente.

O erro de iteração resulta da utilização métodos iterativos para resolver um sistema de equações, tais como o método de Gauss Seidel (MARCHI & SCHNEIDER, 2004). Esse método foi utilizado neste trabalho para resolver o sistema de equações para cálculo do fluxo inverso resultante, equação (3.39).

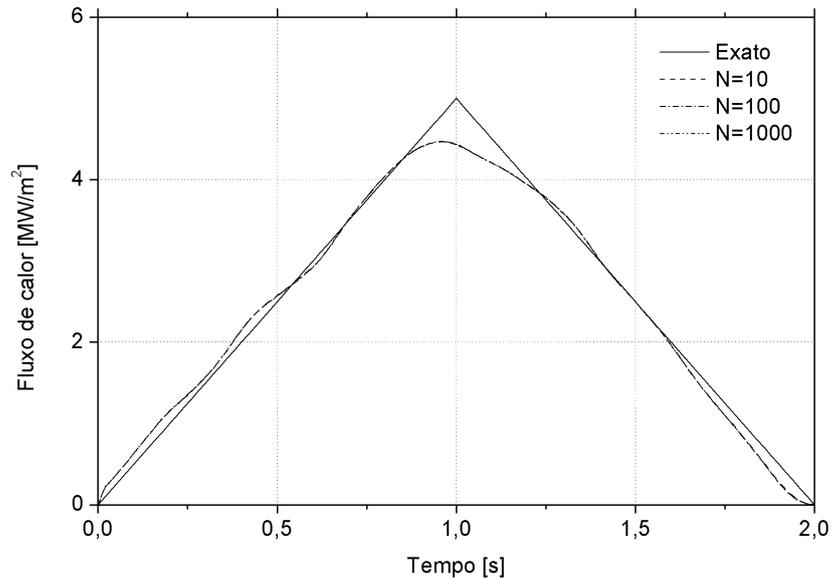
O erro de arredondamento é o erro causado pela representação finita dos números reais nas computações. Esse tipo de erro é definido pela diferença entre a solução analítica exata e a solução numérica, sem os erros de discretização e iteração (MARCHI & SCHNEIDER, 2004). O valor do erro de arredondamento aumenta com: o aumento do número de nós da malha, pois aumenta o número de cálculos realizados; com cancelamento subtrativo; ou cálculos envolvendo valores muito pequenos e grandes.

Erros numéricos estão presentes na solução do presente trabalho, contudo, espera-se que os erros numéricos sejam muito menores que os erros de modelagem e experimentais, portanto os erros de numéricos não devem interferir significativamente no resultado do problema inverso.

### 3.2.9 Efeitos da quantidade de volumes e avanços no tempo

Considere o mesmo problema hipotético da Seção 3.2.6. Para avaliar o efeito da quantidade de volumes de controle, supôs-se que a quantidade de avanços no tempo não influenciaria o resultado. O problema hipotético foi resolvido, então, com o valor fixo de 100 avanços no tempo, variando-se apenas a quantidade de volumes  $N$ . Pode se notar, pela FIGURA 3.10, que a variação nesse parâmetro não causa efeito na solução do fluxo de calor.

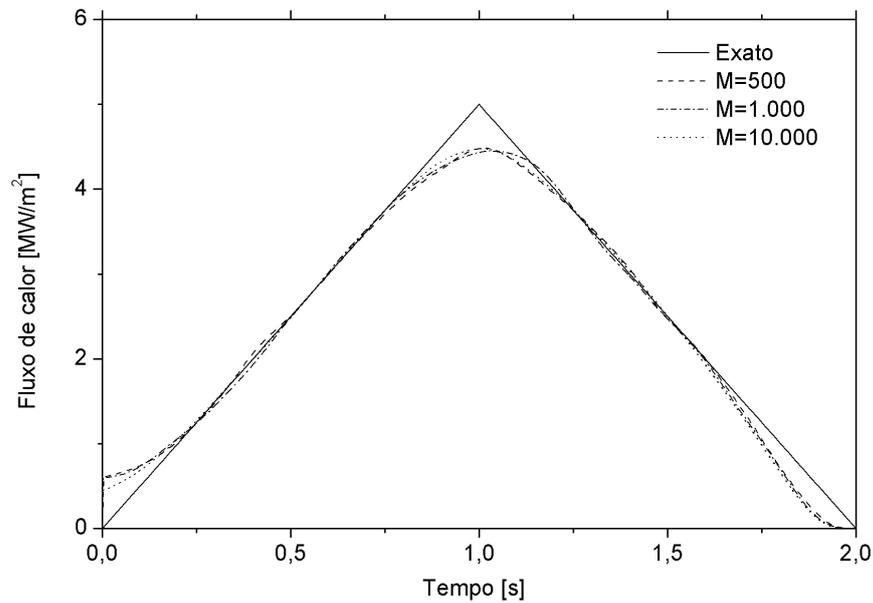
FIGURA 3.10 - EFEITO DA QUANTIDADE DE VOLUMES PARA O PROBLEMA HIPOTÉTICO, COM  $M=100$  (FIXO).



FONTE: A AUTORA

Para avaliar o efeito da quantidade de avanços no tempo, o problema hipotético foi resolvido com diferentes incrementos de tempo ( $M$ ), conforme mostra a FIGURA 3.11, mantendo-se a quantidade de volumes ( $N$ ) constante e igual a 10. A quantidade total de incrementos no tempo aumenta o tamanho da matriz de sensibilidade, equação (3.52), afetando o tempo de processamento. Pode-se notar, pela FIGURA 3.11, que para os incrementos mostrados há pouca variação. O tempo de ensaio utilizado nos ensaios é sempre maior que 2,5 segundos, que corresponde a 500 incrementos no tempo, portanto não se espera influência nos resultados com relação a quantidade de incrementos no tempo. O valor de 10 volumes foi adotado em todas as soluções para obter o fluxo de calor no presente trabalho uma vez que o número de volumes não influencia o resultado.

FIGURA 3.11 - EFEITO DA QUANTIDADE DE INCREMENTOS NO TEMPO,  $M= 500$ ,  $M=1000$  E  $M=10000$ , COM  $N=10$  (FIXO).



FONTE: AAUTORA (2016).

Como comentado, a quantidade total de incrementos no tempo aumenta o tamanho da matriz de sensibilidade, alterando sensivelmente o tempo de processamento. A TABELA 3.6 mostra o tempo de processamento do problema inverso em relação a quantidade de incrementos de tempo. O tempo de processamento alto está associado a utilização do método de Gauss Seidel para resolução do sistema de equações (equação (3.38)). Uma vez que acima da diagonal principal da matriz de sensibilidade todos os valores são nulos, não é necessário utilizar um método iterativo para resolução do sistema de equações.

TABELA 3.6- TEMPO DE PROCESSAMENTO DO PROBLEMA INVERSO.

<b>Quantidade de incrementos no tempo (<math>M</math>) para <math>n=10</math></b>	<b>Tempo de processamento [s]</b>
100	0,0468
500	2,418
1000	19,267
10.000	11372,393
20.460	2,5 dias aproximadamente

FONTE: A AUTORA (2016).

### **Efeito da radiação na medição com termopar**

A medição da temperatura de gases com termopar pode apresentar muitas erros; entre eles, em especial, está o erro devido à radiação do sensor para as vizinhanças (KIM *et al.*, 2012). A temperatura na qual o termopar indica geralmente não é temperatura do gás, mas sim a temperatura que resulta do calor transferido do gás e das vizinhanças para o sensor por radiação, contra o balanço de calor transferido do sensor por radiação, convecção para o gás e para as vizinhanças; e também por condução do sensor para seu suporte (DANIELS, 1968).

O montante de temperatura que o sensor difere da temperatura verdadeira de gás está diretamente relacionada ao montante do balanço de calor transferido do balanço de calor se toda a vizinhança estivesse a mesma temperatura. Se toda vizinhança estivesse à mesma temperatura do gás, o sensor indicaria a temperatura do gás. A quantidade de temperatura que o sensor indica e que difere da temperatura verdadeira é denominada erro; mas não se trata de um erro do sensor, mas um erro devido à transferência de calor dentro do sistema.

Muitos fatores devem ser considerados na medição de gases:

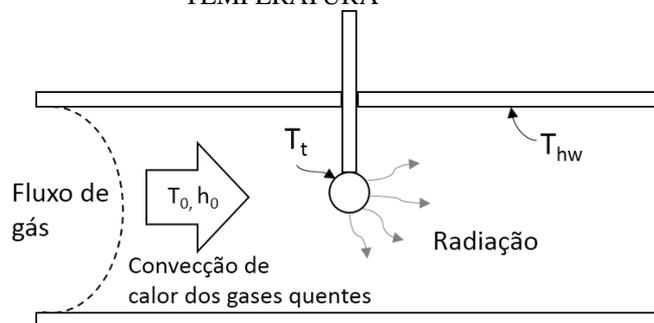
- a) A transferência de calor radiativa entre o sensor e a vizinhança ocorre quando a temperatura desta vizinhança é diferente da temperatura do gás, ou seja, se a vizinhança estiver com uma temperatura maior que a do gás o termopar irá “ler” uma temperatura maior do que a temperatura verdadeira do gás. Se a vizinhança estiver com uma temperatura menor que a do gás, o termopar irá “ler” uma temperatura menor que a temperatura verdadeira do gás. A adição de uma proteção ao redor do termopar pode reduzir esse o devido à radiação, mas não eliminá-lo pois a proteção ao redor do sensor também se torna uma fonte para transferência de calor por radiação.
- b) A transferência de calor radiativa entre o sensor e os gases é particularmente importante no caso de gases que contenham moléculas ou partículas luminosas. Este tipo de transferência de calor tem pouca efeito pois a maioria dos gases tais como H<sub>2</sub>O e CO<sub>2</sub> (resultantes da combustão do KNSu) são não luminosos (DANIELS, 1968).
- c) Transferência de calor por convecção (em alguns casos condução) entre o sensor e o gás é o principal processo pelo qual o sensor passa até alcançar a temperatura do gás. Se este fosse o único tipo de transferência de calor (ou seja, senão houvesse radiação) o termopar sempre mostraria a temperatura verdadeira do gás caso o sensor fosse rápido o suficiente. Esse tipo de transferência de calor varia com a

velocidade do gás passando sobre o sensor. Quanto maior a parcela desse tipo de transferência de calor, mais perto da temperatura verdadeira do gás estará a leitura do termopar. Esse tipo de transferência de calor decresce com a diminuição da pressão, tornando-se zero no vácuo.

- d) Transferência de calor por condução do sensor para o suporte ou cabo pode ser uma das principais fontes de erros dependendo do projeto do sistema de medição. Este tipo de transferência de calor aumenta quando a condutividade térmica do sensor aumenta.
- e) O impacto das moléculas de gás sobre o sensor causa erro de medição devido ao aquecimento. Para gases a velocidades baixas (tais como 10km/h) esses erros podem ser desprezados, porém torna-se importante a altas velocidades (tal como veículos espaciais).
- f) O tempo de resposta do sensor introduz um erro na medição quando o gás muda repentinamente de temperatura. Esse tipo de erro pode ser reduzido com a redução do tamanho do termopar.

Particularmente, a transferência de calor por radiação (discutido no item a)) entre o termopar (colocado internamente, dentro da câmara de combustão) e as vizinhanças (superfície interna do motor foguete) pode afetar significativamente a leitura do sensor, especialmente quando as medições de temperatura são realizadas enquanto as vizinhanças estão a temperatura mais alta ou mais baixa que o gás (FIGURA 3.12).

FIGURA 3.12 - EFEITO DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR RADIAÇÃO NA MEDIÇÃO DE TEMPERATURA



FONTE: Adaptado de KIM *et al.* (2012)

Desconsiderando-se as perdas de calor por condução do sensor para o cabo, e assumindo que a transferência de calor por radiação da vizinhança para o gás é desprezível, pode-se realizar um balanço de energia na superfície do termopar. É possível mostrar que a

energia transferida por radiação é igual a energia transferida por convecção pelos gases, conforme equação (3.60) (KIM *et al.*, 2012).

$$h_t(T_{0,corr} - T_t) = \varepsilon\sigma(T_t - T_{hw}), \quad (3.60)$$

onde  $h_t$  é o coeficiente de transferência de calor por convecção entre o termopar e o gás,  $T_{0,corr}$  é a temperatura do gás corrigida,  $T_t$  é a temperatura na superfície do termopar,  $T_{hw}$  é a temperatura da parede do termopar,  $\varepsilon$  é a emissividade da superfície (com valores entre 0 e 1) e  $\sigma$  é a constante de Stefan-Boltzmann, cujo valor é  $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ .

Para determinar a temperatura corrigida do gás dentro da câmara de combustão deve-se calcular o coeficiente de transferência de calor por convecção  $h_t$  entre o termopar e os gases. O termopar utilizado nos testes dos motores MTP's pode ser modelado como uma placa plana de 12 mm de comprimento, com escoamento longitudinal. O coeficiente de transferência de calor por convecção pode então ser determinado pelo número de Nusselt (INCROPERA e DeWitt, 1992):

$$Nu = 0.664 Re^{1/2} Pr^{1/3}, \quad (3.61)$$

onde  $Re$  e  $Pr$  são os números adimensionais de Reynolds e Prandtl respectivamente. A equação (3.61) é válida para escoamentos laminares, ou seja escoamentos com  $Re \leq 5 \cdot 10^5$ , que é o caso. Os números do Reynolds e Prandtl são funções das propriedades do fluido e geometria pelas Equações (3.62) e (3.63), respectivamente (INCROPERA e DeWITT, 1992):

$$Re = \frac{\rho u L}{\mu}, \quad (3.62)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do gás,  $u$  é a velocidade do escoamento,  $L$  é o comprimento do termopar, 12 mm, modelado como uma placa plana e  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do gás.

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k}, \quad (3.63)$$

onde  $c_p$  é o calor específico do gás e  $k$  é a condutividade do gás.

O coeficiente de transferência de calor por convecção entre superfície do termopar e o gás pode ser determinado através da equação (3.64) (INCRPERA e DeWITT, 2002):

$$h_t = \frac{Nu.k}{L}, \quad (3.64)$$

A condutividade e a viscosidade do gás foram determinadas com as equações (3.87) e (3.85) respectivamente, conforme será descrito na Seção 3.3.3. O calor específico do gás foi determinado através de tabelas termodinâmicas, considerando o calor específico de cada espécie da mistura do gás. Os valores da condutividade, viscosidade e calor específico são mostradas na TABELA 3.7.

TABELA 3.7– PROPRIEDADES DO GÁS RESULTANTES DA COMBUSTÃO DO MTP.

<b>Propriedade</b>	<b>MTP1</b>	<b>MTP12</b>	<b>MTP13</b>
<b>k [W/(mK)]</b>	0,03744	0,04076	0,04208
<b>c<sub>p</sub> [J/(kgK)]</b>	3272,7614	3336,0273	3361,4062
<b>μ [Pa.s]</b>	2,1061E-05	2,2541E-05	2,3128E-05
<b>U [m/s]</b>	10,5429	11,1408	11,092
<b>ρ [kg/m<sup>3</sup>]</b>	0,34571	0,31368	0,3028
<b>Pr</b>	1,84091	1,84484	1,84732
<b>Nu</b>	37,08544	35,12584	34,01104
<b>Re</b>	2076,7424	1860,4212	1742,6449
<b>ε</b>	0,155	0,17	0,17
<b>h [W/(m<sup>2</sup>K)]</b>	115,7128	119,3134	119,2767

FONTE: AAUTORA (2016).

A velocidade foi determinada através da equação (3.75) e a massa específica foi determinada pela lei dos gases ideais, equação (3.77), conforme será descrito na Seção 3.3.1.

O termopar utilizado nos teste é do tipo K, constituído de dois fios metálicos de liga de níquel, denominadas alumel e cromel. A liga cromel é constituída 10% de cromo e 90% de níquel e a liga alumel é constituída de 95% de níquel e 5% de outros compostos, tais como manganês, silício e alumínio (WANG, 1990). Devido ao alto teor de níquel, o sensor foi modelado com composição totalmente deste material.

A emissividade mostrada na TABELA 3.7 é do níquel, conforme Incropera e DeWitt (1992). Em posse do coeficiente de transferência de calor por convecção  $h_t$ , da temperatura do termopar  $T_t$ , da temperatura da parede do motor  $T_{hw}$ , da emissividade do material  $\varepsilon$  do

termopar, é possível calcular a temperatura  $T_{0,corr}$ , que corresponde à temperatura corrigida pela equação (3.60).

As temperaturas do gás teórica, medida e corrigida podem ser vistas na TABELA 3.8. A temperatura teórica  $T_{0,teórico}$  corresponde a temperatura adiabática de chama e foi determinada através do aplicativo ProPEP (ROCKETWORKBENCH, 2016). As temperaturas da parede  $T_{hw}$  foram determinadas utilizando o método inverso.

TABELA 3.8– TEMPERATURAS NA CÂMARA DE COMBUSTÃO TEÓRICA, MEDIDA E CORRIGIDA.

<b>Temperatura</b>	<b>MTP1</b>	<b>MTP12</b>	<b>MTP13</b>
<b><math>T_{0,teórico}</math> [°C]</b>	1210,99	1210,78	1210,83
<b><math>T_{0,medido}</math> [°C]</b>	844,18	1292,19	1232,79
<b><math>T_{0,corr}</math> [°C]</b>	960,54	1773,46	1644,76
<b><math>T_{hw}</math> [°C]</b>	81,01	84,65	95,02

FONTE: AAUTORA (2016).

Pode-se notar que a temperatura de câmara teórica  $T_{0,teórico}$  apresenta valores abaixo da temperatura medida nos testes com MTP 12 e 13. Isso possivelmente denota erros de medição pois a temperatura adiabática de chama marca um limite superior para a temperatura de câmara. Como esperado, a temperatura corrigida possui valores superiores às temperaturas medidas, ou seja, a temperatura do termopar mede uma temperatura inferior a temperatura verdadeira do gás devido à radiação da parede.

A determinação da temperatura verdadeira  $T_{0,corr}$  pela abordagem apresentada possui grandes incertezas associadas ao coeficiente de transferência de calor por convecção e à emissividade do material. Tanto a emissividade quanto o coeficiente de convecção interferem sensivelmente nos resultados. Há grandes incertezas associadas também à medição com o termopar. Como comentado, a temperatura dos gases teórica está abaixo da temperatura medida para o MTP 12 e 13. As causas para esse erro pode estar associado ao posicionamento do termopar (muito próximo à frente de chama), logo o termopar não estaria medindo a temperatura dos gases; e erros de medição (erros do sensor a altas temperaturas).

### 3.3 TEMPERATURA DE CÂMARA ( $T_0$ )

A temperatura na câmara de motor-foguete é a temperatura na qual a combustão ocorre. Sua determinação é importante para o projeto de sistema de proteção e para a seleção de materiais da parede do motor-foguete. A obtenção da temperatura na câmara de combustão é comumente feita de modo teórico, através de softwares tais como CEA, PROPEP (NAKKA, 2016). Esses softwares calculam, na realidade, a temperatura adiabática de chama, que consiste na temperatura alcançada com a hipótese de processo de combustão adiabático, ou seja, considera-se que todo o calor gerado é transformado em entalpia dos produtos de combustão, sem nenhuma perda de calor, (como por exemplo radiação e convecção) ao ambiente ou perda por dissociação. Como a temperatura de chama adiabática é uma abstração, (pois nenhum processo real pode ser adiabático), esse valor é utilizado como um referencial.

A combustão é um fenômeno complexo, no qual substâncias químicas do propelente, chamadas de reagentes, participam de uma reação exotérmica, dando origem aos produtos, representado geralmente por uma equação química (MORAN e SHAPIRO, 2002). No caso apresentado, os reagentes da reação química do propelente utilizado são a sacarose ( $C_{12}H_{22}O_{11}$ ) e o nitrato de potássio ( $KNO_3$ ). A mistura desses dois propelentes é comumente conhecida como KNSu, sendo que a proporção de oxidante e combustível utilizada foi, respectivamente de, 65% de nitrato de potássio e 35% de sacarose. Há pelo menos doze produtos da combustão envolvendo o propelente KNSu puro, entre eles, o dióxido de carbono, oxigênio e vapor de água (ROCKETWORKBENCH, 2016). Se o propelente contém outros elementos, outros tipos de produtos serão formados, modificando a reação de combustão, as condições de equilíbrio químico e finalmente a temperatura de combustão. Na prática, não é possível garantir a pureza de propelentes comerciais. Isso significa que mais erros podem ser associados ao uso de modelos teóricos.

Um dos objetivos do presente trabalho é melhorar a estimativa para a temperatura na câmara de combustão. Isso será feito utilizando-se os resultados do problema inverso, ou seja, o fluxo de calor em função do tempo,  $q''(t)$  e a temperatura da parede  $T_w$  (do lado em que ocorre a combustão). Se esses dados estiverem disponíveis pode-se calcular a temperatura de câmara,  $T_0$ , através de um processo iterativo. O procedimento em questão é baseado em calcular os fluxos de calor de calor por radiação e convecção através de equações disponíveis na literatura. Esses fluxos de calor são somados e o resultado é comparado com o fluxo obtido pelo método inverso (PI). Caso os fluxos teórico e por PI sejam coincidentes, dentro de um

limite aceitável de erro, o procedimento para, caso contrário, a temperatura de câmara deve ser ajustada e os fluxos de calor teóricos devem ser novamente calculados.

Na próxima seção será mostrado como os fluxos de calor teóricos serão calculados.

### 3.3.1 Fluxos de calor teóricos

- **Fluxo de calor por convecção:**

O fluxo de calor por convecção é dado pelo pela lei do resfriamento de Newton (INCROPERA e DeWITT, 1992), ou seja:

$$q''_{conv} = h_0(T_{aw} - T_{hw}), \quad (3.65)$$

onde  $q''_{conv}$  é o fluxo de calor por convecção,  $h_0$  é o coeficiente de transferência de calor por convecção,  $T_{hw}$  é a temperatura da parede e  $T_{aw}$  representa a temperatura de parede adiabática, dada pela seguinte expressão (SHAPIRO, 1953).

$$T_{aw} = T_0 \left[ 1 + rec \frac{(\gamma - 1)}{2} M^2 \right], \quad (3.66)$$

onde  $\gamma$  é a razão entre calores específicos à pressão constante e a volume constante,  $M$  é o número de Mach local,  $rec$  é o fator de recuperação (SHAPIRO, 1953). Para escoamentos turbulentos é fornecido por:

$$rec = Pr^{1/3}. \quad (3.67)$$

O coeficiente de transferência por convecção será calculado pela equação de Bartz (BARTZ, 1957).

$$h_0 = \frac{0,026}{D_t^{0,2}} \left( \frac{\mu^{0,2} c_p}{Pr^{0,6}} \right)_0 \left( \frac{P_0}{C^*} \right)^{0,8} \left( \frac{D_t}{r_c} \right)^{0,1} \left( \frac{S^*}{S} \right)^{0,9} \varphi, \quad (3.68)$$

onde  $D_t$  é o diâmetro hidráulico da seção da tubeira,  $S$  é a área local da seção transversal ao escoamento,  $S^*$  é a seção transversal da tubeira na região da garganta,  $Pr$  é o número de Prandtl,  $r_c$  é o raio de curvatura da garganta,  $C^*$  é a velocidade característica do escoamento e o subíndice 0 indica propriedade em condição de estagnação. O raio de curvatura da garganta  $r_c$  utilizado foi de 0,5 mm, que corresponde ao valor chanfrado na região da garganta dos motores utilizados.

A velocidade característica  $C^*$  pode ser obtida através da seguinte expressão (HUZEL e HUANG, 1992).

$$C^* = \frac{P_0 S^*}{\dot{m}} = \frac{P_0 S^*}{\rho u S}. \quad (3.69)$$

Considerando a vazão mássica  $\dot{m}$  dos gases escoando igual a vazão mássica gerado pela combustão,  $\dot{m}_g$  (NAKKA, 2015):

$$\dot{m}_g = S \rho_p r, \quad (3.70)$$

onde  $\rho_p$  é a massa específica do grão propelente e  $r$  é a taxa de queima, dada pela equação (3.71) (MARCHI, 2016). Essa expressão pode ser gerada através da taxa de queima experimental, uma vez conhecido o tempo e o comprimento do grão propelente, e a pressão de câmara  $P_0$ , calculado. Unidade em mm/s.

$$r = 2,66 \cdot 10^{-5} P_0^{0,39}. \quad (3.71)$$

O termo  $\varphi$  presente na equação (3.68) é um fator de correção devido às variações das propriedades na camada limite. A expressão para cálculo desse fator pode ser encontrado em Bartz (1957).

$$\varphi = \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{T_{hw}}{T_0} \left[ 1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2 \right]^{\frac{\omega}{5}-0,8} \left[ 1 + \frac{(\gamma-1)}{2} M^2 \right]^{-\omega/5} \right\}, \quad (3.72)$$

onde o parâmetro  $\omega$  é um expoente da temperatura na equação da viscosidade, vale 0,6.

A razão entre calores específicos é determinada pela seguinte expressão:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_p - R}, \quad (3.73)$$

onde  $R$  é a constante da mistura de gases e  $c_p$  é o calor específico à pressão constante.

O número de Mach é dado por:

$$M = \frac{u}{c}. \quad (3.74)$$

A velocidade do escoamento,  $u$ , é dada por:

$$u = \frac{\dot{m}_g}{\rho S}, \quad (3.75)$$

e  $c$  é a velocidade sônica local, dada por:

$$c = \sqrt{\gamma RT}, \quad (3.76)$$

onde  $T$  é a temperatura local do fluido.

A massa específica  $\rho$  é fornecida pela equação geral dos gases:

$$\rho = \frac{P_0}{RT_0}. \quad (3.77)$$

- **Fluxo de calor radiativo**

Para o fluxo radiativo, os gases monoatômicos e os diatômicos simétricos, como o  $H_2$  e o  $O_2$  não possuem uma emissão significativa na faixa do infravermelho (SUTON, 2001). Os gases que contribuem significativamente são o  $CO_2$  e o  $H_2O$ . O fluxo radiativo, considerando essas duas espécies é dado por (BARRÈRE, 1960):

$$q''_{rad,CO_2} = 0,076(P_{CO_2} L_e)^{1/3} \left[ \left( \frac{T_0}{100} \right)^{3,5} - \left( \frac{T_{hw}}{100} \right)^{3,5} \right], \quad (3.78)$$

$$q''_{rad,H_2O} = \frac{3,5}{9845} P_{H_2O}^{4/2} L_e^{3/5} \left[ \left( \frac{T_0}{100} \right)^{3,0} - \left( \frac{T_{hw}}{100} \right)^{3,0} \right], \quad (3.79)$$

onde  $q''_{rad}$  é o fluxo de calor por radiação, composto pela soma dos fluxos das duas espécies, em kcal/cm<sup>2</sup>;  $P_{CO_2}$  e  $P_{H_2O}$  são as pressões parciais de  $CO_2$  e  $H_2O$  na mistura gasosa, em kgf/cm<sup>2</sup>; e  $L_e$  é o comprimento equivalente da câmara, em metros. O fluxo de calor é dado por:

$$q''_{rad} = q''_{rad,CO_2} + q''_{rad,H_2O}. \quad (3.80)$$

- **Fluxo de calor total**

O fluxo total é dado pela soma dos fluxos de calor radiativo e convectivo:

$$q'' = q''_{cond} + q''_{rad}, \quad (3.81)$$

onde  $q''_{cond}$  é o fluxo de calor por condução e  $q''_{rad}$  é o fluxo de calor por radiação.

### 3.3.2 Outro modelo para o fluxo de calor radiativo

O fluxo de calor por radiação pode também ser modelado pela seguinte relação (HUZEL e HUANG, 1992):

$$q''_{rad} = \bar{\varepsilon} \sigma (T_0^4 - T_{hw}^4), \quad (3.82)$$

onde  $\bar{\varepsilon}$  é a emissividade entre a parede e a mistura de gases, podendo ser obtido através da seguinte relação:

$$\bar{\varepsilon} = \left( \frac{1}{\varepsilon_{hw}} + \frac{1}{\varepsilon_g} - 1 \right)^{-1}, \quad (3.83)$$

sendo  $\varepsilon_{hw}$  e  $\varepsilon_g$  as emissividades da parede e da mistura respectivamente.

Esse modelo é utilizado do programa Mach1D 5.0 (ARAKI e MARCHI, 2007), programa que modela o escoamento de gases em uma tubeira. Esse modelo será referenciado no presente texto como modelo 2 e o modelo de Barrère (1960) será referenciado como modelo 2.

A emissividade do gás,  $\epsilon_g$ , foi determinada considerando-se apenas o vapor d'água e do dióxido de carbono pois são os gases que mais influenciam no fenômeno de radiação (INCROPERA e DeWITT, 1992). Os valores da emissividade foram retiradas de gráficos que relacionam a temperatura de combustão e pressão parcial do vapor d'água e do dióxido de carbono e comprimento médio de feixe,  $L_{eq}$  (INCROPERA e DeWITT, 1992).

A pressão parcial dos gases e a temperatura de câmara são obtidos a partir do software Propep (ROCKETWORKBENCH, 2016). O comprimento médio de feixe para o caso de cilindros é uma função do diâmetro do motor-foguete. Os valores utilizados para determinar as emissividades, podem ser vistos na TABELA 3.9.

TABELA 3.9– DADOS UTILIZADOS PARA DETERMINAÇÃO DA EMISSIVIDADE DO H<sub>2</sub>O E CO<sub>2</sub> UTILIZANDO GRÁFICOS DE INCROPERA E DEWITT, 1992.

<b>Propriedade</b>	<b>MTP1</b>	<b>MTP12</b>	<b>MTP13</b>
<b>T<sub>0</sub> [°C]</b>	1210,99	1210,78	1210,83
<b>P parcial H<sub>2</sub>O [kPa]</b>	23,7175	23,639	26,6556
<b>P parcial CO<sub>2</sub> [kPa]</b>	15,8522	15,8043	15,8147
<b>L<sub>eq</sub> [mm]</b>	57,0285	57,1805	57,095

FONTE: AAUTORA (2016).

As emissividades do vapor d'água e do dióxido de carbono podem ser vistas na TABELA 3.10. Essas emissividades foram obtidas graficamente a partir de dados da TABELA 3.9 e se aplicam quando o vapor d'água ou dióxido de carbono aparecem separadamente. Entretanto esses resultados podem ser prontamente estendidos para situações nas quais o vapor d'água e o dióxido de carbono aparecem juntos. Nesse caso a emissividade total do gás pode ser representada como:

$$\epsilon_g = \epsilon_{H_2O} + \epsilon_{CO_2} - \Delta\epsilon, \quad (3.84)$$

onde  $\Delta\epsilon$  é um fator de correção que leva em conta a redução na emissão associada com a absorção mútua da radiação entre as duas espécies.

TABELA 3.10 – EMISSIVIDADES DO CO<sub>2</sub> E H<sub>2</sub>O.

<b>Propriedade</b>	<b>MTP1</b>	<b>MTP12</b>	<b>MTP13</b>
$\varepsilon_{H_2O}$	0,21	0,21	0,21
$\varepsilon_{CO_2}$	0,038	0,038	0,038
$\Delta\varepsilon$	0,027	0,027	0,027
$\varepsilon_g$	0,032	0,032	0,032

FONTE: INCROPERA E DEWITT (1992).

A emissividade da parede,  $\varepsilon_{hw}$ , necessária para cálculo do fluxo de calor radiativo para aços inoxidáveis na faixa de temperatura da parede vale 0,22. (INCROPERA e DeWITT, 1992). Com base na emissividade do gás, equação (3.84), e da parede, a emissividade média pode ser calculada pela equação (3.83).

O fluxo de calor por radiação pode ser calculado através da equação (3.82). Os resultados podem ser vistos na TABELA 3.11.

TABELA 3.11 – FLUXOS DE CALOR UTILIZANDO A ABORDAGEM 1 E 2.

<b>Propriedade</b>	<b>MTP1</b>	<b>MTP12</b>	<b>MTP13</b>
$q''_{rad,1} [kW/m^2]$	173,845	173,435	173,356
$q''_{rad,2} [kW/m^2]$	7,8391	7,8337	7,8315

FONTE: AAUTORA (2016).

O fluxo de calor obtido pela abordagem 1, ou seja, o método de Barrère (1960) apresenta valores muito superiores à abordagem 2. Uma das diferenças entre as abordagens é que para utilizar a equação de Barrère (1960) não é necessário valores de emissividade dos gases ou da parede. A vantagem na utilização da equação de Barrère (1960) consiste na facilidade de programação pois esta não depende de nenhum dado de tabelas ou gráficos. Devido à isso a equação de Barrère (1960) foi utilizada na construção do procedimento iterativo para cálculo da temperatura de câmara.

A emissividade da parede utilizada na abordagem 2 é válida para aços inoxidáveis típicos limpos, ou seja, sem oxidação. Aços limpos tendem a apresentar emissividade menores que aços oxidados, portanto essa quantidade pode ser fonte de incertezas. As emissividades utilizadas para o gás carbônico e água podem também apresentar alguma imprecisão pois foram coletadas diretamente de gráficos. O fluxo de calor apresentado na TABELA 3.11 corresponde aos fluxos radiativos utilizando a temperatura adiabática de chama.

### 3.3.3 Cálculo das propriedades do gás

A viscosidade dinâmica e a condutividade térmica do gás serão calculadas conforme Bird *et al.* (1960) por equações semi-empíricas dada por Wilke (1950):

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i \mu_i}{\sum_{j=1}^n Z_j \Theta_{ij}}, \quad (3.85)$$

com:

$$\Theta_{ij} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left( 1 + \frac{MO_i}{MO_j} \right)^{-1/2} \left[ 1 + \left( \frac{\mu_i}{\mu_j} \right)^{1/2} \left( \frac{MO_j}{MO_i} \right)^{1/4} \right]^2, \quad (3.86)$$

onde  $n$  é o número total de espécies químicas na mistura; os subíndices  $i$  e  $j$  indicam as espécies químicas;  $Z_i$  é a fração molar da espécie  $i$ ;  $\mu_i$  é a viscosidade da espécie  $i$ ;  $MO_i$  é a massa molecular da espécie  $i$ . O parâmetro  $\Theta_{ij}$  é adimensional, quando  $i = j$ , tem-se  $\Theta = 1$ .

A condutividade térmica  $k$  de uma mistura de gases é obtida pelo método de Mason e Saxena (1958), conforme Bird *et al.* (1960).

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i k_i}{\sum_{j=1}^n Z_j \Theta_{ij}}, \quad (3.87)$$

onde  $Z_i$  e  $k_i$  são respectivamente a fração molar e a condutividade térmica da espécie  $i$ . O parâmetro  $\Theta_{ij}$  é o mesmo obtido através da equação (3.86).

A viscosidade e a condutividade de cada espécie são calculadas por (adaptado de McBride *et al.* 1993):

$$\mu_i = 10^{-7} \exp \left[ b_1 \ln(T) + \frac{b_2}{T} + \frac{b_3}{T^2} + b_4 \right]_i, \quad (3.88)$$

$$k_i = 10^{-4} \exp \left[ c_1 \ln(T) + \frac{c_2}{T} + \frac{c_3}{T^2} + c_4 \right], \quad (3.89)$$

onde  $b_1, b_2, b_3, b_4$  são coeficientes das espécies químicas para cálculo da viscosidade e  $c_1, c_2, c_3$  e  $c_4$  são coeficientes das espécies químicas para cálculo da condutividade. Podem ser encontrados no Anexo B.

### 3.3.4 Algoritmo

A temperatura de câmara foi calculada pelo seguinte procedimento iterativo:

Etapa 1. A partir da pressão experimental  $P_0$  e composição de propelentes (65% de nitrato de potássio,  $KNO_3$ , e 35% de sacarose,  $C_{12}H_{22}O_{11}$ ), obter a temperatura adiabática de chama pelo aplicativo ProPEP (ROCKETWORKBENCH, 2016). Obter também as frações molares das espécies químicas formadas;

Etapa 2. Com a temperatura de câmara e as frações molares das espécies químicas, determinar o calor específico à pressão constante através de tabelas termodinâmicas. Tendo-se a massa de propelente e massas molares, calcular a constante R do gás;

Etapa 3. Dada a temperatura de câmara  $T_0$  e frações molares das espécies químicas, calcular as propriedades do gás (condutividade e viscosidade) pelas equações (3.85) a (3.89);

Etapa 4. Obter dados necessários para utilização da equação de Bartz: diâmetro da seção transversal da garganta,  $D_g$ , área da seção transversal na garganta  $S^*$ , massa específica do propelente  $\rho_p$ , taxa de queima do propelente,  $r$ , pela equação (3.71). Calcular também a vazão mássica gerada pelo consumo de propelente, velocidade característica, velocidade do escoamento, número de Mach, número de Prandtl, fator de recuperação, temperatura adiabática de parede;

Etapa 5. Cálculo do coeficiente de convecção pela equação de Bartz;

Etapa 6. Cálculo do fluxo de calor por convecção pela equação (3.65).

Etapa 7. Cálculo das pressões parciais de  $H_2O$  e  $CO_2$ ;

Etapa 8. Calculo do fluxo de calor por radiação pela equação (3.80);

Etapa 9. Somar fluxos de radiação e convecção, equação (3.81).

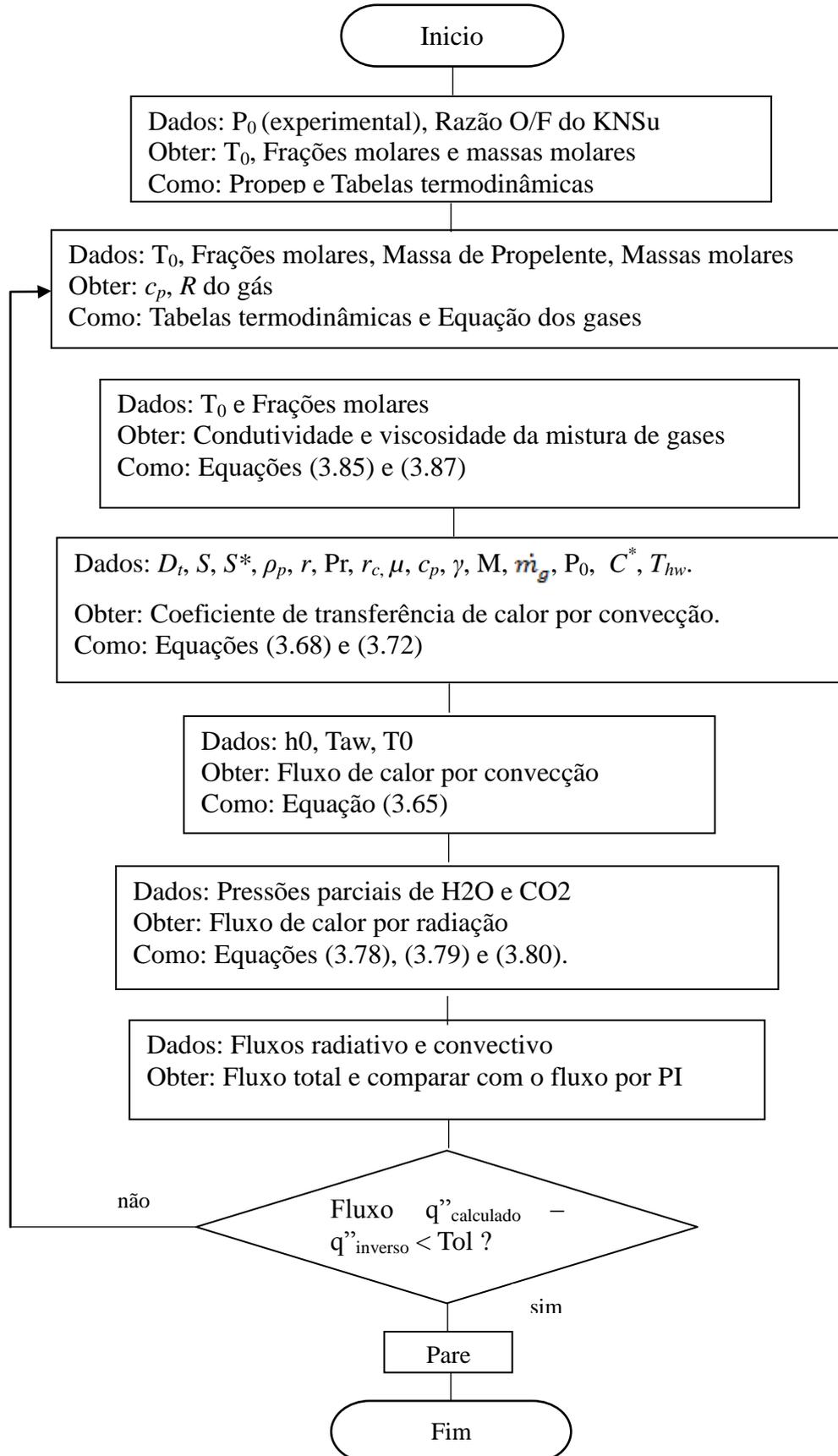
Etapa 10. Comparar com o fluxo calculado pelo problema inverso. Se satisfizer a tolerância, parar, se não, prosseguir;

Etapa 11. Ajustar a temperatura de câmara,  $T_0$  (usando bissecção);

Etapa 12. Voltar para a etapa 2 e repetir procedimento.

A FIGURA 3.13 mostra um fluxograma do procedimento iterativo

FIGURA 3.13 - FLUXOGRAMA DO PROCEDIMENTO ITERATIVO PARA CÁLCULO DA TEMPERATURA DE COMBUSTÃO  $T_0$ .



FONTE: A AUTORA

## 4 COMPARAÇÃO COM A LITERATURA

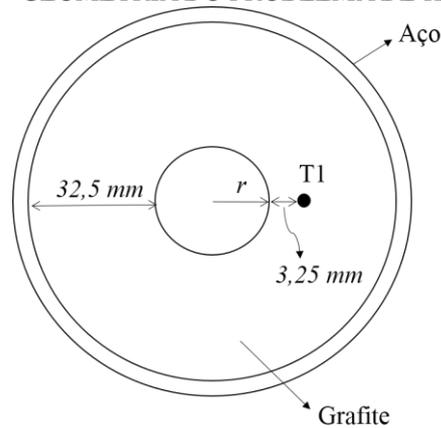
### 4.1 INTRODUÇÃO

Nesse capítulo, alguns trabalhos retirados da literatura serão utilizados com objetivo de comparar seus resultados com os resultados utilizando a metodologia apresentada. O trabalho de Kimura (1985) e Valle (2009), como será mostrado a seguir, utilizaram histórico de temperatura na parede externa de motor-foguete de testes estáticos. Em ambos trabalhos o fluxo de calor foi determinado. Uma correlação analítica (KACYNSKI *et al.*, 1987) também será utilizada para comparar a metodologia do presente trabalho.

### 4.2 COMPARAÇÃO

Kimura (1985) utiliza PI para determinar perfis de temperatura ao longo da seção transversal da parede de motor foguete a partir de medidas de temperatura. A autora resolve a equação resultante do balanço de energia utilizando diferenças finitas. A metodologia utilizada pela autora é aplicada em testes realizados em motor-foguete a propelente sólido. Para comparar a abordagem do presente trabalho com a abordagem de Kimura (1985), os dados experimentais do termopar T1 do ensaio 10/85, serão utilizados (conforme FIGURA 4.1). Nesse teste, o combustível utilizado foi acetileno. A parede da tubeira do motor teste utilizado é constituído de aço 4340 e grafite HLM-85. A FIGURA 4.1 mostra a seção transversal da tubeira na região da garganta. O termopar T1 se encontra posicionado conforme mostra a FIGURA 4.1. O raio  $r$  vale 12,5 mm.

FIGURA 4.1 - GEOMETRIA DO PROBLEMA DE KIMURA (1985)



FONTE: Adaptado de KIMURA (1985).

As propriedades do grafite foram retirados do trabalho de Kimura (1985) e são mostrados na TABELA 4.1:

TABELA 4.1– PROPRIEDADES DO GRAFITE HLM-85, KIMURA (1985)

Propriedade	Valor
Condutividade térmica [W/(m K)]	45,6
Calor específico [J/(kg K)]	1256
Massa específica [kg/m <sup>3</sup> ]	1830

FONTE: KIMURA (1985)

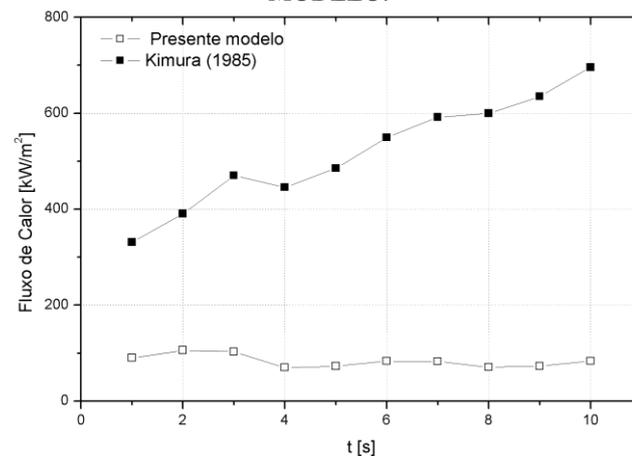
Kimura (1985) apresenta resultados para o problema modelado em coordenadas cartesianas e coordenadas cilíndricas, com condições de contorno idênticas às utilizadas no presente trabalho. No algoritmo apresentado por Kimura (1985) o processo iterativo para convergência do fluxo de calor é feito utilizando o método da bissecção ou Newton-Raphson. A cada passo de tempo o método da bissecção (ou Newton-Raphson) deve ser aplicado no problema direto para que sejam feitos ajustes no fluxo de calor até que a temperatura calculada na fronteira seja igual a temperatura medida na mesma posição. O método se trata, portanto, de fazer inferências sobre o sistema e necessita de uma estimativa inicial para o fluxo de calor. Embora seja robusto, esse método não se comporta bem se dados de temperatura são muito ruidosos. A TABELA 4.2 mostra os dados de temperatura retirados do trabalho de Kimura (1985).

TABELA 4.2– TEMPERATURA MEDIDA, KIMURA (1985).

Tempo [s]	Temperatura T1 [K]
0	297,7
1	307,5
2	319,8
3	332,0
4	340,6
5	349,2
6	359,0
7	368,8
8	377,3
9	385,9
10	395,7

FONTE: KIMURA (1985)

FIGURA 4.2 - COMPARAÇÃO ENTRE O TRABALHO DE KIMURA (1985) E O PRESENTE MODELO.

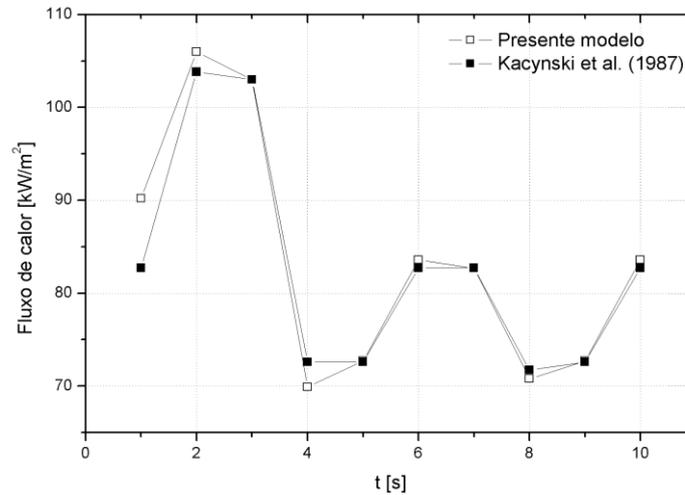


FONTE: A AUTORA(2016).

A FIGURA 4.2 mostra os resultados obtidos com a abordagem desse trabalho e os resultados de Kimura. Pode se notar grande discrepância entre os resultados.

Os mesmos dados da TABELA 4.2 foram aplicados na correlação desenvolvida por Kacynski *et al.* (1987). O parâmetro de regularização utilizado para obter o resultado mostrado na FIGURA 4.3 foi zero. Pode-se observar boa concordância entre resultados de fluxo de calor utilizando as duas abordagens.

FIGURA 4.3 - COMPARAÇÃO ENTRE O TRABALHO DE KACYNSKI ET AL. (1987) E O PRESENTE MODELO.



FONTE: A AUTORA (2016).

A correlação desenvolvida por Kacynski *et al.* (1987) trata-se de uma solução analítica simplificada pela hipótese de que a derivada da temperatura com o tempo é independente da derivada espacial com o tempo, o que simplifica significativamente as equações. A grande desvantagem de correlações analíticas é o fato de apresentarem resultados extremamente instáveis quando aplicadas a dados que contêm erros experimentais, podendo portanto ser aplicadas apenas em casos em que estes erros são desprezíveis.

Valle (2009) apresenta resultados para de fluxo de calor em uma tubeira de motor-foguete a partir de dados de temperatura medidos em vários locais. As propriedades do material utilizado por ele, bem como a espessura da parede podem ser vistas na TABELA 4.3.

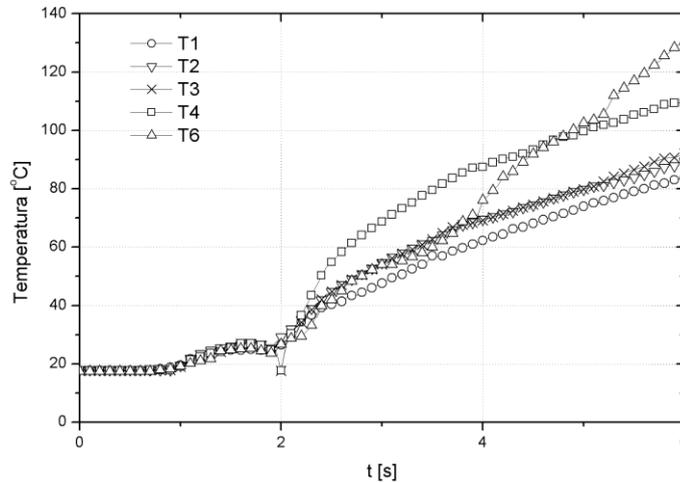
TABELA 4.3 - DADOS DO MATERIAL UTILIZADOS POR VALLE (2009)

Propriedade	Valor
Condutividade térmica [W/(mK)]	388
Calor específico [J/(kgK)]	380
Massa específica [kg/m <sup>3</sup> ]	8890
Espessura [m]	0,015

FONTE: VALLE (2009)

A FIGURA 4.4 mostra as temperaturas experimentais retiradas do trabalho de Valle (2009). O autor resolve o problema utilizando o método de elementos finitos, em coordenadas cartesianas. Um modelo em coordenadas cartesianas também foi implementado. Os coeficientes e termos fontes resultantes podem ser vistos no Apêndice C.

FIGURA 4.4 - TEMPERATURAS MEDIDAS PELOS TERMOPARES DURANTE ENSAIO.

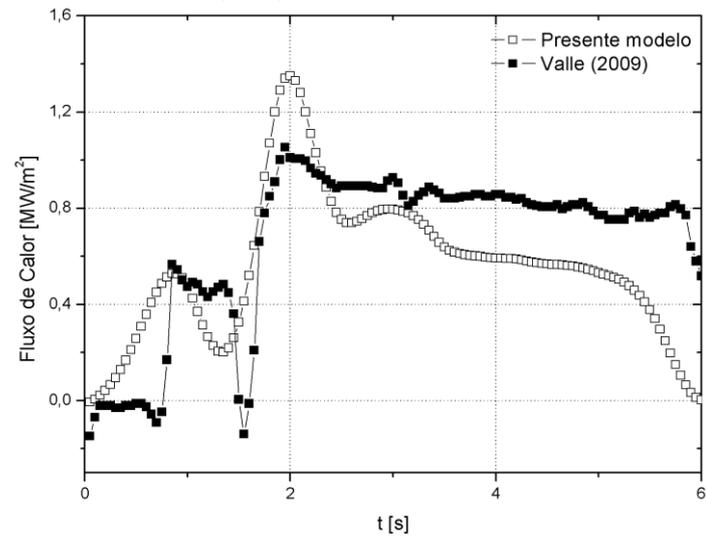


FONTE: VALLE (2009)

As Figuras 4.5, 4.6, 4.7, 4.8 e 4.9 comparam os fluxos de calor obtidos com a abordagem mostrada neste trabalho (Presente Modelo) e resultados do trabalho de Valle (2009). O método utilizado por ele foi o método de Walker, que consiste no método dos mínimos quadrados, que utiliza parâmetro de regularização e uma matriz de covariância no processo iterativo, sendo válido para problemas não lineares. Esse método, utilizado por Valle (2009), é mais estável uma vez que não toma as derivadas das temperaturas. As diferenças observadas entre os resultados do presente trabalho e os resultados obtidos por Valle (2009) possivelmente estão relacionadas às diferenças entre os métodos. Como foi comentado, o método apresentado no presente trabalho é mais realista para problemas que apresentam erros com distribuição normal e covariância nula. Já o método utilizado por Valle (2009) pode ser utilizado mesmo se essas condições não forem atendidas.

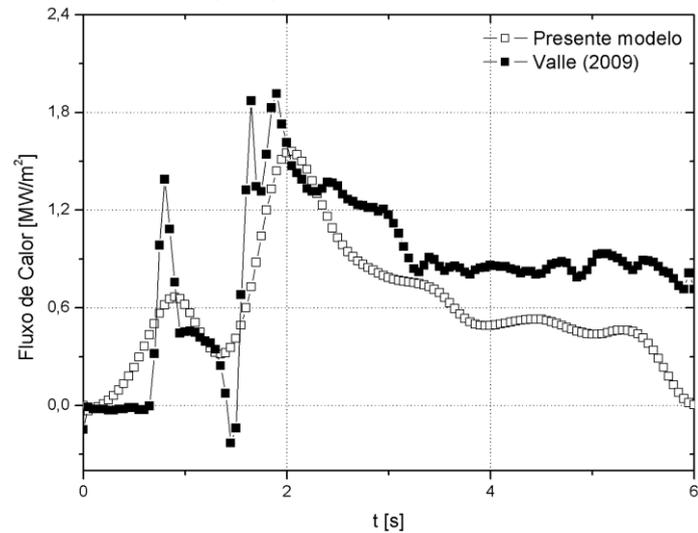
O método utilizado no presente trabalho é um método que se baseia na derivada da temperatura, portanto é um método considerado menos estável (BEZUIDENHOUT, 2000). É esperado algum erro também devido ao fato dos dados terem sido retirado de gráficos. O parâmetro de regularização utilizado para obter os resultados foi de  $1.10^{-11}$ .

FIGURA 4.5 — COMPARAÇÃO ENTRE O MÉTODO DO PRESENTE TRABALHO E VALLE (2009), UTILIZANDO T1.



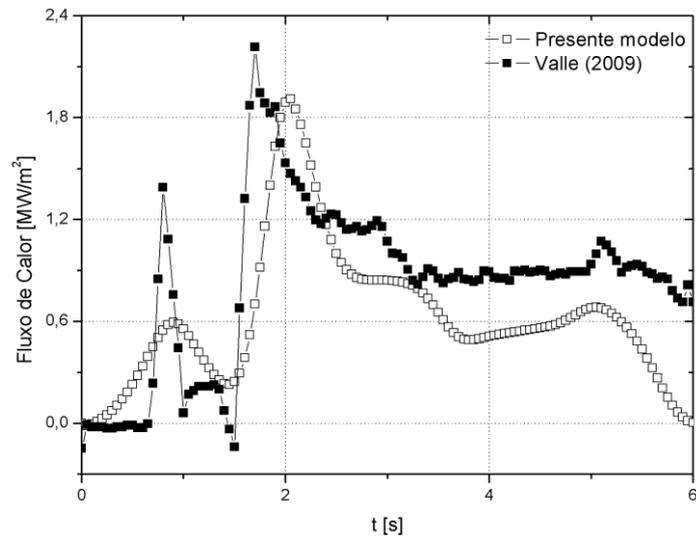
FONTE: A AUTORA

FIGURA 4.6 - COMPARAÇÃO ENTRE O MÉTODO DO PRESENTE TRABALHO E VALLE (2009), UTILIZANDO T2.



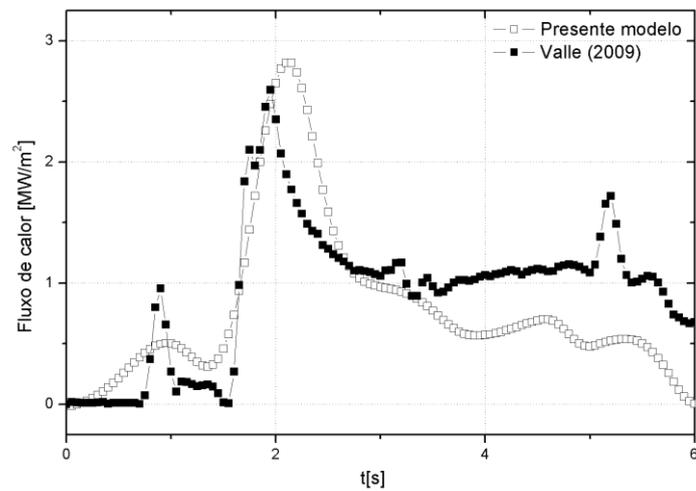
FONTE: A AUTORA.

FIGURA 4.7 - COMPARAÇÃO ENTRE O MÉTODO DO PRESENTE TRABALHO E VALLE (2009), UTILIZANDO T3.



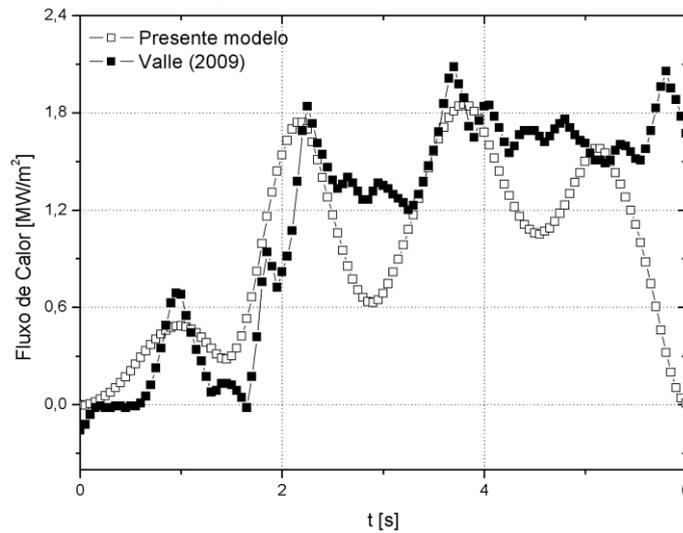
FONTE: A AUTORA

FIGURA 4.8 - COMPARAÇÃO ENTRE O MÉTODO DO PRESENTE TRABALHO E VALLE (2009), UTILIZANDO T4.



FONTE: A AUTORA.

FIGURA 4.9 - COMPARAÇÃO ENTRE O MÉTODO DO PRESENTE TRABALHO E VALLE (2009), UTILIZANDO T6



FONTE: A AUTORA

Deve-se lembrar também que a matriz de sensibilidade é composta da derivada de primeira ordem da temperatura com relação ao fluxo de calor unitário. A derivada numérica foi determinada pela subtração da temperatura em um instante  $i$  do instante  $i+1$ . As temperaturas experimentais, como comentado anteriormente, foram retiradas de gráficos e posteriormente utilizadas para calcular a matriz de sensibilidade. Foi possível retirar as temperaturas dos gráficos com apenas duas casas decimais, o que pode ter afetado a precisão da matriz de sensibilidade significativamente. Embora as discrepâncias em relação aos resultados apresentados por Valle (2009) e o presente trabalho sejam significativas, os resultados utilizando a correlação de Kacynski *et al.* (1987) mostram que a metodologia apresentada gera uma boa estimativa para o fluxo de calor.

## 5 APARATO EXPERIMENTAL

Os testes estáticos foram realizados no Laboratório de Máquinas Hidráulicas da Universidade Federal do Paraná. Para realização dos testes, os motores são colocados em uma bancada fixa que permite o movimento horizontal do motor na direção de uma célula de carga para medição da força de empuxo. A temperatura é medida por sensores fixados sobre o motor. O sistema de aquisição de dados de temperatura utilizado foi o Spider 8 da HBM, com o aplicativo Catman 4.5. A frequência de aquisição de dados foi de 200 Hz, resultando em 0,005 segundos o intervalo de tempo entre duas medidas consecutivas. Durante o teste estático, a temperatura na parede externa foi medida por termopares do tipo K, com tempo de resposta na ordem de 0,3 segundos, segundo o fabricante. O mesmo não possui nenhum sistema de isolamento térmica, sendo fixado diretamente na superfície do motor foguete com fita adesiva. O erro apresentado por esse sensor a 120°C foi de 1,4 °C; e a 1200 °C, foi de 14 °C; de acordo com laudo de calibração.

Os motores MTP, fabricados em aço ABNT 4340, possuem formato cilíndrico com diâmetro externo nominal de 80mm e interno de 60mm. O comprimento total nominal, sem tubeira e tampa é de 208mm. Com relação a dados geométricos, apenas o diâmetro interno e externo de cada motor são necessários para execução do programa computacional desenvolvido, conforme mostra a TABELA 5.1.

TABELA 5.1 - DADOS GEOMÉTRICOS DOS MOTORES MTP'S.

MTP:	Diâmetro interno [mm]	Diâmetro Externo [mm]	Diâmetro da garganta [mm]
1	60,03	80,08	-
6	60,16	80,01	4,45
7	60,17	80,09	4,96
8	60,15	80,03	5,94
9	60,07	79,95	7,00
10	60,18	80,03	8,00
11	60,15	80,05	9,98
12	60,19	80,00	11,99
13	60,10	80,03	19,97

FONTE: A AUTORA (2016).

A tampa e tubeira são do mesmo material (aço ABNT 4340) e são fixadas no corpo do motor por roscas. Os dados desse material podem ser vistos na TABELA 5.2. Os dados foram retirados da Aerospace Specification Metals (ASM, 2016):

TABELA 5.2 - DADOS DO MATERIAL DO MOTOR MTP

<b>Material MTP: 4340</b>	<b>Valor</b>
Massa específica [kg/m <sup>3</sup> ]	7850
Calor específico [J/kg.K]	475
Conductividade térmica [W/m.K]	44,5

FONTE: ASM (2016).

O propelente utilizado consiste em uma mistura de sacarose (C<sub>12</sub>H<sub>22</sub>O<sub>11</sub>) e nitrato de potássio (KNO<sub>3</sub>). A mistura desses dois propelentes é comumente conhecida como KNSu, sendo que a proporção de oxidante e combustível utilizada foi, respectivamente de, 65% de nitrato de potássio e 35% de sacarose. Esmeclita foi utilizada para auxiliar na vedação na região próxima à rosca que une a tampa e o corpo do motor. Tanto a esmeclita quanto o propelente foram colocados no motor foguete através de prensagem. O formado do grão propelente do motor MTP é do tipo cigarro e do motor Netuno é do tipo cilíndrico oco.

## 5.1 ENSAIOS REALIZADOS

Um resumo dos testes pode ser visto na TABELA 5.3. Esta tabela mostra a data, os motores testados e a figura correspondente com o posicionamento dos termopares.

TABELA 5.3- TESTES ESTÁTICOS COM MEDIÇÃO DO HISTÓRICO DE TEMPERATURA.

<b>Ensaio</b>	<b>Data</b>	<b>Pressão experimental</b>	<b>Motor</b>	<b>Posição dos termopares</b>
1	04/06/2015	X	MTP 1, 8, 9, 10, 11 e 12	FIGURA 5.1
2	11/07/2015	-	MTP 6, 7 e 8	FIGURA 5.1
3	24/10/2015	-	Netuno X, & e G	FIGURA D.7
4	19/02/2016	X	MTP 1	FIGURA 5.4
5	16/07/2016	X	MTP 12 e 13	FIGURA 5.4

FONTE: A AUTORA(2016).

Apenas para os ensaios de 04/06/2015, 19/02/2016 e 16/07/2016 a pressão experimental está disponível, sendo que os testes 4 e 5 a pressão experimental é a própria pressão ambiente pois estes motores foram testados sem tubeira. Nos ensaios 4 e 5, ainda, foi feita a medição com termopar na região interna durante a queima de propelente, ou seja, dentro da câmara de combustão.

Serão mostrados e discutidos os resultados do fluxo de calor apenas os resultados dos ensaios 1, 4 e 5. Os resultados do ensaio 2 são muito similares aos do ensaio 1 e podem ser vistos no Apêndice D.

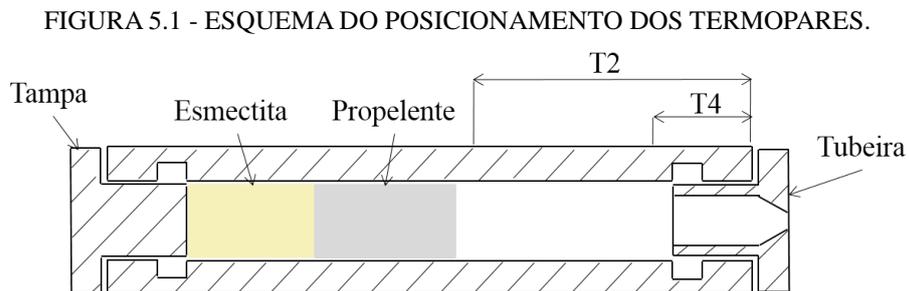
Os resultados do ensaio 3, obtidos com motores Netuno, também podem ser vistos no Apêndice D. Para estes motores, as temperaturas na parede quente  $T_{hw}$  e temperaturas medidas  $Y$ , para um mesmo ensaio, são bem próximas pelo fato do material do motor ser de liga de alumínio de alta condutividade. Os motores Netuno e MTP foram testados com o mesmo propelente (KNSu, 65% de nitrato de potássio,  $KNO_3$ , e 35% de sacarose,  $C_{12}H_{22}O_{11}$ ). A massa de propelente colocada em motores Netuno fica entre 110 e 140 gramas, enquanto que nos motores MTP's fica em torno de 214 gramas, colocados em ambos motores através de prensagem.

Em motores Netuno o grão resultante é do tipo cilíndrico oco. Para uma mesma configuração, esse tipo de grão tende a gerar maior pressão na câmara de combustão pois possui maior área instantânea de queima. De fato, a pressão de câmara é proporcional à área de queima em qualquer instante (NAKKA, 2015). Devido à maior área instantânea de queima, os fluxos de calor obtidos com tais motores superam os de todos os motores MTP's mostrados. Estes, por sua vez, são preparados com grão tipo cilíndrico ou "cigarro", os quais tendem a gerar pressões de câmara menores que relação aos grãos cilíndricos ocos devido à uma menor área instantânea de queima.

A temperatura de câmara será obtida pelo método iterativo discutido em seções anteriores apenas para os ensaios 4 e 5, pois apenas nesses ensaios a temperatura experimental dentro da câmara foi determinada.

## 5.2 POSICIONAMENTO DOS TERMOPARES

A FIGURA 5.1 mostra o desenho do motor MTP e o posicionamento dos termopares durante o ensaio estático de 04/06/2015. Neste ensaio, dois termopares foram fixados na parede externa do motor-foguete, nas posições T2 e T4.



FONTE: A AUTORA(2016).

A posição T2 corresponde a posição no início do grão propelente e T4 é a posição que corresponde ao início da tubaia. As medidas reais dos termopares durante o ensaio podem ser vistas na TABELA 5.4.

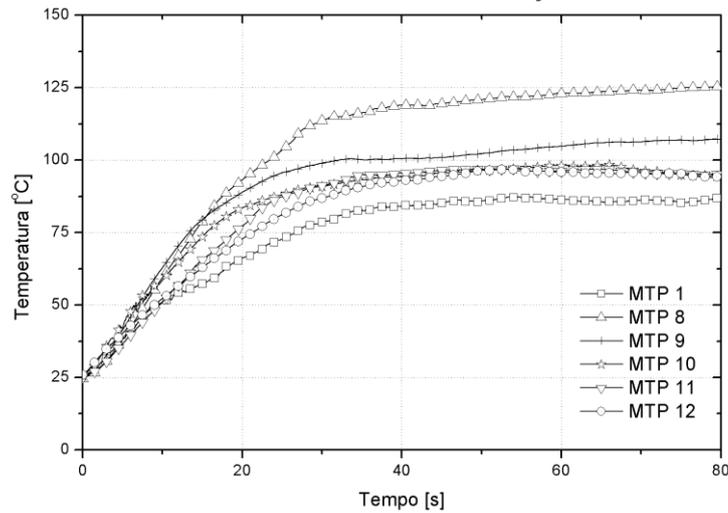
TABELA 5.4- POSIÇÃO DOS TERMOPARES, TESTE DE 04/06/2015

<b>MTP:</b>	<b>T2 (mm)</b>	<b>T4(mm)</b>
<b>1</b>	109	50
<b>8</b>	100	49
<b>9</b>	98	50
<b>10</b>	100	51
<b>11</b>	100	50
<b>12</b>	98	48

FONTE: A AUTORA (2016).

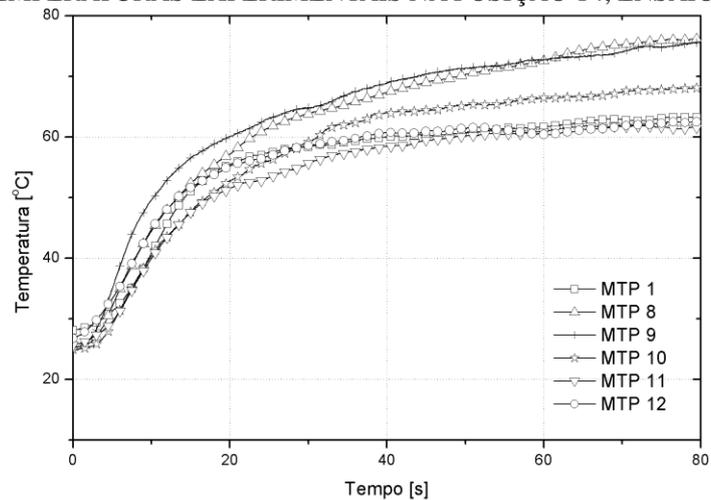
As temperaturas experimentais para os ensaios de 04/06/2015, obtidas com os termopares fixados em T2 e T4 podem ser vistos na FIGURA 5.2 e FIGURA 5.3, respectivamente.

FIGURA 5.2 - TEMPERATURAS EXPERIMENTAIS NA POSIÇÃO T2, ENSAIO DE 04/06/2015.



FONTES: A AUTORA (2016).

FIGURA 5.3 - TEMPERATURAS EXPERIMENTAIS NA POSIÇÃO T4, ENSAIO DE 04/06/2015.

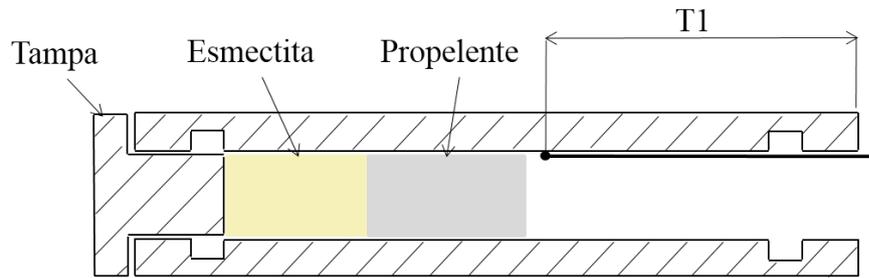


FONTES: A AUTORA (2016).

Os ensaios de 19/02/2016 e 16/07/2016 foram realizados com o objetivo de validar as soluções numéricas empregadas. Dois termopares foram fixados na mesma posição T1, um deles da parte externa do motor-foguete e outro na região interna, conforme a FIGURA 5.4.

Os dados do termopar fixado na parede externa foram utilizados para resolver o problema inverso e obter a temperatura de câmara  $T_0$ . Com o outro termopar, fixado na mesma posição radial, foi obtido  $T_0$  experimental. O posicionamento real em todos os testes de T1 foi de 100mm aproximadamente. Note que T1 corresponde a posição T2 dos outros testes, ou seja, a posição ligeiramente afastada do fim do grão propelente.

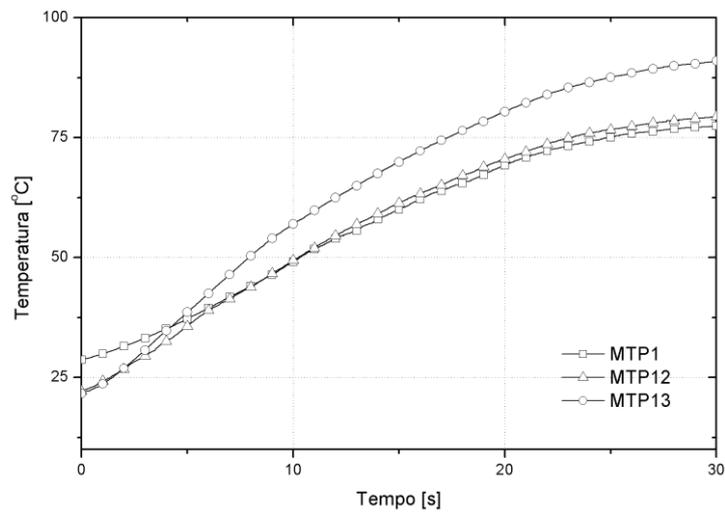
FIGURA 5.4 - POSIÇÃO DO TERMOPAR DURANTE ENSAIO.



FONTE: A AUTORA (2016).

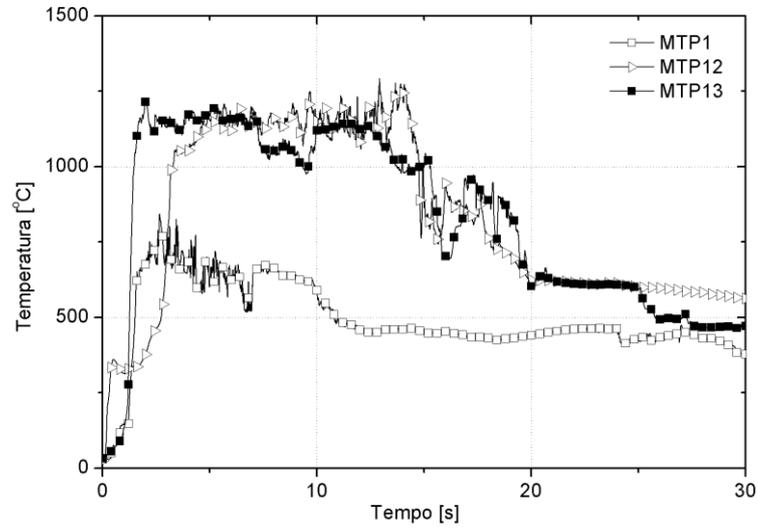
A FIGURA 5.5 mostra os valores das temperaturas experimentais obtidas com o termopar na região externa do motor. A FIGURA 5.6 mostra as temperaturas experimentais obtidas com o termopar na região interna.

FIGURA 5.5 - TEMPERATURAS EXPERIMENTAIS NA POSIÇÃO T1 (TERMOPAR EXTERNO), TESTE DE 19/02/2016 E 16/07/2016.



FONTE: A AUTORA (2016).

FIGURA 5.6 - TEMPERATURAS EXPERIMENTAIS NA POSIÇÃO T1 (TERMOPAR INTERNO),  
TESTE DE 19/02/2016 E 16/07/2016



FONTE: A AUTORA (2016)

Os testes com termopar interno foram realizados sem tubeira e portanto os ensaios ocorreram à pressão ambiente. O objetivo principal dos testes realizados com medição de temperatura interna é permitir a comparação dos resultados experimentais com os resultados de T0 calculado pelo procedimento iterativo

## 6 RESULTADOS

### 6.1 INTRODUÇÃO

A metodologia abordada nos capítulos anteriores foi aplicada em motores-foguete a partir de dados experimentais de temperatura, obtidos durante testes estáticos. O parâmetro de regularização utilizado em todos os testes foi  $1.10^{-11}$ . Como comentado em capítulos anteriores, esse parâmetro é maior quanto maior for o erro. Em todos os ensaios, o erro assumido foi de  $\pm 5K$ , portanto o mesmo parâmetro de regularização foi utilizado.

### 6.2 ENSAIOS DE 04/06/2015

Os resultados mostram alguma instabilidade nos fluxos de calor obtidos a partir de T2. De fato, o termopar T2 em todos os ensaios do dia 04/06/2015 foi posicionado imediatamente acima do propelente. As instabilidades verificadas podem ter ocorrido devido ao efeito da frente de chama do que propriamente do gás. Logo, a localização de T2 para o modelo adotado pode não ser adequado.

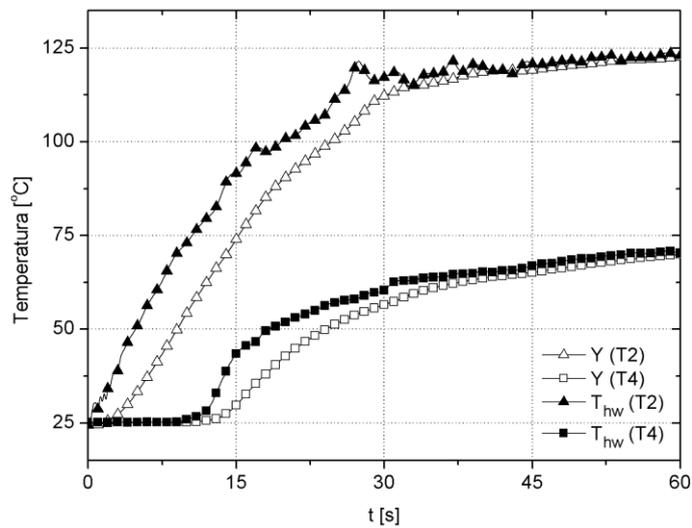
As FIGURAS 6.1, 6.3, 6.5 e 6.7 mostram as temperaturas experimentais ( $Y$ ) e as temperaturas (calculadas) da parede no lado quente ( $T_{hw}$ ), utilizando-se os termopares T2 e T4. Pode-se notar que nos instantes em que essas temperaturas ficam próximas, o fluxo de calor fica próximo ou igual a zero.

Além da área instantânea de queima, o diâmetro da garganta é outro parâmetro que influencia a pressão de câmara. Isso ocorre por que a pressão é resultado da combustão do grão propelente, por meio do qual os gases produzidos aceleram para escapar através da garganta da tubeira. Se a garganta é suficientemente pequena, os gases não podem escapar rapidamente o suficiente e a acumulação de gases na câmara resulta em pressurização (NAKKA, 2015). Os motores MTP de 8 a 11 considerados possuem a mesma estrutura e geometria exceto o diâmetro da garganta, que varia entre eles, conforme mostra a TABELA 5.1. Espera-se, portanto que a pressão de câmara diminua conforme o diâmetro de garganta aumente.

Como a pressão de câmara influencia fortemente a taxa de queima do propelente, (NAKKA, 2015), maiores taxas e portanto maiores fluxos de calor são esperados para os motores com menor diâmetro de garganta. Os fluxos de calor dos MTPs 8 e 9 (FIGURA 6.2, FIGURA 6.4) ficaram próximos entre si e maiores que os fluxos dos MTP's 10 e 11, (FIGURA 6.6 e FIGURA 6.8).

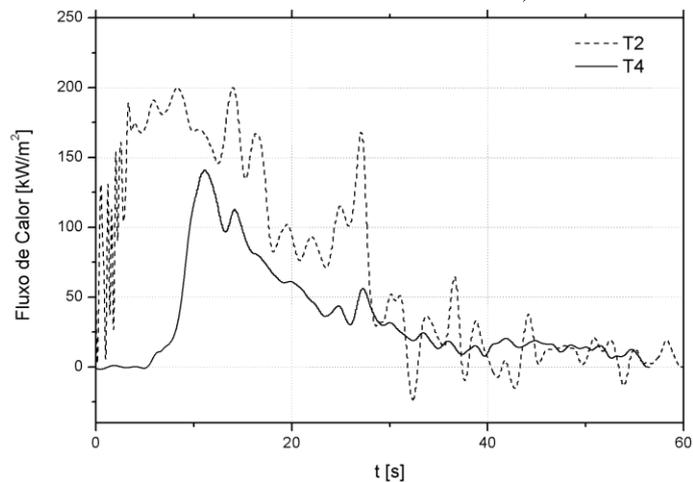
## MTP 8

FIGURA 6.1 - TEMPERATURAS NA PARTE INTERNA E EXTERNA DA PAREDE DO MTP8.



FONTE: A AUTORA (2016).

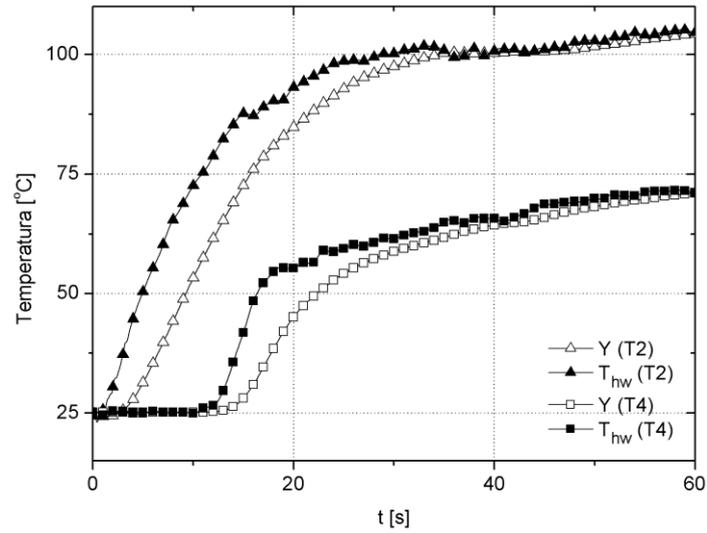
FIGURA 6.2 - FLUXOS DE CALOR NO MTP8, UTILIZANDO T2 E T4.



FONTE: A AUTORA (2016).

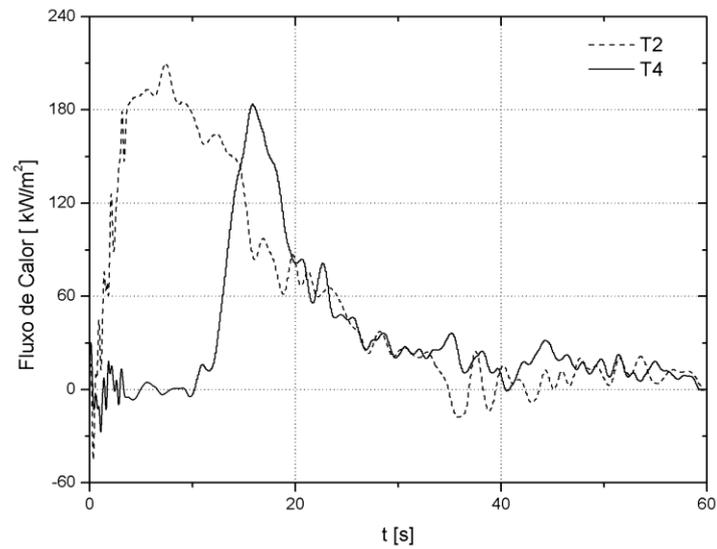
## MTP9

FIGURA 6.3 - TEMPERATURAS NA PARTE INTERNA E EXTERNA DA PAREDE DO MTP9.



FONTE: A AUTORA (2016).

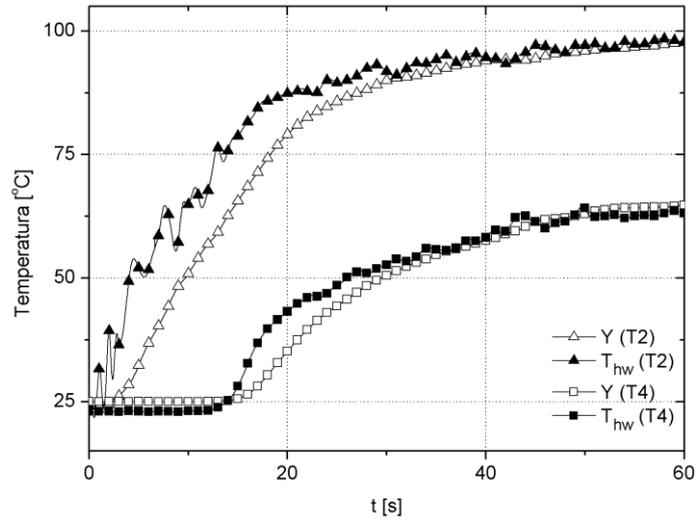
FIGURA 6.4 - FLUXOS DE CALOR NO MTP9, UTILIZANDO T2 E T4.



FONTE: A AUTORA (2016).

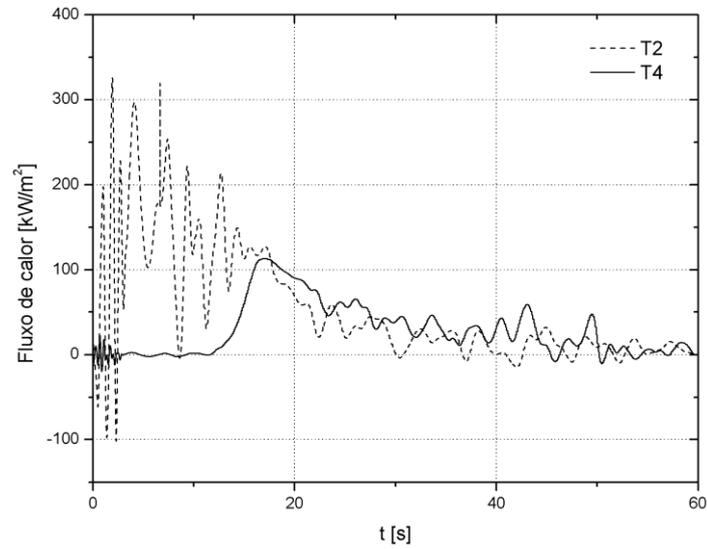
## MTP 10

FIGURA 6.5 - TEMPERATURAS NA PARTE INTERNA E EXTERNA DA PAREDE DO MTP10



FONTE: A AUTORA (2016).

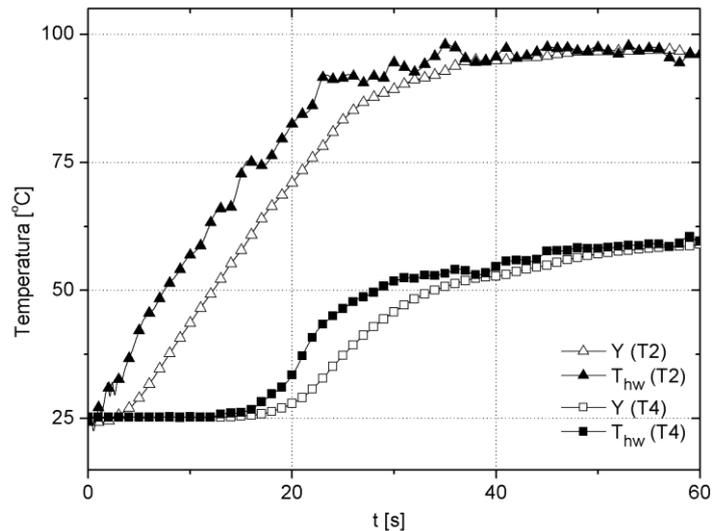
FIGURA 6.6 - FLUXO DE CALOR NO MTP10, UTILIZANDO T2 E T4.



FONTE: A AUTORA (2016).

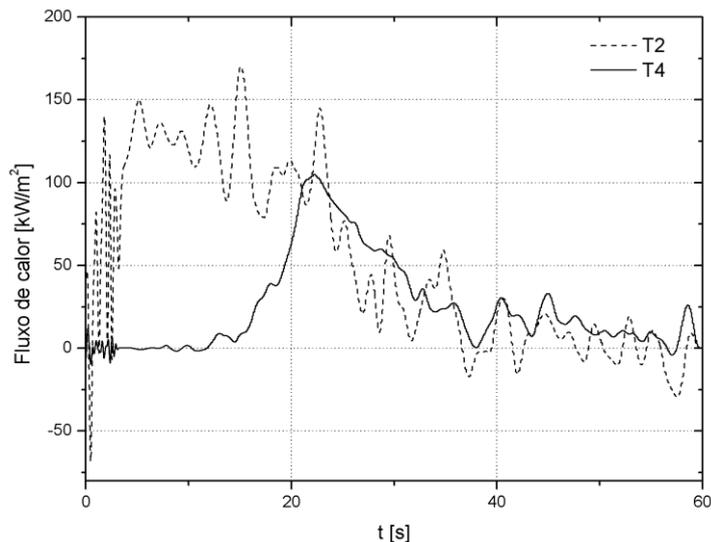
## MTP 11

FIGURA 6.7 - TEMPERATURAS NA PARTE INTERNA E EXTERNA DA PAREDE DO MTP11.



FONTE: A AUTORA (2016).

FIGURA 6.8 - FLUXO DE CALOR NO MTP11, UTILIZANDO T2 E T4.



FONTE: A AUTORA (2016).

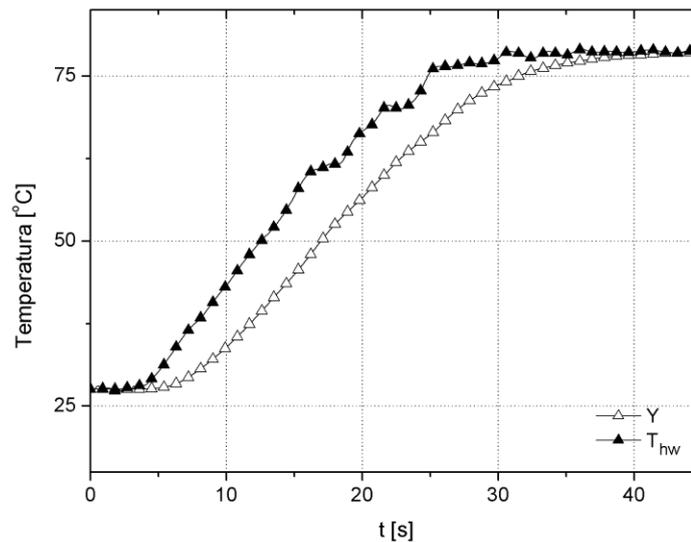
Pode-se verificar algumas oscilações que levam a fluxos de calor negativos. Obviamente tais fluxos são inconsistentes e podem ser resultado de limitações do método empregado. Como comentado anteriormente, o problema é resolvido pela derivada dos dados experimentais, como pode ser visto na equação (3.52). Métodos que utilizam a derivada da temperatura são considerados mais instáveis do que os métodos de natureza estatística pois

reduzem o efeito do ruído dos dados experimentais (BEZUIDENHOUT, 2000). Métodos estatísticos são aqueles que são realizadas inferências sobre o sistema de modo a se obter valores calculados mais semelhantes aos dados observados.

### 6.3 ENSAIOS DE 19/02/2016 E 16/07/2016

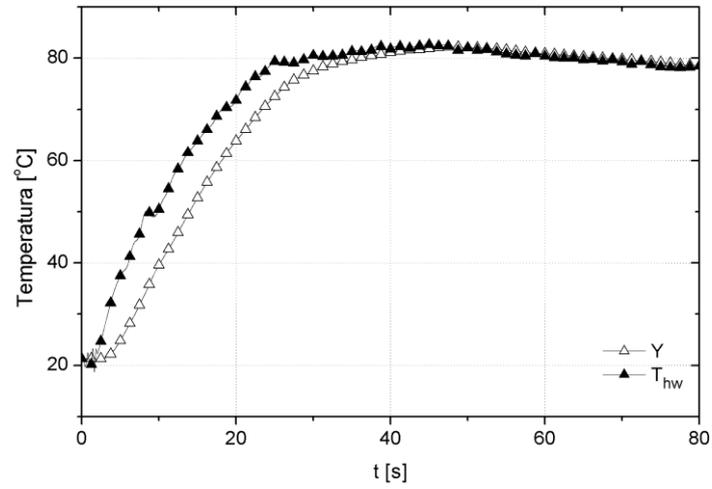
As temperaturas experimentais ( $Y$ ) e calculadas na parte interna ( $T_{hw}$ ) podem ser vistas nas FIGURAS 6.9, 6.10 e 6.11. Os fluxos de calor obtidos pelo método inverso podem ser vistos na FIGURA 6.12.

FIGURA 6.9 - TEMPERATURAS NA PAREDE INTERNA E EXTERNA DO MTP1.



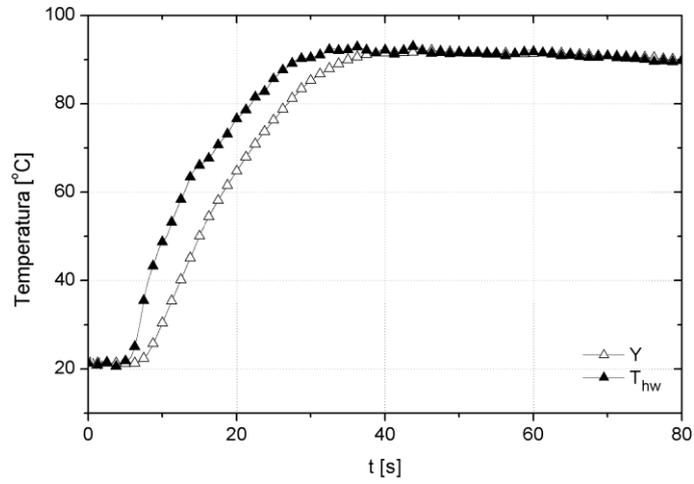
FONTE: A AUTORA (2016).

FIGURA 6.10 - TEMPERATURAS NA PARTE INTERNA E EXTERNA DA PAREDE DO MTP12.



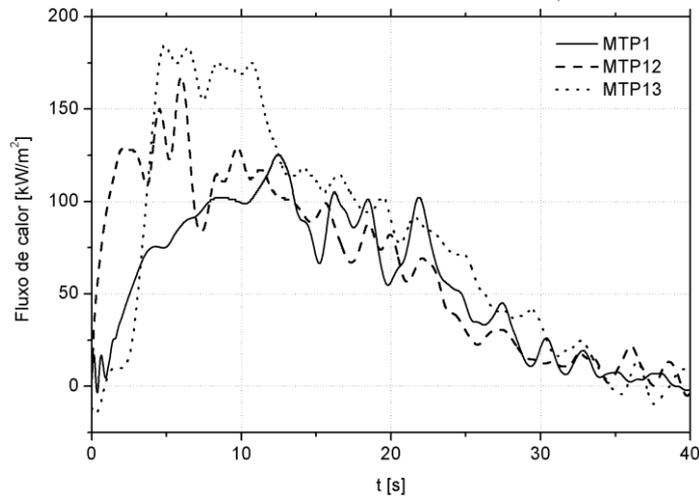
FONTE: A AUTORA (2016).

FIGURA 6.11 - TEMPERATURAS NA PARTE INTERNA E EXTERNA DA PAREDE DO MTP13.



FONTE: A AUTORA (2016).

FIGURA 6.12 - FLUXO DE CALOR NO MTP1, UTILIZANDO T1.



FONTE: A AUTORA.

Nos ensaios com dois termopares, pode se notar um pouco mais de instabilidades nos resultados na posição T2 do que em T4. Sabe-se que existe uma posição ideal para determinado parâmetro de regularização (BECK *et al.*, 1985) que deve ser determinada pela análise dos valores que compõe da matriz de sensibilidade. A posição ideal não foi determinada no presente trabalho, por isso tanto T2 quanto T4 foram calculados com o mesmo parâmetro de regularização.

Uma vez que o fluxo de calor e a temperatura da parede interna dos motores MTP's foram determinados, é possível calcular a temperatura de câmara  $T_0$ . O fluxo teórico será calculado e comparado com o fluxo obtido pelo método inverso. Caso o fluxo teórico e o fluxo obtido por P.I. não coincidam dentro de determinado limite, ajusta-se  $T_0$  e calcula-se novo fluxo teórico. Espera-se com isso obter valor para  $T_0$  mais próximo do valor real. Esse é o assunto da próxima seção.

#### 6.4 TEMPERATURA DE CÂMARA

Um procedimento iterativo foi desenvolvido para calcular a temperatura de câmara  $T_0$  a partir dos dados obtidos com o método inverso, ou seja, fluxo de calor e temperatura na parede  $T_{hw}$ . Esse procedimento é detalhado na seção 3.3. Apenas o fluxo máximo de cada

ensaio foi utilizado para cálculo de  $T_0$ . A temperatura da parede utilizada também foi a máxima. Isso foi feito com intuito de diminuir os efeitos da inércia térmica.

Além do fluxo de calor e temperatura da parede interna, a pressão experimental deve estar disponível. Os ensaios de 19/02/2016 e 16/07/2016 foram realizados a temperatura ambiente e com termopares interno e externo. A TABELA 6.1 mostra os resultados do fluxo de calor calculado pelo procedimento iterativo ( $Q_{total}$ ), bem como as parcelas de fluxo de calor por radiação e convecção teóricas. A pressão apresentada é a pressão ambiente. A temperatura  $T_0$  mostrada na TABELA 6.1 é a temperatura de câmara obtida pelo processo iterativo simbolizada por  $T_0(T1)$ .

TABELA 6.1- TEMPERATURA DE CÂMARA USANDO DADOS DE T1, TESTES DOS DIAS 19/02/2016 E 16/07/2016

Motor:	$T_0(T1)$ [K]	$Q_{rad}[W/m^2]$	$Q_{conv}[W/m^2]$	$Q_{total}[W/m^2]$	Pressão [Pa]
MTP1	1229,165	92647,68798	32352,30998	125000	9.055E+04
MTP12	1350,386	126909,8769	37090,12488	164000	9.046E+04
MTP13	1399,741	143099,3203	37900,67791	181000	9.052E+04

FONTE: A AUTORA(2016).

A TABELA 6.2 mostra os mesmos resultados de  $T_0$  obtido com o método iterativo, mas agora com a temperatura de câmara teórica e experimental. Os resultados calculados pela metodologia aplicada tendem a se aproximar dos resultados experimentais. Deve-se citar que os termopar apresenta erros de medição a altas temperaturas de aproximadamente 14K. A TABELA 6.2 também mostra a variação, calculada pela equação (6.1):

$$Variação = \frac{T_0 \text{ experimental} - T_0(T1)}{T_0 \text{ experimental}} \cdot 100, \quad (6.1)$$

onde  $T_0 \text{ experimental}$  é a temperatura obtida experimentalmente e  $T_0(T1)$  é a temperatura obtida pelo procedimento iterativo.

TABELA 6.2- TEMPERATURA DE CÂMARA CALCULADA, TEÓRICA E EXPERIMENTAL.

Motor:	$T_0$ experimental [K]	$T_0$ teórico [K]	$T_0(T1)$ [K]	Variação [%]
MTP1	842,18	1482,14	1229,16	-45,95
MTP12	1290,19	1481,93	1350,38	-4,66
MTP13	1230,79	1481,98	1399,74	-13,69

FONTE: A AUTORA (2016).

Pode se notar que a temperatura calculada pelo procedimento iterativo  $T_0(T1)$  é sempre maior que a temperatura experimental e menor que a temperatura teórica. A variação encontrada foi menor no teste com o MTP12, com apenas 4,66%. O teste do dia 19/02/2016, com o MTP1, o termopar interno, ou seja, o termopar para medição da temperatura de câmara experimental apresentou deposição de resíduos de condensado no fim do teste. Isso não ocorreu com os outros termopares, ou seja, nos testes de 16/07/2016. Há grandes possibilidades de que a temperatura experimental do MTP1 possa ter sido afetada pela deposição de condensado.

Como comentado em capítulos anteriores, existem ainda erros associados com a estimativa do fluxo de calor por P.I. pois os sensores de temperatura não foram necessariamente fixados nas melhores posições. Como pode ser visto, na posição T2 os resultados se mostraram muito oscilatórios. Essa oscilação pode estar associada a erros de medição ou a um posicionamento desfavorável do termopar. Apesar disso a variação encontrada foi razoável, demonstrando que o procedimento utilizado pode ser utilizado para obter valores de temperatura de câmara mais próximos dos experimentais.

## 7 CONCLUSÃO

Conforme um dos objetivos deste trabalho de dissertação, o fluxo de calor na câmara de combustão e temperatura na parede quente foram determinados pelo problema inverso. Um programa computacional em linguagem FORTRAN foi desenvolvido utilizando um método baseado em mínimos quadrados modificado pelo parâmetro de regularização de Tikhonov de ordem zero. O modelo utilizado é unidimensional e em coordenadas cilíndricas mas pode facilmente ser adaptado para outras geometrias. Uma das vantagens do método utilizado reside no fato de que não é iterativo. Isso permite programas computacionais mais robustos e menor tempo de processamento. Outra vantagem é a capacidade de gerar bons resultados mesmo quando os dados de entrada possuem erros experimentais consideráveis. Foi visto que isso é possível mediante o uso do termo de regularização desenvolvido por Tikhonov. Alguns trabalhos da literatura foram mostrados. Pode-se verificar boa concordância entre os resultados obtidos pelo problema inverso e os dados da literatura. Os resultados obtidos com o método inverso se mostraram satisfatórios.

A temperatura da câmara de combustão foi determinada através de um processo iterativo. A temperatura de câmara foi ajustada até que o fluxo de calor calculado coincidissem com o fluxo obtido pelo método inverso. Utilizou-se para o cálculo da temperatura de câmara apenas a temperatura de câmara máxima e o fluxo máximo do P.I. O cálculo da temperatura de câmara teve boa concordância para o ensaio de 16/07/2016, mas não para o ensaio de 19/02/2016. Verificou-se que o termopar utilizado estava com grande quantidade de deposição de condensado, o que pode ter prejudicado ou até mesmo invalidado a medição. Espera-se ainda algum erro proveniente dos termopares (14K) devido à medição a altas temperaturas, e também algum erro associado ao P.I., pois existem erros associados com a estimativa do fluxo de calor por P.I. pois os sensores de temperatura não foram necessariamente fixados nas melhores posições. Como pode ser visto, na posição T2 (que é a mesma posição T1) os resultados se mostraram um pouco oscilatórios. Essa oscilação pode estar associada a erros de medição ou a um posicionamento desfavorável do termopar. Apesar disso resultados satisfatórios foram obtidos para o teste de 16/07/2016.

## 7.1 PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES

Este trabalho gerou as seguintes contribuições:

- Utilizando a metodologia simples de PI foi possível determinar o fluxo de calor e temperatura da parede, no lado interno.
- Esse tipo de metodologia é geralmente utilizada para a determinação de fluxo de calor em tubeiras. No presente trabalho a tentativa foi aplicar a mesma na câmara de combustão.
- O fluxo de calor e temperatura foram utilizados para determinar a temperatura de câmara.

## 7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como sugestão para outros trabalhos pode-se citar:

- A utilização de técnicas de inversão não lineares. Como comentado em capítulos anteriores, a utilização de métodos não lineares permite a utilização de propriedades que variam com a temperatura;
- Sugere-se uma análise mais profunda do efeito bidimensional;
- Sugere-se a aplicação do método em outras posições do motor-foguete, como tubeira;
- Sugere-se uma análise sobre a melhor posição dos termopares com relação aos coeficientes de sensibilidade;
- Estudar maneiras de considerar a transferência de calor na parte externa do motor foguete;
- Com relação ao cálculo da temperatura de câmara, sugere-se utilizar outros modelos para o cálculo teórico de fluxo convectivo e radiativo;
- Realizar testes para validação utilizando tubeira e termopares mais afastados da frente de chama.

## REFERÊNCIAS

AEB. **Agência Espacial Brasileira**. Disponível em <http://www.aeb.gov.br/lancado-com-sucesso-o-primeiro-foguete-nacional-com-combustivel-liquido/>. Acesso em 24 de julho de 2015.

ALENCAR Jr, J. P., ORLANDE, H. R. B., OZISIK, M. N. **A generalized Coordinates Approach for the solution of inverse heat conduction problems** . Heat Transfer. Vol 7, p. 51-58, 1998.

ALIFANOV, O. M. **What are inverse problems?** Disponível em <http://www.me.ua.edu/inverse/whatis.html>. Acesso em 20 de julho de 2015.

ALIFANOV, O. M., EGOROV, Y. V. **Algorithms and results of solving the inverse heat conduction boundary problem in two dimensional formulation**. Journal of Engineering Physics. Vol. 48, n. 4, 1985.

ALIFANOV, O. M., RUMYANTSEV, S. V. **Application of iterative regularization for the Solution of Incorrect Inverse Problems**. J. Eng. Phys. No 5, 1988.

ARAKI, L. K., MARCHI, C. H. **Relatório Técnico 4 do projeto CFD-5/UFPR: programa RHG1D 3.0**. p. 9-56, 2007.

ARAKI, L. K., MARCHI, C. H. **Relatório Técnico 3 do projeto CFD-5/UFPR: programa Mach1D 5.0**. p. 44-45, 2007.

ASM. **Aerospace Specification Metals**. Disponível em: <http://asm.matweb.com/search/SpecificMaterial.asp?bassnum=MA6063T5As>>. Acesso em: 02 de agosto de 2016.

BARTZ, D. R. **A Simple Equation for rapid estimation of rocket nozzle convective heat transfer coefficients**, Jet Propulsion, New York, p 49-51, 1957.

BARRÈRE, M., JAUMOTTE, A., de VEUBEKE, B. F., VANDENKERCKHOVE, J. **La Propulsion par Fusées**, Paris: Dunod, 1957.

BECK, J. V. **Nonlinear estimation applied to the non linear inverse heat conduction problem.** Int. J. Heat Mass Transfer, p 13:16, 1970.

BECK, J. V., BLACKWELL, J. C., St CLAIR., C. R. **Inverse heat conduction-III Posed Problems.** Wiley, Interscience, Inc, New York, 1985.

BEZUIDENHOUT, J. J. **Convective heat flux determination using surface temperature history measurements and inverse calculation method.** Dissertação. Virginia Polytechnic and State University, Blacksburg, 2000.

BIRD, R.B., STEWART, W. E., LIGHTFOOT, E, N. **Transport Phenomena.** Singapore: John Wiley & Sons, 1960.

BURGGRAF, O. R., **An Exact Solution of the Inverse Problem in Heat Conduction Theory and Applications.** ASME J. Heat Transfer, 86, pp. 373–380, 1964.

CALLISTER, W. D. Jr. **Ciência e Engenharia dos materiais: uma introdução.** 5ª edição. Rio de Janeiro, LTC, 2000.

CHEN, H. K., CHANG, S. M. **Application of the Hybrid Method to Inverse Heat Conduction Problem.** International Journal of Heat Mass Transfer, 33:621, 1990.

COTTA, C. P. N. **Problemas Inversos de Condução de Calor em Meios Heterogêneos: Análise Teórico-Experimental via Transformação Integral, Inferência Bayesiana e Termografia por Infravermelho.** Tese, Rio de Janeiro, UFRJ/COPPE, 2009.

DANIELS, G. E. **Measurement of Gas Temperature and the Radiation Compensating Thermocouple.** Journal of Applied Meteorology, NASA, Vol. 7, 1968.

GORDON, S., McBRIDE, B. J. **Computer Program for Calculation of Complex Chemical Equilibrium Compositions and Applications, 1 Analysis.** Cleveland: NASA Lewis Research Center, 1994, NASA RP-1311.

HUZEL, D. K., HUANG, D. H. **Modern Engineering for Design of Liquid-Propellant Rocket Engines.** Progress in Astronautics and Aeronautics, AIAA, vol. 147, 1992.

INCROPERA, F. P., DeWITT, D. P. **Fundamentos de Transferência de Calor e Massa.** Editora Guanabara, RJ, Brasil, 1992.

KACYNSKI, J. K., PAVLI, A., SMITH, T. **Experimental Evaluation of Heat Transfer on a 1030:1 Area Ratio Rocket Nozzle**. NASA, 1987.

KIMURA, L. A. **Transferência de calor em motor-foguete**. Dissertação. Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP, 1987.

KIM, Y. W., KIM, C. S., HONG, S. D. **Temperature Effect on the Radiation-Corrective Gas Temperature Measurement**. Transactions of the Korean Nuclear Society Spring Meeting, Jeju, Korea, 2012.

MALISKA, C. R. **Transferência de calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**. Rio de Janeiro, Editora LTD, 1995.

MARCHI, C. H. **Funções Taxa de Queima do KNSU no MTP**. Disponível em <[http://servidor.demec.ufpr.br/foguete/curso\\_pos\\_2015-3/MTP/](http://servidor.demec.ufpr.br/foguete/curso_pos_2015-3/MTP/)>. Acesso em: 01 de julho de 2016.

MARCHI, C. H.; SCHNEIDER, F. A. **Introdução à mecânica computacional**. Curitiba: UFPR, 2004. Disponível em: <<ftp://ftp.demec.ufpr.br/disciplinas/TM797/apostila/>> Acesso em: 01 de julho de 2016

MASON, E. A., SAXENA, S. C. **Appoximate Formula for the Thermal Conductivity of Gas Mixtures**. Phys of Fluids 1, 361-369, 1958.

McBRIDE, B. J., GORDON, S., RENO, M. A. **Coefficients for Calculating Thermodynamic and Transport Properties of Individual Species**. Technical Memorandum 4513. NASA, 1993.

MEHTA, R. C. **Estimation of Heat Transfer Coefficient in a Rocket Nozzle**. AIAA Journal, 1981

MUNIZ, W., B. **Um problema inverso em condução de calor utilizando métodos de regularização**. Dissertação. UFRS, Porto Alegre, 1999.

NAKKA, R. **Solid Rocket Motor Theory – Chamber Pressure**. Disponível em <[http://www.nakka-rocketry.net/th\\_prope.html](http://www.nakka-rocketry.net/th_prope.html)>. Acesso em 26 jul 2015.

NETO, A. J. S., NETO, F. D. M. **Problemas Inversos: Conceitos Fundamentais e Aplicações**. Editora Uerj, 2005.

NETO, A. J. S., Su, J. **Two-dimensional Inverse heat Conduction problem of Source Strength estimation in cylindrical rods**. Applied Mathematical Modeling 25, 861-872, 2001.

NIST. **Thermal Conductivity of Ten Selected Binary Alloy Systems**. Disponível em: <<http://www.nist.gov/data/PDFfiles/jpcrd123.pdf>>. Acesso em 05 de junho de 2016.

OZISIK, M. N. **Heat Conduction**. John Wiley & Sons, INC. 2nd ed. North Carolina, Raleigh, 1993.

OZISIK, M. N., ORLANDE, H. R. B. **Inverse Heat Transfer: fundamentals and applications**. Taylor & Francis, New York, 2000.

PATIRE Jr., H. **Determinação da carga térmica na parede da câmara de empuxo de propulsores bipropelente usando método inverso**. Tese. Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP, 2010.

RAUDENSKY, M., WOODBURRY, K. A., KRAL, J., BREZINA, T. **Genetic algorithm in solution of inverse heat conduction problems**. Numerical Heat Transfer, Part B, Vol. 28, p. 293-306, 1995.

ROCKETWORKBENCH, **Cpropep-Web**. Disponível em: <<http://rocketworkbench.sourceforge.net/equil.phtml>>. Acesso em: 01 de julho de 2016.

SHAPIRO, A. H. **The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Flow**. Ronald Press, Vol.1, New York, 1953.

STOLZ, G. **Numerical solutions to an inverse problem of heat conduction for simple shapes**. ASME J. Heat Transfer Vol. 82, p. 20-25, 1960.

SUTTON G. P. **Rocket Propulsion Elements**. 6 ed. New York: John Wiley & Sons. Inc., 1992.

TALER, J. **A Semi Numerical Method for Solving Inverse Heat Conduction Problems**. Int J. Heat Mass Transfer, 31:105, 1996.

THIKONOV, A. N., ARSENIN, V. Y. **Solutions of Ill-Posed Problems**. V. H. Winston and Sons. Washington, DC, 1977.

TURNER, M.J.L. **Rocket and spacecraft propulsion**. 2th. ed. Chichester: Springer, 2006.

VALLE, D. **Aplicação do Método Inverso para a Determinação do Fluxo de Calor em Câmaras de Combustão Não-Regenerativas de MFPL**. Trabalho de conclusão de curso. ITA, 2009.

VELHO, H. F. C. **Problemas inversos: conceitos básicos e aplicações – minicurso**. Disponível em <<http://www.lac.inpe.br/~haroldo/CursoPI/CursoPL.pdf>>. Acesso em 07 de julho de 2015.

VERSTEEG, H. K., MALALASEKERA, W. **Computational Fluid Dynamics, the finite volume method**. 2.ed. Harlow, England: Pearson, 2007.

WARD. B, **Dr Space: The life of Wernher Von Braun**. Annapolis. Naval institute Press, 2005.

WILLIAMS, S. D, CURRY, D. M. **An analytical and experimental study for surface heat flux determination**. Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 14, No. 10, pp. 632-637, 1977.

WILKE, C. R. J. **A Viscosity Equation for Gas Mixtures**. The Journal of Chem. Phys., 18, 517-519, 1950.

## APÊNDICE A – DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES

Discretização das equações:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (\text{A.1})$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{r_w}^{r_e} \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr dx d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{r_w}^{r_e} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dr dx d\phi, \quad (\text{A.2})$$

$$\left[ \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e - \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w \right] 2\pi L = \frac{\rho c_p}{k} \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_P \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{r_w}^{r_e} 2\pi L. \quad (\text{A.3})$$

A difusividade térmica é dada por:

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p}. \quad (\text{A.4})$$

$$\left[ \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e - \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w \right] = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_P r_P \Delta r \quad (\text{A.5})$$

O tipo de aproximação empregada nas derivadas da temperatura com relação aos termos espaciais nos volumes internos foi CDS (*Central Differencing Scheme*), ou seja:

$$\left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e = r_e \frac{(T_E - T_P)}{\Delta r}, \quad (\text{A.6})$$

$$\left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w = r_w \frac{(T_P - T_W)}{\Delta r}, \quad (\text{A.7})$$

$$\left[ r_e \frac{(T_E - T_P)}{\Delta r} - r_w \frac{(T_P - T_W)}{\Delta r} \right] = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_P r_P \Delta r. \quad (\text{A.8})$$

Aplicando integral temporal:

$$\int_{t-\Delta t}^t \left[ r_e \frac{(T_E - T_P)}{\Delta r} - r_w \frac{(T_P - T_W)}{\Delta r} \right] dt = \int_{t-\Delta t}^t \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_P r_P \Delta r dt . \quad (\text{A.9})$$

Resolvendo a integral temporal:

$$\left[ r_e \frac{(T_E - T_P)}{\Delta r} - r_w \frac{(T_P - T_W)}{\Delta r} \right] \Delta t = \frac{1}{\alpha} (T_P - T_P^0)_P r_P \Delta r , \quad (\text{A.10})$$

$$\left[ r_e (T_E - T_P) - r_w (T_P - T_W) \right] = \frac{\Delta r}{\alpha \Delta t} (T_P - T_P^0)_P r_P \Delta r , \quad (\text{A.11})$$

onde  $T_P$  refere-se a temperatura do volume P avaliada no tempo t e  $T_P^0$  refere-se a temperatura do volume P avaliada no tempo  $t - \Delta t$ .

Considerando:

$$T_P^\theta = T_P^0 + \theta(T_P - T_P^0) . \quad (\text{A.12})$$

Substituindo e logo após algum algebrismo, tem-se os coeficientes escritos na forma:

$$a_P T_P = a_w T_W + a_e T_E + b_P , \quad (\text{A.13})$$

Coeficientes, válidos para os volumes internos:

$$a_P = \frac{\Delta r^2 r_P}{\alpha \Delta t} + r_e \theta + r_w \theta , \quad (\text{A.14})$$

$$a_e = r_e \theta , \quad (\text{A.15})$$

$$a_w = r_w \theta , \quad (\text{A.16})$$

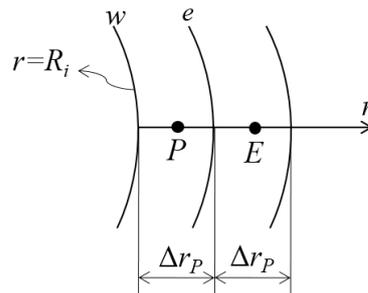
$$b_P = T_E^0 r_e (1 - \theta) + T_W^0 r_w (1 - \theta) + T_P^0 (\theta - 1) [r_e + r_w] + \frac{\Delta r^2 r_P}{\alpha \Delta t} T_P^0 , \quad (\text{A.17})$$

**Condição de contorno em  $r = R_i$  :**

Utilizando condições de contorno de Neumann incorporadas ao volume em  $r = R_i$  :

$$-k \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w = q''(t). \quad (\text{A.18})$$

FIGURA A.1 - APLICAÇÃO DA CONDIÇÃO DE CONTORNO EM  $R = R_i$



FONTE: A AUTORA (2016).

Partindo-se de:

$$\left[ \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e - \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w \right] = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_P r_P \Delta r, \quad (\text{A.19})$$

$$\left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e = r_e \frac{(T_E - T_P)}{\Delta r}, \quad (\text{A.20})$$

$$\left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w = -r_w \frac{q''(t)}{k}, \quad (\text{A.21})$$

Aplicando a aproximação da derivada e a condição de contorno tem-se:

$$\left[ r_e \frac{(T_E - T_P)}{\Delta r} + \frac{r_w q''(t)}{k} \right] = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_P r_P \Delta r, \quad (\text{A.22})$$

Aplicando a integral temporal:

$$\int_{t-\Delta t}^t \left[ r_e \frac{(T_E - T_P)}{\Delta r} + \frac{r_w q''(t)}{k} \right] dt = \int_{t-\Delta t}^t \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_P r_P \Delta r dt. \quad (\text{A.23})$$

Resolvendo a integral temporal:

$$\left[ r_e \frac{(T_E - T_P)}{\Delta r} + \frac{r_w q''(t)}{k} \right] \Delta t = \frac{1}{\alpha} (T_P - T_P^0)_P r_P \Delta r. \quad (\text{A.24})$$

Aplicando a definição para tempo posterior e anterior, tem-se, depois de algum algebrismo, tem-se os coeficientes e termo fonte:

$$a_p = \frac{\Delta r^2 r_P}{r_e \alpha \Delta t} + \theta, \quad (\text{A.25})$$

$$a_e = \theta, \quad (\text{A.26})$$

$$a_w = 0, \quad (\text{A.27})$$

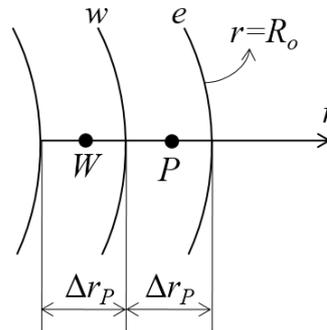
$$b_p = T_E^0 (1 - \theta) + T_P^0 (\theta - 1) + T_P^0 \frac{\Delta r^2 r_P}{r_e \alpha \Delta t} + \frac{q''(t) r_w \Delta r}{r_e k}. \quad (\text{A.28})$$

Válidos para o volume do contorno em  $r = R_i$ .

**Condição de contorno em  $r = R_o$**

Utilizando condições de contorno de Neumann incorporadas ao volume em  $r = R_o$ :

$$\left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e = 0, \quad (\text{A.29})$$

FIGURA A.2 - APLICAÇÃO DA CONDIÇÃO DE CONTORNO EM  $R = R_o$ 

FONTE: A AUTORA (2016).

Partindo-se de:

$$\left[ \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e - \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w \right] = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_P r_P \Delta r, \quad (\text{A.30})$$

$$\left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e = r_e \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_e = r_e \cdot 0 = 0, \quad (\text{A.31})$$

$$\left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right)_w = r_w \frac{(T_P - T_W)}{\Delta r}. \quad (\text{A.32})$$

Aplicando a aproximação da derivada e a condição de contorno tem-se:

$$\left[ 0 - r_w \frac{(T_P - T_W)}{\Delta r} \right] = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_P r_P \Delta r. \quad (\text{A.33})$$

Aplicando a integral temporal:

$$\int_{t-\Delta t}^t \left[ -r_w \frac{(T_P - T_W)}{\Delta r} \right] dt = \int_{t-\Delta t}^t \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_P r_P \Delta r dt. \quad (\text{A.34})$$

Resolvendo a integral temporal:

$$\left[ -r_w \frac{(T_p - T_w)}{\Delta r} \right] \Delta t = \frac{1}{\alpha} (T_p - T_p^0)_p r_p \Delta r . \quad (\text{A.35})$$

Aplicando a definição para tempo posterior e anterior, tem-se, depois de algum algebrismo, tem-se os coeficientes e termo fonte:

$$a_p = \frac{\Delta r^2 r_p}{r_w \alpha \Delta t} + \theta , \quad (\text{A.36})$$

$$a_e = 0 , \quad (\text{A.37})$$

$$a_w = \theta , \quad (\text{A.38})$$

$$b_p = T_w^0 (1 - \theta) + T_p^0 (\theta - 1) + T_p^0 \frac{\Delta r^2 r_p}{r_w \alpha \Delta t} . \quad (\text{A.39})$$

Válidos para o volume do contorno em  $r = R_o$ .

### Temperatura nas paredes:

As equações abaixo são determinadas a partir das condições de contorno. A temperatura na parede interna, ou seja, em  $r = R_i$ , pode ser determinada por:

$$T_{p=0} = T_{p=1} + \frac{q''(t) \Delta r}{2k} , \quad (\text{A.40})$$

onde  $T_{p=0}$  é a temperatura na parede interna, em  $r = R_i$  e  $T_{p=1}$  é a temperatura do primeiro volume à direita.

A temperatura na parede externa, ou seja, em  $r = R_o$ , pode ser determinada por:

$$T_{p=N+1} = T_{p=N} . \quad (\text{A.41})$$

onde  $T_{p=N+1}$  é a temperatura na parede externa, em  $r = R_o$  e  $T_{p=N}$  é a temperatura do primeiro volume à esquerda.

Lembrando que a nomenclatura utilizada para a temperatura interna é  $T_w$  ( $T_{p=0} = T_w$ ); e temperatura da parede externa é  $T_{out}$  ( $T_{p=N+1} = T_{out}$ ).

## APÊNDICE B – GAUSS SEIDEL

Gauss-Seidel é um método iterativo de resolução de sistema de equações lineares. Nesse método, um sistema de equações lineares  $Ax = b$  é escrito de forma equivalente por separação da diagonal:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j<i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j>i} a_{ij} x_j^{(k)} \right), i = 1, 2, \dots, n., \quad (\text{B.1})$$

onde  $k$  é o contador de iteração.

O processo iterativo Gauss-Seidel é repetido várias vezes até que  $x_i^{(k)}$  esteja muito próximo de  $x_i^{(k-1)}$ . O critério de parada utilizado foi:

$$\left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| < tol, \quad (\text{B.2})$$

sendo  $tol$  a tolerância utilizada. Neste trabalho foi de 1.0E-15.

## APÊNDICE C – FORMULAÇÃO EM COORDENADAS RETANGULARES

A equação da difusão, condições de contorno e condições iniciais são:

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 \leq x \leq L \quad \text{para } 0 < t < t_f, \quad (\text{C.1})$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = q''(t) \quad x = 0 \quad t > 0, \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad x = L \quad t > 0, \quad (\text{C.3})$$

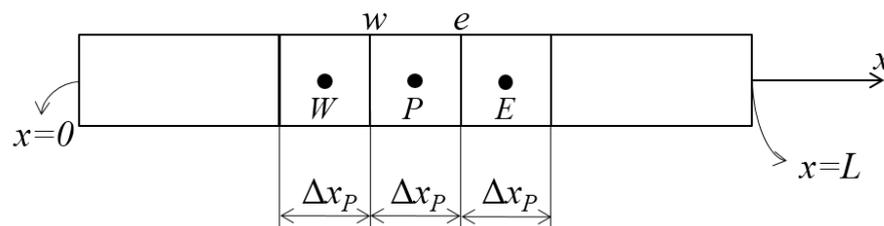
$$T = f(x) \quad t = 0 \quad 0 \leq x \leq L, \quad (\text{C.4})$$

onde  $L$  é a espessura da câmara de combustão.

### Coeficientes e termo fonte em coordenadas retangulares:

Considere a malha unidimensional em coordenadas retangulares:

FIGURA C.1 - MALHA UNIDIMENSIONAL UNIFORME.



FONTE: A AUTORA (2016).

Coeficientes dos volumes internos:

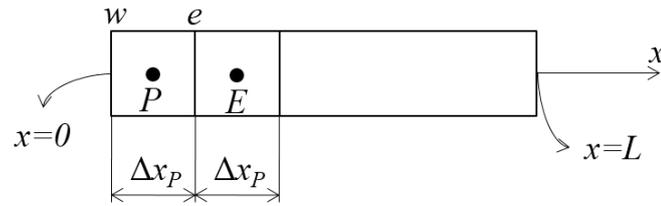
$$a_p = \frac{1}{\alpha} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} + 2\theta \quad (\text{C.5})$$

$$a_e = \theta \quad (\text{C.6})$$

$$a_w = \theta \quad (\text{C.7})$$

$$b_p = \frac{1}{\alpha} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} T_p^0 + 2T_p^0(\theta - 1) + T_E^0(1 - \theta) + T_W^0(1 - \theta) \quad (\text{C.8})$$

FIGURA C.2 - APLICAÇÃO DA CONDIÇÃO DE CONTORNO EM  $x=0$



FONTE: A AUTORA (2016).

Coefficientes do volume do contorno em  $x=0$ :

$$a_p = \frac{1}{\alpha} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} + \theta, \quad (\text{C.9})$$

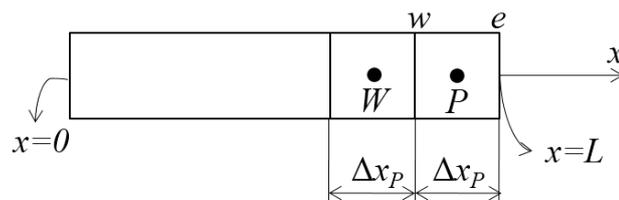
$$a_e = \theta, \quad (\text{C.10})$$

$$a_w = 0, \quad (\text{C.11})$$

$$b_p = \frac{1}{\alpha} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} T_p^0 + T_E^0(1 - \theta) + T_p^0(\theta - 1) + \frac{q'' \Delta x}{k}. \quad (\text{C.12})$$

Coefficiente do volume do contorno em  $x=L$ :

FIGURA C.3 - APLICAÇÃO DA CONDIÇÃO DE CONTORNO EM  $x=L$ .



FONTE: A AUTORA (2016).

$$a_p = \frac{1}{\alpha} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} + \theta, \quad (\text{C.13})$$

$$a_e = 0, \quad (\text{C.12})$$

$$a_w = \theta, \quad (\text{C.14})$$

$$b_p = \frac{1}{\alpha} \frac{\Delta x^2}{\Delta t} T_p^0 + T_w^0(1-\theta) + T_p^0(\theta-1). \quad (\text{C.15})$$

## APÊNDICE D – ENSAIOS DE 11/07/2015

A posição dos termopares no ensaio do dia 11/07/2015 pode ser visto na TABELA D1:

TABELA D1 - POSIÇÃO DOS TERMOPARES, TESTE DIA 11/07/2015

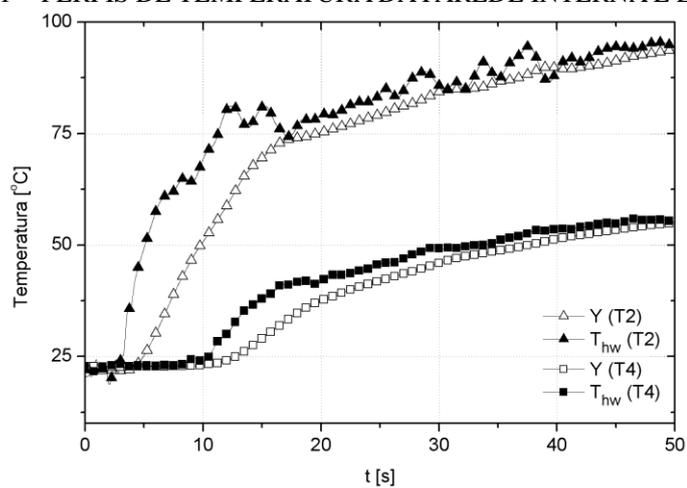
MTP:	T2 (mm)	T4(mm)
6	105	48
7	100	50
8	105	46

FONTE: A AUTORA (2016).

O esquema dos termopares é o mesmo da FIGURA 5.1. Como foi comentado anteriormente, algumas instabilidades podem ser encontradas nos resultados do fluxo de calor obtidos a partir de T2.

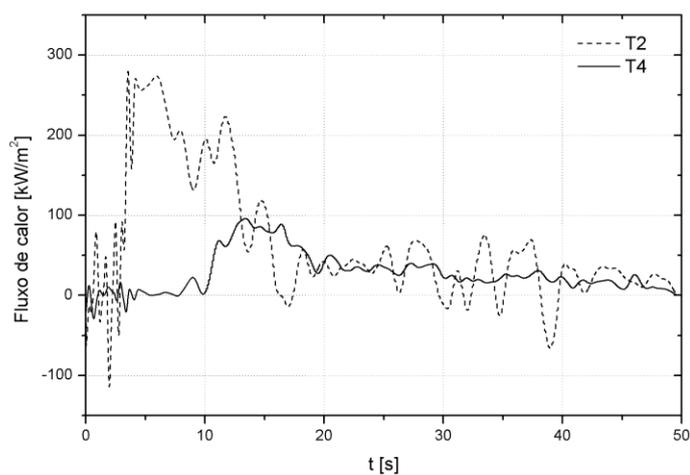
### MTP 6

FIGURA D.1 - PERFIS DE TEMPERATURA DA PAREDE INTERNA E EXTERNA DO MTP6



FONTE: A AUTORA (2016).

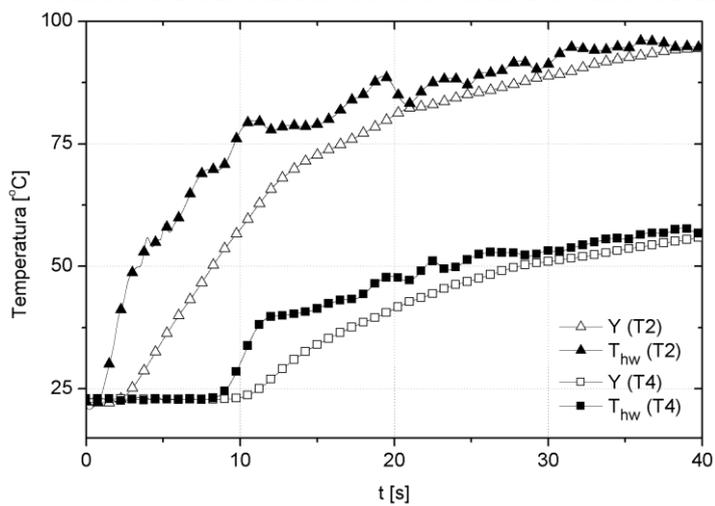
FIGURA D.2 - FLUXO DE CALOR PARA O MTP6 OBTIDOS A PARTIR DOS TERMOPARES T2 E T4



FONTE: A AUTORA (2016).

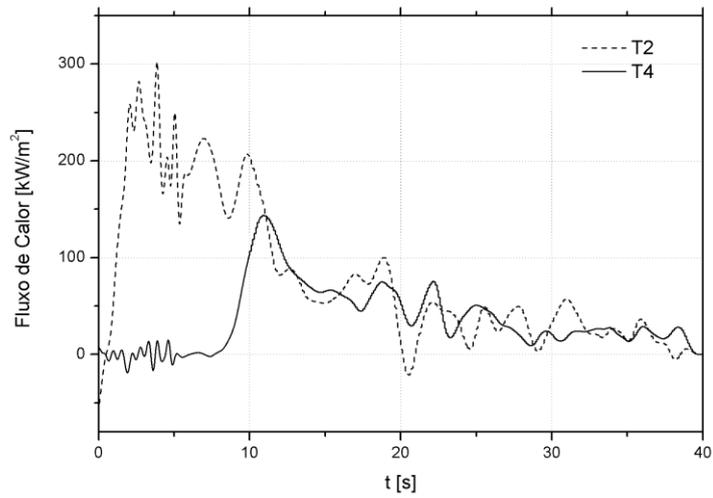
## MTP7

FIGURA D.3 - - PERFIS DE TEMPERATURA DA PAREDE INTERNA E EXTERNA DO MTP7.



FONTE: A AUTORA (2016).

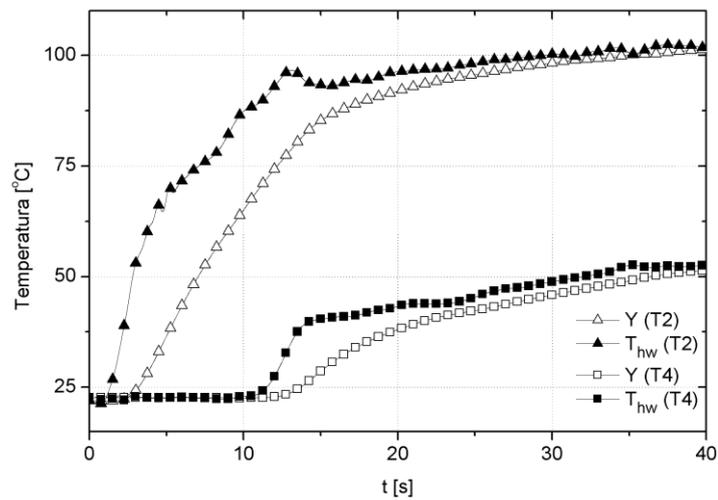
FIGURA D.4 - FLUXO DE CALOR PARA O MTP7 OBTIDOS A PARTIR DOS TERMOPARES T2 E T4.



FONTE: A AUTORA.

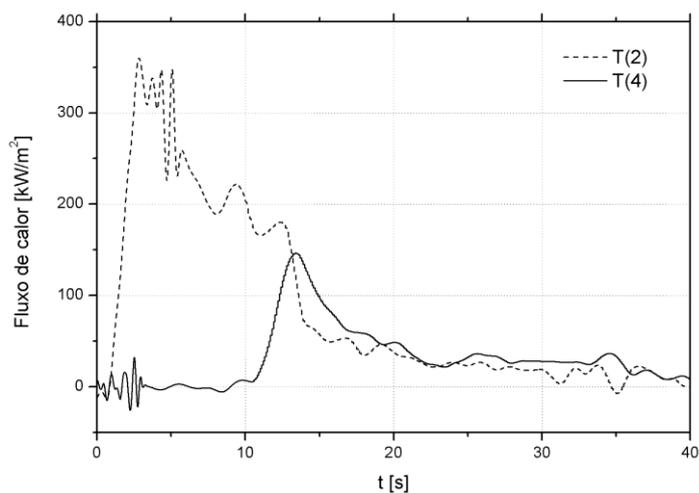
## MTP 8

FIGURA D.5 - PERFIS DE TEMPERATURA DA PAREDE INTERNA E EXTERNA DO MTP8.



FONTE: A AUTORA.

FIGURA D.6 - FLUXO DE CALOR PARA O MTP8 OBTIDOS A PARTIR DOS TERMOPARES T2 E T4.

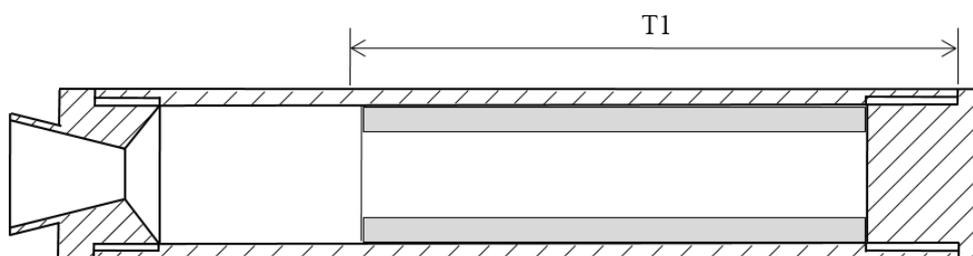


FONTE: A AUTORA (2016).

### Ensaio de 24/10/2015

A FIGURA D.7 mostra a localização do termopar durante ensaio estático do motor Netuno-R. Três câmaras foram testadas: X, E e G. A posição exata dos termopares pode ser vista na TABELA D.2.

FIGURA D.7 - POSIÇÃO DO TERMOPAR T1 DURANTE ENSAIO



FONTE: A AUTORA (2016).

TABELA D.2 - POSIÇÃO DOS TERMOPARES, TESTE DE 24/10/2015

Netuno:	T1 (mm)
<b>X</b>	143
<b>&amp;</b>	142
<b>G</b>	140

FONTE: A AUTORA (2016).

Os dados do material do motor Netuno podem ser vistos na TABELA D.3 (ASM, 2016):

<b>Material Netuno: R 6061-T5</b>	Valor
<b>Massa específica [kg/m<sup>3</sup>]</b>	2600
<b>Calor específico [J/kg.K]</b>	900
<b>Condutividade térmica [W/m.K]</b>	209

FONTE: A AUTORA (2016).

Com relação a dados geométricos, apenas o diâmetro interno e externo de cada motor são necessários para execução do programa computacional desenvolvido.

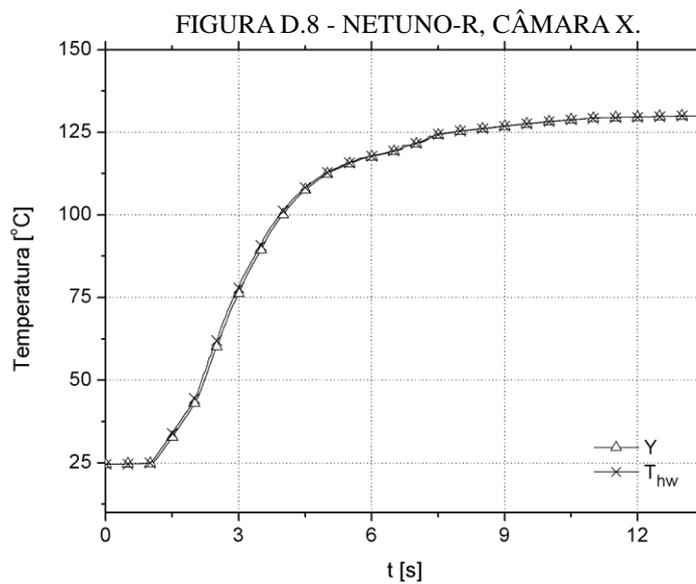
<b>Netuno R:</b>	<b>Diâmetro interno [mm]</b>	<b>Diâmetro Externo [mm]</b>
	38.1	44.5

FONTE: A AUTORA (2016).

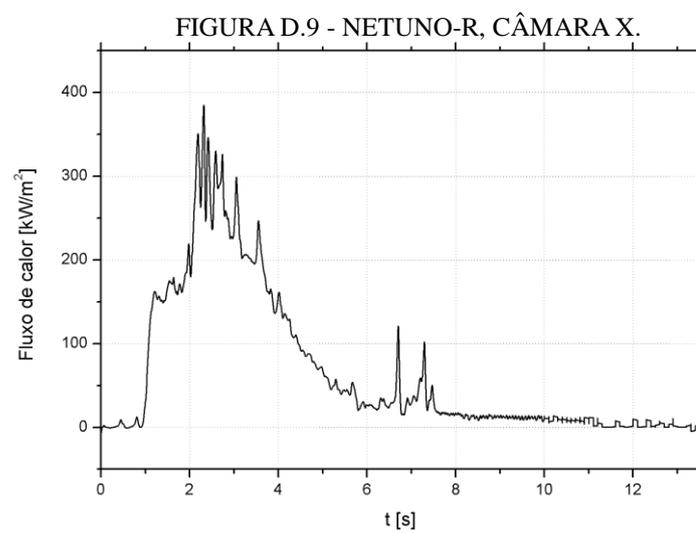
Na FIGURA D.11 pode-se notar um "vale" proeminente no fluxo de calor. Isso pode ter ocorrido devido à queda de temperatura no mesmo instante (FIGURA D.10). Obviamente não ocorrem fluxos negativos durante ensaio. Como comentado anteriormente, métodos que utilizam a derivada dos dados experimentais tendem a ser menos estáveis (BEZUIDENHOUT, 2000).

A principal diferença entre os resultados dos motores MTP e Netuno é em relação às temperaturas da parede interna e externa (FIGURA D.8). Pode-se notar que a temperatura das mesmas são bem próximas, devido à alta condutividade térmica da liga de alumínio 6061-T5..

## Netuno R - X



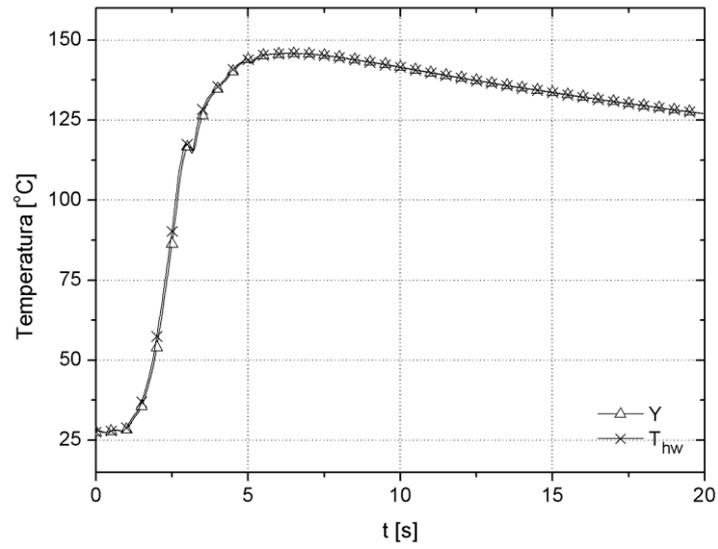
FONTE: A AUTORA (2016).



FONTE: A AUTORA (2016).

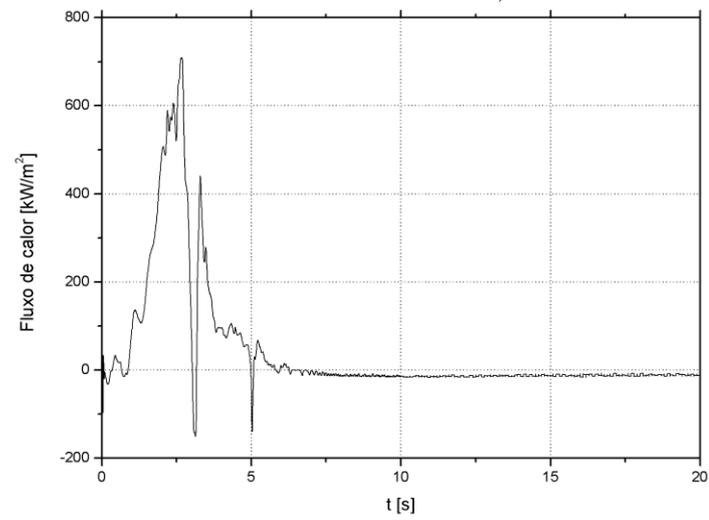
## Netuno R - E

FIGURA D.10 - NETUNO R, CÂMARA E.



FONTE: A AUTORA (2016) .

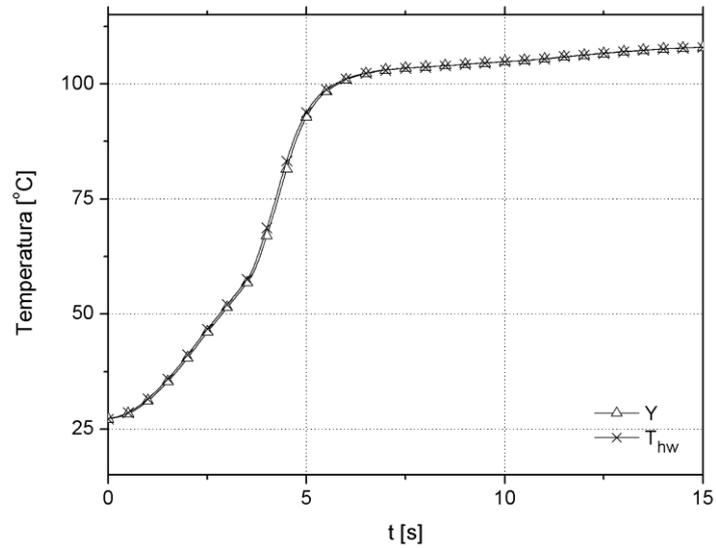
FIGURA D.11 - - NETUNO R, CÂMARA E.



FONTE: A AUTORA (2016).

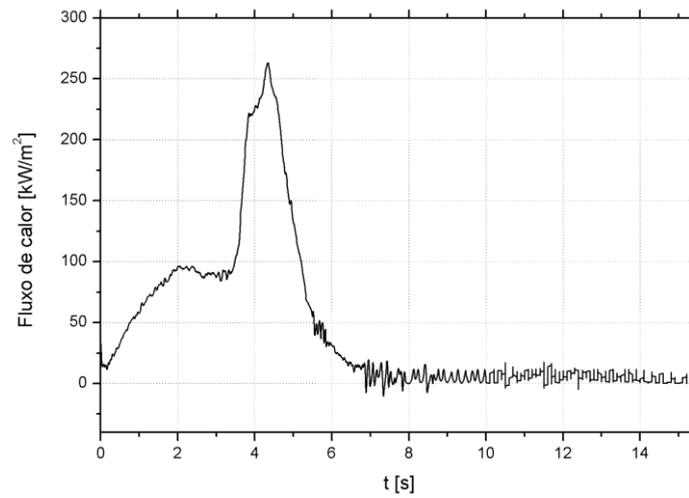
## Netuno R - G

FIGURA D.12 - NETUNO R, CÂMARA G.



FONTE: A AUTORA(2016).

FIGURA D.13 - NETUNO R, CÂMARA G.



FONTE: A AUTORA (2016).

## ANEXO A – CONDUTIVIDADE DAS LIGAS BINÁRIAS FE-NI E AL-MG

FIGURA A.1 - COMPOSIÇÃO DE ALGUMAS LIGAS BINÁRIAS.

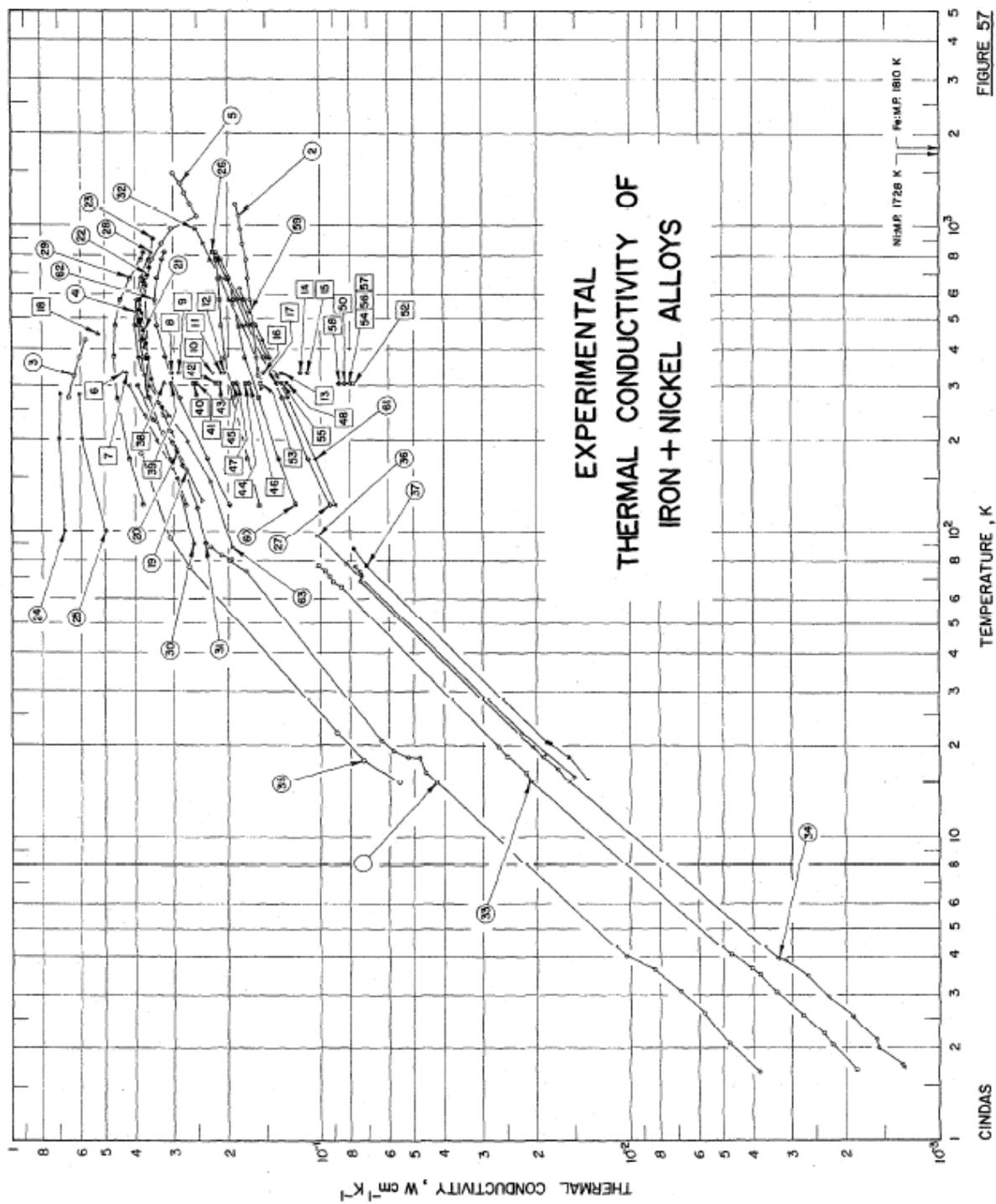


FIGURE 57

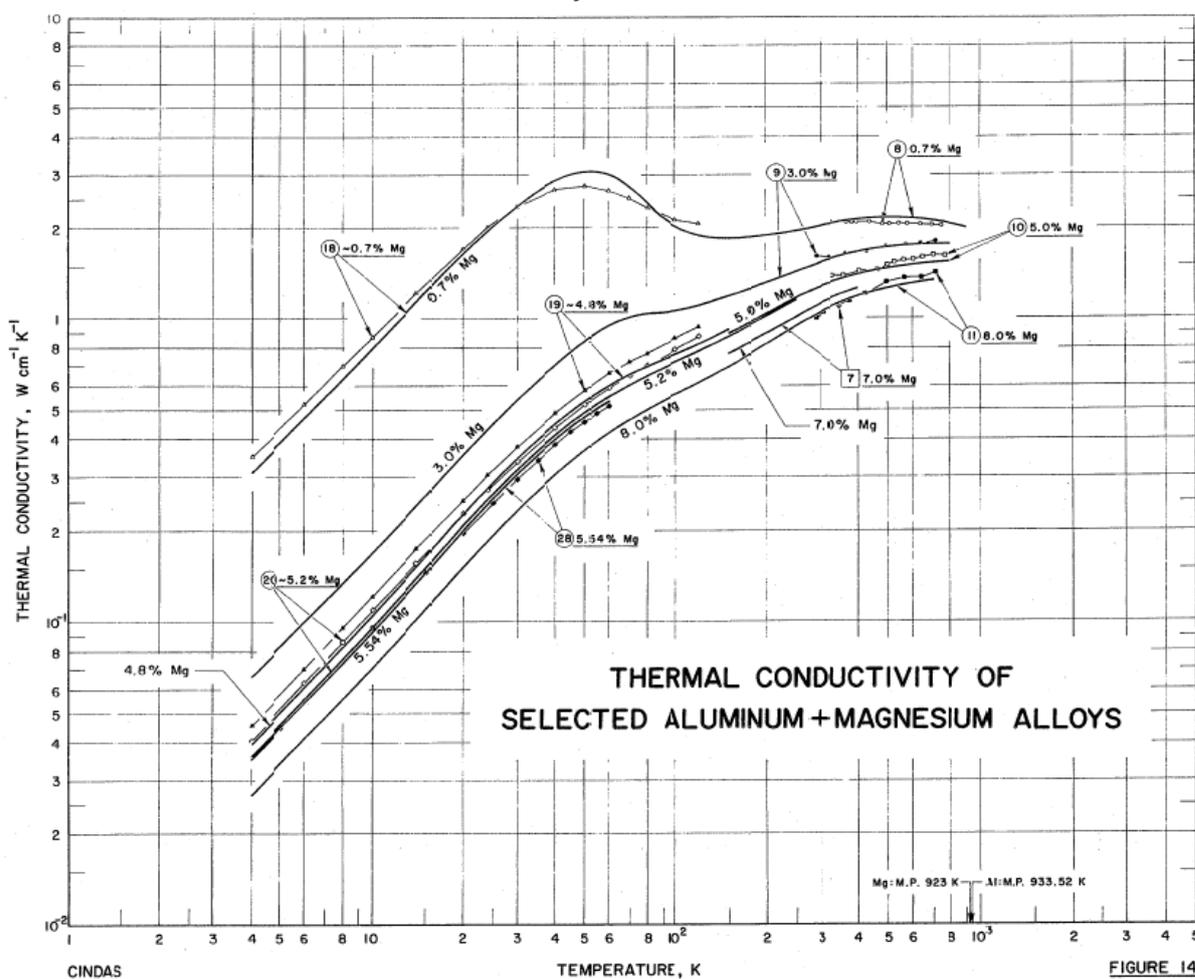
FUNTE: NIST (2016).

TABELA A.1- COMPOSIÇÃO DE ALGUMAS LIGAS BINÁRIAS.

Número	Designação	Fe (%)	Ni(%)
19, 20,21,22,23	AISI 2515	94,076	4,91
28	AISI 2315	95,483	3,46
29	--	97,984	1,04

FONTE: ASM (2016).

FIGURA A.2 - COMPOSIÇÃO DE ALGUMAS LIGAS BINÁRIAS.



FONTE: NIST (2016)

TABELA A.2- COMPOSIÇÃO DE ALGUMAS LIGAS BINÁRIAS

Número	Designação	Al (%)	Mg(%)
8	--	99,3	0,7

FONTE: ASM (2016).

**ANEXO B – COEFICIENTES USADOS PARA DETERMINAÇÃO DAS  
PROPRIEDADES TERMO FÍSICAS DAS ESPÉCIES QUÍMICAS.**

TABELA B1 - COEFICIENTES PARA CÁLCULO DA CONDUTIVIDADE, PARA TEMPERATURA  
MENOR QUE 1000K

<b>Espécie</b>	<b>c1</b>	<b>c2</b>	<b>c3</b>	<b>c4</b>
CO	8.30E-01	5.91E+01	-9.86E+03	7.10E-01
CO2	5.37E-01	-4.99E+02	3.74E+04	3.29E+00
H	5.82E-01	4.69E+01	-6.88E+03	4.35E+00
HCN	9.25E-01	-2.65E+02	2.27E+04	4.01E-01
H2	9.37E-01	1.90E+02	-1.97E+04	1.75E+00
H2O	1.55E+00	6.61E+01	5.60E+03	-3.93E+00
NH3	1.23E+00	-2.56E+02	3.29E+04	-1.01E+00
N2	9.43E-01	1.23E+02	-1.18E+04	-1.07E-01
OH	1.07E+00	4.53E+01	-3.73E+03	-4.99E-01

FONTE: MCBRIDE ET AL. (1993).

TABELA B2 - COEFICIENTES PARA CÁLCULO DA CONDUTIVIDADE, PARA TEMPERATURA MAIOR  
OU IGUAL A 1000K

<b>Espécie</b>	<b>c1</b>	<b>c2</b>	<b>c3</b>	<b>c4</b>
CO	6.50E-01	-1.51E+02	-1.67E+04	2.17E+00
CO2	6.61E-01	-1.27E+02	-8.16E+04	2.18E+00
H	5.16E-01	-1.46E+03	7.14E+05	5.59E+00
HCN	5.45E-01	-7.81E+02	9.18E+04	3.47E+00
H2	7.44E-01	-5.49E+02	2.57E+05	3.56E+00
H2O	7.93E-01	-1.33E+03	3.79E+05	2.36E+00
NH3	3.21E-01	-1.87E+03	4.52E+05	6.44E+00
N2	6.51E-01	-1.51E+02	-1.37E+04	2.18E+00
OH	5.84E-01	-8.75E+02	2.08E+05	3.54E+00

FONTE: MCBRIDE ET AL. (1993).

TABELA B3 - COEFICIENTES PARA CÁLCULO DA VISCOSIDADE PARA TEMPERATURA MENOR QUE 1000K

<b>Espécie</b>	<b>v1</b>	<b>v2</b>	<b>v3</b>	<b>v4</b>
CO	6.04E-01	-4.36E+01	-8.84E+02	1.90E+00
CO2	5.43E-01	-1.88E+02	8.87E+03	2.45E+00
H	5.82E-01	4.69E+01	-6.88E+03	9.16E-01
HCN	7.25E-01	-2.32E+02	2.14E+04	8.02E-01
H2	6.89E-01	4.87E+00	-5.96E+02	5.56E-01
H2O	7.84E-01	-3.83E+02	4.90E+04	8.52E-01
NH3	8.12E-01	-1.62E+02	1.36E+04	3.86E-01
N2	6.04E-01	-4.36E+01	-8.84E+02	1.90E+00
OH	7.85E-01	-1.65E+02	1.26E+04	6.98E-01

FONTE: MCBRIDE ET AL. (1993).

TABELA B4 - COEFICIENTES PARA CÁLCULO DA VISCOSIDADE, PARA TEMPERATURA MAIOR OU IGUAL A 1000K

<b>Espécie</b>	<b>v1</b>	<b>v2</b>	<b>v3</b>	<b>v4</b>
CO	6.51E-01	2.85E+01	-1.67E+04	1.52E+00
CO2	6.53E-01	5.17E+01	-6.28E+04	1.52E+00
H	5.16E-01	-1.46E+03	7.14E+05	2.16E+00
HCN	5.97E-01	-2.67E+02	1.37E+04	1.75E+00
H2	7.05E-01	3.63E+01	-7.23E+03	4.19E-01
H2O	5.07E-01	-6.90E+02	8.75E+04	3.03E+00
NH3	5.84E-01	-4.28E+02	3.80E+04	2.20E+00
N2	6.51E-01	2.85E+01	-1.67E+04	1.52E+00
OH	5.89E-01	-3.62E+02	2.34E+04	2.24E+00

FONTE: MCBRIDE ET AL. (1993).