

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ANA ELIZA GONÇALVES FERREIRA

**MULTIEXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON COMPLETA PARA O MÉTODO DE  
VOLUMES FINITOS**

Curitiba  
2017

ANA ELIZA GONÇALVES FERREIRA

**Multiextrapolação de Richardson Completa para o Método de Volumes Finitos**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Engenharia Mecânica no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Carlos H. Marchi

Curitiba  
2017

---

F383m

Ferreira, Ana Eliza Gonçalves  
Multiextrapolação de Richardson Completa para o método de volumes finitos / Ana Eliza Gonçalves Ferreira. – Curitiba, 2017.  
165 f. : il. color. ; 30 cm.

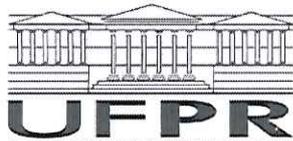
Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2017.

Orientador: Carlos Henrique Marchi .  
Bibliografia: p. 97-100.

1. Equações – Soluções numéricas. 2. Fluidodinâmica computacional. 3. Dinâmica dos fluidos. 4. Multiextrapolações de Richardson. I. Universidade Federal do Paraná. II. Marchi, Carlos Henrique . III. Título.

CDD: 512.94

---



## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA MECÂNICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de ANA ELIZA GONÇALVES FERREIRA intitulada: **MULTIEXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON COMPLETA PARA O MÉTODO DE VOLUMES FINITOS**, após terem inquirido a aluna e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 03 de Outubro de 2017.

CARLOS HENRIQUE MARCHI  
Presidente da Banca Examinadora

SAULO POMPONET OLIVEIRA  
Avaliador Externo

COSMO DAMIÃO SANTIAGO  
Avaliador Externo

ADMILSON TEIXEIRA FRANCO  
Avaliador Externo

EDUARDO MATOS GERMER  
Avaliador Externo



## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus que me concedeu a vida e a oportunidade de aprender.

Agradeço a meus pais e irmã, alicerces e incentivadores de minha caminhada.

Agradeço a meu esposo Cleber pela parceria, compreensão e apoio incondicionais.

Agradeço a meu filho Arthur por resignificar e alegrar meus dias, potencializando o meu desejo de lutar.

Agradeço a meu orientador Prof. Dr. Carlos Henrique Marchi que com paciência, experiência e determinação tornou possível a realização deste trabalho.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro na primeira metade do doutorado.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, a toda Universidade Federal do Paraná e a todos os professores que atuam neste programa pela dedicação na formação e qualificação dos profissionais.

Agradeço ao Colégio Militar de Curitiba (CMC) instituição em que trabalhei e que me motiva a prosseguir me aperfeiçoando e aplicando e multiplicando conhecimentos.

Agradeço a todas as instituições de ensino pelas quais passei como aluna ou como professora, também empresas em que trabalhei, tantos ambientes que ajudaram a me construir como estudante e como profissional.

Agradeço a todos os colegas e amigos do Laboratório de Experimentação Numérica da UFPR (LENA) por tudo que passamos e crescemos juntos, especialmente Diego Fernando Moro que em muitos momentos se mostrou um irmão para mim.

Agradeço aos membros da banca avaliadora pelas indispensáveis e valorosas contribuições para o enriquecimento deste documento e para a finalização desta etapa.

## RESUMO

A motivação principal deste trabalho consiste na redução do erro de discretização por meio do emprego da Extrapolação Richardson Completa (CRE) em problemas resolvidos pelo método de Volumes Finitos. CRE é a Extrapolação de Richardson empregada em todo o campo de soluções. É analisado também o efeito dessas extrapolações em variáveis secundárias de problemas de CFD. CRE já foi comprovada na literatura que é eficiente para problemas de Diferenças Finitas. Foram resolvidas as equações de Poisson, advecção-difusão, o problema da cavidade com tampa móvel modelado pelas equações de Navier Stokes, ambos problemas de escoamentos incompressíveis. Foram utilizadas funções de interpolação de 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> ordens de acurácia para as discretizações e de 10 a 20 malhas de 2 a 1048576 nós. Nas soluções desses problemas de CFD foram feitas análises da redução do erro de discretização com MER e CRE. Para ampliar a avaliação das variáveis de interesse, através da expansão de MER em campos de soluções, é analisada a redução do erro numérico em variáveis secundárias como temperatura média, inclinação nos contornos, temperatura no ponto médio, fluxo de massa e força de arrasto viscoso. Para a ordem de acurácia de variáveis secundárias, a partir de soluções nodais, são mostrados diversos experimentos numéricos e um teorema que generaliza os padrões observados. Com a utilização das faces das malhas 1D e das quinas das malhas 2D se tornou possível o emprego de CRE em Volumes Finitos. O desempenho dessa técnica nos problemas estudados se mostrou equivalente ao encontrado na literatura para Diferenças Finitas. Constatou-se que CRE é um método eficaz para a redução do erro numérico também para problemas de Volumes Finitos. No desempenho do erro de variáveis secundárias, CRE contribui para a redução do erro, porém, o emprego de MER diretamente nas variáveis secundárias pode ser mais eficiente.

Palavras-Chave: Multiextrapolações de Richardson. Erro de discretização. Variáveis secundárias.

## ABSTRACT

The scope of this research is to reduce the discretization error through the use of Completed Richardson Extrapolation (CRE) in problems solved by the Finite Volumes method. CRE is the Richardson Extrapolation employed across the entire field of solutions. The effect of these extrapolations on secondary variables of CFD problems is also analyzed. CRE has already been proven in the literature that is efficient for problems of Finite Differences. The Poisson equations, advection-diffusion, the cavity problem with movable cover modeled by the Navier Stokes equations, both incompressible flow problems, were solved. First, second, third and fourth interpolation functions were used for the discretizations and from 10 to 20 meshes from 2 to 1048576 nodes. In the solutions of these CFD problems analyzes of the reduction of the discretization error with MER and CRE were made. In order to extend the evaluation of the variables of interest, through the expansion of MER in solution fields, the numerical error reduction in secondary variables such as average temperature, contour slope, temperature at the midpoint, mass flow and viscous drag. For the order of accuracy of secondary variables, from nodal solutions, we show several numerical experiments and a theorem that generalizes the observed patterns. With the use of the faces of the 1D meshes and the 2D meshes, it became possible to use CRE in Finite Volumes. The performance of this technique in the studied problems was shown to be equivalent to that found in the literature for Finite Differences. It has been found that CRE is an effective method for the reduction of numerical error also for finite volume problems. In the performance of the error of secondary variables, CRE contributes to the reduction of the error, however, the use of MER directly in the secondary variables can be more efficient.

Keywords: Repeated Richardson Extrapolations. Discretization error. Secondary variables.

## LISTA DE FIGURAS

- Figura 1.1 - Ferramentas disponíveis para a solução de um problema físico
- Figura 2.1 - Duas funções distintas com discretização idênticas nos pontos coincidentes A, B e C.
- Figura 2.2 - Região contínua e região discretizada
- Figura 2.3 - Malha unidimensional uniforme
- Figura 2.4 - A tarefa do método numérico
- Figura 2.5 - Volume elementar para os balanços de conservação
- Figura 2.6 - Extrapolação de Richardson Completa na malha unidimensional
- Figura 2.7 - Extrapolação de Richardson Completa na malha bidimensional
- Figura 2.8 - Quatro diferentes casos de pontos da malha fina extrapolada com CRE
- Figura 2.9 - Volume de controle para o problema advectivo/difusivo
- Figura 3.1 - Problema do fluxo em uma cavidade quadrada com tampa móvel
- Figura 4.1 - Média da norma L1 do erro numérico de Poisson 1D com termo fonte trigonométrico
- Figura 4.2 - Ordem efetiva da média da norma L1 do erro numérico de Poisson 1D com termo fonte trigonométrico
- Figura 4.3 - Representação da malha unidimensional de volumes finitos
- Figura 4.4 - Volumes de controle utilizados para o cálculo da solução nas faces
- Figura 4.5 - Resultados da média da norma L1 de nós de DF e VF e faces de VF para Poisson 1D com e sem CRE
- Figura 4.6 - Ordem efetiva equivalente ( $p_E$ ) da média da norma L1 para Poisson 1D com e sem CRE
- Figura 4.7 - Média da norma L1 para a Equação advecção-difusão (CDS-2/CDS-2)
- Figura 4.8 - Ordem efetiva equivalente ( $p_E$ ) da média da norma L1 para a Equação advecção-difusão (CDS-2/CDS-2)
- Figura 4.9 - Média da norma L1 para a Equação advecção-difusão (UDS-1/CDS-2)
- Figura 4.10 - Ordem efetiva equivalente ( $p_E$ ) da média da norma L1 para a Equação advecção-difusão (UDS-1/CDS-2)
- Figura 4.11 - Média da norma L1 com e sem CRE em Poisson 1D com termo fonte exponencial
- Figura 4.12 - Ordem efetiva equivalente da média da norma L1 com e sem CRE em Poisson 1D com termo fonte exponencial
- Figura 4.13 - Quinas calculadas pela média aritmética de quatro volumes de controle adjacentes
- Figura 4.14 - Quatro casos de pontos na configuração da malha em quinas
- Figura 4.15 - Média da norma L1 de  $u$  com até três níveis de CRE (CDS-2)

- Figura 4.16 - Ordem efetiva equivalente da média da norma L1 de  $u$  com até três níveis de CRE (CDS-2)
- Figura 4.17 - Média da norma L1 da variável  $u$  com UDS-1
- Figura 4.18 - Ordem efetiva equivalente da média da norma L1 da variável  $u$  com UDS-1
- Figura 4.19 - Média da norma L1 para a variável  $u$  com CDS-2 da solução exponencial
- Figura 4.20 - Ordem efetiva equivalente da média da norma L1 para a variável  $u$  com CDS-2
- Figura 4.21 - Média da norma L1 para a variável  $u$  com UDS-1 da solução exponencial
- Figura 4.22 - Ordens efetivas equivalentes da média da norma L1 para a variável  $u$  com UDS-1
- Figura 5.1 -  $E_h$  e  $E_m$  versus  $h$  para a Regra do Trapézio no caso exponencial
- Figura 5.2 -  $p_E$  versus  $h$  versus  $m$  para a Regra do Trapézio no caso exponencial
- Figura 5.3 -  $E_m$  versus  $h$  versus  $m$  para a Regra de Simpson no caso exponencial
- Figura 5.4 -  $p_E$  versus  $h$  versus  $m$ , para a Regra de Simpson no caso exponencial
- Figura 5.5 -  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  versus  $h$  para a Regra do Trapézio no caso exponencial
- Figura 5.6 - Ordem efetiva equivalente de  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  da Regra do Trapézio no caso exponencial
- Figura 5.7 -  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  versus  $h$  para a Regra de Simpson no caso exponencial
- Figura 5.8 - Ordem efetiva equivalente de  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  da Regra de Simpson no caso exponencial
- Figura 5.9 - Temperatura em  $x=1/2$  com diferentes esquemas de discretização
- Figura 5.10 - Erros numéricos da temperatura em  $x=1/2$  com diferentes esquemas de discretização
- Figura 5.11 - Ordem efetiva equivalente dos erros numéricos da temperatura em  $x=1/2$  com diferentes esquemas de discretização
- Figura 5.12 -  $E_m$  versus  $h$  versus  $m$  para IO1
- Figura 5.13 -  $E_m$  versus  $h$  versus  $m$  para IO2
- Figura 5.14 -  $E_m$  versus  $h$  versus  $m$  para IO3
- Figura 5.15 -  $p_E$  versus  $h$  versus  $m$  para a IO1
- Figura 5.16 -  $p_E$  versus  $h$  versus  $m$  para a IO2
- Figura 5.17 -  $p_E$  versus  $h$  versus  $m$  para a IO3
- Figura 5.18 - Erros de IO3 em  $x=1$  de UDS-1 com 1 e 2 níveis de CRE
- Figura 5.19 -  $p_E$  de erros de IO3 em  $x=1$  de UDS-1 com 1 e 2 níveis de CRE
- Figura 5.20 - Erros de M em UDS-1 com 0, 1 e 2 níveis de CRE e Regra de Simpson
- Figura 5.21 -  $p_E$  dos erros de M em UDS-1 com 0, 1 e 2 níveis de CRE e Regra de Simpson
- Figura 5.22 - Erros de F em CDS-2 com Regra de Simpson e DDS-3
- Figura 5.23 -  $p_E$  dos erros de F em CDS-2 com Regra de Simpson e DDS-3

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CDS	<i>Central Differencing Scheme</i>
CFD	Dinâmica de Fluidos Computacional (do inglês <i>Computational Fluid Dynamics</i> )
CRE	Extrapolação de Richardson Completa (do inglês <i>Completed Richardson Extrapolation</i> )
DDS	<i>Downstream Difference Scheme</i>
EDP	Equação Diferencial Parcial
ER	Extrapolação de Richardson
FI	Função de interpolação
FS	Fator de segurança
GCI	<i>Grid Convergence Index</i>
IO1	Inclinação em $x=0$ calculada com DDS-1
IO2	Inclinação em $x=0$ calculada com DDS-2
IO3	Inclinação em $x=0$ calculada com DDS-3
MER	Multiextrapolações de Richardson
MDF	Método de Diferenças Finitas
MSI	<i>Modified Strongly Implicit</i>
MVF	Método de Volumes Finitos
QUICK	<i>Quadratic upstream interpolation for convective kinematics</i>
TDMA	<i>TriDiagonal Matrix Algorithm</i>
UDS	<i>Upwind Differencing Scheme</i>
1D	unidimensional
2D	bidimensional

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	coeficientes do sistema de equações algébricas
$b$	termos independentes do sistema de equações algébricas
$Eh$	erro de discretização
$g$	número de malhas
$h$	tamanho dos elementos de malha
$I$	Inclinação
$Ll$	norma do erro numérico
$\overline{Ll}$	média da norma do erro numérico
$N$	número total de nós da malha
$p_A$	ordem de acurácia [adimensional]
$p_E$	ordem efetiva [adimensional]
$p_L$	ordem assintótica [adimensional]
$p_0$	primeira ordem verdadeira [adimensional]
$p_V$	ordem verdadeira [adimensional]
$p_2, p_3, \dots$	ordens verdadeiras [adimensional]
$p_U$	ordem aparente [adimensional]
$r$	razão de refino da malha [adimensional]
$S$	termo fonte
$\overline{T}$	temperatura média [adimensional]
$U_{Ri}$	estimador de Richardson
$C$	termo de correção
$M$	fluxo de massa [kg/s]
$F$	força de arrasto viscoso [N]
$u$	componente do vetor velocidade na direção $x$ [adimensional]
$v$	componente do vetor velocidade na direção $y$ [adimensional]

### Letras gregas

$\mu$	viscosidade absoluta do fluido [Pa.s]
$\rho$	massa específica do fluido [kg/m <sup>3</sup> ]
$\phi$	solução numérica da variável de interesse

### Subscritos

$i$	posição do nó na direção $x$
$j$	posição do nó na direção $y$
$m$	número da extrapolação

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	13
1.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA .....	13
1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	15
1.2.1 Extrapolação de Richardson (ER) .....	15
1.2.2 Multiextrapolações de Richardson (MER) .....	17
1.2.3 Extrapolação de Richardson Completa (CRE) .....	20
1.3 OBJETIVOS .....	21
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO .....	22
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	23
2.1 DISCRETIZAÇÃO DE EQUAÇÕES .....	23
2.2 MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS .....	24
2.3 MÉTODO DE VOLUMES FINITOS .....	26
2.4 ERROS NUMÉRICOS .....	28
2.4.1 Erro de truncamento e erro de discretização .....	30
2.5 EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON .....	32
2.5.1 Multiextrapolação de Richardson .....	32
2.5.2 Extrapolação de Richardson Completa .....	33
2.6 FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO .....	40
<b>3 MODELOS MATEMÁTICOS</b> .....	45
3.1 EQUAÇÃO DE POISSON 1D .....	45
3.2 EQUAÇÃO DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO 1D .....	48
3.3 EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES 2D .....	48
3.3.1 Solução fabricada polinomial .....	49
3.3.2 Solução fabricada exponencial .....	51
3.4 VARIÁVEIS DE INTERESSE .....	53
3.4.1 Temperatura média .....	53
3.4.2 Inclinação nos contornos .....	55
3.4.3 Fluxo de massa .....	57
3.4.4 Força de arrasto viscoso .....	57
<b>4 RESULTADOS DOS CAMPOS</b> .....	58
4.1 EMPREGO DE CRE EM PROBLEMAS 1D .....	58
4.1.1 Poisson 1D com termo fonte trigonométrico .....	58
4.1.2 Advecção-Difusão (CDS-2/CDS-2) .....	63
4.1.3 Advecção-Difusão (UDS-1/CDS-2) .....	64

4.1.4 Poisson 1D com termo fonte exponencial .....	66
4.2 EMPREGO DE CRE EM PROBLEMAS 2D .....	68
4.2.1 Equações de Navier-Stokes com solução fabricada polinomial .....	68
4.2.2 Equações de Navier-Stokes com solução fabricada exponencial .....	74
<b>5 RESULTADOS PARA VARIÁVEIS SECUNDÁRIAS</b> .....	77
5.1 Temperatura Média .....	77
5.2 Temperatura em $x = 1/2$ .....	85
5.3 Inclinação nos contornos .....	86
5.4 Fluxo de massa .....	90
5.5 Força de arrasto viscoso .....	92
5.6 Ordem de acurácia de variáveis secundárias a partir de soluções nodais .....	94
<b>6 CONCLUSÃO</b> .....	95
6.1 CONCLUSÃO SOBRE OS RESULTADOS DO TRABALHO .....	95
6.2 CONTRIBUIÇÕES PARA O ESTADO DA ARTE .....	96
6.3 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS .....	96
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....	97
<b>APÊNDICE A</b> RESULTADOS DE $v$ E $p$ PARA AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES COM SOLUÇÃO POLINOMIAL .....	101
<b>APÊNDICE B</b> RESULTADOS DE $v$ E $p$ PARA AS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES COM SOLUÇÃO EXPONENCIAL .....	106
<b>APÊNDICE C</b> RESULTADOS COMPLEMENTARES DA TEMPERATURA MÉDIA .....	114
<b>APÊNDICE D</b> RESULTADOS COMPLEMENTARES DA INCLINAÇÃO NOS CONTORNOS .....	127
<b>APÊNDICE E</b> RESULTADOS COMPLEMENTARES DO FLUXO DE MASSA E DA FORÇA DE ARRASTO VISCOSO .....	152

# 1 INTRODUÇÃO

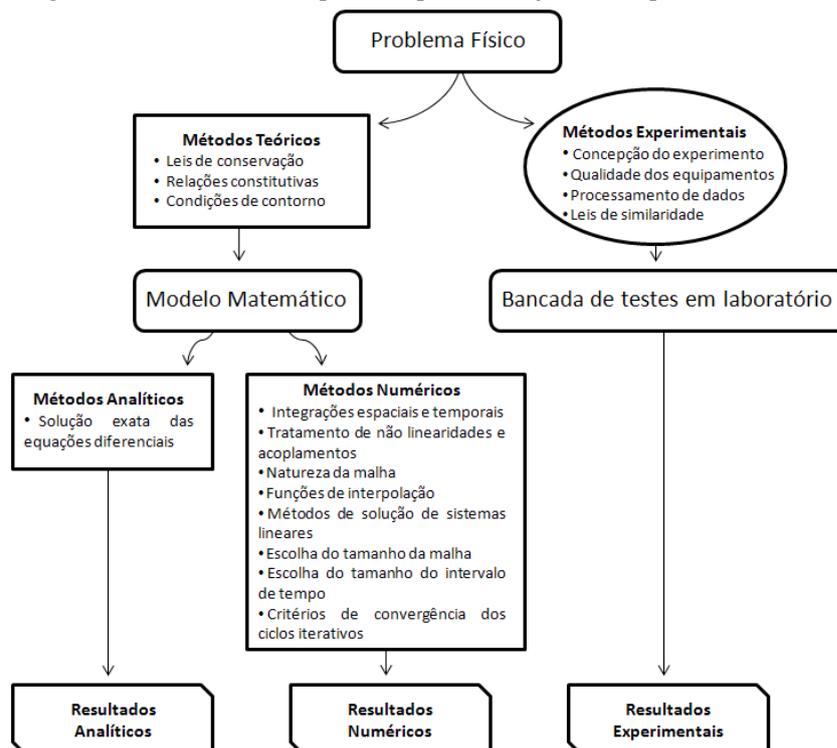
## 1.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

A solução de problemas físicos conta com uma ferramenta que é a simulação numérica. Em mecânica dos fluidos e transferência de calor é chamada de Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD). Em problemas onde se aplicam métodos numéricos para a solução, a possibilidade de utilizar ferramentas computacionais amplia as condições de trabalho, pesquisa, inovação e a execução de testes com variação de parâmetros demandam menor tempo. A infraestrutura computacional, por sua vez, acaba sendo determinante para desempenhos de tempo computacional e na possibilidade de executar as simulações.

O escoamento de fluidos com ou sem transferência de calor está envolvido praticamente em todos os processos de produção de energia, nos fenômenos ambientais, nos equipamentos térmicos, na engenharia aeronáutica e aeroespacial, na engenharia de reatores, na bioengenharia etc. E a simulação numérica desses escoamentos desempenha um papel fundamental para o entendimento e a quantificação do fenômeno (...) já que a simulação numérica permite executar muitas experiências rapidamente (Maliska, 2004, pág 8).

No contexto dos problemas de engenharia, como o escoamento de fluidos, são utilizadas três ferramentas para solução de problemas, os métodos numéricos ocupam posição de destaque como pode ser observado na Figura 1.1 a seguir:

Figura 1.1: Ferramentas disponíveis para a solução de um problema físico



Fonte: Adaptação de Maliska (2004)

Os erros de modelagem são causados por simplificações do fenômeno real na concepção do modelo ou por incertezas nas coletas de dados. Além dos erros de modelagem, os métodos numéricos, por não resultarem na solução exata do modelo matemático, oferecem resultados aproximados que contém erros numéricos. Nos resultados numéricos há quatro fontes principais de erros: iteração, arredondamento, programação e truncamento, chamado de discretização (Roache, 1998).

Os erros inerentes à discretização são de muito interesse, pois os demais erros podem ser mais facilmente evitados ou são inerentes ao processo, como no caso da iteração, ou são dependentes da infraestrutura computacional disponível, como os de arredondamento. Dessa forma, estimar e reduzir o erro de discretização é de grande importância para a acurácia e confiabilidade da solução numérica.

Neste trabalho é contemplada a redução do erro de discretização em CFD com emprego de CRE. As equações testadas foram Poisson 1D, advecção-difusão 1D e Navier-Stokes 2D resolvidas por Volumes Finitos e com diversos esquemas de aproximação. As equações de Navier-Stokes têm importantes aplicações em Engenharia Mecânica por modelarem diversos problemas que envolvem fluidos como, por exemplo, na aerodinâmica de aviões, propulsão de foguetes e demais tipos de motores, hidrodinâmica e bombas hidráulicas.

Pode ser visto na seção 1.2 que vários autores já comprovaram a eficácia da Extrapolação e das Multiextrapolações de Richardson como uma ferramenta para a redução do erro de discretização em variados problemas de CFD e de outras áreas. A Extrapolação de Richardson Completa (CRE) foi introduzida por Roache e Knupp (1993) que testaram em problemas 1D e 2D resolvidos por Diferenças Finitas e esquema CDS-2. Richards (1997) estendeu CRE a problemas transientes. Giacomini (2013) estendeu CRE para outras equações resolvidas por Diferenças Finitas e com diferentes aproximações. Ambos constataram que CRE contribui para a redução do erro de discretização. Neste trabalho foram buscadas maneiras de aplicar CRE a problemas resolvidos por Volumes Finitos já que a literatura apresentava resultados apenas para problemas resolvidos por Diferenças Finitas. Foram investigados problemas com solução analítica para testar a eficácia da metodologia testada. Na prática, na maioria das vezes, não se conhece a solução analítica e se empregam ferramentas para estimar o erro numérico como o estimador GSI que pode ser consultado em Roache (1998). Neste estudo é mostrada uma comparação entre o desempenho de CRE, empregando-o em um e mais níveis de extrapolação, e de MER na avaliação de variáveis de interesse como temperatura média, inclinação nos contornos, fluxo de massa e força de arrasto viscoso. Pretende-se, sobretudo, contribuir para a expansão MER em problemas de CFD.

## 1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 1.2.1 EXTRAPOLAÇÕES DE RICHARDSON (ER)

A Extrapolação de Richardson visa reduzir o erro de discretização das soluções numéricas. Visando reduzir os erros numéricos quando se empregam esquemas de baixa ordem assintótica os métodos de extrapolação, como a Extrapolação de Richardson (ER), podem fornecer resultados semelhantes aos de alta ordem. Esse fato ocorre em trabalhos citados a seguir.

Costiglione *et al.* (2011) constataram que o erro de discretização ( $E_h$ ) representa a principal fonte de erro numérico fazendo verificação e validação (V&V) de soluções para um campo de velocidades de um problema de CFD. Segundo Marchi *et al.* (2013) a redução da parcela do erro numérico influenciada pela discretização pode ser alcançada ao se refinar a malha, o que aumentaria os custos computacionais, ao aumentar a ordem de acurácia das aproximações, o que deixaria o modelo mais complexo ou então aplicar técnicas de extrapolação como a de Richardson. Nesse sentido a Extrapolação de Richardson é uma forma de melhorar esquemas numéricos, no pós-processamento, com a eliminação do termo de ordem mais baixa da expressão do erro de discretização, pois este termo é que determina a ordem aparente do erro. São, portanto, usadas duas soluções aproximadas para obter uma terceira e melhor aproximação. Com a ER se pode também obter uma estimativa do erro que está sendo cometido ao se aplicar um determinado método numérico de solução.

A Extrapolação de Richardson foi apresentada por Richardson (1910). Richardson e Gaunt (1927) aplicaram a técnica a diversas equações na forma integral, como a equação integral de Volterra, e diferencial, como as derivadas no Teorema de Leibnitz. Dessa forma, pode-se perceber que desde o início a extrapolação de Richardson caracterizou-se pela aplicabilidade às soluções de equações integrais e equações diferenciais resolvidas numericamente.

Ao longo dos anos, diversos autores têm destacado vários interesses com o estudo sistemático e o aprimoramento da Extrapolação de Richardson (ER).

Segundo Simonsen e Stern (2003), a extrapolação de Richardson é uma técnica de verificação numérica em CFD. Zhang *et al.* (2011) usaram um método de passo variável com a ER para o cálculo do erro de truncamento local em Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) acopladas e resolvidas com paralelização. Zlatev *et al.* (2010) e Faragó *et al.* (2013) aplicaram ER para melhorar a acurácia de soluções de sistemas de EDO obtidas por métodos de passos múltiplos. Essa aplicação de ER combinada a métodos de passos múltiplos mostrou melhoria

na acurácia das soluções e redução de tempo computacional para atingir um nível de acurácia pré-estabelecido.

Visando melhoria de acurácia em soluções numéricas, Pomeranz (2011) aplicou ER na equação de Laplace para o método dos elementos de contorno e utilizou a ordem de acurácia ( $p_A$ ) para avaliar a eficácia de ER. Quando os valores de  $p_A$  não são números reais positivos, indicam que ER não fornecerá resultados com boa acurácia e confiabilidade. Assim, obtendo um valor *a priori* para  $p_A$  é possível determinar um valor *a posteriori* que garanta sua bem sucedida aplicabilidade.

ER pode ser também utilizada para a estimativa o erro de discretização. Xing e Stern (2010) propõem um fator de segurança no que diz respeito à ordem de acurácia obtida *a priori* e a obtida *a posteriori* para estimar o erro de discretização ( $Eh$ ). Roache (2011) afirma que as estimativas com base em ER devem considerar o fator de segurança FS como no estimador *GCI* (*Grid Convergence Index*) proposto em Roache (1994) e enfatiza a necessidade de convergência de malha com refinamentos elevados para obter boa estimativa da ordem de acurácia.

Conforme a acurácia desejada e a confiabilidade pretendida deve ser escolhido o valor de FS. De acordo com Karimi *et al.* (2012) é recomendável a utilização de FS=3 para a maioria das aplicações. Para Roache (2011) a única variação aceitável para FS é para um comportamento assintótico de  $p_A$ , onde seria possível aplicar  $1,25 \leq FS \leq 3$  e afirma ainda que não se deve utilizar  $p_A$  maior do que a obtida *a priori*, apesar do estimador *GCI* desconsiderar o sinal de  $Eh$  e apresentar apenas um valor absoluto estimado. Como exemplo de estimativas de erro se pode observar o trabalho de Marchi e Silva (2005) onde foram apresentados procedimentos para estimar o erro de soluções numéricas de problemas multidimensionais. Consideraram os erros numéricos causados apenas por erros de truncamento, estimaram o erro com base em ER e validaram as conclusões de Marchi e Silva (2002). Comprovaram, especialmente, que o verdadeiro erro de discretização ( $Eh$ ) está entre os valores do erro encontrados pelo estimador de Richardson ( $U_{Ri}$ ), Eq. 1.1, calculado com base na ordem assintótica (fazendo  $p^*=p_0$  na Eq. 1.4), e aparente (fazendo  $p^*=p_U$  na Eq. 1.4).

$$U_{Ri} = \frac{(\phi_1 - \phi_2)}{(r^{p^*} - 1)} \quad (1.4)$$

Com o intuito de reduzir *Eh*, Wang e Zhang (2009) e Wang *et al.* (2011) aplicaram ER na resolução da equação de Poisson em domínio bidimensional obtendo solução numérica com sexta ordem de acurácia. Afirmam que isso é possível com a utilização de duas malhas, o que demanda baixo custo computacional. Também obtiveram soluções de sexta ordem de acurácia, a partir de soluções de quarta ordem, Ma e Ge (2010) e Wang e Zhang (2010) ao aplicar ER na resolução da equação de advecção-difusão em domínio tridimensional.

Pomeranz (2011) confirmou que a ER é um vantajoso método ao destacar que o tempo de computação adicional para sua utilização é insignificante em comparação ao tempo necessário para obtenção da solução na malha mais fina. Da mesma forma, as principais vantagens elencadas por Marchi *et al.* (2013) para o emprego de ER é que por se tratar de um método de pós-processamento, não interfere na obtenção das soluções numéricas. É um método de baixo custo computacional e aplicável a códigos computacionais já existentes ou a resultados já obtidos e pode ser aplicado a diversos métodos numéricos, diferentes aproximações e variáveis de interesse.

### 1.2.2 MULTIEXTRAPOLAÇÕES DE RICHARDSON (MER)

Realizando novas extrapolações a partir de ER já obtidas tem-se as Multiextrapolações de Richardson (MER). Diversos autores repetiram extrapolações buscando estudar o comportamento, como Richardson e Gaunt (1927) que consideraram a aplicação de ER com dois níveis de extrapolação. Analogamente, Rahul e Bhattacharyya (2006) aplicaram ER duas vezes, isto é, realizaram MER com dois níveis de extrapolação a partir das soluções, resultantes de aproximações unilaterais por Diferenças Finitas e condições de contorno de Neumann, em três malhas distintas. Obtiveram ordem quatro de  $p_A$ , semelhante a terem usado um esquema de quarta ordem, porém a aplicação de MER demandou malhas menos refinadas, tornando a solução do sistema discretizado mais eficiente.

Joyce (1971) pesquisou o desenvolvimento de processos de extrapolação em análise numérica, lidando principalmente com os baseados em funções polinomiais ou racionais, sendo possível identificar a semelhança entre ER e outros métodos de extrapolação existentes.

Erturk *et al.* (2005) aplicaram MER com dois níveis de extrapolação a partir das soluções em três malhas distintas para o problema do escoamento permanente bidimensional de fluido incompressível em uma cavidade com tampa móvel. A formulação do problema era função corrente *versus* vorticidade e com variação do número de Reynolds. Conseguiram aumentar em quatro ordens a acurácia obtida chegando à sexta ordem.

Segundo Ashraf *et al.* (2011) o uso de dois níveis de extrapolação melhora significativamente a acurácia dos resultados. Constataram isso ao aplicar em três malhas distintas dois níveis de MER em um problema de escoamento laminar bidimensional com aproximações de segunda ordem de acurácia e MDF.

Schreiber e Keller (1983) realizaram três níveis de extrapolações de MER ao resolverem o problema da cavidade quadrada com tampa móvel. Na resolução de um problema de advecção-difusão 1D, Marchi e Germer (2009) testaram algumas funções de interpolação e apresentaram resultados com quatorze níveis de extrapolação. Em Marchi *et al.* (2009) apresentaram quarenta e duas variáveis de interesse e nove níveis de extrapolações de Richardson ao resolverem o problema da cavidade quadrada com tampa móvel.

Chang *et al.* (2011) empregaram MER com diversos níveis de extrapolação em problemas da área de finanças e obtiveram soluções de melhor desempenho que as usuais que empregam métodos estocásticos. Na área de CFD, Marchi *et al.* (2013) empregaram MER na resolução numérica pelo MVF da equação de Laplace 2D para até onze níveis de extrapolação e constataram que a redução do erro numérico com emprego de MER é dependente da variável de interesse e da geometria do domínio. Justificaram que o comportamento esperado de MER não foi alcançado nas variáveis localizadas nos contornos das geometrias triangulares, fato este que ainda requer estudos mais detalhados que, segundo os autores, estariam em andamento.

Há, portanto, um grande interesse no emprego de MER, seja para aplicar alguns níveis em problemas e melhorar a solução com a redução do erro de discretização ou, ainda, a partir de testes e diversos níveis de extrapolação desenvolver e aprimorar cada vez mais a técnica. Alguns trabalhos apontam algumas necessidades de aprimoramento do emprego de MER a problemas mais complexos e outros sugerem soluções para alguns obstáculos outrora identificados. De acordo com Burg e Erwin (2009) podem acontecer deslocamentos de características físicas com o refino e tornar vulnerável a eficácia de MER e  $p_A$  deve ser monitorado quanto ao comportamento monotônico e convergente das ordens aparente ( $p_U$ ) e assintótica ( $p_0$ ). Com base nisso, a consideração de refino constante e o devido monitoramento de  $p_A$  *a priori* e *a posteriori* podem contribuir ao bom desempenho de MER, visto que algumas características são inerentes ao processo como descontinuidades nas soluções analíticas o que dependendo da localização poderia tornar MER ineficiente, fato este observado no trabalho de Feng e Li (2010).

Marchi *et al.* (2008), por meio da resolução de um problema de condução de calor governado pela equação de Laplace bidimensional (2D), mostraram que MER reduz significativamente o erro de discretização, que o estimador de erro de Richardson funciona para resultados numéricos obtidos com MER e que resultados mais efetivos com MER são obtidos usando precisão quádrupla nos cálculos, maior número de extrapolações, maior número de malhas e ordens corretas do erro.

Novak (2012) comprovou a eficiência de MER (Multiextrapolações de Richardson) para estimar e reduzir o erro de discretização em transferência de calor computacional para as equações de Laplace bidimensional e Poisson unidimensional. Sendo que para a equação de Poisson, a estimativa do erro é acurada e confiável até o erro numérico atingir aproximadamente  $10^{-27}$ , e a partir daí erros de arredondamento interferem negativamente. Desenvolveu e caracterizou o “erro de posição” que interfere na convergência de MER devido ao ponto onde é admitida a solução numérica sem extrapolação não permanecer fixa durante o refino quando a coordenada é desconhecida. Afirma ainda que MER não pode ser generalizado porque carece de avanços a equações de maior complexidade e pela necessidade de consolidação do erro de posição.

Para o caso das variáveis com valores extremos, Marchi *et al.* (2009) perceberam que os pontos extremos podem ter sua localização alterada ao se proceder o refino de malha, o que impediria um bom desempenho de MER. Esse fato foi contemplado por Martins *et al.* (2013) onde para o emprego de MER, para reduzir o erro de discretização ( $Eh$ ), classificou cinco tipos de variáveis de acordo com a sua localização em malhas distintas. Eles desenvolveram estratégias aplicáveis em variáveis com coordenadas móvel ou fixa, porém não coincidente com um ponto nodal, propondo um conjunto de procedimentos que permite reduzir  $Eh$  de variáveis para as quais MER apresenta baixo desempenho. Concluíram que para empregar MER se deve primeiramente enquadrar a variável de interesse em um dos cinco tipos estabelecidos no trabalho, e a partir disso identificar o procedimento adequado. A metodologia proposta permite reduzir  $Eh$  inclusive nos casos em que a MER é considerada ineficiente. Tal procedimento, caracterizado por um pós-processamento, apresenta baixíssimo custo computacional e, em princípio, é válido para MDF e MVF com aproximações de qualquer ordem de acurácia.

Marchi e Germer (2013) testaram o impacto de MER para reduzir o erro de discretização da solução da equação 1D de advecção-difusão resolvida por Volumes Finitos. Aplicaram MER a três variáveis de interesse, temperatura no centro do domínio, média do

campo de temperatura e taxa de transferência de calor, cujas soluções numéricas foram obtidas com 10 esquemas distintos de aproximação. Concluíram que MER é eficiente para reduzir o erro de variáveis primárias e secundárias empregando soluções obtidas com esquemas de 1ª, 2ª e 3ª ordens de acurácia. Para as variáveis secundárias, o melhor esquema depende dos valores das ordens de acurácia das aproximações numéricas empregadas na obtenção da variável secundária.

Zhang e Zhang (2016) discutiram estratégias de interpolação no emprego de MER. Afirmaram que MER pode gerar soluções altamente precisas em malhas grossas e que se devem investir esforços para desenvolver mais técnicas para emprego de MER em malhas refinadas.

### 1.2.3 EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON COMPLETA (CRE)

A solução extrapolada era calculada apenas nos nós da malha grossa até que Roache e Knupp (1993) estenderam a técnica para que a solução extrapolada também pudesse ser calculada nos nós da malha fina e este procedimento foi então chamado de Extrapolação de Richardson Completa (do inglês *Completed Richardson Extrapolation* – CRE) . Os autores estenderam a técnica às equações diferenciais parciais independentes do tempo, permitindo que a malha fina pudesse ter soluções mais acuradas. Afirmaram ainda que a estabilidade do esquema numérico considerado não pode ser garantida na mais fina das duas malhas, mesmo que seja estável em malha grossa.

A Extrapolação de Richardson Completa é aplicada em problemas de campos, isto é, emprega-se a técnica a problemas com solução para todos os nós da malha.

Richards (1997) estendeu a Extrapolação de Richardson Completa a problemas dependentes do tempo. Apresentou a técnica, calculando em todos os nós da malha que coincidem com os nós da malha mais fina considerada. Destacou que se a malha mais grossa é inicialmente “fina” o suficiente, a solução calculada sobre a mais fina das duas malhas será mais próxima da solução exata. Onde os nós de ambas as malhas coincidirem, uma solução mais precisa do que a solução na malha fina é calculada. Isto é conseguido através do conhecimento da taxa à qual o esquema numérico utilizado em ambas as malhas converge para a solução real e extrapolando uma nova solução a partir das soluções nas malhas grosseiras e fina. A Extrapolação de Richardson requer que a solução exata seja uma função contínua suave.

No trabalho de Giacomini (2013), para a Equação de Poisson 1D, antes da extrapolação o erro das variáveis de interesse era da ordem de  $10^{-7}$  e com 9 extrapolações  $10^{-31}$ . Para a Equação de Advecção-Difusão 1D teve o menor erro numérico conseguido com três extrapolações atingindo a ordem de  $10^{-8}$ . Para a Equação de Laplace 2D, foram estudadas três variáveis de interesse com até duas extrapolações, pois mais que isso não reduziu o erro. Testes adicionais com a Equação de Poisson 2D apresentaram resultados qualitativos semelhantes aos de Laplace 2D. Para as Equações de Burgers 1D e 2D, foram conseguidas 9 extrapolações em campos com aumentos de 2 unidades na ordem do erro.

Marchi *et al.* (2016) estenderam o uso de MER a campos de problemas 1 e 2D. Testaram o método da Extrapolação de Richardson Completa, bem como propuseram e testaram o FRE (*Full Richardson Extrapolation*). Resolveram as equações de Poisson, advecção-difusão, Laplace e Burgers pelo método de diferenças finitas, com aproximações de 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> ordens de acurácia e até nove extrapolações. Verificaram que tanto CRE quanto FRE reduzem o erro de discretização de soluções de Poisson 1D, pois ao aplicarem FRE com sete extrapolações foi aumentada em dezesseis unidades a ordem do esquema numérico.

Com relação ao emprego de CRE foram encontrados na literatura apenas os trabalhos citados nesta seção, ambos empregando a técnica em problemas resolvidos por Diferenças Finitas.

### 1.3 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é expandir o emprego de CRE multiextrapolado para a redução de erros de discretização em problemas de campos em CFD. Considerando-se isso e a definição do problema descrito na seção 1.1, os objetivos específicos são:

- Desenvolver uma metodologia para emprego de CRE em problemas unidimensionais de CFD resolvidos com o método de Volumes Finitos;
- Desenvolver uma metodologia para emprego de CRE em problemas bidimensionais de CFD resolvidos com o método de Volumes Finitos;
- Comparar o efeito de MER e CRE no erro de variáveis secundárias em problemas de CFD.
- Determinar a ordem de acurácia do erro de variáveis secundárias a partir de soluções nodais.

#### 1.4 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Este trabalho apresenta 6 (seis) capítulos e suas referências bibliográficas. No segundo capítulo se encontra uma breve fundamentação teórica, onde são expostos definições e conceitos que podem ajudar o leitor de áreas correlatas de CFD a compreender melhor alguns dos assuntos tratados no trabalho. No terceiro capítulo são apresentados os modelos e alguns procedimentos matemáticos utilizados. O quarto capítulo expõe os resultados obtidos com uma metodologia para emprego de CRE em Volumes Finitos tanto para problemas 1D quanto 2D em equações da área de CFD. No quinto capítulo é discutido o impacto de MER e CRE em variáveis secundárias e é feita uma demonstração da ordem de acurácia de variáveis secundárias a partir de soluções nodais. O sexto capítulo expõe as conclusões que puderam ser obtidas com a execução deste trabalho, cita as contribuições para o estado da arte e traz sugestões de trabalhos futuros. Na sequência são exibidas as referências bibliográficas que ajudaram a embasar este trabalho e alguns resultados complementares em apêndices.

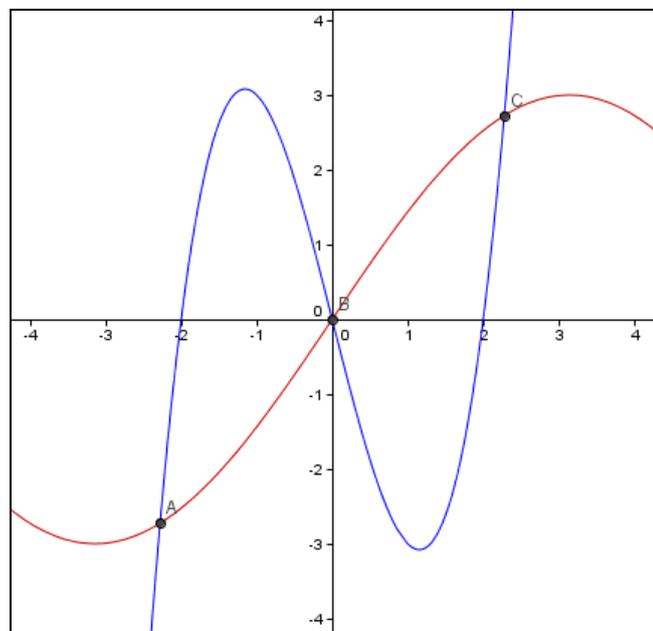
## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 DISCRETIZAÇÃO DE EQUAÇÕES

Seja  $f$  uma função real definida em um intervalo  $[a; b]$ . Se  $f$  é contínua, então é possível determinar seu comportamento com valores de  $f$  em um conjunto discreto de pontos do domínio  $X = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , onde  $n$  é um inteiro positivo. Da continuidade de o valor de  $f$  em um ponto  $c \notin X$  será próximo do valor de  $f$  no ponto  $x_i \in X$  que esteja mais próximo de  $c$ . Com um número de elementos em  $X$  suficientemente grande e bem distribuído no intervalo  $[a; b]$ , o erro em aproximar  $f(c)$  por  $f(x_i)$  tende a ser pequeno. Este processo onde se substitui um conjunto contínuo por um conjunto finito (o conjunto dos valores  $\{f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$ ) é chamado de uma *discretização* da função  $f$ . Dividindo-se  $[a; b]$  em  $n$  subintervalos de mesmo tamanho e fazendo-se os pontos da discretização como os extremos dos subintervalos, obtém-se pontos bem distribuídos por todo o intervalo.

Em uma discretização ocorre, necessariamente, perda de informação, pois funções muito diferentes podem se tornar exatamente iguais em uma determinada discretização. Na Fig. 2.1, temos duas funções distintas, um seno e um polinômio, que coincidem nos pontos A, B e C representados.

Figura 2.1: Duas funções distintas com discretização idêntica nos pontos coincidentes A, B e C



Ao se diminuir tanto quanto suficiente o tamanho dos subintervalos na discretização, duas funções que coincidem ao serem discretizadas poderão passar a serem distintas. Contudo, dependendo desse tamanho pode haver infinitas outras funções distintas que são

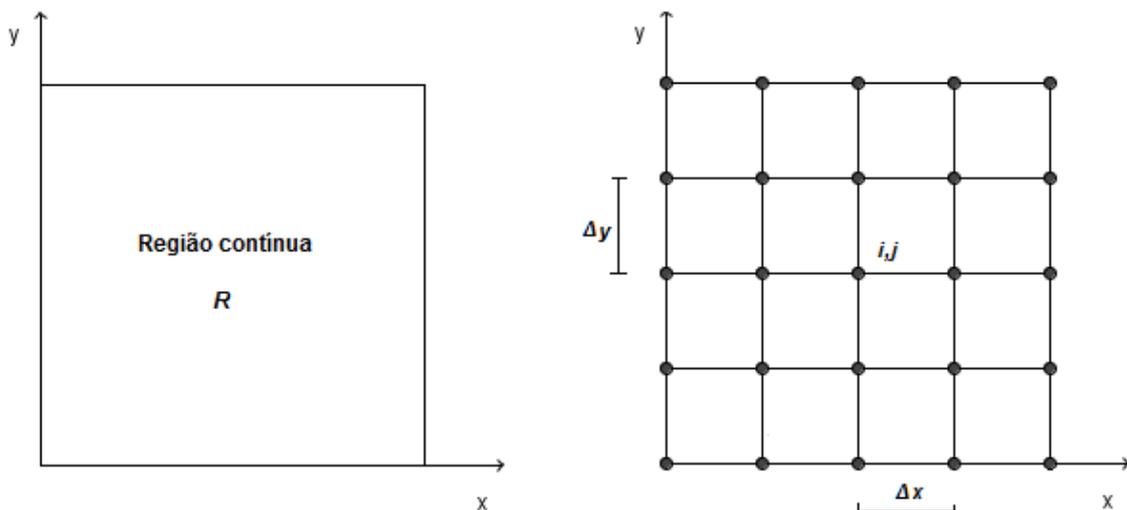
coincidentes com a função dada. Os erros cometidos nas aproximações de funções por meio de discretização tendem a diminuir quanto menor for o tamanho do subintervalo do domínio utilizado. Não se pode desconsiderar, contudo, que o uso de malhas muito refinadas implica em maior utilização de memória e processamento, ou seja, maior custo computacional. Tratando-se da solução de EDPs, especialmente quando não possuem solução analítica, é realizada a discretização com base em métodos numéricos como Diferenças Finitas e Volumes Finitos. A Extrapolação de Richardson Completa, objeto deste trabalho, bem como as Multiextrapolações de Richardson e a Extrapolação de Richardson, atuam melhorando soluções numéricas a partir de malhas grosseiras. Assim, contribuem na minimização da necessidade de um custoso refino de malha.

## 2.2 MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

O método de diferenças finitas (MDF) resolve equações diferenciais por meio da substituição das derivadas existentes por expressões algébricas que envolvem a função incógnita (Maliska, 2004). Ao solucionar uma EDP em uma região  $R$  se obtém valores para a variável de interesse em todos os pontos do domínio ( $R$ ). Para um domínio contínuo é necessário dispor da solução analítica do problema. As técnicas numéricas utilizam um domínio discreto, onde são selecionados alguns pontos dentro de  $R$  e a solução é calculada somente neles. A esse conjunto discreto de pontos se dá o nome de malha e o processo que os determina se chama discretização (Fortuna, 2000).

Na Fig. 2.2, podemos observar a representação de um domínio contínuo e à direita o conjunto de pontos discretos, a malha, utilizados para a obtenção da solução numérica.

Figura 2.2: Região contínua e região discretizada



Nota-se que os pontos da malha localizam-se na intersecção das linhas horizontais com as verticais, separados por uma distância  $\Delta x$  e  $\Delta y$ , respectivamente, não necessariamente iguais. Os índices  $i$  e  $j$  identificam um ponto na  $i$ -ésima coluna e na  $j$ -ésima linha, respectivamente (Fortuna, 2000).

Antes da resolução numérica da EDP é preciso encontrar expressões escritas em função dos pontos da malha. Essas expressões culminam em equações algébricas, cada uma denominada de Equação de Diferenças Finitas (EDF). As soluções das EDFs resultam na solução aproximada do problema, que não é exata devido a erros inerentes ao processo de discretização, arredondamentos nos cálculos computacionais e aproximações numéricas das condições auxiliares (Fortuna, 2000).

Uma das formas de obter as aproximações de diferenças finitas é através da Expansão em Séries de Taylor.

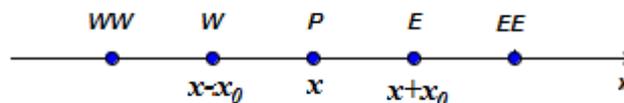
Supondo que  $f$  seja contínua no intervalo  $[a;b]$  de interesse e que possua derivadas até ordem  $n$  contínuas nesse intervalo, o Teorema de Taylor, Eq. (2.1), garante que para todo  $x \in [a;b]$

$$f(x) = f(x_0) + f^i(x_0) \frac{x-x_0}{1!} + f^{ii}(x_0) \frac{(x-x_0)^2}{2!} + f^{iii}(x_0) \frac{(x-x_0)^3}{3!} + \dots \quad (2.1)$$

O valor de  $f(x)$  seria exato se fossem considerados os infinitos termos da série de Taylor.

É possível aplicar a expansão em séries de Taylor a uma malha uniforme como a representada na Fig. 2.3.

Figura 2.3: Malha unidimensional uniforme



Para cada um dos nós da malha, existe uma equação discretizada do modelo matemático relacionando pela Série de Taylor o valor de  $f$  armazenado em  $P$  com os valores de  $f$  armazenados nos nós vizinhos. Podem ser usados esquemas de aproximação utilizando um ou dois pontos a montante ou a jusante e ainda diferenças centrais de dois ou quatro pontos, entre outros.

### 2.3 MÉTODO DE VOLUMES FINITOS

O Método de Volumes Finitos (MVF) tem como característica básica a integração das equações diferenciais do modelo matemático, na forma conservativa, sobre um volume de controle qualquer (Maliska, 2004).

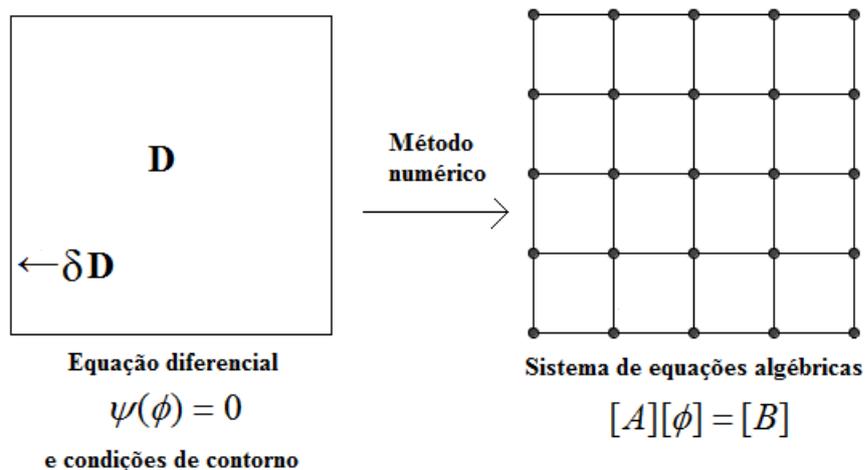
(...) todo método que, para obter as equações aproximadas, satisfaz a conservação da propriedade em nível de volumes elementares é um método de volumes finitos (Maliska, 2004, pág 28).

Nesse método, as variáveis de interesse são armazenadas no centro geométrico do volume de controle (centróide) e, para a discretização do modelo matemático são necessárias expressões algébricas envolvendo a variável dependente e/ou suas derivadas, avaliadas nas faces dos volumes de controle. Essas expressões são chamadas funções de interpolação e seu objetivo é avaliar uma propriedade, e suas derivadas, na face do volume de controle (Versteeg e Malalasekera, 2007).

A obtenção das equações aproximadas no Método de Volumes Finitos pode ser feita a partir de balanços da propriedade em questão nos volumes elementares, os volumes finitos, ou a partir da integração das equações, na forma conservativa, sobre o volume elementar, no espaço e no tempo. Essas duas formas são equivalentes (Maliska, 2004).

Para ilustrar a conexão entre as equações aproximadas usadas no Método de Volumes Finitos e as equações diferenciais na forma conservativa, Maliska (2004) considera o domínio elementar bidimensional mostrado na Fig. 2.4.

Figura 2.4: A tarefa do método numérico



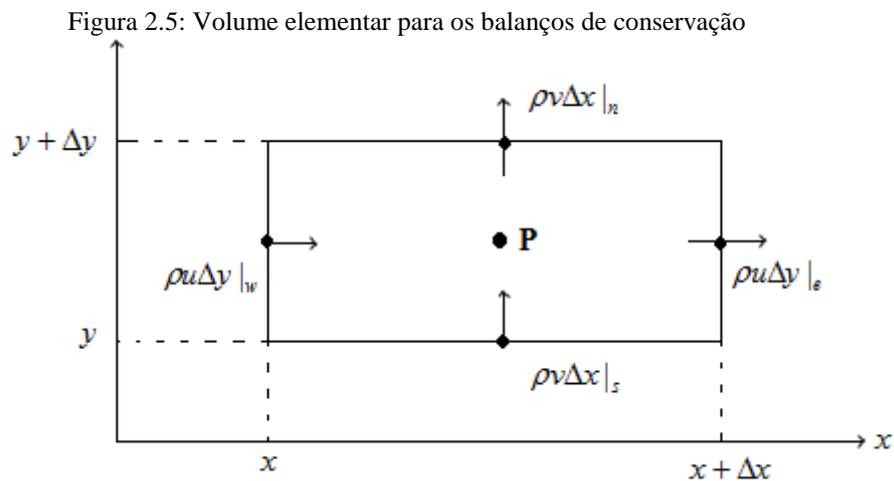
Para deduzir a equação diferencial que representa a conservação da massa é feito balanço de massa no volume elementar mostrado na Fig. 2.5 resultando na Eq. (2.2) a seguir.

$$\dot{m}_e - \dot{m}_w + \dot{m}_n - \dot{m}_s = 0 \quad (2.2)$$

Para o volume elementar no sistema de coordenadas cartesianas, em termos das velocidades pode ser escrita a Eq. (2.3).

$$\rho u \Delta y|_e - \rho u \Delta y|_w + \rho v \Delta x|_n - \rho v \Delta x|_s = 0 \quad (2.3)$$

Na Fig 2.5 é possível observar os pontos cardeais este, oeste, norte e sul usados para identificar as faces ( $e$ ,  $w$ ,  $n$  e  $s$ ) do volume de controle na discretização numérica.



Dividindo a Eq. (2.3) pelo produto  $\Delta x \Delta y$ , encontra-se a Eq. (2.4)

$$\frac{\rho u|_e - \rho u|_w}{\Delta x} + \frac{\rho v|_n - \rho v|_s}{\Delta y} = 0 \quad (2.4)$$

que, após a aplicação do limite, nos dá a forma diferencial conservativa da equação da conservação da massa Eq. (2.5)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (2.5)$$

A Eq. (2.5) está na forma conservativa, pois os produtos  $\rho u$  e  $\rho v$  estão dentro das derivadas. A equação de conservação para um volume finito é um passo intermediário para se obter a equação de conservação em nível infinitesimal. A aproximação numérica da equação

da conservação da massa infinitesimal através da integração da mesma no volume elementar é mostrada na Eq. (2.6) e Eq. (2.7).

$$\int_w^e \int_s^n \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) \right] dx dy = 0 \quad (2.6)$$

$$\int_n^s [\rho u|_e - \rho u|_w] dy + \int_w^e [\rho v|_n - \rho v|_s] dx = 0 \quad (2.7)$$

Considerando que o fluxo de massa avaliado no meio da face do volume de controle, representa a média da variação na face, conforme Eq. (2.3) obtida na realização do balanço e que pode ser reescrita como a Eq. (2.2), a equação aproximada que vale para o volume  $P$ . Portanto, realizar a integração da forma conservativa da equação diferencial ou fazer o balanço são procedimentos equivalentes. Realizando a integração para todos os volumes de controle do domínio, obtém-se uma equação algébrica para cada volume e com isso o sistema de equações algébricas procurado. A preferência em se obter as equações aproximadas integrando-se a equação diferencial vem por ser um procedimento mais simples que a realização de balanços (Maliska, 2004).

## 2.4 ERROS NUMÉRICOS

Um problema pode ser resolvido pelos métodos: experimentais, analíticos e numéricos. Os resultados experimentais podem conter erros experimentais, as soluções analíticas são influenciadas por erros de modelagem e as soluções numéricas contêm erros de modelagem e erros numéricos (Maliska, 2004).

Uma técnica numérica embora produza estimativas próximas da solução analítica exata, há discrepâncias, ou erros, porque envolve aproximações. Para muitos problemas de engenharia não é possível se obter a solução analítica e assim não se pode calcular os erros associados às soluções, sendo feita apenas uma aproximação ou estimativa de erros (Chapra e Canale, 2008).

Devido a esses erros cometidos no processo de solução dos problemas de engenharia, foi desenvolvida uma teoria para identificar e tratar as fontes de erros e principalmente estimar as magnitudes e as ordens dos erros envolvidos (ASME, 2009). O próprio processo de análise e solução de um problema, de acordo com Roache (1998), dá origem aos erros.

Os erros associados tanto aos cálculos quanto às medidas podem ser caracterizados com relação a sua acurácia e precisão. A *acurácia* se refere o quão próximo o valor calculado ou medido está do valor verdadeiro. A *precisão* se refere a quão próximos os valores individuais calculados ou medidos estão uns dos outros (Chapra e Canale, 2008, pág 45).

Para designar formalmente a confiabilidade de um valor numérico existe o conceito de algarismos significativos que corresponde ao número de algarismos corretos de um número mais um algarismo estimado. Esse conceito tem duas implicações importantes no estudo de métodos numéricos, os critérios para especificar a confiança de um resultado aproximado para assim decidir até quantos algarismos significativos são aceitáveis e o erro de arredondamento causado pela omissão de algarismos significativos remanescentes na representação de números reais com infinitas casas decimais (Chapra e Canale, 2008).

A modelagem do problema pode conter erros devido a simplificações das propriedades físicas envolvidas no fenômeno. Quando não se conhece o valor verdadeiro da variável, é possível estimar o erro de modelagem por meio de comparações entre a solução numérica obtida e resultados experimentais. Esse processo que determina ou oferece uma estimativa do erro de modelagem é chamado de validação (AIAA, 1998). De acordo com Roache (1998), a determinação do erro numérico por meio da diferença entre a solução numérica e a solução analítica exata é chamada de verificação.

O valor aceitável de um erro numérico depende, entre outros fatores, da utilização prevista para a solução numérica, de restrições orçamentais, do tempo disponível para executar as simulações, e dos recursos computacionais disponíveis. Todas as soluções numéricas contêm erros e é importante estimá-los porque quando o erro é maior do que o aceitável, a solução numérica não tem confiabilidade; quando o erro é menor do que o aceitável, há desperdício de recursos computacionais (tempo de CPU e quantidade de memória); a fim de validar e desenvolver modelos matemáticos; para otimizar a malha (Marchi e Silva, 2002).

O erro numérico não tem uma única fonte. Marchi e Silva (2002) classificam as fontes de erros numéricos em quatro tipos: erros de truncamento, erros de iteração, erros de arredondamento e erros de programação. Os erros de truncamento resultam do uso de fórmulas aproximadas. É preciso fazer a substituição de uma expressão ou fórmula infinita por uma finita ou discreta. Por exemplo, quando se tomam apenas alguns dos termos do desenvolvimento da série de uma função. Esse tipo de erro pode ser minimizado com a diminuição do espaçamento ( $h$ ) da malha. Os erros de arredondamento resultam da

representação de números reais com um número finito de algarismos significativos. Esse erro aumenta com a diminuição do espaçamento ( $h$ ) da malha. Os erros de programação incluem erros causados pelas pessoas na implementação e uso de um código. O erro de iteração diminui com o aumento do número de iterações o que pode aumentar o erro de arredondamento.

#### 2.4.1 Erro de truncamento e erro de discretização

Os erros de truncamento são cometidos em cada aproximação numérica, nas derivadas de cada termo da EDP, para cada uma das variáveis de interesse e o erro final de cada variável de interesse compõe o erro de discretização. Para a variável final, há um somatório de erros de truncamento, bem como os erros de poluição resultantes da influência dos pontos envolvidos em cada esquema de aproximação. O erro de discretização é então o erro de truncamento total, gerado por várias fontes de erro de truncamento. É possível determinar o erro de discretização da variável global em cada volume de controle e assim o erro de discretização do campo.

O erro de truncamento de qualquer aproximação numérica, a partir da série de Taylor, é dado pela Eq (2.8) a seguir:

$$\varepsilon(\phi) = c_0 h^{p_0} + c_1 h^{p_1} + c_2 h^{p_2} + c_3 h^{p_3} + \dots \quad (2.8)$$

onde  $p_0$ , que corresponde ao menor expoente da expressão do erro numérico, é a ordem assintótica do erro.

A variável de interesse  $\phi$  da Eq. (2.8) pode ser uma variável primária, obtida diretamente da solução de equações diferenciais, ou secundária, obtida a partir das variáveis primárias por meio de operações matemáticas. Quando o erro da solução numérica se deve principalmente ao erro de truncamento, ele é denominado de erro de discretização. De acordo com Ferziger e Peric (1999) quando se conhece a solução analítica ( $\Phi$ ), o erro de discretização da variável de interesse é dado pela Eq (2.9):

$$E(\phi) = \Phi - \phi \quad (2.9)$$

Na prática numérica, a ordem aparente do erro de discretização é obtida a partir da solução numérica. Em um processo iterativo com um número insuficiente de iterações, o erro

de iteração pode ser maior que o de discretização. Ao analisar o erro de discretização é necessário atentar para que as demais fontes de erro não se sobressaiam sobre o total do erro numérico. Na detecção do erro de programação pode ser observado se a ordem aparente do erro apresenta o comportamento teórico dado pela série de Taylor. Efetuando refino de malha, espera-se que a ordem aparente tenda à ordem teórica para que a solução tenha confiabilidade.

Além do erro de discretização se podem conhecer suas ordens efetivas. A ordem efetiva ( $p_E$ ) é dada pela derivada da curva bilogarítmica “erro *versus*  $h$ ”. Marchi (2001) explica que quando  $h \rightarrow 0$ , isto é, à medida que as malhas vão ficando mais refinadas, a ordem efetiva do erro tende à ordem assintótica porque o primeiro termo da expressão do erro passa a dominar sobre o seu valor total. A ordem efetiva ( $p_E$ ) do erro verdadeiro é definida por Marchi (2001) de acordo com Eq. (2.10), ou seja, ela é função do erro verdadeiro da variável de interesse.

$$p_E = \frac{\log\left(\frac{E(\phi_2)}{E(\phi_1)}\right)}{\log(r)} \quad (2.10)$$

onde  $E(\phi_2)$  é o erro na solução  $\phi_2$  de uma malha grossa cujo tamanho ( $h$ ) dos elementos de malha é  $h_2$  e  $E(\phi_1)$  é o erro na solução  $\phi_1$  de uma malha fina cujo tamanho dos elementos de malha é  $h_1$  e  $r$  é a razão de refino dada pela Eq (2.11).

$$r = \frac{h_2}{h_1} \quad (2.11)$$

Quando a solução analítica do problema é conhecida, ela pode ser usada para verificar a *posteriori*, à medida que se realiza o refino da malha com  $h \rightarrow 0$ , a ordem assintótica do erro de discretização obtida a *priori*.

Quando não se tem a solução analítica do problema, o decaimento do erro pode ser acompanhado pela ordem aparente ( $p_U$ ), que é calculada com base em três soluções numéricas em três malhas diferentes, como mostra a Eq. (2.12) a seguir,

$$p_U = \frac{\log\left(\frac{\phi_2 - \phi_3}{\phi_1 - \phi_2}\right)}{\log r} \quad (2.12)$$

onde  $\phi_3$ ,  $\phi_2$  e  $\phi_1$  são as soluções numéricas das malha super grossa, grossa e fina, respectivamente;  $r$  é a razão de refino de malha.

O erro de discretização é a principal fonte de erro numérico a ser tratada para melhorar a acurácia de uma solução numérica, pois os demais erros dependem de fatores humanos (programação), infraestrutura computacional (arredondamento) ou desempenho do método de solução escolhido (iteração).

## 2.5 EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON

A técnica conhecida como Extrapolação de Richardson (ER) busca uma solução numérica extrapolada, obtida a partir da combinação de soluções numéricas de diferentes malhas, com o objetivo de aumentar a ordem de acurácia resultante (Richardson e Gaunt, 1927). Considerando-se a razão de refino entre as malhas, obtém-se a Extrapolação de Richardson generalizada (Roache, 1994), Eq. (2.13),

$$\phi_\infty = \phi_2 + \frac{\phi_2 - \phi_1}{r^{p_0} - 1} \quad (2.13)$$

onde  $\phi_\infty$  é a solução extrapolada,  $\phi_2$  é a solução na malha fina,  $\phi_1$  é a solução na malha grossa,  $p_0$  é a ordem assintótica do erro de discretização e  $r$  é a razão de refino de malha.

A Extrapolação de Richardson faz com que a ordem aparente ( $p_U$ ) seja cada vez mais alta tendendo mais rapidamente à ordem assintótica ( $p_0$ ) que é a ordem teórica das aproximações empregadas. Segundo Marchi e Silva (1999), a ordem assintótica ( $p_0$ ) é o valor para o qual converge a ordem aparente ( $p_U$ ) quando  $h$  tende a zero.

### 2.5.1 Multiextrapolações de Richardson

A técnica das Multiextrapolações de Richardson - MER (em inglês, *Repeated Richardson Extrapolation* - RRE) consiste da aplicação recursiva da Extrapolação de Richardson, Eq. (2.13), com o objetivo de elevar a ordem de acurácia do erro de discretização. O emprego de MER exige três ou mais soluções numéricas (Marchi et al., 2008; Marchi et al.,

2009). A solução numérica baseada nas ordens verdadeiras, para qualquer variável pontual, em uma malha  $g$ , com  $m$  extrapolações de Richardson é dada pela Eq. (2.14)

$$\phi_{g,m} = \phi_{g,m-1} + \frac{\phi_{g,m-1} - \phi_{g-1,m-1}}{r^{(p_V)_{m-1}} - 1} \quad (2.14)$$

válida para  $g = 2, \dots, G$  e  $m = 1, \dots, g - 1$ , onde  $m$  é o número de extrapolações;  $G$  é o número total de malhas;  $g$  representa cada uma das malhas;  $g = 1$  é a malha mais grossa e  $g = G$  é a malha mais fina do conjunto de malhas;  $r = h_{g-1}/h_g$  é a razão de refino de malha; para  $m = 0$  tem-se a solução numérica sem extrapolação; e  $(p_V)_m$  são as ordens verdadeiras do erro de discretização correspondentes a cada extrapolação (Marchi e Silva, 2002).

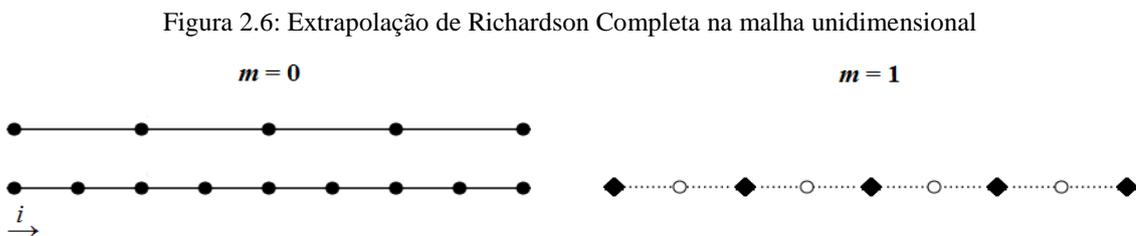
O emprego de MER é realizado pela aplicação repetida da Extrapolação de Richardson, Eq. (2.13), onde  $p_0$  é considerada apenas na primeira aplicação ou primeiro nível de extrapolação e nos demais níveis se utilizam os valores sequenciais das ordens verdadeiras  $(p_1, p_2, p_3, \dots, p_m)$ . O emprego desse processo recursivo proporciona a elevação da ordem de acurácia do erro de discretização, percorrendo os valores de  $p_V$ . Observando-se a Eq. (2.14) é possível notar que os valores de  $(p_V)$  formam uma progressão aritmética e, conhecendo-se a solução analítica, esse comportamento pode ser evidenciado nos resultados da ordem efetiva  $(p_E)$  (Martins, 2013).

Do ponto de vista teórico, a Eq. (2.14) poderia ser repetida infinitas vezes. Contudo, como MER é empregado em pós-processamento, se considera um número finito de malhas de acordo com a quantidade de soluções numéricas disponíveis. Quanto maior o número de malhas ( $m$ ) utilizadas, a solução de MER estará mais próxima da solução analítica. O maior número de extrapolações possíveis com  $G$  malhas é  $G - 1$  (Martins, 2013).

### 2.5.2 Extrapolação de Richardson Completa

A Extrapolação de Richardson Completa foi desenvolvida por Roache e Knupp (1993). Trata-se de uma extensão da Eq. (2.13) e assim como MER é empregada em pós-processamento, isto é, após a obtenção das soluções numéricas. É dita completa porque a técnica produz uma solução mais acurada que a original em todos os pontos da malha fina, ou seja, em todo o campo do domínio de cálculo (Roache e Knupp, 1993).

Nessa técnica são interpolados pontos por meio de termo de correção entre as soluções de nós não coincidentes nas malhas grossa e fina. Para soluções unidimensionais, a interpolação pode ser feita através de uma média aritmética simples, e para soluções bidimensionais, a interpolação além de utilizar a média aritmética simples em cada direção é necessário uma interpolação para os nós centrais. A Fig. 2.6 mostra duas malhas unidimensionais, a mais grossa com 5 nós e a mais fina com 9 nós. As malhas com linhas contínuas são da solução original, obtida por meio da resolução do sistema de equações algébricas e a malha com linha pontilhada da solução obtida por meio de extrapolação. O termo de correção, Eq. (2.16), é interpolado linearmente para os nós representados pelos círculos brancos e os nós representados pelos losangos pretos são as soluções extrapoladas pela Eq. (2.13).



Roache e Knupp (1993) mostraram que a Eq. (2.13) (Extrapolação de Richardson generalizada baseada na ordem assintótica) não é válida para os pontos pares, representados na Fig. 2.6 pelos círculos brancos. Para esses pontos é necessário utilizar uma interpolação para aumentar a ordem do erro das soluções numéricas nas malhas mais finas.

Em uma malha unidimensional, para os nós ímpares, CRE é empregado, utilizando uma notação simplificada, conforme a Eq. (2.15),

$$\phi_{g,1}^i = \phi_{g,0}^i + C_{g,0}^i \quad (2.15)$$

onde  $\phi_{g,1}^i$  é solução extrapolada no nó  $i$  da malha fina;  $\phi_{g,0}^i$  é a solução no nó  $i$  da malha grossa e  $C_{g,0}^i$  é termo de correção para os nós ímpares, cujas posições coincidem nas malhas grossa e fina, dado pela Eq. (2.16),

$$C_{g,0}^i = \frac{\phi_{g,0}^i - \phi_{g-1,0}^i}{r^{P_0} - 1} \quad (2.16)$$

O termo de correção é o estimador de Richardson baseado na ordem assintótica. Para os nós pares, a expressão de CRE é mostrada na Eq. (2.17) e o termo de correção no nó  $i+1$ , chamado  $C_{g,0}^{i+1}$ , é dado pela média dos termos de correção calculados para os nós ímpares adjacentes, conforme Eq. (2.18).

$$\phi_{g,1}^{i+1} = \phi_{g,0}^{i+1} + C_{g,0}^{i+1} \quad (2.17)$$

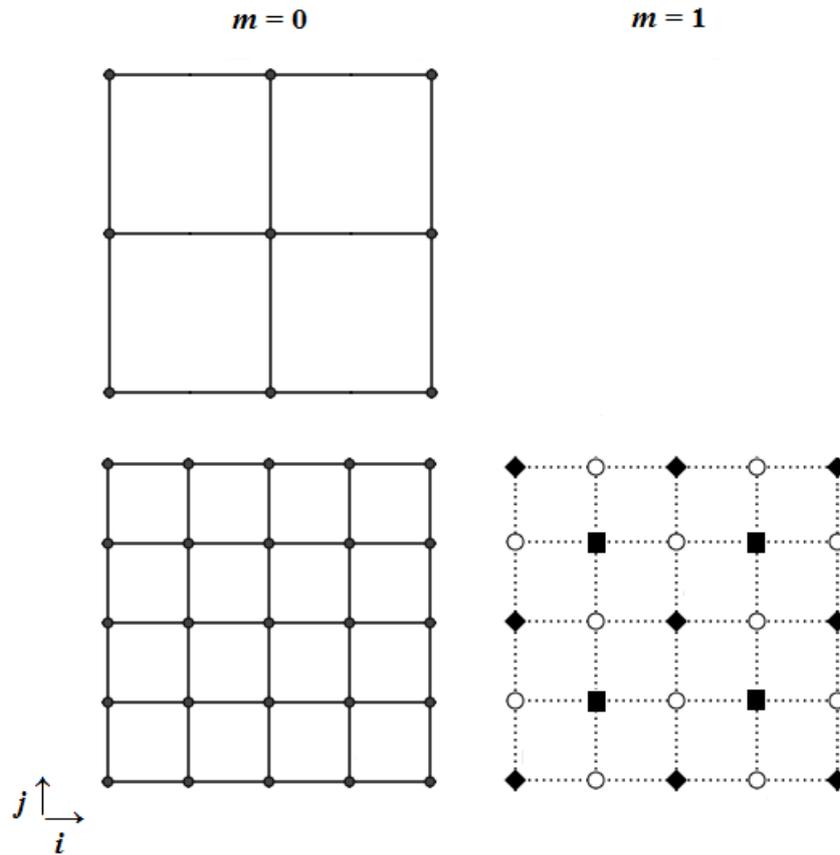
$$C_{g,0}^{i+1} = \frac{C_{g,0}^i + C_{g,0}^{i+2}}{2} \quad (2.18)$$

Giacomini (2013) apresentou o algoritmo de pós-processamento para emprego de CRE nas soluções numéricas 1D dado por:

- 1) Obter a solução sem extrapolação  $\phi_{g,m=0}^i$  nos  $i$  nós da malha  $g$ , onde  $i = [1, N_g]$  e  $g = [1, G]$ , onde  $N_g$  é o número de nós de cada malha  $g$ ;
- 2) Fazer  $g = 2$  e  $m = 1$ ;
- 3) Calcular a correção de Richardson em cada nó da malha fina ( $g$ ) que coincide com um nó da malha grossa ( $g - 1$ ) do par;
- 4) Calcular a correção de Richardson em cada nó da malha fina ( $g$ ) que não coincide com um nó da malha grossa ( $g - 1$ ) do par;
- 5) Calcular a solução com  $m$  extrapolações para todos os nós da malha fina ( $g$ ) do par;
- 6) Repetir os itens 3 e 4 para  $g = g + 1$  e o item 5 para  $m = m + 1$ ;
- 7) Repetir o item 6 até o limite  $g = G$  e  $m = G - 1$ .

A Fig. 2.7 mostra um esquema de extrapolação completa para malhas 2D de Diferenças Finitas, sendo a malha grossa 3x3 e a fina 5x5, representadas pelas linhas contínuas. A solução da malha representada pelas linhas pontilhadas foi obtida por meio de extrapolação. Nesse caso, o termo de correção é interpolado por uma média aritmética simples entre dois nós adjacentes, para os nós representados pelos círculos brancos e interpolado por meio de uma média entre os nós dos quatro cantos, para os nós representados pelos quadrados. Os nós representados pelos losangos são as soluções obtidas diretamente pela Eq. (2.13).

Figura 2.7: Extrapolação de Richardson Completa na malha bidimensional



Em um domínio bidimensional e uma malha de diferenças finitas, o emprego de CRE é feito pela aplicação da Eq. (2.13) nos nós ímpares, que coincidem nas malhas grossa e fina. Para os nós pares faz-se:

$$\phi_{g,1}^{i+1,j} = \phi_{g,0}^{i+1,j} + C_{g,0}^{i+1,j} \quad (2.19)$$

válida somente para o eixo  $x$ , e o termo de correção é dado por

$$C_{g,0}^{i+1,j} = \frac{C_{g,0}^{i,j} + C_{g,0}^{i+2,j}}{2} \quad (2.20)$$

válida para  $i = 1, 3, 5, \dots, Nx - 2$  e  $j = 1, 3, 5, \dots, Ny$ .

Para o eixo  $y$  faz-se:

$$\phi_{g,1}^{i,j+1} = \phi_{g,0}^{i,j+1} + C_{g,0}^{i,j+1} \quad (2.21)$$

onde

$$C_{g,0}^{i,j+1} = \frac{C_{g,0}^{i,j} + C_{g,0}^{i,j+2}}{2} \quad (2.22)$$

válida para  $i = 1,3,5,\dots,Nx$  e  $j = 1,3,5,\dots,Ny - 2$ .

Para os nós centrais faz-se

$$\phi_{g,1}^{i+1,j+1} = \phi_{g,0}^{i+1,j+1} + C_{g,0}^{i+1,j+1} \quad (2.23)$$

onde o termo de correção é calculado pela Eq. (2.24).

$$C_{g,0}^{i+1,j+1} = \frac{C_{g,0}^{i,j} + C_{g,0}^{i+2,j} + C_{g,0}^{i,j+2} + C_{g,0}^{i+2,j+2}}{4} \quad (2.24)$$

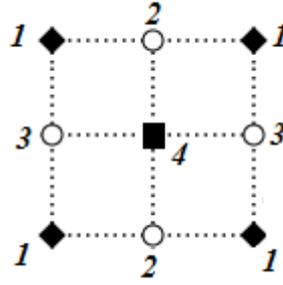
válida para  $i = 1,3,5,\dots,Nx - 2$  e  $j = 1,3,5,\dots,Ny - 2$ .

Roache e Knupp (1993) exemplificaram, baseados em resultados extraídos de Roache (1982), que obtendo uma sequência de soluções bidimensionais de 2ª ordem em malhas de tamanhos 10x10, 20x20, 40x40 e 80x80, obteve-se solução de 4ª ordem por extrapolação de Richardson (somente) na malha 40x40. Complementam o raciocínio dizendo que se o processo fosse continuado, teoricamente possível, poderia ser obtida uma solução de 6ª ordem na malha 20x20 e 8ª ordem na malha 10x10. Os autores já previam as múltiplas extrapolações, mas na época não as empregaram.

Com o intuito de elevar a ordem de acurácia do erro de discretização, é possível realizar a aplicação recursiva de CRE. A partir das soluções obtidas com a 1ª extrapolação (1º nível) de CRE, emprega-se novamente a extrapolação do campo, utilizando a 2ª ordem verdadeira do erro, obtendo uma 2ª extrapolação (2º nível) de CRE. A partir das soluções obtidas com a 2ª extrapolação é possível empregar CRE novamente e obter um 3º nível de extrapolação. Teoricamente, assim como MER, é possível repetir o quanto se queira esse processo recursivo de CRE.

No trabalho de Giacomini (2013) é apresentada uma generalização de CRE, ou seja, são mostradas as equações para emprego de multiextrapolações de campos. Separando em quatro casos, como ilustrado na Fig. 2.8, a autora explica a generalização de CRE.

Figura 2.8: Quatro diferentes casos de pontos da malha fina extrapolada com CRE



A partir das Eqs. (2.15) e (2.16), que representam CRE em uma malha 1D, escreve-se para  $m$  malhas, obtendo-se respectivamente as Eqs. (2.25) e (2.26):

$$\phi_{g,m}^i = \phi_{g,m-1}^i + C_{g,m-1}^i \quad (2.25)$$

para  $i = 1,3,5,\dots,Nx$ , onde  $Nx$  é o número de nós na direção  $x$ .

$$\phi_{g,m}^{i+1} = \phi_{g,m-1}^{i+1} + C_{g,m-1}^{i+1} \quad (2.26)$$

para  $i = 1,3,5,\dots,Nx-2$ , onde  $Nx$  é o número de nós na direção  $x$ .

As Eqs. (2.25) e (2.26) são válidas para  $g = 2$  a  $G$  e  $m = 1$  a  $g - 1$ . Os respectivos termos de correção são dados pelas Eqs. (2.27) e (2.28)

$$C_{g,m}^i = \frac{\phi_{g,m}^i - \phi_{g-1,m}^i}{r^{(P_V)_m} - 1} \quad (2.27)$$

para  $i = 1,3,5,\dots,Nx$ , onde  $Nx$  é o número de nós na direção  $x$ .

$$C_{g,m}^{i+1} = \frac{C_{g,m}^i + C_{g,m}^{i+2}}{2} \quad (2.28)$$

para  $i = 1,3,5,\dots,Nx-2$ , onde  $Nx$  é o número de nós na direção  $x$ .

Na Eq. (2.27) a posição do nó na malha  $g - 1$  deve coincidir com a posição do nó na malha  $g$ , por isso o índice  $i$  da malha  $g - 1$  é válido para  $i = 1,3,5,\dots,Nx$ .

Em problemas bidimensionais com soluções numéricas em  $m$  malhas, para os nós do caso 2 (ilustrado na Fig. 2.8), a extrapolação da malha 2D do método CRE para o eixo  $x$  é representada pela Eq. (2.29)

$$\phi_{g,m}^{i+1,j} = \phi_{g,m-1}^{i+1,j} + C_{g,m-1}^{i+1,j} \quad (2.29)$$

válida para  $g = 2$  a  $G$ ,  $m = 1$  a  $g - 1$ ,  $i = 1,3,5,\dots,Nx - 2$  e  $j = 1,3,5,\dots,Ny$ , onde

$$C_{g,m}^{i+1,j} = \frac{C_{g,m}^{i,j} + C_{g,m}^{i+2,j}}{2} \quad (2.30)$$

válida para  $g = 2$  a  $G$ ,  $m = 0$  a  $g - 2$ ,  $i = 1,3,5,\dots,Nx - 2$  e  $j = 1,3,5,\dots,Ny$ . Para o eixo  $y$ , ou seja, para os nós do caso 3 (ilustrado na Fig. 2.8), tem-se

$$\phi_{g,m}^{i,j+1} = \phi_{g,m-1}^{i,j+1} + C_{g,m-1}^{i,j+1} \quad (2.31)$$

válida para  $g = 2$  a  $G$ ,  $m = 1$  a  $g - 1$ ,  $i = 1,3,5,\dots,Nx$  e  $j = 1,3,5,\dots,Ny - 2$ , onde

$$C_{g,m}^{i,j+1} = \frac{C_{g,m}^{i,j} + C_{g,m}^{i,j+2}}{2} \quad (2.32)$$

válida para  $g = 2$  a  $G$ ,  $m = 0$  a  $g - 2$ ,  $i = 1,3,5,\dots,Nx$  e  $j = 1,3,5,\dots,Ny - 2$ . Para os nós centrais, ou seja, para os nós do caso 4 (ilustrado na Fig. 2.8), tem-se

$$\phi_{g,m}^{i+1,j+1} = \phi_{g,m-1}^{i+1,j+1} + C_{g,m-1}^{i+1,j+1} \quad (2.33)$$

válida para  $g = 2$  a  $G$ ,  $m = 1$  a  $g - 2$ ,  $i = 1,3,5,\dots,Nx - 2$  e  $j = 1,3,5,\dots,Ny - 2$ , onde o termo de correção é dado por

$$C_{g,m}^{i+1,j+1} = \frac{C_{g,m}^{i,j} + C_{g,m}^{i+2,j} + C_{g,m}^{i,j+2} + C_{g,m}^{i+2,j+2}}{4} \quad (2.34)$$

válida para  $g = 2$  a  $G$ ,  $m = 0$  a  $g - 2$ ,  $i = 1,3,5,\dots,Nx - 2$  e  $j = 1,3,5,\dots,Ny - 2$ .

Para os nós do caso 1 (ilustrado na Fig. 2.8), que são coincidentes entre as malhas, valem as Eqs. (2.25) e (2.27) apenas adicionando o índice  $j$  às mesmas.

Giacomini (2013) apresentou o algoritmo de pós-processamento para emprego de CRE nas soluções numéricas 2D dado por:

- 1) Obter a solução sem extrapolação  $\phi_{g,m=0}^i$  nos  $i$  nós da malha  $g$ , onde  $i = [1, N_g]$  e  $g = [1, G]$ ;
- 2) Fazer  $g = 2$  e  $m = 1$ ;
- 3) Calcular a correção de Richardson em cada nó da malha fina ( $g$ ) que coincide com um nó da malha grossa ( $g - 1$ ) do par;
- 4) Calcular a correção de Richardson em cada nó da malha fina ( $g$ ) que não coincide horizontalmente com um nó da malha grossa ( $g - 1$ ) do par;
- 5) Calcular a correção de Richardson em cada nó da malha fina ( $g$ ) que não coincide verticalmente com um nó da malha grossa ( $g - 1$ ) do par;
- 6) Calcular a correção de Richardson em cada nó da malha fina ( $g$ ) que não coincide centralmente com um nó da malha grossa ( $g - 1$ ) do par;
- 7) Calcular a solução com  $m$  extrapolações para todos os nós da malha fina ( $g$ ) do par;
- 8) Repetir os itens 3 a 6 para  $g = g + 1$  e o item 7 para  $m = m + 1$ ;
- 9) Repetir o item 8 até o limite  $g = G$  e  $m = G - 1$ .

## 2.6 FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

A função de interpolação (FI) é uma relação utilizada para expressar os valores das incógnitas do problema e de sua derivada normal nas faces dos volumes de controle (Marchi, 1993). Complementando esse conceito, Maliska (2004) afirma que as FI's visam conectar os pontos nodais aos pontos de armazenamento das variáveis de interesse. As funções de interpolação fornecem valores das incógnitas do problema e de sua derivada normal nas faces dos volumes de controle e relações entre os pontos nodais da malha discretizada.

Por meio da expansão em séries de Taylor, Eq. (2.35), é possível escrever o valor da variável de interesse em cada ponto da malha (Fortuna, 2000). O valor da função através da série só pode ser exato se forem considerados seus infinitos termos.

$$\Lambda_x = \Lambda_p + \Lambda_p^i \frac{(x - x_p)}{1!} + \Lambda_p^{ii} \frac{(x - x_p)^2}{2!} + \Lambda_p^{iii} \frac{(x - x_p)^3}{3!} + \dots \quad (2.35)$$

É uma série infinita e assim se deve considerar um ponto de truncamento, onde se obtém a representação finita da variável a partir da série. Com isso, tem origem um resíduo não considerado na solução e um erro no processo numérico, conhecido como erro de truncamento. Para tanto, Marchi e Germer (2009) consideram a principal preocupação conseguir trabalhar com funções de interpolação que tenham o menor erro de truncamento possível. Afirmam que a função ideal seria a que conectasse os pontos nodais com a própria solução do problema a ser resolvido, o que ocorre em um número muito limitado de problemas. Maliska (2004) também alerta para o fato que as FI's devem gerar o menor erro de truncamento possível e que devem envolver o menor número possível de pontos nodais para não gerar uma matriz muito complexa.

Uma função de interpolação, a aproximação CDS-2 (*Central Difference Scheme* de segunda ordem), Maliska (2004) afirma que se torna bastante interessante por ser de 2ª ordem de acurácia e envolver somente dois pontos nodais. Porém, alerta que este tipo de FI, de alta ordem, tende a gerar oscilações numéricas em regiões de grandes gradientes em problemas de advecção dominante. Marchi (1993) propõe que dois tipos de relações devem ser geradas. Uma para conseguir o valor da variável na face, termo advectivo, e outra para conseguir o valor da derivada normal na face, que é o termo difusivo. Segundo Maliska (2004) uma aproximação numérica dos termos difusivos não gera grande instabilidade para o método numérico e em geral a utilização do esquema de diferenças centrais é satisfatório, embora os termos advectivos precisem ser melhor analisados. Isso é esclarecido por Chung (2002) que afirma que enquanto os termos advectivos ditam a acurácia da solução, os termos difusivos mantêm sua estabilidade.

A ordem do erro gerado em cada tipo de aproximação adotada dita a classificação das funções de interpolação. Elas podem ser de 1ª, 2ª, 3ª, ... , n-ésima ordem. O resultado da solução numérica tende a ser mais acurado para ordens maiores, o que aumenta também o número de nós envolvidos na função de interpolação. Porém, de acordo com Fortuna (2004), quanto maior o número de pontos utilizados em uma aproximação, maior o risco de instabilidade do método numérico. Ademais, um grande número de pontos próximos à fronteira pode exigir outra aproximação para esta região do domínio, comprometendo a acurácia da solução e o desempenho computacional.

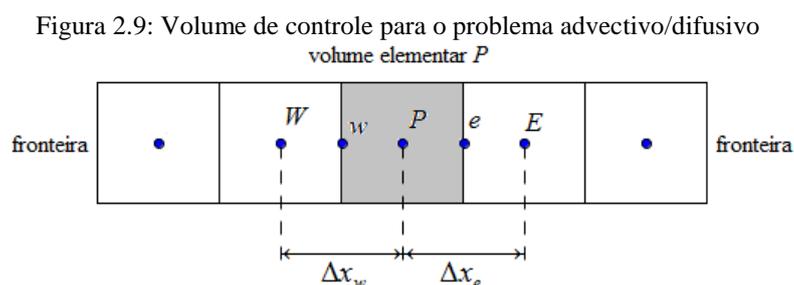
É ressaltado por Fletcher (1991), que pode parecer que uma fórmula de ordem superior em uma malha fina deve ser sempre utilizada, no entanto, isso é enganoso. Primeiro, a avaliação de uma fórmula de ordem superior envolve mais pontos e, portanto, é menos econômico do que a avaliação de uma fórmula de baixa ordem. De uma perspectiva prática, a

precisão que pode ser conseguida para um dado tempo de execução, ou a eficiência computacional, é mais importante que a precisão sozinha que sempre pode ser aumentada com o refino da grade. Fórmulas de segunda ordem superior mostram uma pequena vantagem de precisão sobre as fórmulas de baixa ordem para uma malha grossa e uma vantagem muito maior quando a malha é refinada. No entanto, para um problema particular, para o nível de precisão exigido das respostas é apropriado uma malha grossa ou uma malha grossa é necessária por causa da memória do computador ou as limitações de tempo de execução.

O desempenho das fórmulas superiores também é dependente da suavidade da solução exata. Fluxo supersônico invíscido pode produzir soluções descontínuas, associadas com a presença de ondas de choque. Se a solução é descontínua a validade das técnicas de construção das fórmulas é comprometida uma vez que não existe garantia de que sucessivos termos da expansão do erro truncamento reduzirão em magnitude. Como resultado, a inclusão de mais pontos e o cancelamento de mais termos nas expansões de erro de truncamento nada implicam sobre a acurácia da solução correspondente (Fletcher, 1991). Para Marchi (1993) a função de interpolação adotada no emprego do Método de Volumes Finitos pode ser considerada como uma das principais características de um modelo numérico visto que a qualidade da solução obtida depende dela.

Considerando os pontos envolvidos em cada esquema de aproximação com a expansão da Eq. (2.15) é possível escrever as funções de interpolação. Segundo Maliska (2004), em problemas modelados pela advecção/difusão, por exemplo, é usado esquema CDS para problemas puramente difusivos e UDS para problemas de advecção dominante devido a motivações físicas. O termo advectivo, com derivada de primeira ordem, tem como característica física a transmissão de perturbações apenas no sentido da velocidade, sendo matematicamente um termo parabólico. No termo difusivo, que é elíptico, os efeitos de uma perturbação no meio são transmitidos em todas as direções por esse termo.

Considerando malhas unidimensionais uniformes, um volume de controle para um problema advectivo/difusivo é representado na Fig. 2.9 a seguir.



As Eqs. (2.36), (2.37) mostram expressões das funções de interpolação para aproximação com esquemas CDS num volume de controle como da Fig. 2.9.

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2} \quad (2.36)$$

$$\phi_w = \frac{\phi_W + \phi_P}{2} \quad (2.37)$$

Das Eqs. (2.36) e (2.37) resultam as Eqs. (2.38) e (2.39).

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_e} \quad (2.38)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_w} \quad (2.39)$$

Para evitar o aparecimento de coeficientes negativos e oscilações numéricas se utiliza o esquema UDS, onde o valor da função na interface é igual ao valor da função no volume a montante. A Eq. (2.40) mostra o volume a montante, para uma velocidade da esquerda para a direita e a Eq. (2.41), para uma velocidade em sentido contrário.

$$\phi_w = \phi_W \quad ; \quad \phi_e = \phi_P \quad ; \quad \phi > 0 \quad (2.40)$$

$$\phi_w = \phi_P \quad ; \quad \phi_e = \phi_E \quad ; \quad \phi < 0 \quad (2.41)$$

Para o Método de Diferenças Finitas, as funções de interpolação são obtidas da expansão da série de Taylor, Eq. (2.35), para os pontos envolvidos no esquema adotado. Entre as aproximações para a derivada de primeira ordem se pode destacar a Eq. (2.42) que utiliza um ponto a jusante (esquema DDS),

$$\phi_P^i = \frac{\phi_E - \phi_P}{h} \quad (2.42)$$

onde  $h$  é o tamanho do elemento de malha representado na Fig. 2.3 por  $x + x_0$  e  $x - x_0$ .

Um esquema DDS-2, que utiliza dois pontos a jusante, fornece como aproximação para a derivada de primeira ordem, a expressão dada pela Eq. (2.43).

$$\phi_P^i = \frac{4\phi_E - 3\phi_P - \phi_{EE}}{2h} \quad (2.43)$$

Quanto mais pontos estiverem envolvidos na função de interpolação, maior será a complexidade da aproximação numérica e menor será o erro de truncamento.

### 3 MODELOS MATEMÁTICOS

Os modelos matemáticos utilizados para os testes de redução do erro de discretização através de extrapolações de campo são para condições de regime permanente e propriedades termofísicas constantes. Foram aplicadas neste trabalho as equações unidimensionais de Poisson, com dois termos fonte distintos, a equação de advecção-difusão, com diferentes discretizações nos termos difusivos e advectivos, e a equação bidimensional de Navier-Stokes com duas soluções fabricadas, polinomial e exponencial.

#### 3.1 EQUAÇÃO DE POISSON 1D

A Equação de Poisson, Eq. (3.1), é uma equação de derivadas parciais com aplicação nas áreas de eletrostática, física teórica e engenharia mecânica. Em CFD pode representar um problema linear de condução de calor em um meio contínuo com geração de calor. A condução é a propagação do calor por meio do contato de moléculas de uma ou mais substâncias com temperaturas diferentes (Incropera e DeWitt, 2003).

$$\frac{d^2T}{dx^2} = S \quad (3.1)$$

onde  $T$  representa a incógnita  $S$  é o termo fonte.

Entre as características deste modelo se pode destacar a equação de natureza elíptica, o caráter difusivo do problema, o regime permanente, as propriedades constantes, a presença de termo fonte e o emprego de coordenadas cartesianas.

No presente trabalho a Eq. (3.1) foi aplicada com dois termos fonte ( $S$ ) distintos. O primeiro, um termo fonte trigonométrico, como na Eq. (3.2).

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\pi^2 \text{sen}(\pi x) \quad (3.2)$$

As condições de contorno são de Dirichlet com oeste e leste iguais a zero, isto é,  $T(0) = T(1) = 0$ . A solução analítica é  $Ta(x) = \text{sen}(\pi x)$ .

A discretização da Eq. (3.2) em volumes finitos e esquema de aproximação CDS-2 é feita escrevendo-se a integração em volumes de controle, obtendo-se a Eq. (3.3),

$$\int_{x_w}^{x_e} \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{dT}{dx} + \pi^2 \text{sen}(\pi x) \right) \right) dx = 0 \quad (3.3)$$

que resulta na Eq. (3.4)

$$\left( \frac{dT}{dx} \right) \Big|_e - \left( \frac{dT}{dx} \right) \Big|_w - \pi \cos(\pi x_p) \cdot h = 0 \quad (3.4)$$

com o emprego de CDS-2 para a aproximação das derivadas, obtém-se a Eq. (3.5),

$$\left( \frac{T_E - T_P}{\Delta x_e} \right) - \left( \frac{T_P - T_W}{\Delta x_w} \right) - \pi \cos(\pi x_p) \cdot h = 0 \quad (3.5)$$

como a malha é uniforme, tem-se  $\Delta x_e = \Delta x_w = h$  e a Eq. (3.5) pode ser reescrita como a Eq.

(3.6),

$$\left( \frac{1}{h} + \frac{1}{h} \right) T_P = \frac{1}{h} T_E + \frac{1}{h} T_W - \pi \cos(\pi x_p) \cdot h \quad (3.6)$$

assim, os coeficientes dos nós internos são  $a_w = a_E = h^{-1}$ ;  $a_p = a_w + a_E$ ;  $b_p = -\pi \cos(\pi x_p) \cdot h$ ; no contorno leste são  $a_p = 1$ ;  $a_w = 0$ ;  $a_E = -1$ ;  $b_p = 0$ ; e no contorno oeste  $a_p = 1$ ;  $a_w = -1$ ;  $a_E = 0$ ;  $b_p = 0$ . Esses coeficientes dão origem a um sistema linear de matriz tridiagonal, resolvido com o método TDMA (Ferziger e Peric, 2002). Neste trabalho foram empregados volumes fictícios para determinação dos coeficientes dos contornos, uma prática que segundo Maliska (1995) é atraente e de fácil aplicação. Assume-se que todos os volumes de controle sejam inteiros e internos, inclusive os volumes dos contornos. Com a criação de volumes fictícios, os volumes dos contornos são interpretados como volumes internos e os volumes fictícios passam a ser os volumes adjacentes aos contornos.

A equação de Poisson 1D agora com termo fonte exponencial ( $e^x$ ) é mostrada na Eq. (3.7).

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = e^x \quad (3.7)$$

Neste modelo as condições de contorno são:  $T(0) = 1$  e  $T(1) = e$ . A solução analítica é  $T = e^x$ .

Fazendo-se a discretização em Diferenças Finitas, as duas parcelas que compõe a aproximação numérica são mostradas na Eq. (3.8). Com o emprego do esquema de aproximação para a 2ª derivada CDS-4 compacto, mostrado na Eq. (3.9), e ordem assintótica do erro igual a 4, Eq. (3.10),

$$T_P^{ii} = (\lambda_{CDS-4c}^{ii})_P + \varepsilon(\lambda_{CDS-4c}^{ii})_P \quad (3.8)$$

$$(\lambda_{CDS-4c}^{ii})_P = \frac{T_w + T_E - 2T_P}{h^2} - \frac{e^{x_p-1} - 2e^{x_p} + e^{x_p+1}}{12} \quad (3.9)$$

$$\varepsilon(\lambda_{CDS-4c}^{ii})_P = O(h^4) \quad (3.10)$$

os coeficientes dos nós resultaram em  $a_p = 2$ ;  $a_w = a_E = 1$ ;  $b_p = -\frac{h^2}{12}(e^{x_p-1} + 10e^{x_p} + e^{x_p+1})$

Empregando discretização de Diferenças Finitas e esquema de aproximação para a 2ª derivada CDS-2 obtém-se a Eq. (3.11) que é composta das parcelas mostradas na Eq. (3.12) e (3.13).

$$T_P^{ii} = (\lambda_{CDS-2}^{ii})_P + \varepsilon(\lambda_{CDS-2}^{ii})_P \quad (3.11)$$

$$(\lambda_{CDS-2}^{ii})_P = \frac{T_w + T_E - 2T_P}{h^2} \quad (3.12)$$

$$\varepsilon(\lambda_{CDS-2}^{ii})_P = -T_P^{iv} \frac{h^2}{12} - T_P^{vi} \frac{h^4}{360} - T_P^{viii} \frac{h^6}{20160} - \dots \quad (3.13)$$

Dessa maneira os coeficientes dos nós internos são:  $a_p = 1$ ;  $a_w = a_E = \frac{1}{2}$ ;  $b_p = -\frac{h^2 e^x}{2}$  e as ordens verdadeiras do erro numérico de CDS-2 são 2, 4, 6, ...

### 3.2 EQUAÇÃO DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO 1D

A equação de advecção-difusão é uma equação parabólica em derivadas parciais. Pode ser utilizada para descrever o fenômeno físico onde, por exemplo, partículas são transferidas dentro de um sistema devido a dois processos: difusão e convecção (Bejan, 2004). Na forma mais simples quando o coeficiente de difusão e a velocidade de convecção são constantes e não há fontes ou fugas a equação toma a forma da Eq. (3.14)

$$Pe \frac{dT}{dx} = \frac{dT^2}{dx^2} \quad (3.14)$$

onde  $Pe$  é o número de Peclet, que no contexto do transporte de calor, é equivalente ao produto do número de Reynolds pelo número de Prandtl (Bejan, 2004).

O primeiro membro da Eq. (3.14) corresponde a advecção enquanto o segundo descreve a difusão. Entre as características deste modelo se pode destacar a equação de natureza parabólica, o problema de caráter advectivo e difusivo, o uso de coordenadas cartesianas, o tratamento em regime permanente, as propriedades constantes e a ausência de termo fonte.

No presente trabalho, esse problema foi abordado com as condições de contorno:

$T(0) = 0$  e  $T(1) = 1$  e termo fonte 0. A solução analítica é  $T = \frac{e^{x.Pe} - 1}{e^{Pe} - 1}$ , onde  $T$  é a variável dependente,  $x$  é a coordenada espacial e  $Pe$  é o número de Peclet, que neste problema foi empregado  $Pe = 5$ .

### 3.3 EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES 2D

Escoamentos de fluidos nas mais diversas aplicações como aerodinâmica de aviões, propulsão de foguetes e demais tipos de motores, hidrodinâmica de navios, bombas hidráulicas, entre muitos outros fenômenos, são modelados pelas equações de Navier-Stokes.

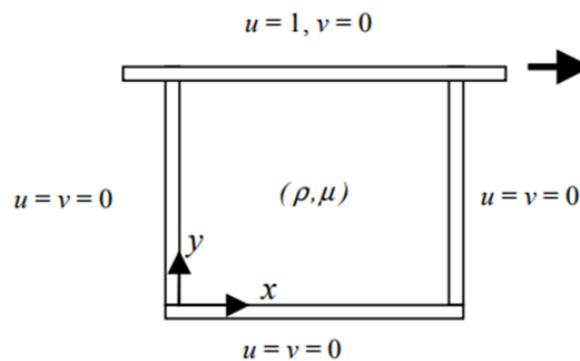
As equações de Navier-Stokes são um modelo matemático que envolve as leis de conservação da massa e da quantidade de movimento linear nas direções  $x$  e  $y$ . São equações diferenciais em que não se conhece a solução analítica e então são empregadas soluções fabricadas.

Neste trabalho foram feitos experimentos numéricos utilizando duas soluções fabricadas para as equações de Navier-Stokes. Uma solução polinomial proposta em Shih *et al.* (1989) e uma solução exponencial apresentada em Knupp e Salari (2002).

### 3.3.1 Solução fabricada polinomial

Shih *et al.* (1989) propuseram uma solução fabricada polinomial para as equações de Navier-Stokes. Trataram o modelo no contexto de um escoamento incompressível bidimensional em uma cavidade quadrada com tampa móvel de velocidade variável em relação à distância axial e fluxo laminar 2D nas direções  $x$  e  $y$ , ilustrado na Fig. 3.1.

Figura 3.1: Problema do fluxo em uma cavidade quadrada com tampa móvel



Fonte: Marchi *et al.* (2009)

As equações de Navier-Stokes para esse modelo são dadas pela equação da conservação da massa, Eq. (3.15) e pelas equações da quantidade de movimento linear da direção  $x$ , Eq. (3.16), e na direção  $y$ , Eq. (3.17),

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.15)$$

$$\rho \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \rho \frac{\partial(uv)}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.16)$$

$$\rho \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \rho \frac{\partial(v^2)}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} - S(x, y, \text{Re}) \quad (3.17)$$

onde:  $x$  e  $y$  são as coordenadas espaciais;  $\rho$  é a massa específica do fluido;  $u$  e  $v$  as componentes do vetor velocidade nas direções  $x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) e  $y$  ( $0 \leq y \leq 1$ ) respectivamente;  $\mu$  a viscosidade dinâmica;  $\text{Re}$  é o número de Reynolds ( $\text{Re} = 1$ );  $p$  é a pressão estática do

fluido;  $S$  é o termo-fonte resultante da solução fabricada de Shih *et al.* (1989). O termo fonte ( $S$ ) é dado pela Eq. (3.18) e a pressão estática ( $p$ ) é dada pela Eq. (3.19):

$$S(x, y, \text{Re}) = -\frac{8}{\text{Re}} [24F + 2f'g'' + f'''g] - 64[F_2G_1 - gg'F_1] \quad (3.18)$$

$$p(x, y, \text{Re}) = \frac{8}{\text{Re}} [Fg''' + f'g'] + 64F_2 [gg'' - (g')^2] \quad (3.19)$$

onde:

$$f = f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 \quad (3.20)$$

$$f' = 4x^3 - 6x^2 + 2x \quad (3.21)$$

$$f'' = 12x^2 - 12x + 2 \quad (3.22)$$

$$f''' = 24x - 12 \quad (3.23)$$

$$F = \int f(x) dx = 0,2x^5 - 0,5x^4 + x^3/3 \quad (3.24)$$

$$F_1 = f(x)f''(x) - [f'(x)]^2 = -4x^6 + 12x^5 - 14x^4 + 8x^3 - 2x^2 \quad (3.25)$$

$$F_2 = \int f(x)f'(x) dx = 0,5(x^4 - 2x^3 + x^2)^2 \quad (3.26)$$

$$g = g(y) = y^4 - y^2 \quad (3.27)$$

$$g' = 4y^3 - 2y \quad (3.28)$$

$$g'' = 12y^2 - 2 \quad (3.29)$$

$$g''' = 24y \quad (3.30)$$

$$G_1 = g(y)g'''(y) - g'(y)g''(y) = -24y^5 + 8y^3 - 4y \quad (3.31)$$

As condições de contorno, com emprego de volumes fictícios, para a parede norte é  $u(x,1) = 16(x^4 - 2x^3 + x^2)$  e nas demais paredes tem  $u = v = 0$ .

As soluções analíticas, determinadas pelo método das soluções fabricadas, para as incógnitas  $u$  e  $v$  desse problema são:

$$u(x, y) = 8(x^4 - 2x^3 + x^2)(4y^3 - 2y) \quad (3.32)$$

$$v(x, y) = -8(4x^3 - 6x^2 + 2x)(y^4 - y^2) \quad (3.33)$$

### 3.3.2 Solução fabricada exponencial

Para o problema do fluxo em uma cavidade quadrada com tampa móvel ilustrado na Fig. 3.1 e modelado pelas equações bidimensionais de Navier-Stokes, Knupp e Salari (2002) propuseram uma solução fabricada exponencial.

Para garantirem a continuidade da equação  $\phi = \phi(x, y)$ , Knupp e Salari (2002) definiram  $u = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$  e  $v = +\frac{\partial \phi}{\partial x}$ , donde as equações do momento se tornam como as Eq.

(3.34) e (3.35)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = R \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = Q \quad (3.35)$$

donde se tem o que expressam as Eq. (3.36) e (3.37) a seguir

$$R = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \nu \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \phi) \quad (3.36)$$

$$Q = \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \nu \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \phi) \quad (3.37)$$

Para garantir a existência de  $f$ , é necessário obter a Eq. (3.38),

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (3.38)$$

Isso significa que  $\phi$  deve satisfazer a Eq. (3.39)

$$\nu \nabla^4 \phi - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \phi) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \phi) = 0 \quad (3.39)$$

Para construir a solução fabricada, Knupp e Salari (2002) escolheram  $\phi$  de modo que  $\nabla^2 \phi = \mu$  (uma constante). Assim a Eq. (3.39) é automaticamente satisfeita. Os componentes de velocidade  $u$  e  $v$  são calculados a partir das derivadas de  $\phi$ . Calculando  $R$  e  $Q$  a partir de  $\phi$ , pode-se encontrar  $f$  pela integração. Neste caso, tem-se a Eq. (3.40),

$$\phi(x, y) = e^x \cos y - e^y \sin x \quad (3.40)$$

Assim  $\mu = 0$  pois  $\nabla^2 \phi = 0$ . A partir das derivadas de  $\phi$  encontram-se as Eq. (3.41) e (3.42)

$$u(x, y) = e^x \sin y + e^y \sin x \quad (3.41)$$

$$v(x, y) = e^x \cos y - e^y \cos x \quad (3.42)$$

As funções  $R$  e  $Q$  são então o que mostram as Eq. (3.43) e (3.44)

$$R(x, y) = -e^{2x} - e^{x+y} [\sin(x+y) - \cos(x+y)] \quad (3.43)$$

$$Q(x, y) = -e^{2y} - e^{x+y} [\sin(x+y) - \cos(x+y)] \quad (3.44)$$

e finalmente a Eq. (3.45)

$$f(x, y) = -\frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2y} + e^{x+y} \cos(x+y) \quad (3.45)$$

### 3.4 VARIÁVEIS DE INTERESSE

As variáveis de interesse podem ser primárias ou secundárias. As variáveis primárias, também chamadas de variáveis dependentes, de campo ou locais, são obtidas diretamente da solução de equações diferenciais. São exemplos: temperatura, pressão e componentes do vetor velocidade.

As variáveis secundárias são obtidas a partir das variáveis primárias por meio de operações matemáticas. São exemplos: velocidades e temperaturas médias, fluxos e taxas de transferência de calor nos contornos, fluxos de massa, tensões de cisalhamento e força nos contornos.

#### 3.4.1 Temperatura Média

A temperatura média é determinada a partir de uma operação de integração sobre a solução numérica da temperatura ( $T$ ), Eq. (3.46),

$$\bar{T} = \int_0^l T dx \quad (3.46)$$

É possível utilizar diversos métodos para isso, neste trabalho serão empregados os métodos Regra do Trapézio, Eq. (3.47), e a Regra de Simpson, Eq. (3.48).

$$\bar{T} = \frac{h}{2} \sum_{i=2}^N (T_{i-1} + T_i) \quad (3.47)$$

$$\bar{T} = \frac{h}{3} \sum_{i=2,4,6,\dots}^N (T(x_{i-1}) + 4.T(x_i) + T(x_{i+1})) \quad (3.48)$$

onde  $i = 1$  é o primeiro nó da malha, no caso de uma malha de Diferenças Finitas é o contorno esquerdo.

Experimentos numéricos para compreender possíveis impactos das extrapolações de MER e CRE sobre variáveis secundárias foram feitos no modelo, Eq. (3.7), cuja solução para o campo de temperaturas é descrito por  $T = e^x$ , foi empregado um domínio unitário, resolução em 20 malhas e refino 2. Nesse caso, a temperatura média ( $\bar{T}$ ) analítica é de  $e^x - 1$ .

Num modelo de transferência de calor cuja solução é uma função trigonométrica, Eq. (3.2), dada por  $T(x) = \text{sen}(\pi x)$ , foi empregado um domínio unitário, resolução em 10 malhas de 3 a 1025 nós e refino 2. Nesse caso a temperatura média  $(\bar{T})$  analítica é de  $2/\pi$ .

### 3.4.2 Inclinação nos contornos

A inclinação nos contornos é variável de interesse que descreve a derivada da solução nos contornos. O apelo físico desta variável consiste, por exemplo, na multiplicação por uma constante para determinar fluxo de calor ou a taxa de transferência de calor nos contornos. Com a multiplicação pela tensão cisalhante, viscosidade e área se pode obter a força de arrasto viscoso.

Com a solução numérica da temperatura ( $T$ ), a inclinação em  $x=0$  pode ser obtida com a Eq. (3.49),

$$I = \left( \frac{dT}{dx} \right)_{x=0} \quad (3.49)$$

a discretização da Eq. (3.49) em Diferenças Finitas e esquemas DDS-1, DDS-2 e DDS-3, fornece respectivamente as Eqs. (3.50), (3.51) e (3.52),

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0}^{DDS-1} = \frac{T_1 - T_0}{h} \quad (3.50)$$

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0}^{DDS-2} = \frac{-3T_0 + 4T_1 - T_2}{2h} \quad (3.51)$$

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0}^{DDS-3} = \frac{-11T_0 + 18T_1 - 9T_2 + 2T_3}{6h} \quad (3.52)$$

onde  $x = 0$  é o contorno esquerdo e  $T_0$  a solução de  $T$  no contorno.

Para a função  $T(x) = \text{sen}(\pi x)$  que representa a solução da Eq. (3.2), foram calculados os resultados da inclinação em  $x = 0$ , como na Eq. (3.49) cuja solução analítica é  $\pi$ .

IO1, IO2 e IO3, se referem respectivamente às aproximações DDS-1, DDS-2 e DDS-3 para a derivada de primeira ordem no contorno em  $x=0$ .

A expressão do erro de truncamento com DDS-1 é dada pela Eq. (3.53).

$$\varepsilon_1 = -T^{(2)} \frac{h}{2} - T^{(3)} \frac{h^2}{6} - T^{(4)} \frac{h^3}{24} - T^{(5)} \frac{h^4}{120} - T^{(6)} \frac{h^5}{720} - T^{(7)} \frac{h^6}{5040} - \dots \quad (3.53)$$

que para a função  $T(x) = \sin(\pi.x)$ , em  $x = 0$ , resulta na Eq. (3.54).

$$\varepsilon_1 = -0 \frac{h}{2} + \pi^3 \frac{h^2}{6} - 0 \frac{h^3}{24} - \pi^5 \frac{h^4}{120} - 0 \frac{h^5}{720} + \pi^7 \frac{h^6}{5040} - \dots \quad (3.54)$$

isto é, as ordens verdadeiras do erro de truncamento, utilizando DDS-1, são 2, 4, 6, ..., como mostra a Eq. (3.55).

$$\varepsilon_1 = \pi^3 \frac{h^2}{6} - \pi^5 \frac{h^4}{120} + \pi^7 \frac{h^6}{5040} - \dots \quad (3.55)$$

A expressão do erro de truncamento com DDS-2 é dada pela Eq. (3.56).

$$\varepsilon_2 = T^{(3)} \frac{h^2}{12} + T^{(4)} \frac{15h^3}{48} + T^{(5)} \frac{31h^4}{240} + T^{(6)} \frac{63h^5}{1440} + T^{(7)} \frac{127h^6}{10080} + \dots \quad (3.56)$$

que para a função  $T(x) = \sin(\pi.x)$ , em  $x = 0$ , resulta na Eq. (3.57).

$$\varepsilon_2 = -\pi^3 \frac{h^2}{12} + 0 \frac{15h^3}{48} + \pi^5 \frac{31h^4}{240} + 0 \frac{63h^5}{1440} - \pi^7 \frac{127h^6}{10080} + \dots \quad (3.57)$$

isto é, as ordens verdadeiras do erro de truncamento utilizando DDS-2, são 2, 4, 6, ..., como mostra a Eq. (3.58).

$$\varepsilon_2 = -\pi^3 \frac{h^2}{12} + \pi^5 \frac{31h^4}{240} - \pi^7 \frac{127h^6}{10080} - \dots \quad (3.58)$$

A expressão do erro de truncamento com DDS-3 é dada pela Eq. (3.59).

$$\varepsilon_3 = -T^{(4)} \frac{h^3}{4} - T^{(5)} \frac{3h^4}{10} - T^{(6)} \frac{5h^5}{24} - T^{(7)} \frac{3h^6}{28} + \dots \quad (3.59)$$

que para a função  $T(x) = \sin(\pi \cdot x)$ , em  $x = 0$ , resulta na Eq. (3.60).

$$\varepsilon_3 = -0 \frac{h^3}{4} - \pi^5 \frac{3h^4}{10} - 0 \frac{5h^5}{24} + \pi^7 \frac{3h^6}{28} + \dots \quad (3.60)$$

isto é, as ordens verdadeiras do erro de truncamento utilizando DDS-3, são 4, 6, ..., como mostra a Eq. (3.61).

$$\varepsilon_3 = -\pi^5 \frac{31h^4}{240} + \pi^7 \frac{3h^6}{28} - \dots \quad (3.61)$$

Das Eq. (3.55) e (3.58) tem-se que nesse modelo senoidal os erros numéricos de DDS-1 e DDS-2 têm a mesma ordem de acurácia.

Experimentos numéricos na inclinação em  $x = 1$ , contorno direito de uma malha unitária, foram realizados na equação 1D de advecção-difusão de calor, Eq. (3.14), com os esquemas de discretização CDS-2, QUICK e UDS-1 para termos advectivos, CDS-2, CDS-4 e CDS-2 para termos difusivos. Resolvendo com Volumes Finitos e precisão quádrupla. Foi calculado em 20 malhas e razão de refino 2, ou seja, malhas de 2 a 1048576 volumes. Nesse caso, a solução analítica é  $\approx 5.033918274531521155480099504515063921121457232145$ .

Por se tratar da inclinação no contorno direito, foram utilizados pontos a jusante, ou seja, esquemas UDS-1, Eq. (3.62), UDS-2, Eq. (3.63) e UDS-3, Eq. (3.64).

$$\left. \frac{dTe}{dx} \right|_{x=1}^{UDS-1} \approx \frac{Te(N) - Te(N-1)}{h} \quad (3.62)$$

onde  $Te(N)$  é a temperatura na face leste do volume  $N$  e  $h$  é o elemento de malha.

$$\left. \frac{dTe}{dx} \right|_{x=1}^{UDS-2} \approx \frac{3Te(N) - 4Te(N-1) + Te(N-2)}{2h} \quad (3.63)$$

$$\left. \frac{dTe}{dx} \right|_{x=1}^{UDS-3} \approx \frac{132(N) - 216Te(N-1) + 108Te(N-2) - 24Te(N-3)}{72h} \quad (3.64)$$

### 3.4.3 Fluxo de massa

No clássico problema de CFD da cavidade com tampa móvel, tratado por Marchi *et al.* (2009), uma variável secundária empregada é o fluxo de massa ( $M$ ). Na Eq. (3.65), por exemplo, é expresso a massa que flui através da linha de  $y=1/2$  e  $0 < x < 1/2$ ,

$$M = \int_0^{1/2} \rho v_{y=1/2} z dx \quad (3.65)$$

onde  $z$  é a profundidade da cavidade, que pode ser considerada unitária.

Por se tratar de uma integração, a variável  $M$  pode ser discretizada, entre outros, com os métodos do Trapézio e de Simpson.

### 3.4.4 Força de arrasto viscoso

Ainda em problemas de CFD, como o da cavidade com tampa móvel, pode ser necessário conhecer a força de arrasto viscoso. A Eq. (3.66), expressa a força de arrasto viscosa ( $F$ ) na direção  $x$ , trata-se da força exercida pela superfície limite do fluido, dada por

$$F = \int_0^1 \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_y z dx \quad (3.66)$$

onde  $F$  em  $y=1$  ocorre na tampa móvel da cavidade e  $F$  em  $y=0$  na parede inferior da cavidade.

Para a discretização, as derivadas podem ser aproximadas, por exemplo, pelos esquemas DDS-1, DDS-2 e DDS-3 para  $y = 0$  e a integração pela Regra do Trapézio ou de Simpson.

## 4 RESULTADOS DOS CAMPOS

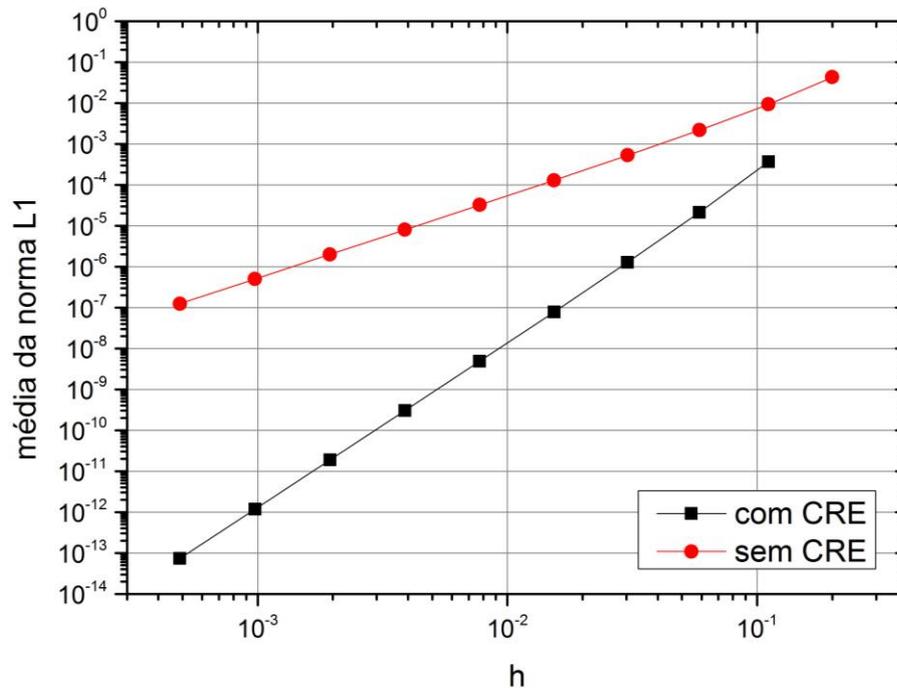
### 4.1 EMPREGO DE CRE EM PROBLEMAS 1D

#### 4.1.1 Poisson 1D com termo fonte trigonométrico

O emprego de CRE em problemas resolvidos por Diferenças Finitas é feito exatamente conforme proposto por Roache e Knupp (1993). Observam-se os bons resultados possíveis como, por exemplo, na equação de Poisson 1D com termo fonte trigonométrico, Eq. (3.2).

Resolvendo esse problema da difusão de calor primeiramente com Diferenças Finitas em malha uniforme, de domínio unitário, e utilizando 10 malhas, de  $N=5$  nós a  $N=2049$  nós, discretização com CDS-2, pode-se observar o decaimento da média da norma  $L1$  do erro numérico na Fig. 4.1, tanto na solução original sem CRE quanto na solução com CRE.

Figura 4.1: Média da norma  $L1$  do erro numérico de Poisson 1D com termo fonte trigonométrico



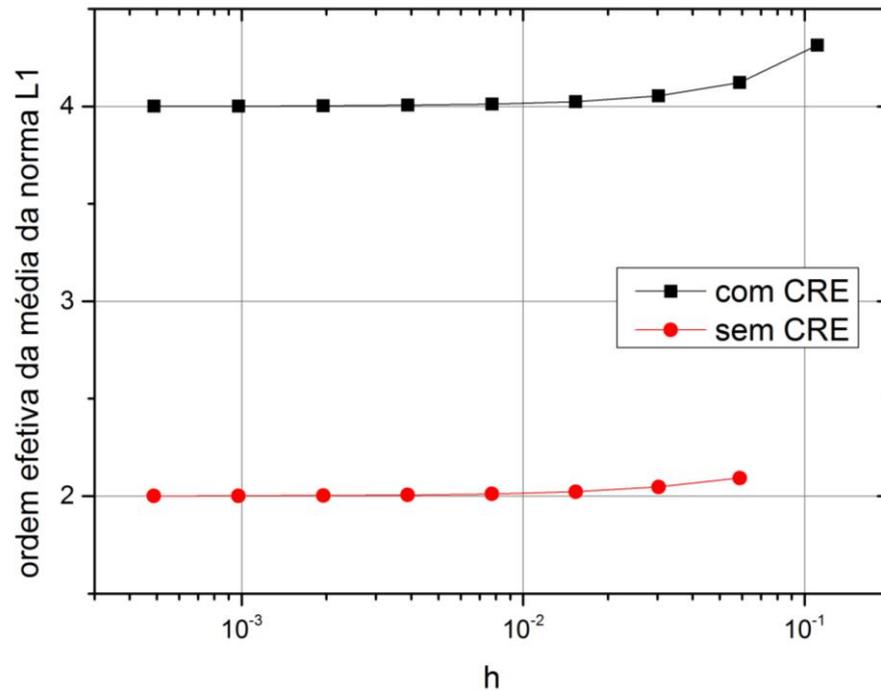
O cálculo da média da norma do erro numérico ( $\overline{L1}$ ), é feito conforme Eq. (4.1),

$$\overline{L1} = \frac{1}{N-2} \sum_{i=2}^{N-1} |T(i) - Ta(i)| \quad (4.1)$$

onde  $Ta(i)$  é a solução analítica, que neste caso é  $Ta(i) = \text{sen}(\pi.i)$ .

Nota-se que com CRE houve redução de seis ordens numéricas do erro de discretização e a ordem efetiva pode ser observada na Fig. 4.2.

Figura 4.2: Ordem efetiva da média da norma L1 do erro numérico de Poisson 1D com termo fonte trigonométrico

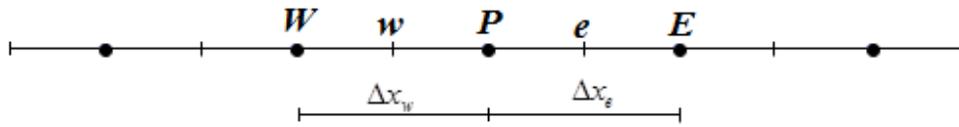


Nesse exemplo, CRE contribuiu para a elevação da ordem efetiva do decaimento da norma L1 do erro numérico de 2 para 4. Esse comportamento é coerente com o que se pode esperar da redução de uma ordem na expansão da série de Taylor do esquema CDS-2.

Conhecendo o potencial de CRE na redução do erro numérico e na elevação da ordem efetiva do decaimento do erro numérico em problemas resolvidos por Diferenças Finitas, desejou-se fazer a aplicação dessa extrapolação em problemas resolvidos por Volumes Finitos.

O emprego direto de CRE em malhas de Volumes Finitos não é possível. Não há compatibilidade geométrica entre os nós dos volumes de controle nas diversas malhas, especialmente com razão de refino 2, para que se possa aplicar CRE. Devido a esse fato foi estabelecida uma estratégia para viabilizar o emprego de CRE. Após a obtenção da solução nos pontos nodais (como  $W$ ,  $P$ ,  $E$ ) da malha unidimensional uniforme de Volumes Finitos, representada na Fig. 4.3,

Figura 4.3: Representação da malha unidimensional de Volumes Finitos



por meio de média aritmética simples, foi determinado a solução nas faces ( $w$ ,  $e$ ).

Para validação numérica desse resultado, foi tomado primeiramente o modelo de Poisson 1D, Eq. (3.1), e discretizado em malha uniforme pelo Método de Volumes Finitos e esquema de aproximação das derivadas CDS-2.

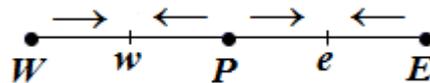
A partir da solução numérica obtida com o Método de Volumes Finitos, foi calculada a solução para as faces por meio de uma média aritmética simples entre as soluções nos volumes de controle adjacentes. Ou seja, a solução na face leste do volume de controle de posição  $P$ , e escrita como  $T_e$ , é definida pela Eq. (4.2) e a face oeste do volume de controle de posição  $P$ , e escrita como  $T_w$ , é definida pela Eq. (4.3).

$$T_e = \frac{T_P + T_E}{2} \quad (4.2)$$

$$T_w = \frac{T_P + T_W}{2} \quad (4.3)$$

A Fig. 4.4 traz uma representação dos volumes envolvidos no cálculo das médias das faces.

Figura 4.4: Volumes de controle utilizados para o cálculo da solução nas faces



Tomando apenas a solução nas faces, o problema resolvido pelo método de Volumes Finitos é igual a um problema de Diferenças Finitas, a malha de faces de Volumes Finitos fica geometricamente equivalente a uma malha de nós de Diferenças Finitas. O decaimento do erro da solução nas faces pode ser observado pela média da norma do erro de discretização  $|\overline{L1}|$ , Eq. (4.4),

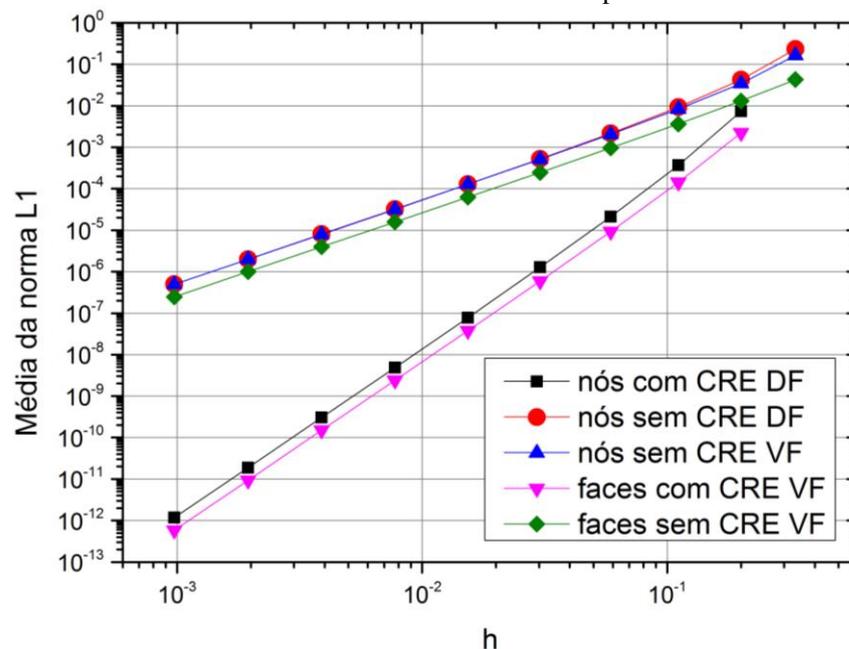
$$\overline{L1} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} (T_e(i) - T_a(i)) \quad (4.4)$$

onde  $Ta_e$  é a solução analítica na face leste do volume de controle. São  $N-1$  faces leste porque no último volume a face leste corresponde a um volume fictício.

Com os valores de  $|\overline{L1}|$  pode ser determinada  $p_E$ , a ordem efetiva, Eq. (2.11), do decaimento do erro. Esse acompanhamento permite observar a redução do erro e o comportamento da ordem de decaimento do erro numérico.

Os resultados obtidos com o emprego de CRE nos nós e faces dessa malha de volumes finitos são mostrados na Fig. 4.5 a seguir.

4.5: Resultados da média da norma L1 de nós de DF e VF e faces de VF para Poisson 1D com e sem CRE

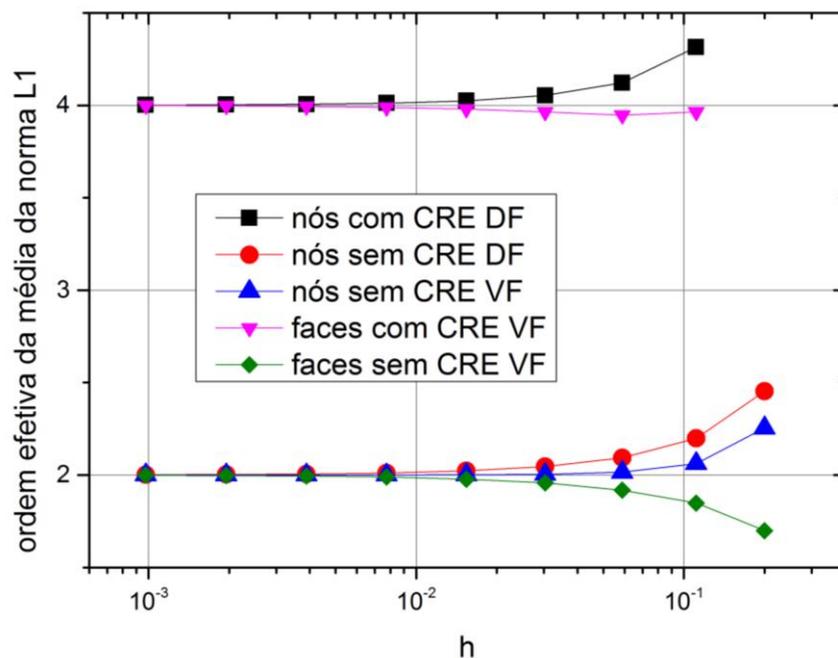


Os resultados indicam que o cálculo da solução nas faces por meio da média aritmética dos nós adjacentes mantém a mesma ordem no erro da solução. Podemos notar ainda que, na malha mais refinada, houve uma redução de seis casas decimais no erro das faces com Volumes Finitos sem CRE e com CRE.

No que consiste aos valores do erro, a Fig. 4.5 mostra que houve coincidência entre as soluções originais (sem CRE) dos nós de Diferenças Finitas e dos volumes de controle de Volumes Finitos. A estratégia da transferência da solução para as faces dos volumes manteve o mesmo decaimento do erro, representado por um segmento de reta paralelo e próximo ao das soluções originais. Observamos que após o emprego de CRE nas faces dos volumes de controle ocorreu o decaimento do erro com a mesma inclinação que nos nós de Diferenças Finitas.

Os resultados indicam que tanto os nós de Diferenças Finitas, quanto nós e faces de Volumes Finitos (sem CRE) demonstram tendência à ordem 2, como pode ser observado na Fig 4.6. Esse fato é coerente com o emprego do esquema de ordem 2, CDS-2, para a aproximação. Nesse sentido, a tendência à ordem 4 obtida após emprego de CRE nos nós de Diferenças Finitas e faces de Volumes Finitos também é coerente com a segunda ordem verdadeira da expressão do erro para CDS-2.

4.6: Ordem efetiva equivalente ( $p_E$ ) da média da norma L1 para Poisson 1D com e sem CRE



Esses resultados indicam que CRE é um método eficaz para elevar a ordem de acurácia da solução numérica do campo desse problema de CFD tanto na resolução por DF quanto no emprego proposto neste trabalho por VF.

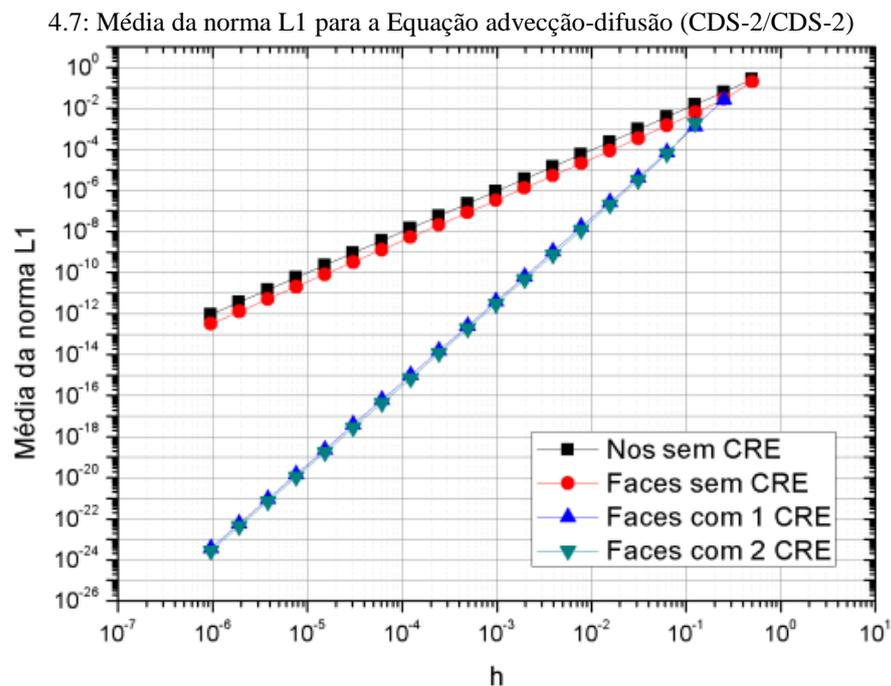
O trabalho de Giacomini (2013) que fez o emprego de CRE em Poisson 1D resolvido por diferenças finitas com discretização por CDS-2 e CDS-4, conseguiu apenas um nível de CRE e o erro foi inferior a  $10^{-11}$ . No presente trabalho, com o emprego de CRE para volumes finitos no mesmo problema, os desempenhos foram equivalentes. Dessa forma, a estratégia de utilizar as soluções nas faces é válida para emprego de CRE.

#### 4.1.2 Advecção-Difusão (CDS-2/CDS-2)

Experimentos numéricos do emprego dessa mesma metodologia para CRE em problemas unidimensionais de Volumes Finitos foram realizados na equação da advecção-difusão, Eq. (3.14).

Foram feitos testes utilizando razão de refino 2 em 20 malhas de 2 a 1048576 volumes. As soluções foram obtidas com Volumes Finitos e precisão quádrupla. Foram utilizados esquemas CDS-2 nos termos advectivos e difusivos. Visando avaliar contribuições de multiextrapolações de campo, foram feitos até 3 níveis de CRE no caso em que foi empregado UDS-1 e até 2 níveis no caso de apenas CDS-2.

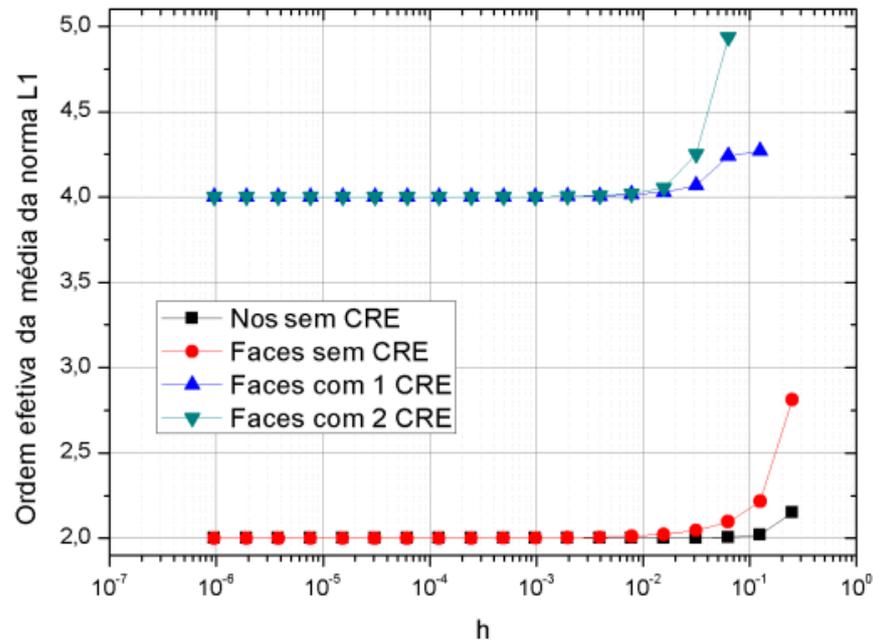
Os resultados para a advecção-difusão, Eq. (3.14), resolvida por Volumes Finitos com discretização dos termos advectivos e dos difusivos com CDS-2 são mostrados na Fig. 4.7.



É possível notar que o emprego de CRE reduz consideravelmente o erro de discretização nas faces de VF. Na malha mais refinada o primeiro nível de CRE reduz a média da norma L1 da solução nas faces de  $3,14253 \cdot 10^{-13}$  para  $3,60841 \cdot 10^{-24}$ . Nota-se ainda que o segundo nível de CRE não contribui para reduzir ainda mais, apenas mantém na mesma ordem de grandeza do primeiro nível. A solução nos nós e nas faces sem CRE mantém um decaimento muito parecido. As faces extrapoladas com 1 nível de CRE têm seu erro reduzido, já o segundo nível não afeta mais o resultado.

A Fig. 4.8 mostra o comportamento da ordem efetiva equivalente desses efeitos de CRE.

4.8: Ordem efetiva equivalente ( $p_E$ ) da média da norma L1 para a Equação advecção-difusão (CDS-2/CDS-2)



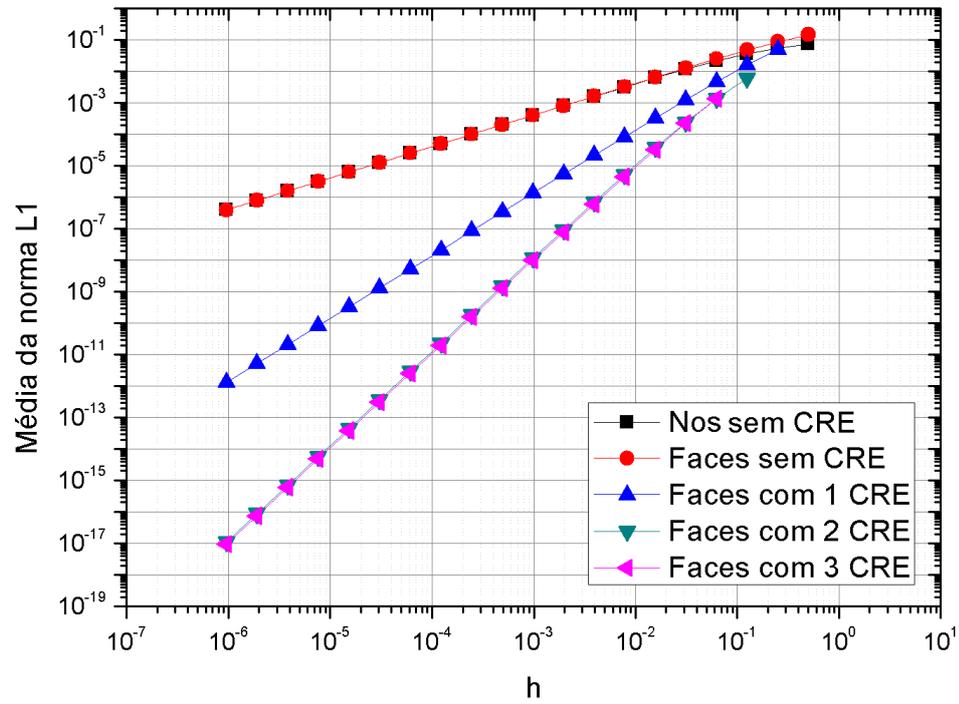
É possível notar que na solução dos nós e das faces sem extrapolação, a ordem efetiva equivalente é 2, o que já era esperado por ter sido empregado esquema CDS-2 que é de ordem 2. As faces com 1 extrapolação de CRE tiveram a ordem aumentada para 4, o que é coerente com a segunda ordem verdadeira do erro da expressão para CDS-2, já o segundo nível de CRE não confere maior efeito mantendo a mesma ordem da primeira extrapolação.

#### 4.1.3 Advecção-Difusão (UDS-1/CDS-2)

Os resultados para a advecção-difusão, Eq. (3.14), resolvida por VF com discretização dos termos advectivos com UDS-1 e dos difusivos com CDS-2 são mostrados na Fig. 4.9. Nesse caso, foram feitos até três níveis de CRE, ou seja, foi empregado CRE uma terceira vez a partir das soluções obtidas na segunda extrapolação de CRE, a fim avaliar os efeitos sobre a possível redução do erro numérico entre os níveis de extrapolação.

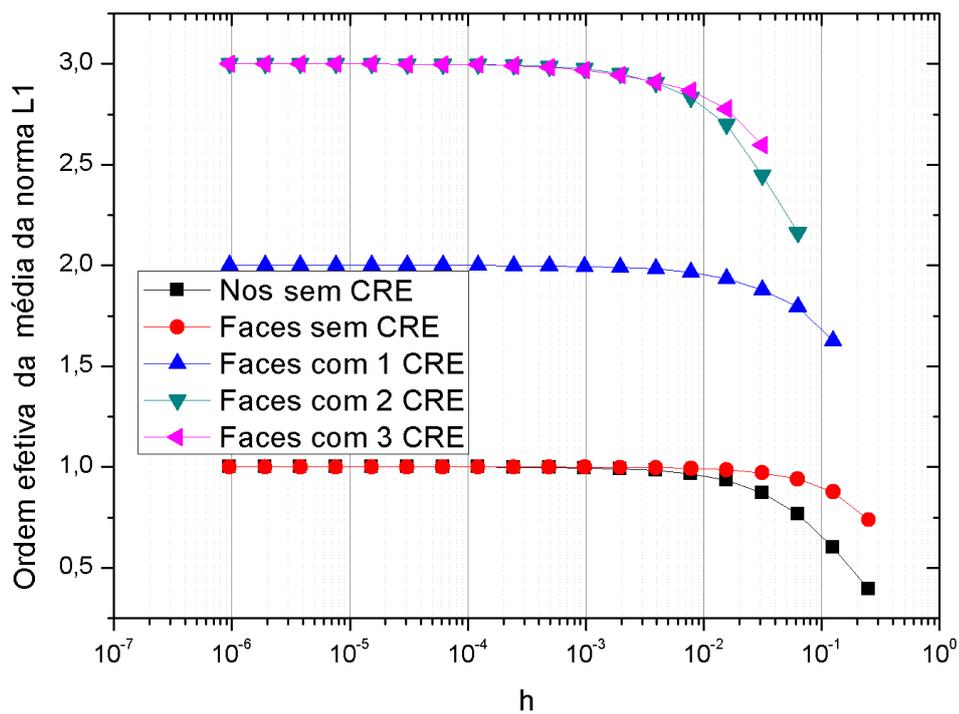
É possível observar que, na malha mais refinada, o primeiro nível de CRE reduziu o erro em cinco ordens de grandeza e o segundo nível em mais cinco. O terceiro nível de CRE não conferiu nenhum efeito relevante sobre o erro anterior, como mostra a Fig. 4.9.

Figura 4.9: Média da norma L1 para a Equação advecção-difusão (UDS-1/CDS-2)



As ordens efetivas equivalentes desses resultados são mostradas na Fig. 4.10.

Figura 4.10: Ordem efetiva equivalente ( $p_E$ ) da média da norma L1 para a Equação advecção-difusão (UDS-1/CDS-2)



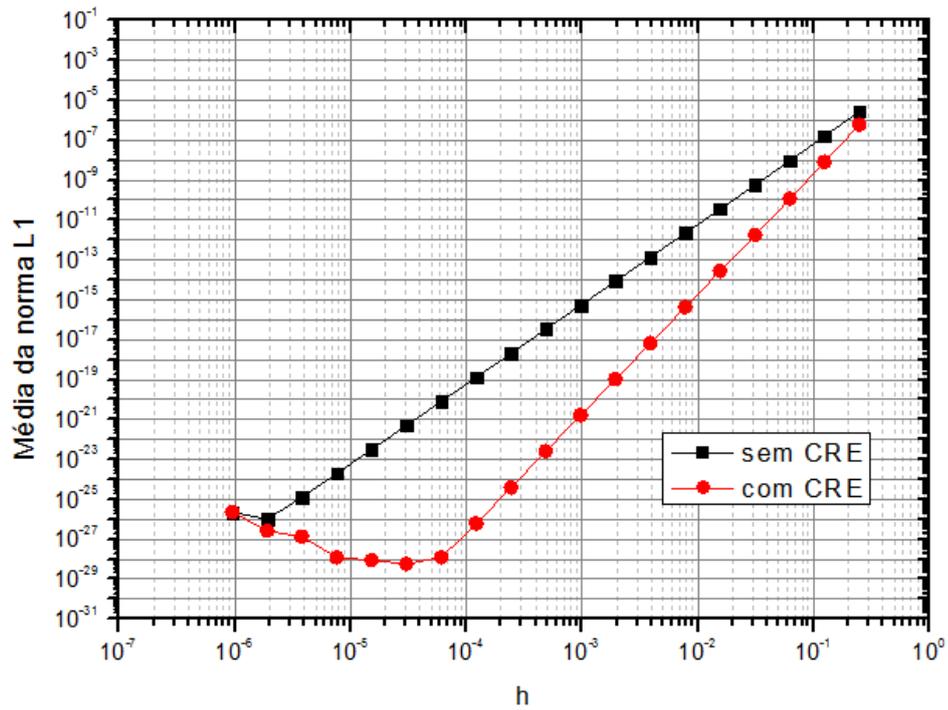
Nota-se que na solução dos nós e das faces sem extrapolação, a ordem efetiva equivalente tende a 1, o que já era esperado por ter sido empregado, nos termos advectivos, esquema UDS-1 que é de ordem 1. As faces com 1 extrapolação de CRE tiveram a ordem aumentada para 2, o que é coerente com a segunda ordem verdadeira do erro da expressão para UDS-1. As faces com 2 extrapolações de CRE tiveram a ordem aumentada para 3, seguindo para a terceira ordem verdadeira do erro na expressão de UDS-1. O terceiro nível de CRE não conferiu nenhum efeito relevante, mantendo a mesma ordem de grandeza da segunda extrapolação.

No trabalho de Giacomini (2013) foi feito o emprego de CRE na advecção-difusão para até 2 níveis de CRE e discretização de 10 malhas por UDS-1/CDS-2, chegando ao erro de  $10^{-8}$ ; e 1 nível de CRE por CDS-2-CDS-2 em 10 malhas, chegando ao erro de  $10^{-11}$ . No presente trabalho, com o emprego de CRE para Volumes Finitos no mesmo problema, os erros encontrados foram menores porque foram utilizadas 20 malhas, porém as ordens efetivas foram as mesmas. No caso UDS-1/CDS-2 com até 2 níveis de CRE a ordem efetiva foi de 1 para 3 e no caso CDS-2/CDS2 com 1 nível de CRE a ordem efetiva foi de 2 para 4. Dessa forma, a estratégia de utilizar as soluções nas faces de Volumes Finitos é válida para emprego de CRE, fornecendo resultados equivalentes aos dos nós de Diferenças Finitas. Tanto nos resultados existentes de Diferenças Finitas, quanto nos apresentados neste trabalho para Volumes Finitos, percebe-se que o esquema de discretização empregado inicialmente influencia no emprego de CRE que no caso UDS-1/CDS-2 chegou a dois níveis e no caso CDS-2/CDS-2 a 1 nível.

#### 4.1.4 Poisson 1D com termo fonte exponencial

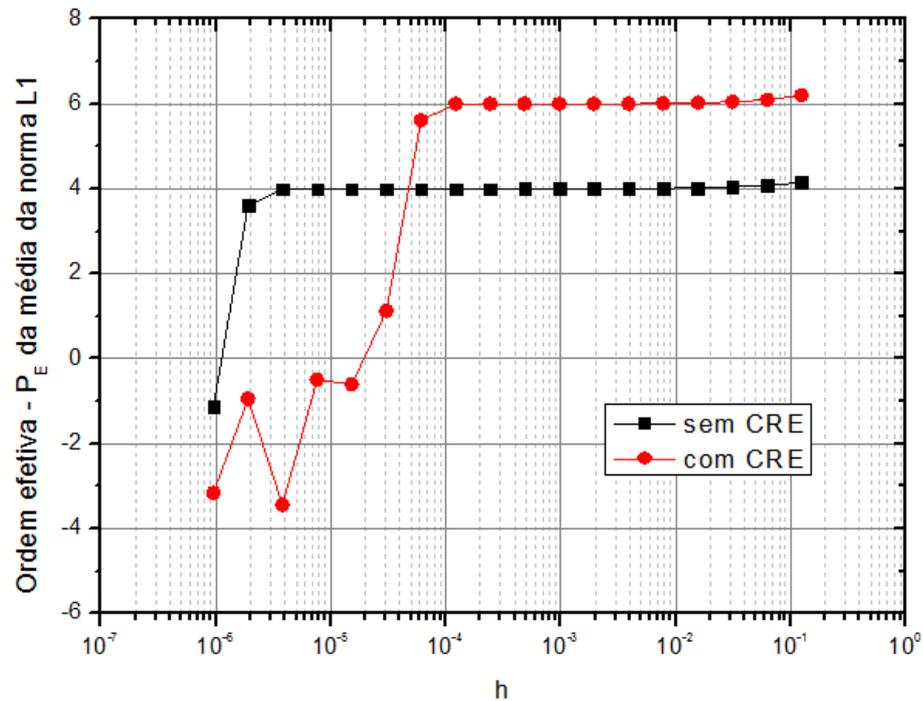
Os experimentos numéricos na Equação de Poisson 1D com termo fonte exponencial, Eq (3.7), resolvida por Diferenças Finitas e emprego de CDS-4 compacto, resultaram no que pode ser visto na Fig. 4.11. Pode ser observado o comportamento do erro numérico por meio da média da norma L1 sem CRE e com CRE desse problema,

4.11: Média da norma L1 com e sem CRE em Poisson 1D com termo fonte exponencial



A ordem efetiva equivalente é mostrada na Fig. 4.12,

Figura 4.12: Ordem efetiva equivalente da média da norma L1 com e sem CRE em Poisson 1D com termo fonte exponencial



Esse experimento numérico, em Poisson 1D com fonte exponencial, reforça as observações da redução do erro de discretização com CRE, mesmo com o emprego de um esquema de discretização com a ordem assintótica do erro igual a 4. Nesse caso, a ordem de acurácia foi elevada a 6.

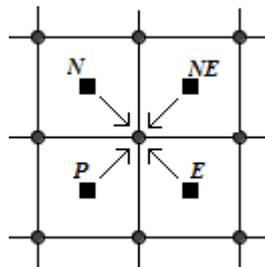
Os experimentos numéricos em equações unidimensionais utilizadas na área de CFD, Poisson e advecção-difusão, são exemplos de que CRE é método eficaz para a redução do erro numérico também para problemas resolvidos por Volumes Finitos. Nesse sentido, esquemas de aproximação que utilizam menos pontos, e que conferem menos oscilações numéricas, podem ser utilizados e o erro numérico pode vir a ser reduzido em pós-processamento com o emprego de CRE. Partindo da ordem 1 de UDS-1, foi possível chegar à ordem 3 com duas extrapolações, e partindo da ordem 2 de CDS-2, à ordem 4 com um nível de CRE. Há, portanto, indícios de que o potencial de CRE para redução do erro numérico é influenciado pelo esquema de aproximação empregado na discretização.

## 4.2 EMPREGO DE CRE EM PROBLEMAS 2D

### 4.2.1 Equações de Navier-Stokes com solução fabricada polinomial

Com a solução para 10 malhas distintas, de 2x2 a 1024x1024 volumes de controle, para os campos de  $u$ ,  $v$  e  $p$ , foi calculada a solução nas quinas por meio da média aritmética entre os quatro volumes adjacentes, conforme ilustrado na Fig. 4.13.

Figura 4.13: Quinas calculadas pela média aritmética de quatro volumes de controle adjacentes



A solução em uma quina leste superior do volume de controle de posição  $P$  e escrita como  $Tq_e$  é definida pela Eq. (4.5)

$$Tq_e = \frac{(T_P + T_E + T_N + T_{NE})}{4} \quad (4.5)$$

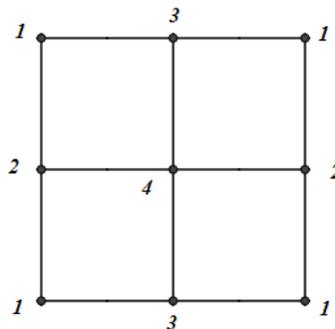
onde  $T_p$  é a solução numérica no volume de controle  $P$ , e analogamente os demais.

Para as quinas dos contornos não foi necessário aplicar médias, porque o problema possui condições de contorno de Dirichlet, ou seja, os valores são conhecidos previamente.

A configuração em quinas de Volumes Finitos fica igual a uma configuração de nós de Diferenças Finitas. Assim, a partir da determinação das quinas, a malha passa a ter pontos de referência como aos dos nós utilizados com o método de Diferenças Finitas.

Na configuração da malha em quinas é que foi empregado CRE. Para isso foram considerados quatro casos distintos de pontos. Os que coincidem de uma malha para outra, os que se encontram entre duas quinas na direção  $x$ , os que se encontram entre duas quinas na direção  $y$  e os que ficam no centro de um quadrado formado por quatro outras quinas. Os quatro casos de quinas na malha extrapolada têm sua configuração ilustrada na Fig. 4.14.

Figura 4.14: Quatro casos de pontos na configuração da malha em quinas



Dado um elemento de malha formado por quinas dos volumes de controle, são tratados quatro casos. As extrapolações são feitas por meio de média aritmética simples entre as soluções nos volumes de controle adjacentes em três casos distintos, mais um caso que se dá pelos pontos coincidentes. Os pontos numerados com 1 na Fig. 4.14, coincidem nas malhas grossa e fina com razão de refino 2. A expressão de CRE para pontos ímpares da malha 2D é dada pela Eq. (2.18), que equivale à expressão de MER com base na ordem assintótica, onde o termo de correção depende do caso que o ponto considerado se enquadra no campo bidimensional.

Com o cálculo da correção para todas as quinas na malha grossa, têm-se as extrapolações dos pontos coincidentes na malha fina. A partir dessas extrapolações tratam-se os pontos que se localizam entre dois pontos na direção  $x$ , como os numerados por 3 na Fig. 4.14, o termo de correção é dado pela média aritmética entre os dois pontos adjacentes na direção  $x$ , conforme Eq. (4.6),

$$C_{g,1}^{i+1,j} = \frac{C_{g,0}^{i,j} + C_{g,0}^{i+2,j}}{2} \quad (4.6)$$

Para os pontos que se localizam entre dois pontos na direção  $y$ , como os numerados por 2 na Fig. 4.14, o termo de correção é dado pela média aritmética entre os dois pontos adjacentes na direção  $y$ , conforme Eq. (4.7),

$$C_{g,1}^{i,j+1} = \frac{C_{g,0}^{i,j} + C_{g,0}^{i,j+2}}{2} \quad (4.7)$$

onde  $N_x$  é o número de pontos na direção  $x$  da malha fina.

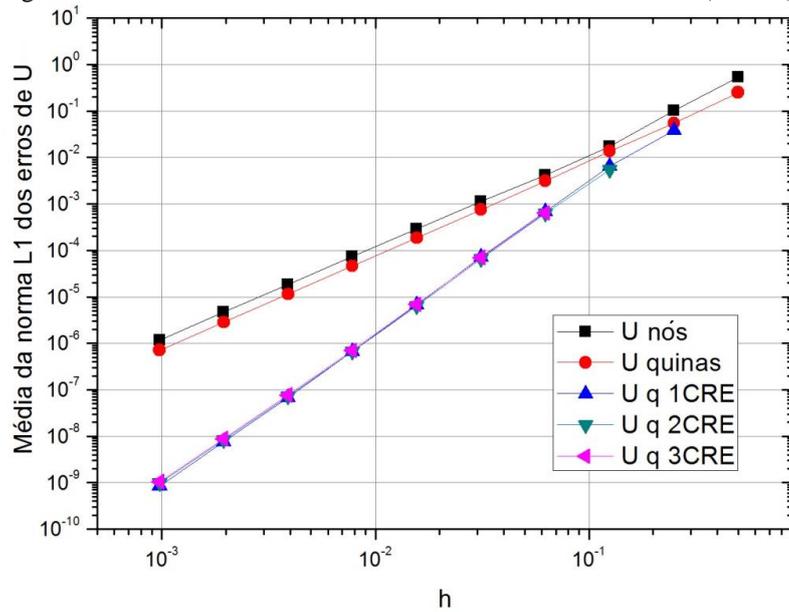
Para os pontos que se localizam no centro de outros quatro pontos, numerado com 4 na Fig. 4.14, o termo de correção é dado pela média aritmética entre esses quatro pontos, conforme Eq. 4.8,

$$C_{g,1}^{i+1,j+1} = \frac{C_{g,0}^{i,j} + C_{g,0}^{i+2,j} + C_{g,0}^{i,j+2} + C_{g,0}^{i+2,j+2}}{4} \quad (4.8)$$

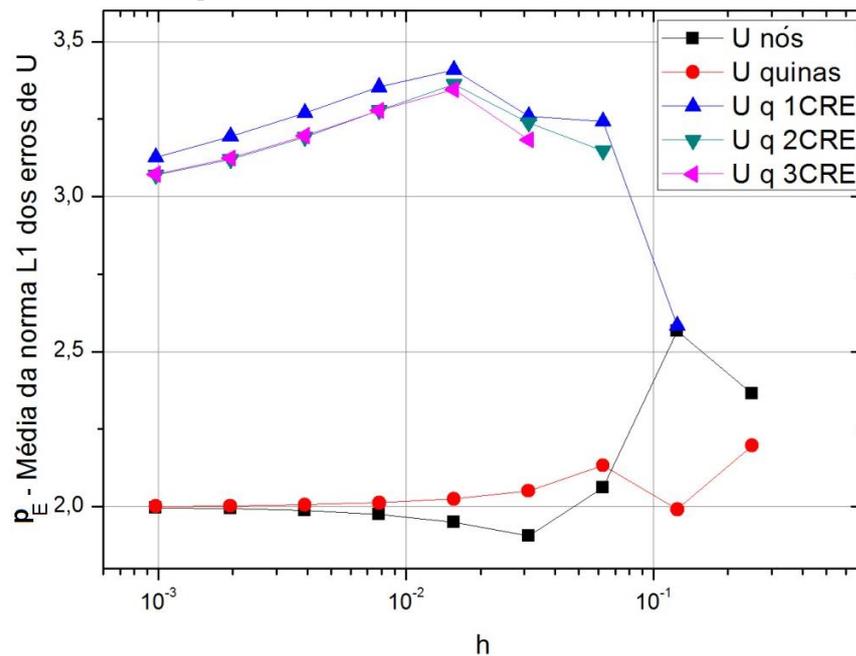
Os pontos pertencentes aos contornos não são extrapolados se o problema possui condições de contorno de Dirichlet, por já terem solução conhecida.

Dessa maneira, com base na solução com Volumes Finitos das equações 2D de Navier-Stokes, usando 10 malhas de  $2 \times 2$  até  $1024 \times 1024$  volumes, foram calculadas as velocidades  $u$  e  $v$  e a pressão  $p$  nas quinas de cada volume por média aritmética dos 4 volumes de controle adjacentes. Foram feitos os cálculos da média da norma L1 do erro numérico de  $u$ ,  $v$ , e  $p$  para os centros dos volumes, as quinas sem CRE, e as quinas com até três níveis de CRE tanto na discretização com CDS-2 quanto com UDS-1.

Com o emprego da discretização por CDS-2, é mostrado na Fig. 4.15 os resultados para a média da norma L1 da variável  $u$ , velocidade na direção  $x$ ,

Figura 4.15: média da norma L1 de  $u$  com até três níveis de CRE (CDS-2)

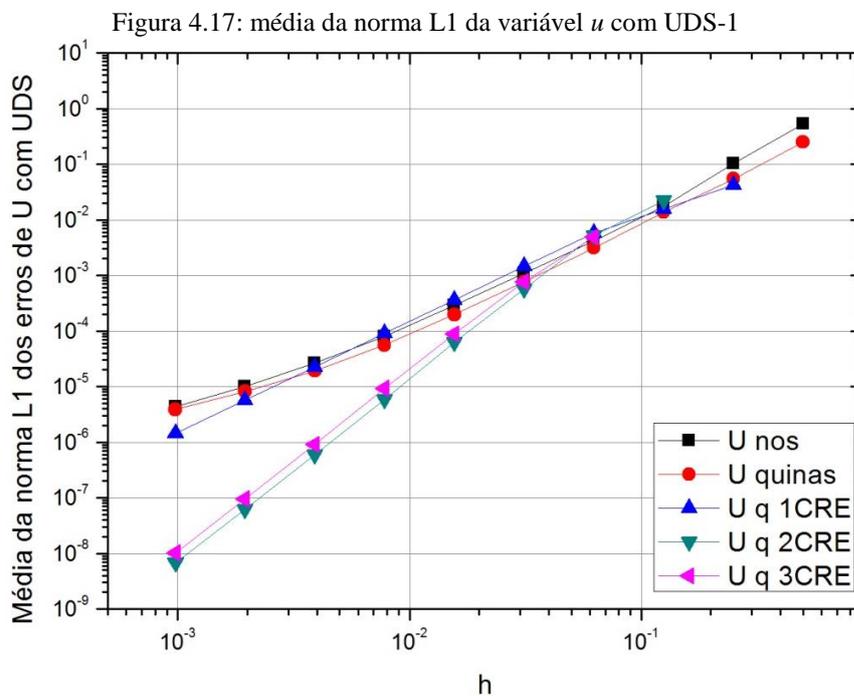
É possível observar que o decaimento do erro de  $u$  (representado por  $U$  na legenda da Fig. 4.15) para nós e quinas segue a mesma inclinação. A solução extrapolada com um nível de CRE reduz o erro de discretização, conferindo um decaimento mais rápido, pois a reta se apresenta mais inclinada. A redução do erro é de três ordens numéricas na malha mais refinada. O segundo e o terceiro níveis de CRE não conferiram efeito sobre a solução com uma extrapolação, as retas dos três níveis de CRE se sobrepõem. O comportamento da ordem efetiva equivalente nesse caso pode ser observada na Fig. 4.16,

Figura 4.16: Ordem efetiva equivalente da média da norma L1 de  $u$  com até três níveis de CRE (CDS-2)

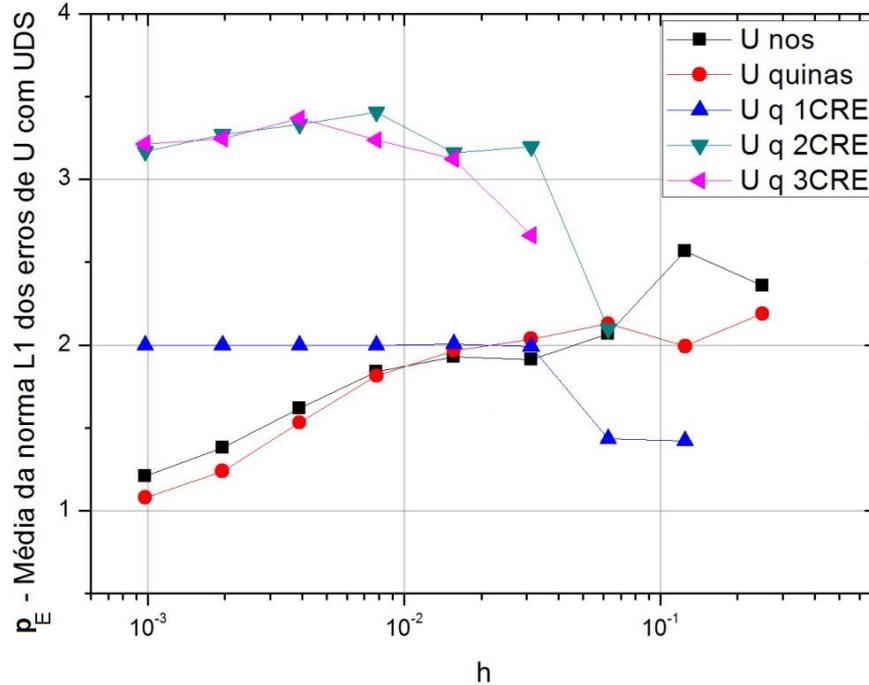
Destaca-se que a ordem efetiva equivalente tanto para os nós quanto para as quinas sem CRE é de 2, o que é coerente com o esquema CDS-2 utilizado. Os três níveis de extrapolação podem ser considerados coincidentes, sendo que o primeiro nível mostrou uma tendência à ordem 3, após um máximo em aproximadamente 3,5, e os dois níveis seguintes mantiveram o resultado.

Os resultados da média da norma L1 para a variável  $v$ , velocidade na direção  $y$ , e  $p$ , pressão estática, podem ser vistos no apêndice A.

Com o emprego da discretização por UDS-1, é mostrado na Fig. 4.17 os resultados para a média da norma L1 da variável  $u$ , velocidade na direção  $x$ ,



É possível observar na Fig. 4.17 que o decaimento do erro de  $u$  para nós e quinas sem extrapolação é muito parecido. A solução extrapolada com um nível de CRE tem uma pequena influência no decaimento e o segundo nível de CRE é que confere um maior decaimento ao erro. O terceiro nível de CRE não surtiu efeito sobre a solução com duas extrapolações. O comportamento da ordem efetiva equivalente nesse caso pode ser observada na Fig. 4.18,

Figura 4.18: Ordem efetiva equivalente da média da norma L1 da variável  $u$  com UDS-1

As ordens efetivas equivalentes tanto dos nós quanto das quinas sem extrapolação tenderam a 1 nas malhas mais refinadas, o que é coerente com a ordem assintótica de UDS-1. O primeiro nível de CRE resultou em 2, a 2ª ordem verdadeira de UDS-1. O segundo e terceiro níveis de CRE tendem à ordem 3, a 3ª ordem verdadeira de UDS-1. Portanto, o emprego de CRE a partir da discretização com UDS-1 e seguindo a metodologia de quinas, concorda com a teoria de CRE concebida por Roache e Knupp (1993).

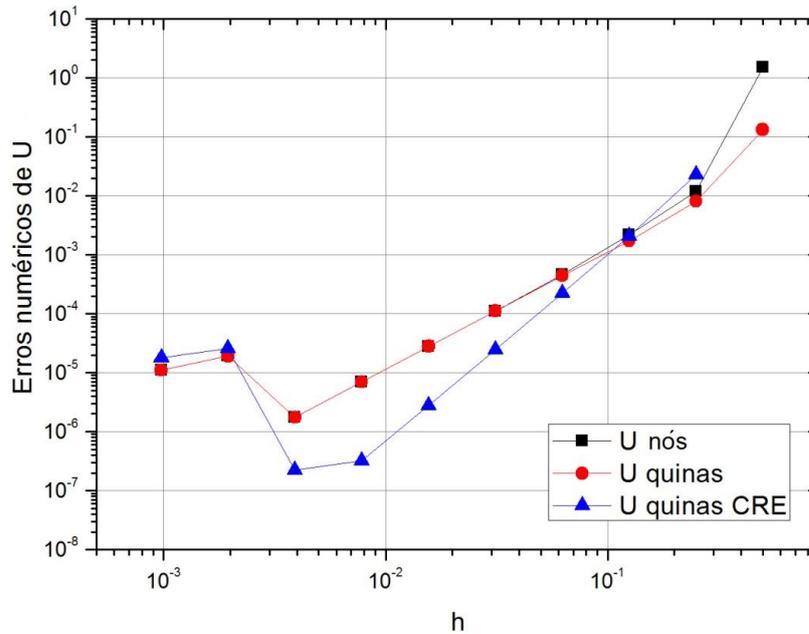
Os resultados da média da norma L1 para a variável  $v$ , velocidade na direção  $y$ , e  $p$ , pressão estática, podem ser vistos no apêndice A.

Os resultados obtidos nas equações bidimensionais de Navier-Stokes com a solução fabricada de Shih *et al.* (1989) quando empregado a discretização de CDS-2 a metodologia de CRE em quinas teve o desempenho esperado no primeiro nível de CRE e os demais níveis de CRE não conferiram efeito. Por sua vez, quando empregado a discretização de UDS-1 a metodologia de CRE em quinas teve o desempenho esperado no segundo nível de CRE e o primeiro nível não teve efeito nas soluções originais, da mesma forma que o terceiro nível não teve efeito nas soluções com duas extrapolações. Esses comportamentos podem indicar que o desempenho de CRE está também relacionado à ordem de acurácia do esquema de discretização empregado no modelo numérico.

#### 4.2.2 Equações de Navier-Stokes com solução fabricada exponencial

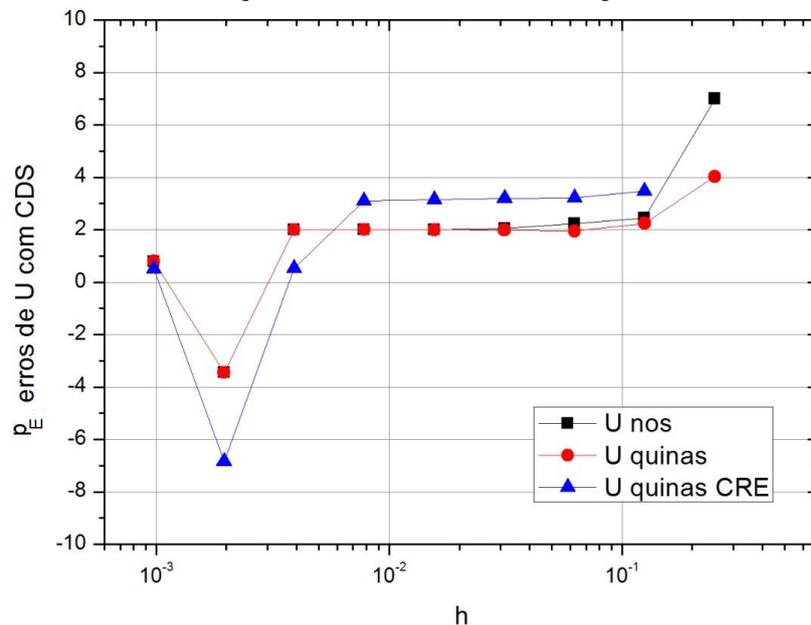
Para o problema tratado com a solução exponencial fabricada por Knupp e Salari (2002), a Fig. 4.19 mostra os resultados da média da norma L1 para a variável  $u$  com CDS-2.

Figura 4.19: Média da norma L1 para a variável  $u$  com CDS-2 da solução exponencial



Ocorre uma redução no decaimento do erro numérico da variável  $u$  (representada por U na legenda da Fig. 4.19) com CDS-2 com a aplicação de um nível de CRE. A ordem efetiva equivalente das médias da norma L1 da variável  $u$  com CDS-2 da solução exponencial podem ser vistos na Fig. 4.20.

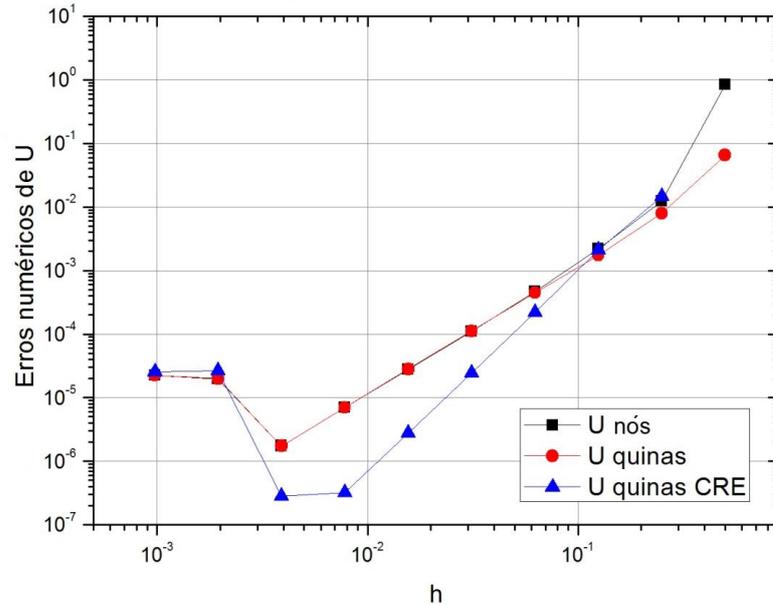
Figura 4.20: Ordem efetiva equivalente da média da norma L1 para a variável  $u$  com CDS-2



A Fig. 4.20 mostra que o primeiro nível de CRE sobe de 2 para 3 a ordem de decaimento do erro numérico da variável  $u$  com CDS-2.

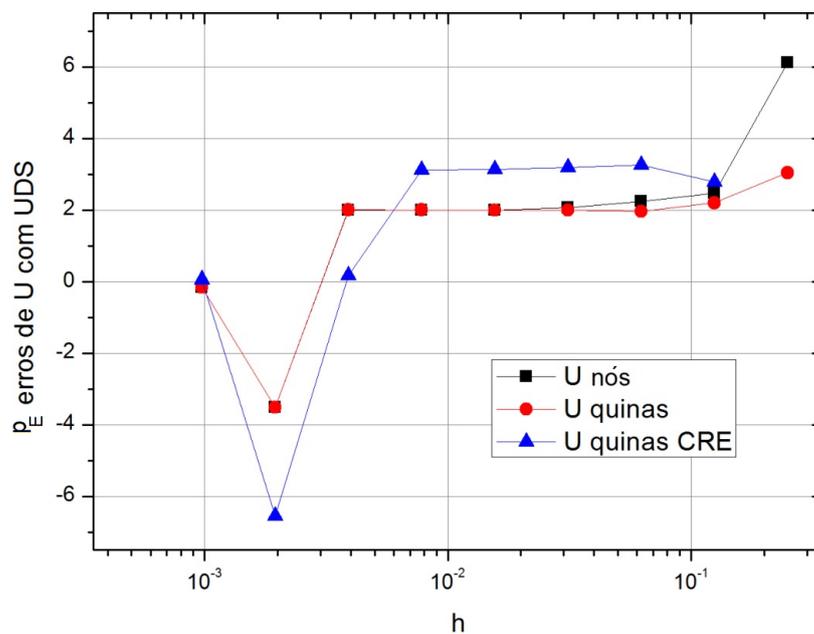
Os resultados da média da norma L1 para a variável  $v$  e  $p$  com CDS-2 podem ser vistos no apêndice B. Os resultados da média da norma L1 para a variável  $u$  com UDS-1 podem ser vistos na Fig. 4.21.

Figura 4.21: Média da norma L1 para a variável  $u$  com UDS-1 da solução exponencial



As ordens efetivas equivalentes desses erros numéricos podem ser observados na Fig. 4.22.

Figura 4.22: Ordem efetiva equivalente da média da norma L1 para a variável  $u$  com UDS-1



Os resultados mostrados na Fig. 4.22 indicam que o primeiro nível de CRE contribui para o decaimento do erro numérico, fazendo subir de 2 para 3 a ordem de decaimento do erro numérico da variável  $u$  com UDS-1. Neste problema UDS-1 conferiu ordem 2 à solução sem extrapolação e o 1º nível de CRE elevou em uma unidade a ordem do erro.

Os resultados da média da norma L1 para a variável  $v$  e  $p$  com UDS-1 podem ser vistos no apêndice B.

Os resultados obtidos nas equações bidimensionais de Navier-Stokes com a solução fabricada de Knupp e Salari (2003) quando empregado a discretização de CDS-2 e de UDS-1 a metodologia de CRE em quinas teve desempenho semelhante e abaixo do esperado. Teve pouco efeito nas soluções de  $u$  e  $v$  e nenhum nas soluções de  $p$ . Esses comportamentos podem indicar que o desempenho de CRE está também relacionado ao tipo de solução das equações. Considerando que a expressão do erro numérico é função das derivadas da solução, pode significar que características das derivadas da função solução podem influenciar no emprego das extrapolações.

## 5 RESULTADOS DAS VARIÁVEIS SECUNDÁRIAS

Testes realizados para determinação de variáveis de interesse secundárias, a partir de soluções nodais extrapoladas ou não com emprego de CRE e de MER, mostraram que há influência das diferentes extrapolações na solução de variáveis secundárias. As seções 5.1 e 5.2 mostram os resultados desses testes realizados e na seção 5.3 é mostrada a formalização matemática da ordem de acurácia de variáveis secundárias calculadas a partir de soluções nodais.

### 5.1 Temperatura Média

Foram realizados testes da temperatura média num modelo de transferência de calor cuja solução é uma função exponencial, Eq. (3.7), discretizada com esquema CDS-2. Para a Regra do Trapézio, Eq. (2.48), a Fig. 4.1 exibe o gráfico com  $E_m$  versus  $h$  versus  $m$  com até 19 níveis de MER.

Figura 5.1:  $E_h$  e  $E_m$  versus  $h$  para a Regra do Trapézio no caso Poisson 1D exponencial

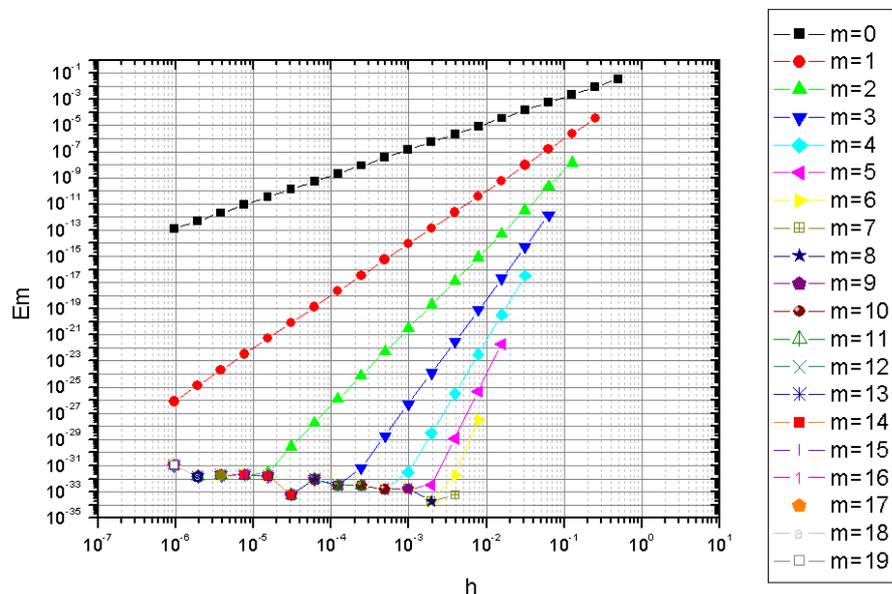
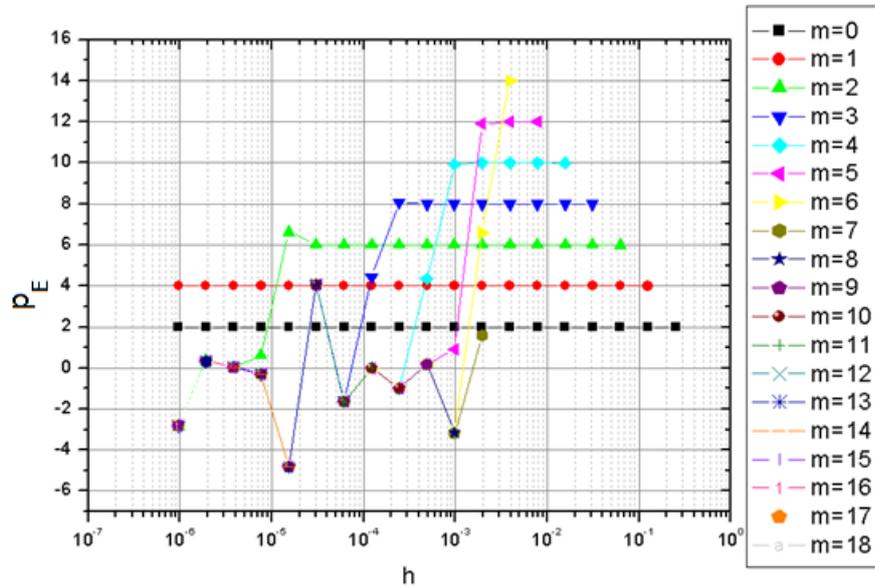


Figura 5.1:  $E_h$  e  $E_m$  versus  $h$  para a Regra do Trapézio no caso Poisson 1D exponencial

Na Fig. 5.1 são mostrados 19 níveis de MER. As soluções representadas por  $m = 0$  são sem extrapolação em cada uma das 20 malhas. O decaimento do módulo do erro ocorre gradualmente até o 8º nível de MER e então erros de arredondamento permeiam as soluções. No 8º nível de extrapolação ( $m = 8$ ) o erro é inferior a  $10^{-34}$ .

A Fig. 5.2 mostra as ordens efetivas equivalentes *versus* o tamanho de malha em cada um dos 19 níveis de MER, com  $p_E$  *versus*  $h$  *versus*  $m$ , para a Regra do Trapézio.

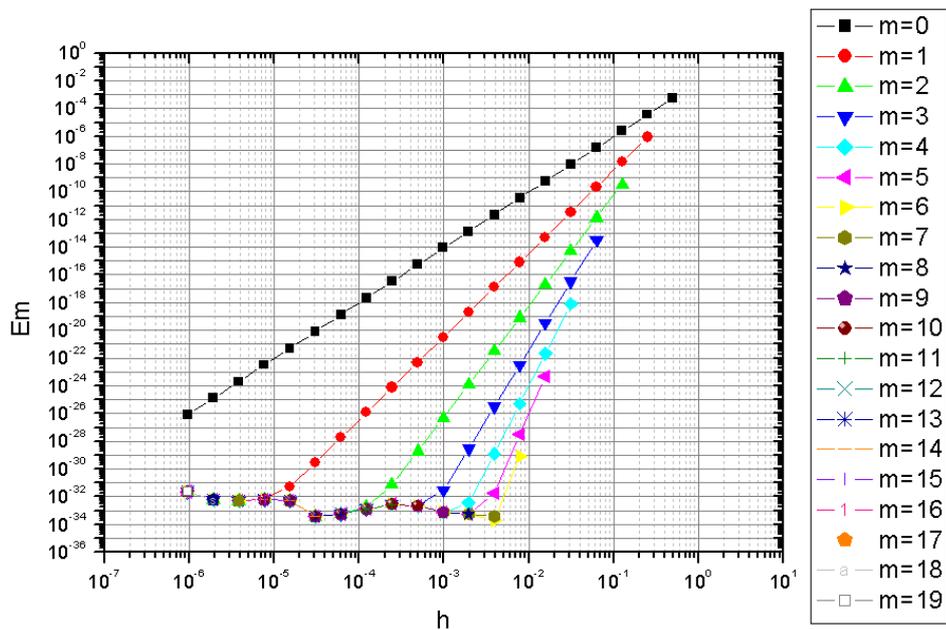
Figura 5.2:  $p_E$  *versus*  $h$  *versus*  $m$  para a Regra do Trapézio no caso exponencial



De Marchi e Germer (2013) tem-se que a ordem de acurácia da Regra do Trapézio é 2, chegando a 4 com uma extrapolação e a 6 com duas. Na Fig. 5.2 com 6 níveis de MER obteve-se ordem 14.

Em *versus*  $h$  *versus*  $m$ , para a Regra de Simpson, Eq. (2.49), é mostrado na Fig. 5.3.

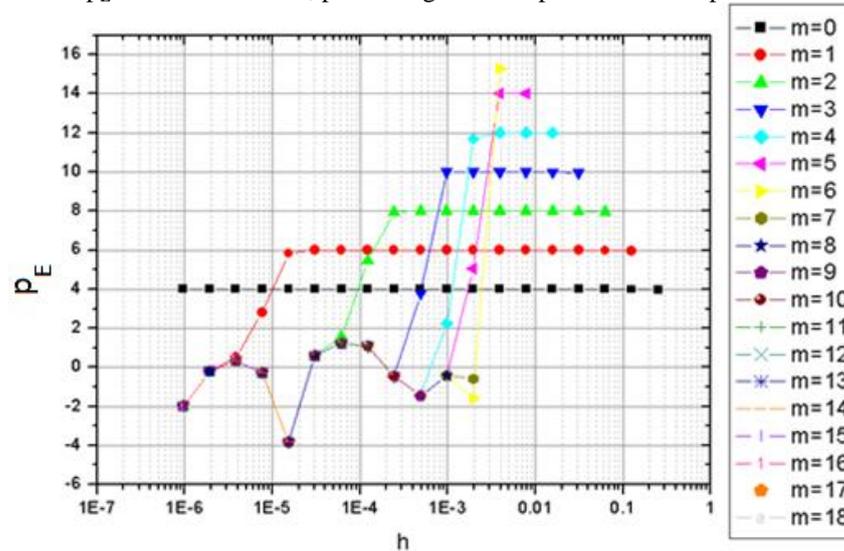
Figura 5.3: Em *versus*  $h$  *versus*  $m$  para a Regra de Simpson no caso exponencial



Na Fig. 5.3 são mostrados 19 níveis de MER. As soluções representadas por  $m = 0$  são sem extrapolação em cada uma das 20 malhas. O decaimento do módulo do erro ocorre gradualmente até o 8º nível de MER e então erros de arredondamento permeiam as soluções. No 7º nível de extrapolação ( $m = 7$ ) o erro é inferior a  $10^{-33}$ .

O gráfico com  $p_E$  versus  $h$  versus  $m$ , para a Regra de Simpson é exibido na Fig. 5.4.

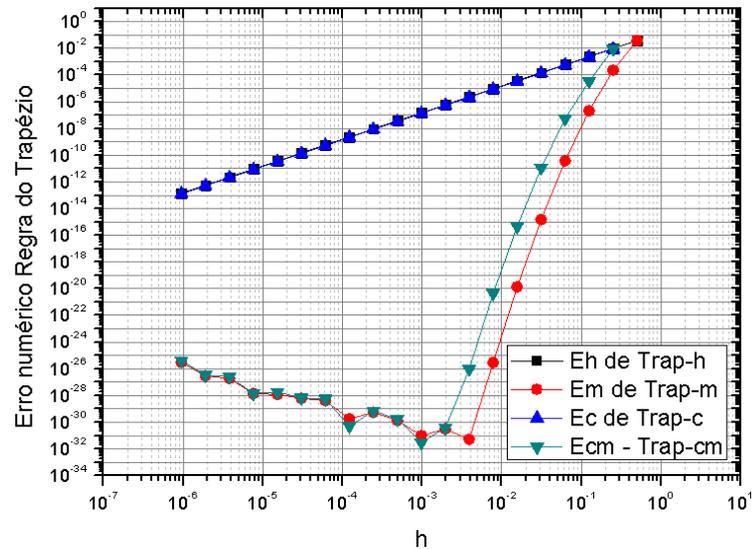
Figura 5.4:  $p_E$  versus  $h$  versus  $m$ , para a Regra de Simpson no caso exponencial



De Marchi e Germer (2013) tem-se que a ordem de acurácia da Regra de Simpson é 4, chegando a 6 com uma extrapolação e a 8 com duas. Na Fig. 5.4 é mostrado que com 5 níveis de MER chegou-se à ordem 14.

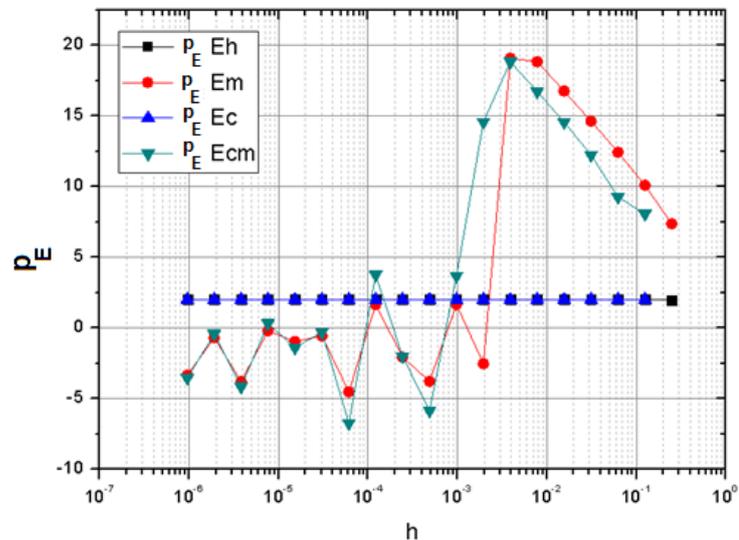
Na Fig. 5.5 é possível observar como se comportam graficamente o erro numérico da temperatura média em Poisson 1D com termo fonte exponencial com a Regra do Trapézio. São apresentados quatro casos: Erro com as soluções originais ( $E_h$  de Trap-h), com emprego de MER nas soluções originais ( $E_m$  de Trap-m), com emprego de CRE nas soluções originais ( $E_c$  de Trap-c) e com emprego de MER nas soluções com CRE ( $E_{cm}$  de Trap-cm). Os valores dos erros numéricos da temperatura média a partir das soluções originais não se alteram com emprego de CRE e as curvas ficam sobrepostas. Tanto as soluções originais quanto as soluções com CRE tem o erro reduzido com emprego de MER, ambos chegando a menos de  $10^{-30}$  no 8º nível de MER. Esse comportamento indica que o emprego de MER é mais eficiente para redução do erro de discretização do que o emprego de CRE.

Figura 5.5: Eh, Em, Ec e Ecm *versus* h para a Regra do Trapézio no caso exponencial



A ordem efetiva equivalente de cada curva Eh, Em, Ec e Ecm da Fig. 5.5 é mostrada na Fig. 5.6.

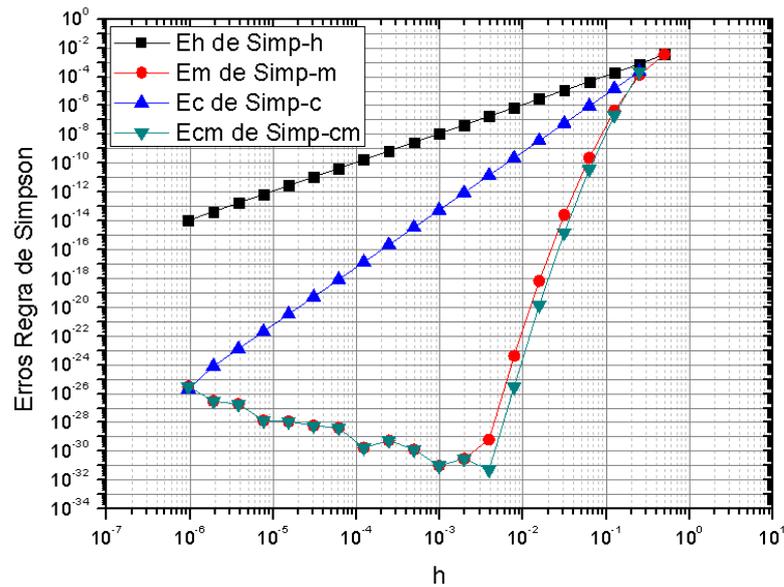
Figura 5.6: ordem efetiva equivalente de Eh, Em, Ec e Ecm da Regra do Trapézio no caso exponencial



As ordens efetivas equivalentes das soluções originais e das soluções com CRE são iguais a 2. Com emprego de MER, tanto nas soluções originais quanto nas soluções com CRE, no 6º nível de MER chega-se à ordem 18.

Um gráfico com as curvas de Eh, Em, Ec e Ecm *versus* h para a Regra de Simpson é mostrado na Fig. 5.7. São apresentados quatro casos: Erro com as soluções originais (Eh de Simp-h), com emprego de MER nas soluções originais (Em de Simp-m), com emprego de CRE nas soluções originais (Ec de Simp-c) e com emprego de MER nas soluções com CRE (Ecm de Simp-cm).

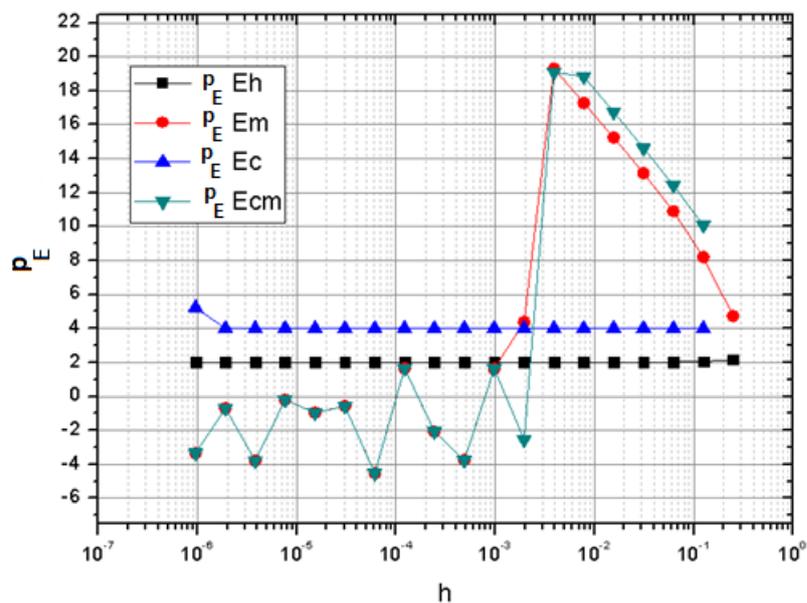
Figura 5.7: Eh, Em, Ec e Ecm versus h para a Regra de Simpson no caso exponencial



Os valores dos erros numéricos da temperatura média a partir das soluções originais são reduzidos de  $10^{-14}$  para  $10^{-26}$  com o emprego de CRE. Tanto as soluções originais quanto as soluções com CRE tem o erro reduzido com emprego de MER, chegando a menos de  $10^{-31}$  no sétimo nível de MER sobre as soluções com CRE e a menos de  $10^{-31}$  no 10º nível MER sobre as soluções originais. Os demais níveis de MER são influenciados por erros de arredondamento.

A ordem efetiva equivalente de cada curva Eh, Em, Ec e Ecm da Fig. 5.7 é mostrada na Fig. 5.8.

Figura 5.8: ordem efetiva equivalente de Eh, Em, Ec e Ecm da Regra de Simpson no caso exponencial



A ordem efetiva equivalente da temperatura média calculada sobre as soluções originais,  $p_E Eh$ , é de 2. Com emprego de CRE,  $p_E Ec$ , foi a 4. O emprego de MER tanto nas soluções originais quanto nas soluções com CRE eleva a ordem efetiva chegando a 19 no sétimo nível de MER sobre as soluções originais,  $p_E Em$ , e no sexto nível de MER sobre as soluções com CRE,  $p_E Ecm$ .

Com base nos resultados mostrados nas Fig. 5.6 e 5.8, e em outros resultados disponíveis no Apêndice C deste trabalho, observa-se que a ordem de acurácia da solução das variáveis secundárias, após emprego de CRE depende das ordens de acurácia do esquema de discretização utilizado na solução e da ordem do método empregado na determinação de variáveis secundárias.

Como foi utilizado CDS-2, esquema de ordem 2, na solução da Eq. (3.7), as soluções originais são de ordem 2. Nota-se que para a Regra do Trapézio que também é de ordem 2, o emprego de CRE não conferiu nenhum efeito, manteve-se 2 tanto sobre as soluções originais quanto após emprego de CRE. Para a Regra de Simpson que é de ordem 4, quando calculada sobre as soluções originais mantém a ordem 2 e com o emprego de CRE atinge a ordem 4.

Os experimentos numéricos de temperatura média que foram exibidos nessa seção 4 permitem discutir como a ordem de acurácia desta variável secundária pode ser impactada com o emprego de extrapolações. É possível perceber que a ordem de acurácia teórica dos métodos, 2 para a Regra do Trapézio e 4 para a Regra de Simpson, são obtidos, a partir de soluções nodais, quando as soluções nodais tem ordem igual ou superior a estas. Isto é, para obter ordem 2 com a Regra do Trapézio, só é possível se as soluções nodais forem de ordem igual ou maior do que 2. Analogamente, só é possível obter ordem 4 com a Regra de Simpson, se as soluções nodais forem de ordem igual ou maior do que 4.

Os ganhos de ordem viabilizados pelo emprego de CRE permitem, por exemplo, que se atinja ordem 2 com o Trapézio após 1 nível de CRE numa solução obtida por UDS-1. Já Simpson só conseguiria atingir ordem 4 diretamente num problema de CDS-4 compacto ou esquema equivalente ou de ordem superior. Contudo, esquemas de alta ordem utilizam mais pontos e, como a prática numérica sugere, incorrem em mais oscilações numéricas e dificuldades nos contornos, o emprego de CRE é alternativa eficiente para melhorar a acurácia de soluções nodais para posterior emprego de métodos com maior ordem acurácia em variáveis secundárias. Em contrapartida, emprego de MER diretamente nas soluções de variáveis secundárias promove redução nos erros e aumento na ordem de acurácia. Mesmo que em cada caso essa melhora aconteça até um determinado nível de extrapolação para então passar a se contaminar de erros de arredondamento e perder a eficácia.

Todos os efeitos expostos graficamente nesta seção corroboram para a eficácia das extrapolações como alternativa viável para a redução do erro numérico de variáveis secundárias e aumento da ordem de acurácia dessas soluções. A técnica de CRE é eficiente para aumento da ordem de acurácia de soluções nodais. Para se atingir a ordem teórica de um método a partir das soluções nodais, CRE contribui para a elevação da acurácia nodal e obtenção da ordem esperada. Contudo, MER consegue atuar diretamente nos resultados da variável secundária como é exemplificado na Fig. 5.10 para a temperatura em  $x = 1/2$ .

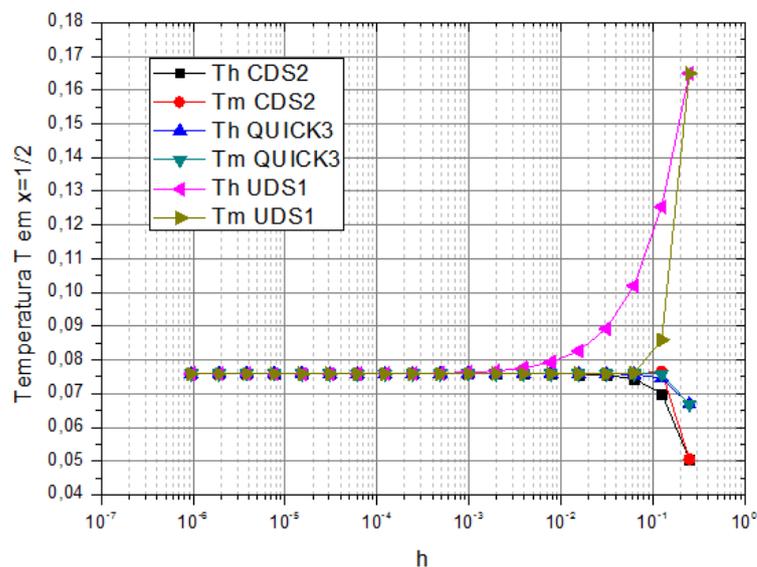
Diante do exposto, MER é técnica mais eficaz do que CRE para elevação da ordem de acurácia de variáveis secundárias. A partir das soluções nodais, como demanda CRE, a ordem de acurácia de soluções nodais resulta na menor ordem entre a ordem das soluções e a do método empregado, mas MER é capaz de elevar diretamente a ordem da solução da variável secundária até atingir os erros de arredondamento do computador.

## 5.2 TEMPERATURA EM $x=1/2$

O modelo de equação 1D de advecção-difusão de calor, Eq. (3.14), foi estudada por Marchi e Germer (2013) com os esquema de discretização CDS-2, QUICK e UDS-1 para termos advectivos, CDS-2, CDS-4 e CDS-2 para termos difusivos. Os resultados foram reproduzidos nesse modelo com volumes finitos e precisão quádrupla em 20 malhas com razão de refino 2 com  $N = 2, 4, 8, \dots, 1048576$  volumes para determinar a temperatura em  $x=1/2$  cuja solução analítica é  $7.58581800212435511933061766462478E-02$ .

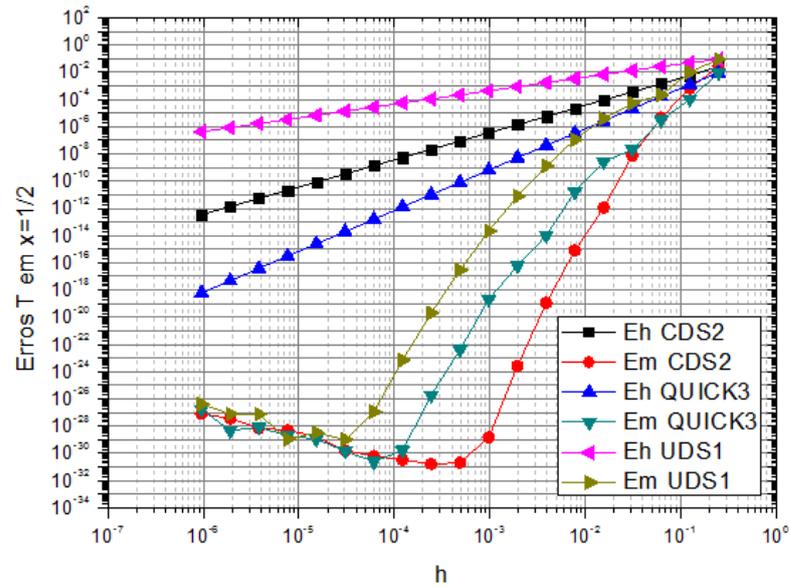
Os resultados reproduzidos com cada tipo de discretização são mostrados na Fig 5.9.

Figura 5.9: Temperatura em  $x=1/2$  com diferentes esquemas de discretização



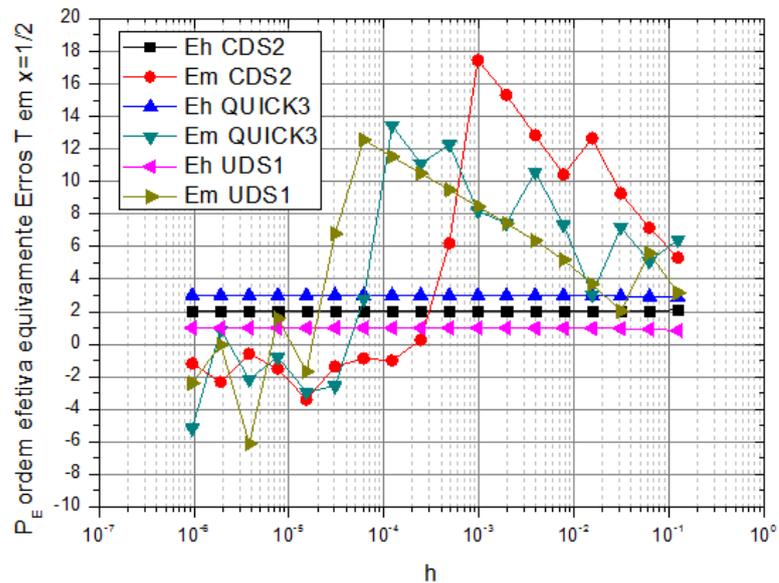
Os erros numéricos de cada esquema de discretização para a determinação da temperatura em  $x=1/2$  são reproduzidos na Fig. 5.10.

Figura 5.10: Erros numéricos da temperatura em  $x=1/2$  com diferentes esquemas de discretização



As ordens efetivas equivalentes dos erros numéricos da Fig. 5.10 são mostrados na Fig. 5.11.

Figura 5.11: ordem efetiva equivalente dos erros numéricos da temperatura em  $x=1/2$  com diferentes esquemas de discretização

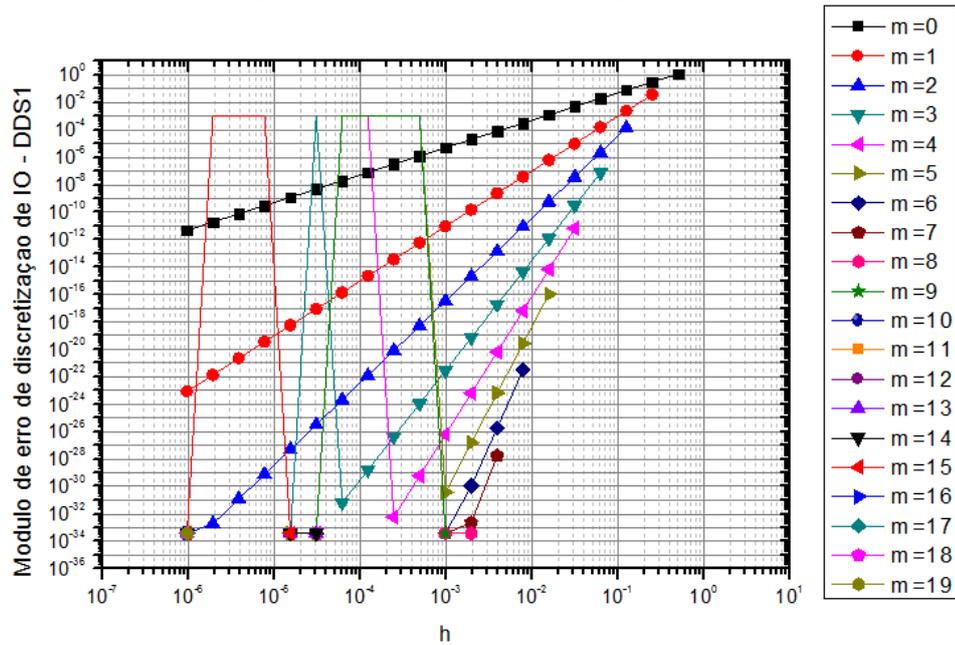


É possível na Fig. 5.11 que MER apresenta um melhor desempenho, com ordens efetivas crescentes, quando aplicado sobre os resultados de UDS-1. Fato diferente ocorre quando aplicado sobre CDS-2 ou QUICK-3. Nesse sentido, os efeitos de MER dependem diretamente dos esquemas de aproximação empregados. Esse fato corrobora com as observações de que o desempenho de CRE depende do esquema de aproximação empregado. Inclusive pelos resultados que permitem até dois níveis de CRE com esquema UDS-1 e apenas 1 nível com CDS-2, como mostrado na seção 4.1.2 e 4.1.3.

### 5.3 INCLINAÇÃO NOS CONTORNOS

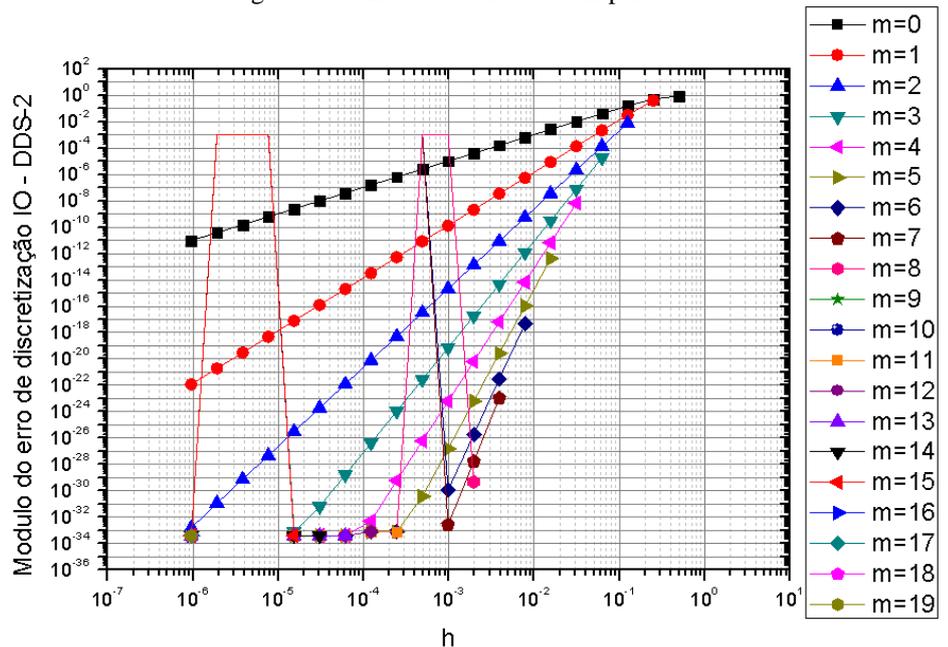
Para a função solução da Eq. (3.2) discretizada com CDS-2, os resultados obtidos com experimentos numéricos para a inclinação em  $x = 0$  com DDS-1 (IO1) são mostrados nas Fig. 5.12.

Figura 5.12: Em *versus*  $h$  *versus*  $m$  para IO1



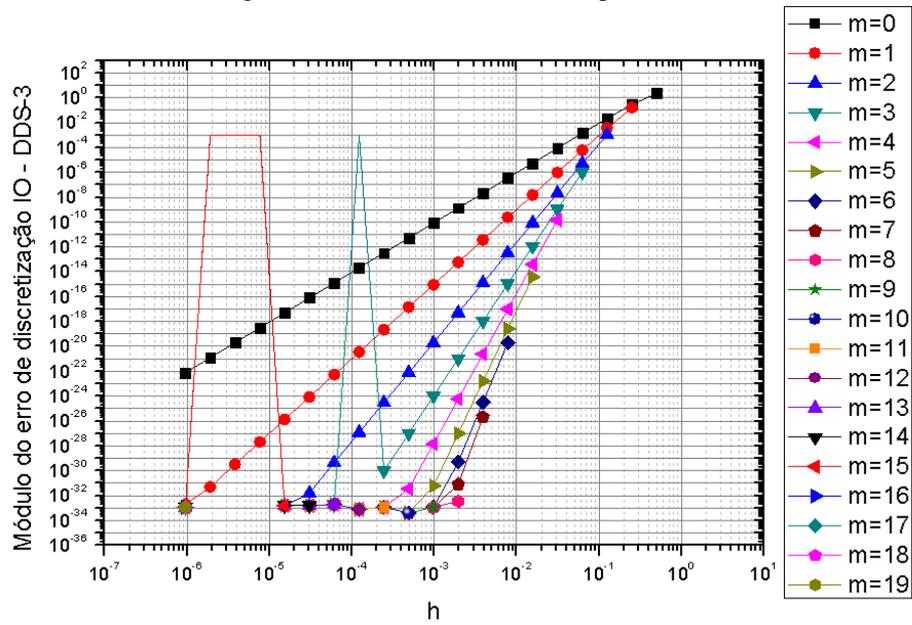
O gráfico com Em *versus*  $h$  *versus*  $m$  para IO com DDS-2 é mostrado na Fig. 5.13.

Figura 5.13: Em *versus*  $h$  *versus*  $m$  para IO2



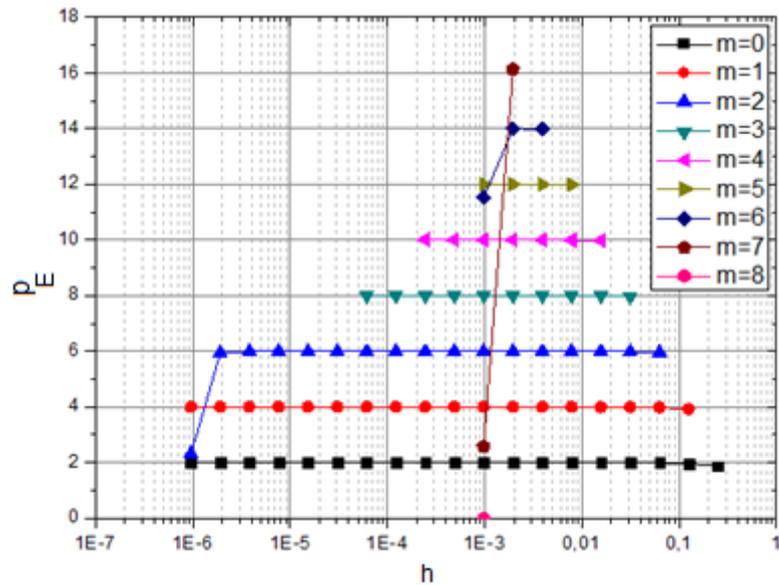
O gráfico com  $E_m$  versus  $h$  versus  $m$  para IO3 é mostrado na Fig. 5.14.

Figura 5.14:  $E_m$  versus  $h$  versus  $m$  para IO3

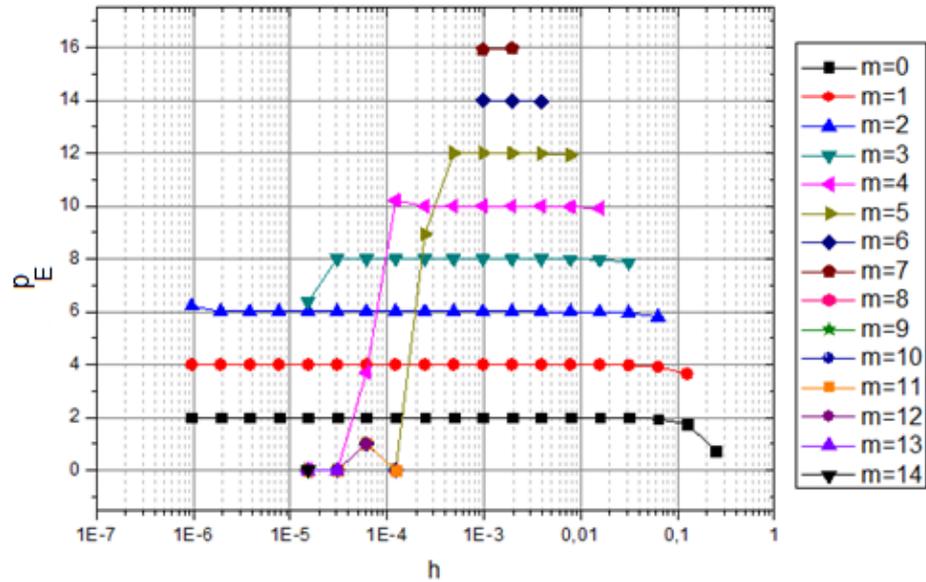


A Fig. 5.15 apresenta o gráfico com  $p_E$  versus  $h$  versus  $m$  para a IO1.

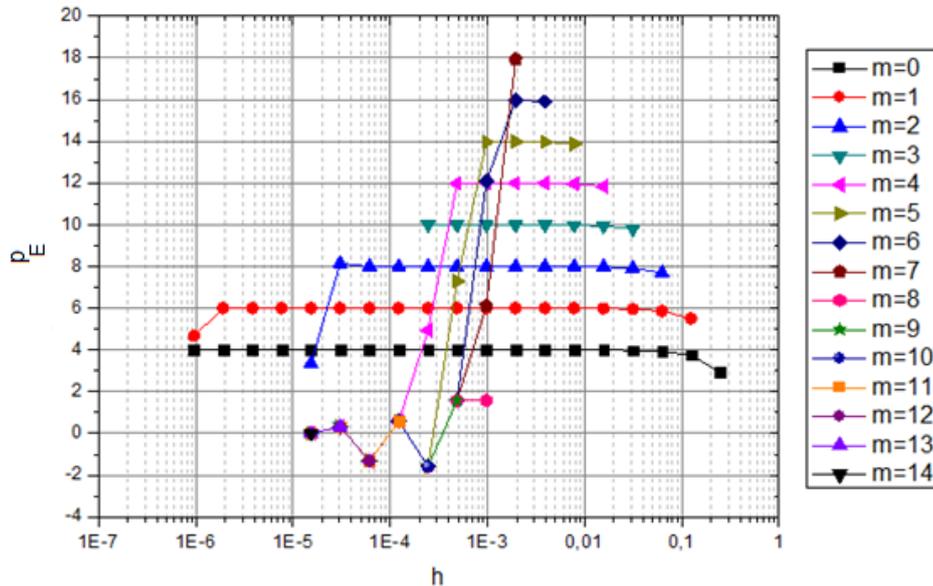
Figura 5.15:  $p_E$  versus  $h$  versus  $m$  para a IO1



A Fig. 5.16 apresenta o gráfico com  $p_E$  versus  $h$  versus  $m$  para a IO2.

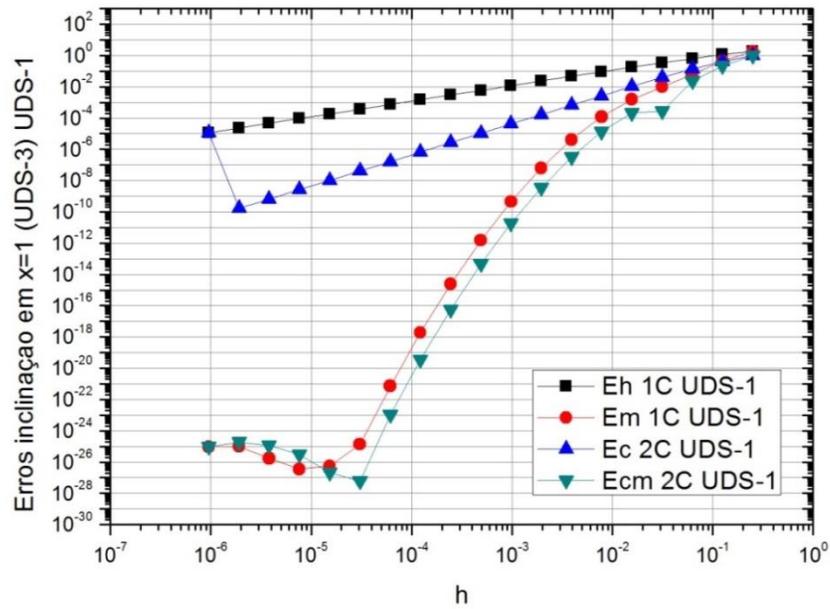
Figura 5.16:  $p_E$  versus  $h$  versus  $m$  para a IO2

A Fig. 5.17 apresenta o gráfico com  $p_E$  versus  $h$  versus  $m$  para a IO3.

Figura 5.17:  $p_E$  versus  $h$  versus  $m$  para a IO3

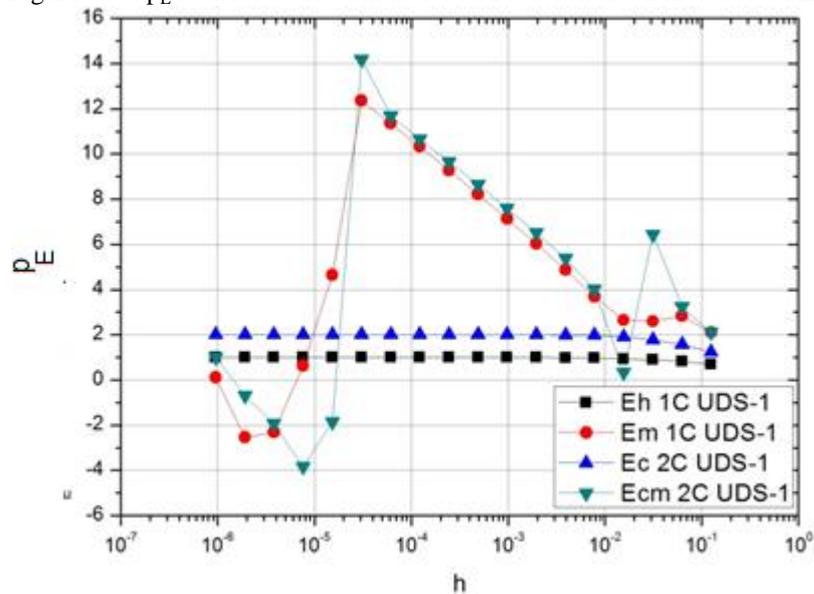
Experimentos numéricos na inclinação em  $x = 1$ , contorno direito de uma malha unitária, na equação 1D de advecção-difusão de calor, Eq. (3.14), discretizada com UDS-3/UDS-1 com 1 e 2 níveis de CRE são mostrados na Fig. 5.18, demais resultados para a mesma variável são mostrados no apêndice D.

Figura 5.18: Erros de IO3 em  $x=1$  de UDS-1 com 1 e 2 níveis de CRE



A ordem efetiva equivalente erros de IO3 em  $x=1$  de UDS-1 com 1 e 2 níveis de CRE é mostrada na Fig. 5.19.

Figura 5.19:  $p_E$  de erros de IO3 em  $x=1$  de UDS-1 com 1 e 2 níveis de CRE



Os experimentos numéricos realizados com a variável secundária que determina a inclinação nos contornos,  $x=0$  e  $x=1$  de malhas unitárias, mostrados nesta seção bem como outros resultados disponíveis no apêndice D, vão ao encontro do que foi observado no caso da temperatura média.

As ordens teóricas dos métodos de variáveis secundárias só conseguem ser alcançados, a partir de soluções nodais, se estas tiverem ordem igual ou superior ao das primeiras. Nesse sentido, para a determinação de variáveis de interesse secundárias a partir de soluções de baixa ordem, CRE se apresenta como uma alternativa eficiente e viável para aumentar a acurácia das soluções nodais a fim de permitir que o método de determinação de variáveis secundárias utilizado, funcione com menores erros numéricos.

Percebe-se claramente que uma busca por soluções nodais muito acuradas pode se tornar um desperdício de esforço computacional se as análises seguintes utilizarem métodos de baixa ordem, pois soluções nodais mais acuradas que os métodos de variáveis secundárias não garantem melhores resultados neles. Assim, pode até ser mais vantajoso programar esquemas menos acurados nas soluções nodais, reduzindo o esforço computacional, e aplicar CRE para estudo de propriedades físicas de interesse conforme necessidade. Esse trabalho de pós-processamento é menos custoso, na grande maioria das vezes.

Tratando-se de redução de esforço computacional, MER se mostra uma técnica mais eficiente e mais eficaz do que CRE para reduzir o erro de variáveis secundárias. Tem-se que CRE é calculada em todo o campo de cada uma das malhas em estudo para então serem determinadas as variáveis de interesse secundárias. Por sua vez, MER é empregada diretamente nas soluções de uma variável secundária calculada sobre malhas com soluções originais sem extrapolação, podendo resultar numa maior e mais rápida redução de erros.

Com este trabalho não é descartado que CRE possa atingir resultados tão bons quanto de MER para as variáveis secundárias. A técnica de CRE, porém, precisa de mais desenvolvimentos e estratégias numéricas para garantir melhor desempenho e principalmente a possibilidade de mais níveis de extrapolação dos que os conseguidos até este trabalho.

#### 5.4 FLUXO DE MASSA

No modelo que utiliza as equações de Navier-Stokes e a solução fabricada de Shih *et. al* (1989) foram realizados testes com a variável secundária fluxo de massa em  $y = 1/2$ . O problema foi inicialmente resolvido usando os esquemas UDS-1 e CDS-2, foram realizadas simulações para análise do impacto de CRE, MER e CRE-MER na variável. Por se tratar de uma integração foram empregados os métodos Regra do Trapézio e Regra de Simpson.

Alguns dos resultados das simulações com os erros de discretização e as ordens efetivas equivalentes obtidas nos gráficos das Fig. 5.20 e 5.21 e os demais podem ser vistos no apêndice E. Os erros do fluxo de massa em UDS-1 com 0, 1 e 2 níveis de CRE e Regra de

Simpson são apresentados na Fig. 5.20 e as ordens efetivas equivalentes correspondentes na Fig 5.21.

Figura 5.20: Erros do fluxo de massa em UDS-1 com 0, 1 e 2 níveis de CRE e Regra de Simpson

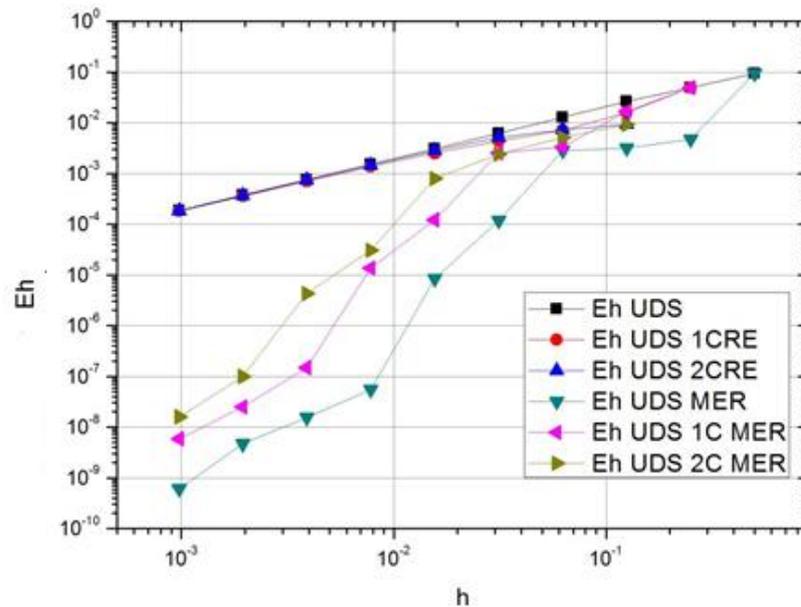
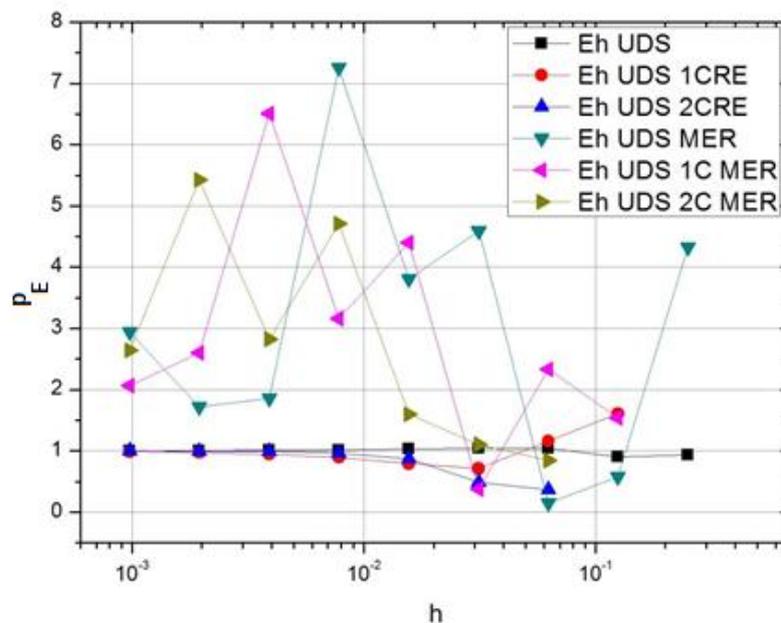


Figura 5.21:  $p_E$  dos erros do fluxo de massa em UDS-1 com 0, 1 e 2 níveis de CRE e Regra de Simpson



Nesse problema é possível observar na Fig. 5.20 que as soluções sem extrapolação, com 1 e com 2 níveis de CRE são iguais e as curvas ficam sobrepostas. As curvas que apresentam resultados com MER têm redução no erro, porém o comportamento do decaimento não é sinuoso. Esse comportamento irregular de MER fica evidente na Fig. 5.21

em que as ordens efetivas equivalentes das curvas com MER são superiores às sem MER, porém o comportamento é oscilatório, sem apresentar algum padrão característico.

As soluções com CRE mantiveram o mesmo decaimento do erro que as soluções originais. É possível que com um estudo mais aprofundado do comportamento do modelo matemático envolvido possa ser aplicado CRE com alguma estratégia de maior sucesso. Como com o emprego de MER houve redução nos módulos dos erros, ainda que sem um padrão característico em suas ordens efetivas equivalentes, novamente MER se destaca como ferramenta útil para redução de erros de discretização.

### 5.5 FORÇA DE ARRASTO VISCOSO

No modelo que utiliza as equações de Navier-Stokes e a solução fabricada de Shih *et. al* (1989) foram realizados testes com a variável secundária força de arrasto viscoso. O problema foi inicialmente resolvido usando os esquemas UDS-1 e CDS-2. Foram realizadas simulações para análise do impacto de CRE, MER e CRE-MER na variável. Por se tratar de uma derivação e posterior integração foram empregados os métodos DDS-1, DDS2 e DDS-3 combinados com a Regra do Trapézio e a Regra de Simpson. Alguns resultados seguem nas Fig. 5.22 e 5.23 e os demais podem ser vistos no apêndice F. Os resultados de CDS-2 dos erros de Simpson e DDS-3 são mostrados na Fig. 5.22 e as ordens efetivas equivalentes obtidas na Fig. 5.23. Demais resultados se encontram no apêndice E.

Figura 5.22: Erros de F em CDS-2 com Regra de Simpson e DDS-3

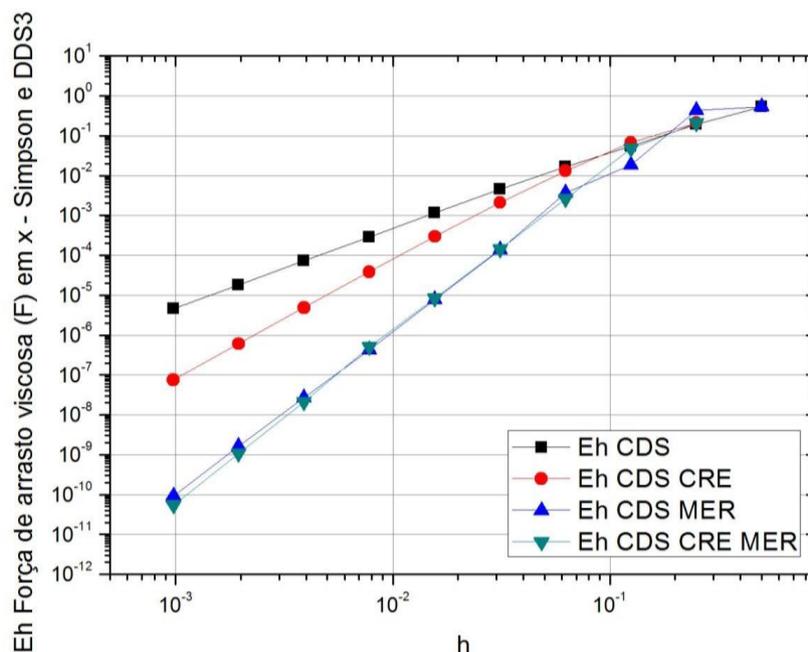
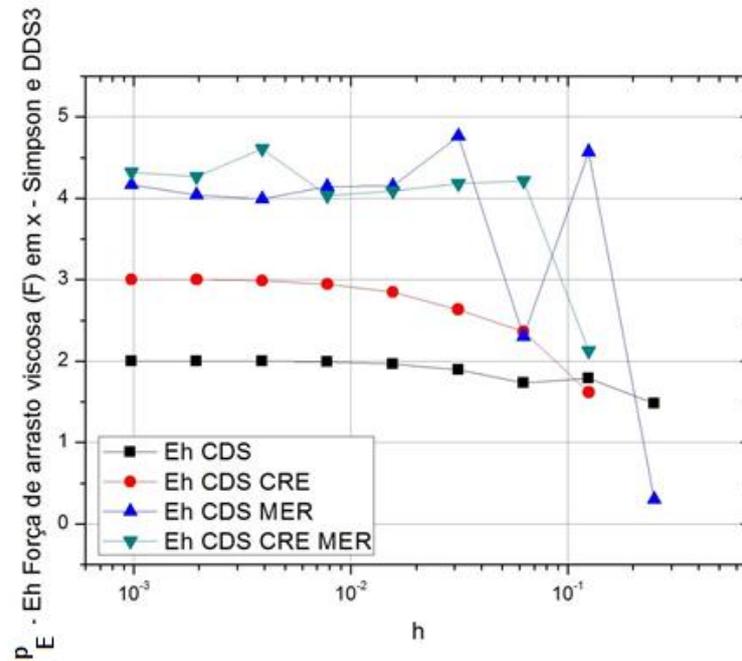


Figura 5.23:  $p_E$  dos erros de F em CDS-2 com Regra de Simpson e DDS-3

Pelos resultados mostrados na Fig. 5.22, nota-se que CRE contribuiu para a redução do erro numérico da força de arrasto viscoso. Esse fato se confirma na Fig. 5.23, onde a ordem numérica das soluções originais é de 2 e com emprego de CRE é de 3. É o emprego de MER que confere maior decaimento ao erro numérico na Fig. 5.22, sobrepondo-se as curvas do emprego de MER sobre as soluções originais e sobre as soluções com CRE. Com o emprego de MER, a Fig. 5.23 mostra uma tendência à ordem 4 de acurácia.

Observando os resultados, percebe-se que tanto MER quanto CRE em todos os testes em que foram empregados, reduzem o erro numérico ou mantêm como o original. Não houve experimento numérico em que CRE viesse a piorar o erro numérico. O método demonstra potencial para a redução do erro de discretização, porém algumas condições podem indicar necessidade de aprofundamento e aprimoramento da técnica. O tipo de discretização empregada nas soluções originais e o tipo de solução do modelo podem determinar a eficiência de CRE. Para viabilizar seu emprego em problemas resolvidos por Volumes Finitos foi realizada a transferência da solução dos volumes para as faces via interpolação obtendo-se resultados compatíveis com os disponíveis na literatura em Roache e Knupp (1993) e Giacomini (2013). Esse fato reforça as motivações para que se busque o aprimoramento das técnicas de MER e CRE e o desenvolvimento de estratégias para a aplicação a diferentes problemas de CFD e outras áreas.

## 5.6 ORDEM DE ACURÁCIA DE VARIÁVEIS SECUNDÁRIAS A PARTIR DE SOLUÇÕES NODAIS

Do trabalho de Marchi e Silva (2005) a ordem assintótica do erro de discretização é menor entre todas as aproximações realizadas. De Marchi e Germer (2013) se sabe que para as variáveis secundárias, a melhor ordem de acurácia depende da combinação dos valores das ordens da variável primária e dos valores das ordens das aproximações numéricas adicionais que são realizadas para obter variável secundária. Esse fato ficou comprovado neste trabalho mesmo após emprego de CRE nas soluções. Nesse sentido é proposto neste trabalho o teorema 1 para formalizar matematicamente o comportamento das ordens de acurácia de soluções de variáveis secundárias.

Teorema 1: “A ordem de acurácia da solução de uma variável secundária, calculada a partir de soluções nodais, é igual à menor ordem de acurácia das aproximações usadas”.

Prova: Sejam  $A$  uma variável primária e  $B$  uma variável secundária. Então,

$$A = \phi + O(n_1)$$

onde  $\phi$  é a solução numérica de  $A$  e  $O(n_1)$  é a ordem de acurácia da solução numérica nodal e

$$B = \psi(A) + O(n_2)$$

sendo  $O(n_2)$  ordem de acurácia do método utilizado para determinação da variável secundária  $B$ . Fazendo

$$B = \psi[\phi + O(n_1)] + O(n_2)$$

e expandindo em série de Taylor obtém-se

$$B = \psi(\phi) + \frac{1}{2}\psi'(\phi).O(n_1) + \frac{1}{6}\psi''(\phi).O(n_1)^2 + \frac{1}{24}\psi'''(\phi).O(n_1)^3 + \dots + O(n_2)$$

A ordem assintótica é a ordem do termo de menor expoente na expressão da solução com as ordens verdadeiras. Dessa forma têm-se três casos possíveis:

Caso 1

Se  $n_1 > n_2$ , então  $B = \psi(\phi) + O(n_2)$

Caso 2

Se  $n_1 < n_2$ , então  $B = \psi(\phi) + O(n_1)$

Caso 3

Se  $n_1 = n_2$ , então  $B = \psi(\phi) + O(n_1) = \psi(\phi) + O(n_2)$

## 6 CONCLUSÃO

### 6.1 CONCLUSÃO SOBRE OS RESULTADOS DO TRABALHO

Os resultados dos experimentos numéricos apresentados neste trabalho permitem afirmar que é possível transferir resultados de volumes de controle para as faces (caso 1D) ou quinas (caso 2D) dos volumes por meio de interpolação e viabilizar o emprego de CRE, sem prejuízo à acurácia das soluções originais, e estendendo assim o emprego de CRE a problemas de Volumes Finitos.

O emprego de CRE realizado em faces e quinas de Volumes Finitos neste trabalho gerou resultados de erro de discretização equivalentes aos obtidos por Roache e Knupp (1993) e Giacomini (2013) em Diferenças Finitas.

Nos casos em que se empregou CRE com o propósito de analisar variáveis de interesse dos problemas, as chamadas variáveis secundárias, a extrapolação se mostrou uma alternativa eficiente e viável para aumentar a acurácia das soluções nodais a fim de atingir a ordem teórica dos métodos de variáveis secundárias. Ficou estabelecido, via demonstração matemática do resultado, que a ordem de acurácia da solução de uma variável secundária, calculada a partir de soluções nodais, é igual à menor ordem de acurácia das aproximações usadas. Dessa forma ficou claro que uma busca por soluções nodais muito acuradas exige um esforço computacional que pode ser demasiado se as análises seguintes utilizarem métodos de ordem menor que as soluções nodais, pois soluções nodais mais acuradas que os métodos de variáveis secundárias não geram melhores resultados neles. Nesse sentido, pode ser mais vantajoso programar esquemas menos acurados nas soluções nodais, reduzindo o esforço computacional, e aplicar CRE para estudo de propriedades físicas de interesse conforme necessidade, pois o pós-processamento é menos custoso na grande maioria das vezes. Entretanto, MER ao atuar diretamente nas soluções das variáveis de interesse é capaz de atingir ordens de acurácia maiores do que com CRE.

Há mais aprofundamentos a serem feitos no emprego das extrapolações em problemas de CFD, contudo, tanto a literatura quanto os casos estudados neste trabalho confirmam o potencial de MER e CRE na redução do erro numérico. Ambos atuam no aumento da acurácia de soluções colaborando para um modelo numérico com esquemas que utilizem menos pontos e confira melhores resultados em malhas mais grossas. Essa possibilidade merece especial atenção, pois na área de CFD muitos problemas exigem um refino de malha muito grande para serem mais bem modelados numericamente. Além de que o que se espera são problemas resolvidos com a maior acurácia possível, porque um somatório de “pequenos” erros pode

comprometer todo um projeto. Por isso, a vertente numérica que busca reduzir erros de soluções, aumentando o decaimento do erro numérico, estudando sistematicamente as ordens de acurácia, deve ser incansável no contexto de CFD.

## 6.2 CONTRIBUIÇÕES PARA O ESTADO DA ARTE

1. Desenvolvimento e testes de uma metodologia para uso de CRE em Volumes Finitos;
2. Análise do efeito de CRE em variáveis secundárias;
3. Redução do erro de discretização de variáveis secundárias calculadas com base em soluções nodais com CRE em comparação com MER;
4. Formalização matemática das evidências sobre a ordem de acurácia de variáveis secundárias a partir de soluções nodais.

## 6.3 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

- Emprego de CRE em problemas de CFD de fluidos compressíveis;
- Adaptações em CRE para aumento dos níveis de extrapolação;
- Emprego de MER e CRE para redução do erro de iteração;
- Aprofundamento das análises dos efeitos de CRE em diferentes esquemas de aproximação;
- Aprofundamento matemático dos mecanismos das extrapolações.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AIAA. **Guide for the Verification and Validation of Computational Fluid Dynamics Simulations**. AIAA G-077-1998. Reston, 1998.

ANUNCIACÃO, M. A. M. de. Redução de erro de iteração e aceleração do método *Multigrid* com o uso de extrapoladores. 2013. 103f. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná.

ASHRAF, M., SYED, K. S., KAMAL, M. A.. Numerical simulation of flow of micropolar fluids in a channel with a porous wall. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 66, p. 906-918, 2011.

ASME. **Standard for Verification and Validation in Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer**. ASME V&V 20-2009. New York: American Society of Mechanical Engineers, 2009.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D., **Numerical Analysis**, 8<sup>a</sup> ed., Brooks/Cole Publishing Company, 2008.

BURG, C., ERWIN, T. Application of Richardson extrapolation to the numerical solution of partial differential equations. **Numerical Methods for Partial Differential Equations**, v. 25, p. 810-832, 2009.

CASTIGLIONE, T., STERN, F., BOVA, S., KANDASAMY, M. Numerical investigation of the seakeeping behavior of a catamaran advancing in regular head waves. **Ocean Engineering**, v.38, p. 1806-1822, 2011.

CHANG, C. C., LIN, J. B., TSAI, W. C., WANG, Y. H., Using Richardson extrapolation techniques to price American options with alternative stochastic processes. **Review of Quantitative Finance and Accounting**, v. 37, p. 477 - 507, 2011.

ERTUK, E., CORKE, T. C., GOKÇOL, C. Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 48, p. 747 - 774, 2005.

FARAGÓ, I., HAVASI, A. ZLATEV, Z. The convergence of diagonally implicit Runge-Kutta methods combined with Richardson extrapolation. **Computers and Mathematics with Applications**, n. 65, p. 395 - 401, 2013.

FENG X., LI, Z., Simplified immersed interface methods for elliptic interface problems with straight interfaces. **Numerical Methods for Partial Differential Equations**, v. 28, p. 189 - 203, 2010

FERZIGER, J. H.; PERIC, M. **Computational Methods for Fluid Dynamics**. 2<sup>a</sup> Ed, Berlin: Springer, 1999.

FLETCHER, C. A. J. **Computational Techniques for Fluid Dynamics 1: Fundamental and General Techniques**. 2<sup>a</sup>ed., Germany: Springer-Verlag, 1991.

FORTUNA, A, O. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos**. São Paulo: Edusp, 2000.

GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. T. High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method. **Journal of Computational Physics**, n. 48, p. 387-411, 1982.

GIACOMINI, F. de F. **Multiextrapolação de Richardson completa para reduzir o erro de discretização**. 2013. 209f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná.

GIACOMINI, F. de F., MARCHI, C. H., SANTIAGO, C. D. Multiextrapolação de Richardson para reduzir erro de discretização em campos de CFD. **Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional (CMAC)**, Bauru, Brasil, 2013.

INCROPERA, F. P.; DeWITT, D. P. **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa**. 5 ed. Tradução: Carlos Alberto Biolchini da Silva. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

JOYCE, D. C. Survey of extrapolation processes in numerical analysis. **SIAM Review**, v. 13, p. 435 - 490, 1971.

KARIMI, M.; AKDOGAN, G.; DELLIMORE, K. H.; BRADSHAW, S. M. Quantification of Numerical Uncertainty in Computational Fluid Dynamics Modelling of Hydrocyclones. **Computers and Chemical Engineering**, 2012.

MA, Y.; GE, Y. A high order finite difference method with Richardson extrapolation for 3D convection diffusion equation. **Applied Mathematics and Computation**, v. 215, p. 3408 - 3417, 2010.

MALISKA, C. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. 2<sup>a</sup> ed., Rio de Janeiro: LTC, 2004.

MARCHI, C.H. **Esquemas de Alta Ordem para a Solução de Escoamentos de Fluidos sem Dispersão Numérica**. RBCM, Vol.XV, n.3, p.231-249, 1993.

MARCHI, C. H.; NOVAK, L. A.; SANTIAGO, C. D. Múltiplas extrapolações de Richardson para reduzir e estimar o erro de discretização da Equação de Laplace 2D. **Proceedings of the XXIX Iberian Latin American Congress on the Computational Methods in Engineering (CILAMCE)**, Maceió, Brazil, 2008.

MARCHI, C. H.; GERMER, E. M. Verificação de esquemas advectivo-difusivo 1D com e sem múltiplas extrapolações de Richardson. **Proceedings of the XXX Iberian Latin American Congress on the Computational Methods in Engineering (CILAMCE)**, Armação dos Búzios, Brazil, 2009.

MARCHI, C. H.; GERMER, E. M. Effect of Ten CFD Numerical Schemes on Repeated Richardson Extrapolation (RRE). **Applied & Computational Mathematics**, v. 2, 2013.

MARCHI, C. H., SILVA, A. F. C. Condições suficientes para estimar com acurácia e confiabilidade erros de discretização em CFD. **Proceedings of the XX Iberian Latin American Congress on the Computational Methods in Engineering (CILAMCE)**, São Paulo, Brazil, 1999.

MARCHI, C. H., SILVA, A. F. C. Unidimensional numerical solution error estimation for convergent apparent order. **Numerical Heat Transfer**, Part B, v. 42, p. 167 - 188, 2002.

MARCHI, C. H., SILVA, A. F. C. Multidimensional discretization error estimation for convergent apparent order. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 27, p. 432 - 439, 2005.

MARCHI, C. H., SUERO, R., ARAKI, L. K. The lid-driven square cavity flow: numerical solution with a 1024 x 1024 grid. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 31, n. 3, p. 186 - 198, 2009.

MARCHI, C. H., ARAKI, L. K., ALVES, A. C., SUERO, R., GONÇALVES, S. F. T., PINTO, M. A. V. Repeated Richardson extrapolation applied to the two-dimensional Laplace equation using triangular and square grids. **Applied Mathematical Modelling** v. 37, n.1, p. 4661 – 4675, 2013.

MARCHI, C. H., MARTINS, M.A., NOVAK, L.A., ARAKI, L. K., PINTO, M. A. V., GONÇALVES, S. F. T., MORO, D. F., FREITAS, I. S. Polynomial interpolation with repeated Richardson extrapolation to reduce discretization error in CFD. **Applied Mathematical Modelling** v. 40, p. 8872 – 8885, 2016.

MARTINS, M. A., MARCHI, C. H., NOVAK, L. A, PINTO, M. A. V. Multiextrapolação de Richardson com interpolação para reduzir o erro de discretização em CFD. **Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional (CMAC)**, Bauru, Brasil, 2013.

MARTINS, M. A.; MARCHI, C. H. Estimativa de erros de iteração em dinâmica de fluidos computacional. **Anais do Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia (XXIV CILAMCE)**, Ouro Preto, Brasil, 2003.

NOVAK, L. A. **Múltiplas Extrapolações de Richardson para reduzir e estimar o erro de discretização em condução de calor**. 2013. 140f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná.

POMERANZ, S. Richardson extrapolation applied to boundary element method results in a Dirichlet problem for the Laplace equation. **International Journal of Computer Mathematics**, v. 88, n. 11, p. 2306 - 2330, 2011.

RAHUL, K., BHATTACHARYYA, S. N. One-sided finite-difference approximations suitable for use with Richardson extrapolation. **Journal of Computational Physics**, n. 219, p. 13 - 20, 2006.

RICHARDS, S. A. Completed Richardson Extrapolation in Space and Time. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 13, n. 7, p. 573-582, 1997.

RICHARDSON, L. F. The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems Involving Differential Equations, with an Application to the Stresses in a Masonry Dam. **Philosophical Proceedings of the Royal Society of London Serial A**, v. 210, p. 307-357, 1910.

RICHARDSON, L. F.; GAUNT, J. A. The Deferred Approach to the Limit. **Philosophical Proceedings of the Royal Society of London Serial A**, v. 226, p. 299-361, 1927.

ROACHE, P. J.; KNUPP, P. M. Completed Richardson Extrapolation. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 9, p. 365-374, 1993.

ROACHE, P. J. Perspective: A Method for Uniform Reporting of Grid Refinement Studies. **Journal of Fluids Engineering**, v.116, p. 405-413, 1994.

ROACHE, P. J. **Fundamentals of computational fluid dynamics**. Albuquerque: Hermosa Publishers, 1998.

SCHNEIDER, G. E., ZEDAN, M., “A Modified Strongly Implicit Procedure for Numerical Solution of Field Problems”, **Numerical Heat Transfer**, v. 4, p. 1-19, 1981.

SCHREIBER, R.; KELLER, H. B. Driven Cavity Flows by Efficient Numerical Techniques. **Journal of Computational Physics**, v. 49, n. 2, p. 310-333, 1983.

SHIH, T. M.; TAN, C. H.; HWANG, B. C. Effects of grid staggering on numerical schemes. **Internacional journal for numerical methods in fluids**, v. 9, p. 193-212, 1989.

SIMONSEN, C. D., STERN, F. Verification and validation of RANS maneuvering simulation of Esso Osaka: effects of drift and rudder angle on forces and moments. **Computers & Fluids**, v. 32, p. 1325 - 1356, 2003.

VERSTEEG, H. K; MALALASEKERA,W. **An introduction to computacional fuid dynamics, the finite volume method**. 2 ed., England: Pearson/Prentice Hall, 2007.

WANG, Y., HUA K., ZHANG J. Fast and high accuracy numerical methods for solving PDEs in computational finance. **Proceedings of the 2011 International Conference on Business Computing and Global Informatization**. Shanghai, China, 2011.

WANG, Y., ZHANG, J. Sixth order compact scheme combined with multigrid method and extrapolation technique for 2D Poisson equation. **Journal of Computational Physics**, n. 228, p. 137 - 146, 2009.

WANG, Y., ZHANG, J. Fast and robust sixth-order multigrid computation for the threedimensional convection–diffusion equation. **Journal of Computational and Applied Mathematics**. n. 234, p. 3496 - 3506, 2010.

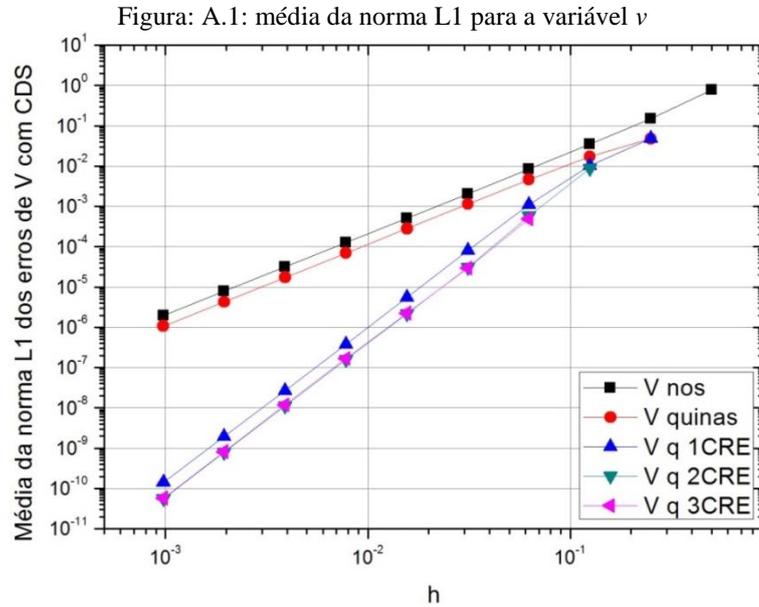
ZHANG, H., LIANG, S., SONG, S., WANG, H. Truncation error calculation based on Richardson extrapolation for variable-step collaborative simulation. **Science China Information Science**, v. 45, p. 1238 – 1250, 2011.

ZHANG, H., ZHANG, J. Interpolation strategies in repetead Richardson extrapolation. **Journal of Intelligent & Fuzzy Systems**, n. 31, p. 2935-2939, 2016.

ZLATEV, Z., DIMOV, I., FARAGÓ, I., GEORGIEV, K., HAVASI, A., OSTROMSKY, T. Richardson extrapolated numerical methods for treatment of one-dimensional advection equations. **Numerical Methods and Applications - Lecture Notes in Computer Science**, v. 6046, p. 198-206, 2011.

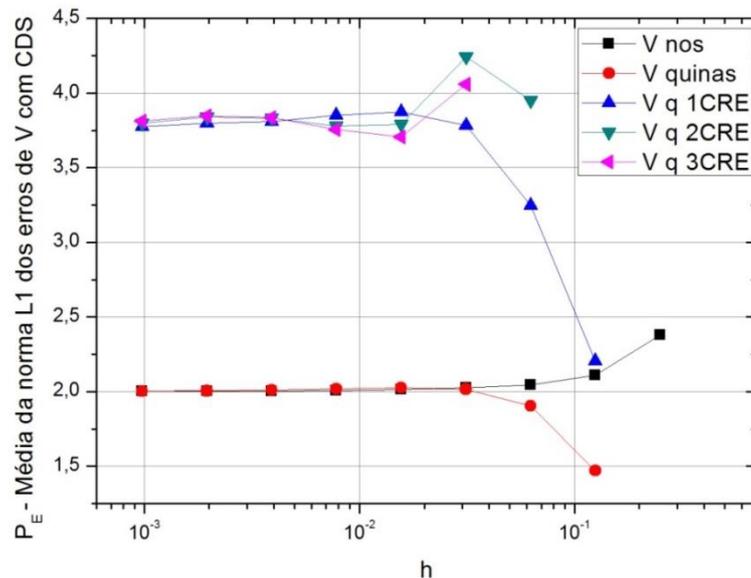
## APÊNDICE A – RESULTADOS DE $v$ E $p$ PARA A EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES COM SOLUÇÃO POLINOMIAL

Os resultados da média da norma L1 para a variável  $v$ , velocidade na direção  $y$ , estão representados na Fig. A.1,



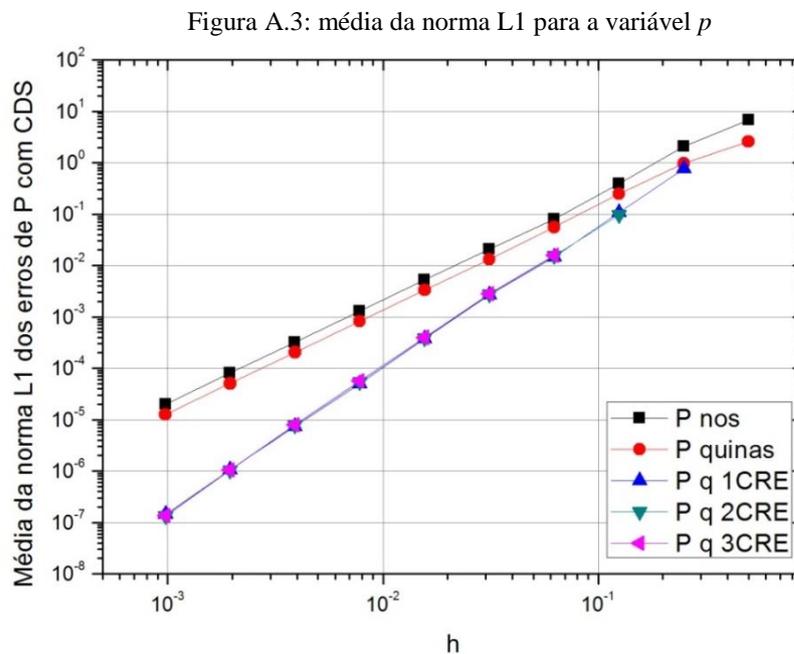
Analogamente ao ocorrido na variável  $u$ , é possível observar que o decaimento do erro de  $v$  para nós e quinas é muito parecido. A solução extrapolada com um nível de CRE confere um decaimento mais rápido. O segundo e o terceiro níveis de CRE não conferiram efeito sobre a solução com uma extrapolação. O comportamento da ordem efetiva equivalente nesse caso pode ser observada na Fig. A.2,

Figura A.2: Ordem efetiva equivalente da média da norma L1 de  $v$  com até três níveis de CRE

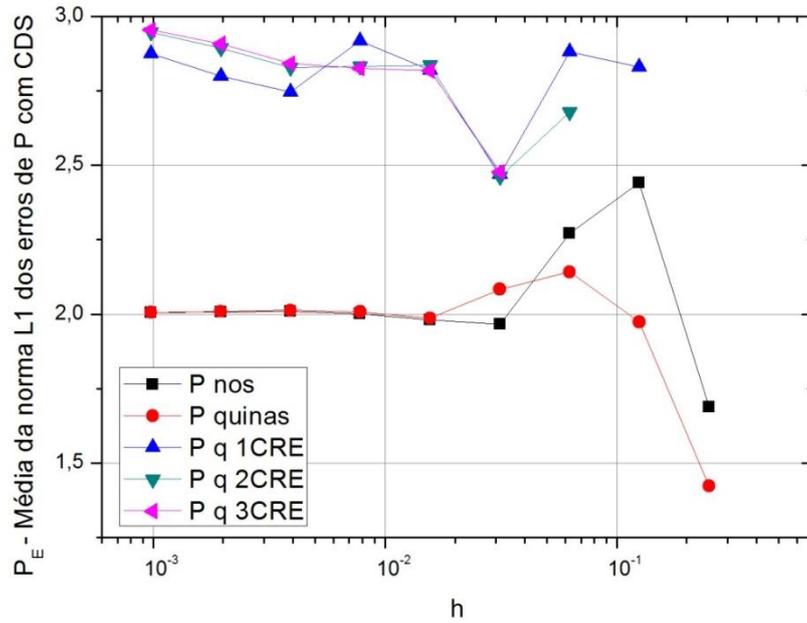


Por ter sido empregado esquema CDS-2, a ordem efetiva equivalentemente tanto para os nós quanto para as quinas sem CRE é de 2. Os três níveis de extrapolação podem ser considerados coincidentes, sendo que o primeiro nível mostrou uma tendência à ordem 4, ordem esperada pela expressão de CDS-2, e os dois níveis seguintes mantiveram o resultado. É possível considerar que os resultados para a variável  $v$  ficaram mais próximos da ordem teórica que os da variável  $u$ .

Matematicamente, são as derivadas da variável  $p$  que garantem a conservação da massa. Os resultados da média da norma L1 da variável  $p$  podem ser vistos na Fig. A.3.

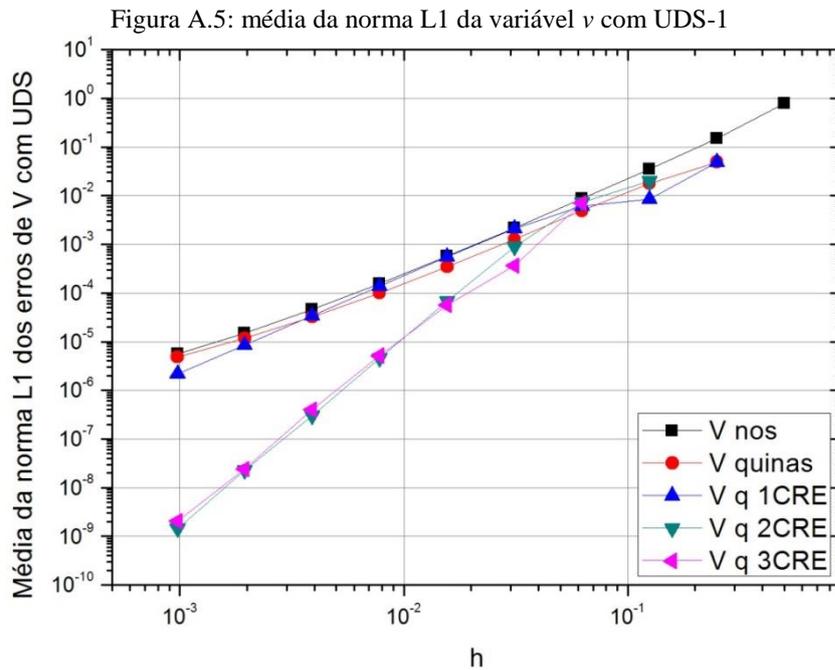


Semelhante aos resultados das variáveis  $u$  e  $v$ , no caso de  $p$  tanto nos nós quanto nas quinas tiveram decaimentos similares e nas quinas as três extrapolações coincidiram. Ou seja, apenas o primeiro nível de CRE contribui no decaimento do erro, os demais níveis não conferiram maior efeito. As ordens efetivas equivalentes podem ser vistas na Fig. A.4.

Figura A.4: ordem efetiva equivalente da média da norma L1 para a variável  $p$ 

As ordens das soluções sem extrapolação em nós e em quinas resultou em 2, já as extrapoladas tendem a 3. Os resultados para  $p$  tiveram o pior desempenho entre as variáveis.

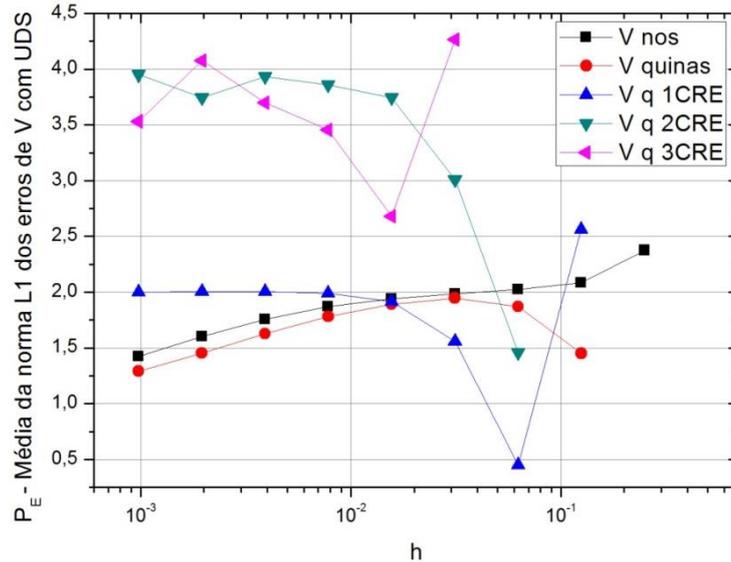
Com a discretização UDS-1, são mostrados na Fig. A.5 os resultados para a média da norma L1 da variável  $v$ , velocidade na direção  $y$ ,



É possível observar que o decaimento do erro de  $v$  para nós e quinas é muito parecido. A solução extrapolada com um nível de CRE tem uma pequena influência no decaimento e o

segundo nível de CRE é que confere um maior decaimento ao erro. O terceiro nível de CRE não surtiu efeito em relação à solução com duas extrapolações. O comportamento da ordem efetiva equivalente nesse caso pode ser observada na Fig. A.6,

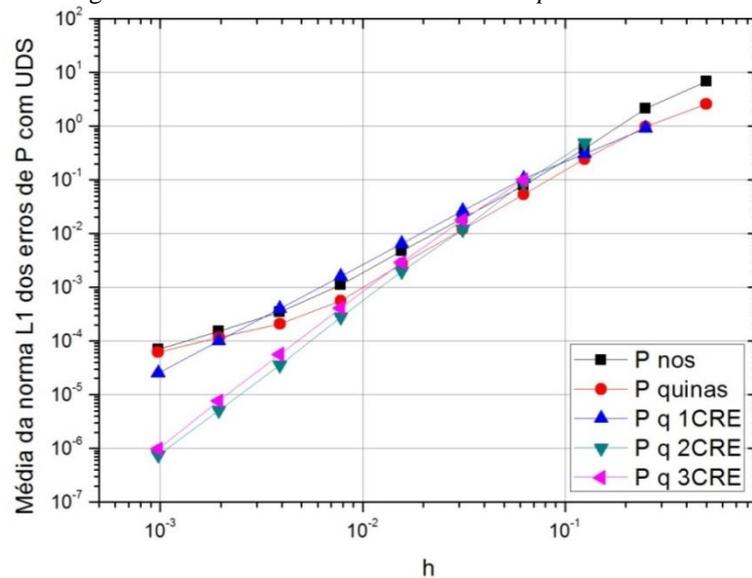
Figura A.6: ordem efetiva equivalente da média da norma L1 da variável  $v$  com UDS-1



As ordens efetivas equivalentes tanto dos nós quanto das quinas sem extrapolação tenderam a 1 nas malhas mais refinadas, o que é coerente com a ordem assintótica de UDS-1. O primeiro nível de CRE resultou em 2. O segundo e terceiro níveis de CRE tendem à ordem 3. Esse resultado é compatível com as ordens verdadeiras da expressão do erro com UDS-1.

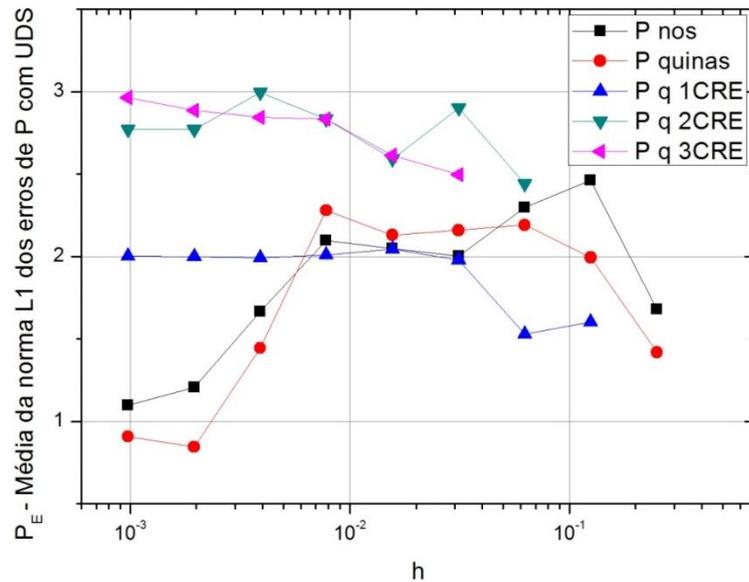
Os resultados da média da norma L1 de nós e quinas para  $p$  é mostrado na Fig. A.7.

Figura A.7: média da norma L1 da variável  $p$  com UDS-1



É possível observar que o decaimento do erro de  $p$  para nós e quinas é muito parecido. A solução extrapolada com um nível de CRE tem uma pequena influência no decaimento e o segundo nível de CRE é que confere um maior decaimento ao erro. O terceiro nível de CRE não surtiu efeito em relação à solução com duas extrapolações. O comportamento da ordem efetiva equivalente nesse caso pode ser observada na Fig. A.8,

Figura A.8: ordem efetiva equivalente da média da norma L1 da variável  $v$  com UDS-1



As ordens efetivas equivalentes tanto dos nós quanto das quinas sem extrapolação tenderam a 1 nas malhas mais refinadas, o que é coerente com a ordem assintótica de UDS-1. O primeiro nível de CRE resultou em 2. O segundo e terceiro níveis de CRE tenderam à ordem 3. Esse resultado é compatível com as ordens verdadeiras da expressão do erro com UDS-1.

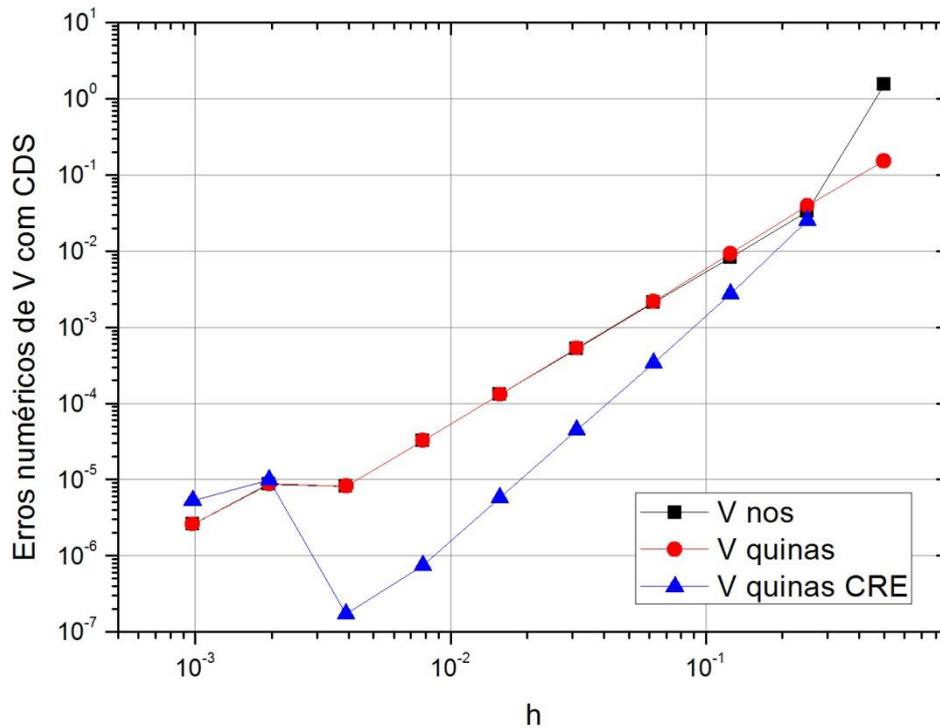
## APÊNDICE B – RESULTADOS DE $v$ E $p$ PARA A EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES COM SOLUÇÃO EXPONENCIAL

Os erros numéricos representados pela média da norma L1 da variável  $v$  com CDS-2 da solução exponencial constam na Tabela B.1 e Fig. B.1.

Tabela B.1: média da norma L1 para a variável  $v$  com CDS-2

$h$	V nós	V quinas	V quinas CRE
0,5	1,53272232997619E+00	1,52765444331485E-01	
0,25	3,34031323905466E-02	3,96875549517024E-02	2,50985854791122E-02
0,125	8,10776939769494E-03	9,26105488417298E-03	2,71475636045850E-03
0,0625	2,10593188669106E-03	2,17289714868798E-03	3,38232581573351E-04
0,03125	5,24702005361980E-04	5,31686197949072E-04	4,42071273329839E-05
0,015625	1,30562792194526E-04	1,31174115267664E-04	5,80159422403305E-06
0,0078125	3,25070783250073E-05	3,25702240430004E-05	7,39827296749471E-07
0,00390625	8,18433365574796E-06	8,19169815358672E-06	1,70845199665815E-07
0,001953125	8,73720880197087E-06	8,76309205987293E-06	9,80633787120025E-06
0,000976563	2,57587655459765E-06	2,57861015695157E-06	5,27912110206042E-06

Figura B.1: média da norma L1 para a variável  $v$  com CDS-2

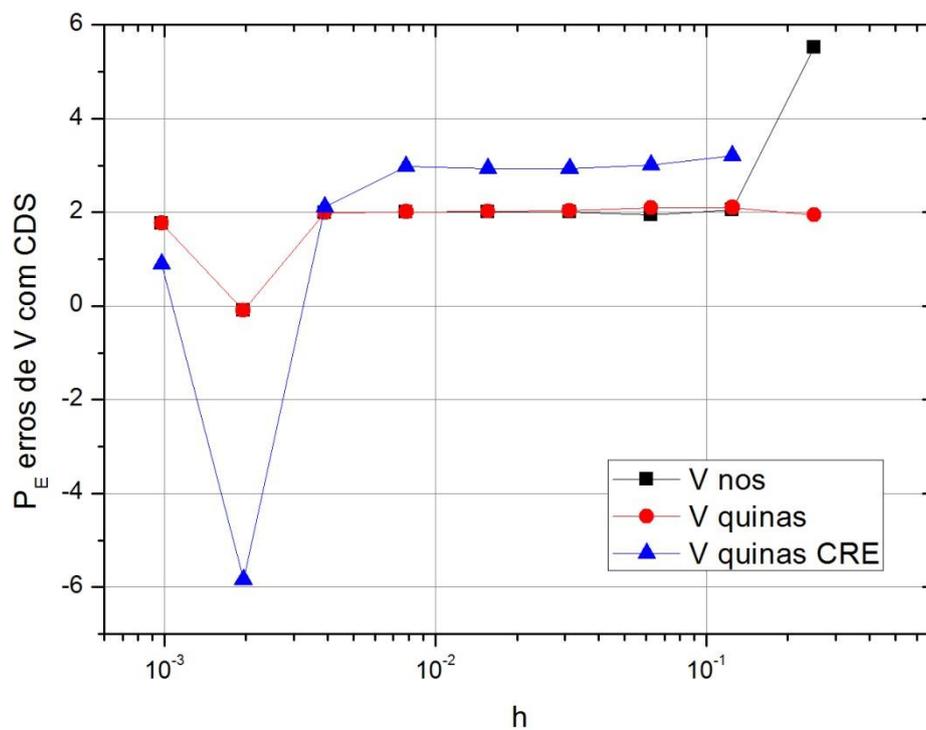


Ocorre uma redução no decaimento do erro numérico da variável  $v$  com CDS-2 com a aplicação de um nível de CRE. A ordem efetiva equivalente das médias da norma L1 da variável  $v$  com CDS-2 da solução exponencial constam na Tabela B.2 e Fig. B.2.

Tabela B.2: ordem efetiva equivalente das médias da norma L1 da variável  $v$  com CDS-2

h	PE V nós	PE V quinas	PE V quinas CRE
0,5			
0,25	5,519969152	1,944559652	
0,125	2,042606437	2,099438246	3,208711426
0,0625	1,944846281	2,091556646	3,004735182
0,03125	2,004888566	2,030972967	2,935664746
0,015625	2,006754488	2,019091957	2,929757689
0,0078125	2,005918016	2,009857511	2,971188957
0,00390625	1,989817029	1,991319183	2,114498819
0,001953125	-0,094307507	-0,097277459	-5,842952852
0,000976563	1,762109013	1,764846337	0,893416708

Figura B.2: ordem efetiva equivalente das médias da norma L1 da variável  $v$  com CDS-2



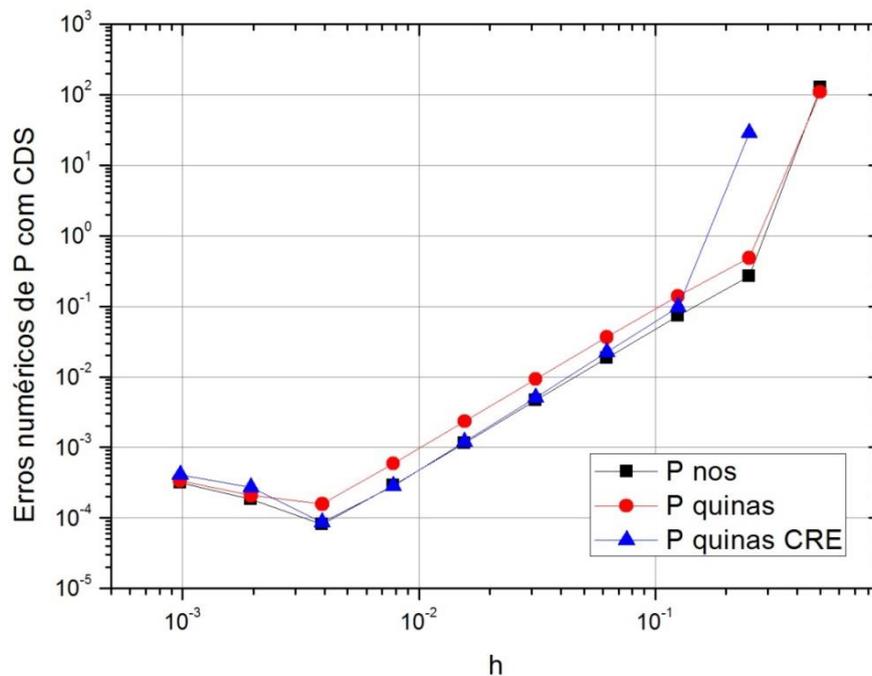
Os resultados indicam que o primeiro nível de CRE sobe de 2 para 3 a ordem de decaimento do erro numérico da variável  $v$  com CDS-2.

Os resultados da média da norma L1 para a variável  $p$  com CDS-2 podem ser vistos na Tabela B.3 e Fig. B.3.

Tabela B.3: média da norma L1 para a variável  $p$  com CDS-2

h	P nós	P quinas	P quinas CRE
0,5	1,27788356437920E+02	1,08915226702075E+02	
0,25	2,66239244078759E-01	4,84505442073250E-01	2,86202252586007E+01
0,125	7,31843943060243E-02	1,39215206862553E-01	9,78731499864776E-02
0,0625	1,85830926810398E-02	3,66523880351065E-02	2,23758891790701E-02
0,03125	4,65166865385827E-03	9,32351742897209E-03	5,04119091822058E-03
0,015625	1,15223145410906E-03	2,34541878307913E-03	1,18792059568256E-03
0,0078125	2,85301020146282E-04	5,88594979265805E-04	2,83719604433844E-04
0,00390625	8,09687227562873E-05	1,57265288327033E-04	8,63623245137355E-05
0,001953125	1,82893875756491E-04	2,07834870101922E-04	2,67436401809776E-04
0,000976563	3,15625240521731E-04	3,36065327277931E-04	4,05098037477662E-04

Figura B.3: média da norma L1 para a variável  $p$  com CDS-2

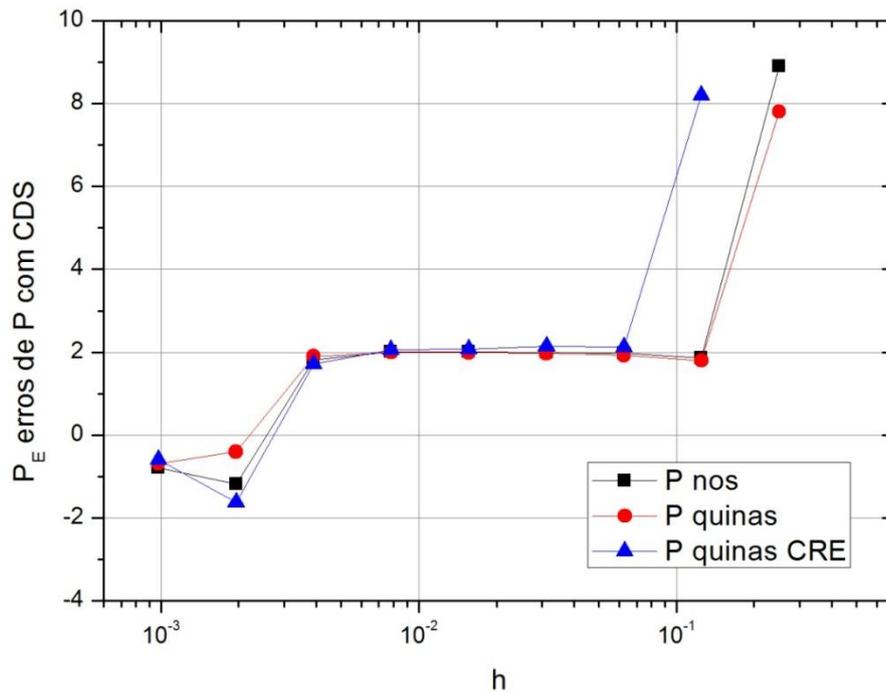


Os resultados da ordem efetiva equivalente da média da norma L1 para a variável  $p$  com CDS-2 podem ser vistos na Tabela B.4 e Fig. B.4.

Tabela B.4: ordem efetiva equivalente da média da norma L1 para a variável  $p$  com CDS-2

h	PE P nós	PE P quinas	PE P quinas CRE
0,5			
0,25	8,906817432	7,812477076	
0,125	1,863115293	1,799196061	8,191906179
0,0625	1,977545422	1,925337706	2,128968119
0,03125	1,998170381	1,974960958	2,150108516
0,015625	2,013317788	1,991028791	2,085326187
0,0078125	2,013873736	1,994498403	2,065900659
0,00390625	1,817048281	1,904074963	1,715991861
0,001953125	-1,175570142	-0,402237453	-1,630721869
0,000976563	-0,787205815	-0,693303977	-0,599075246

Figura B.4: ordem efetiva equivalente da média da norma L1 para a variável  $p$  com CDS-2



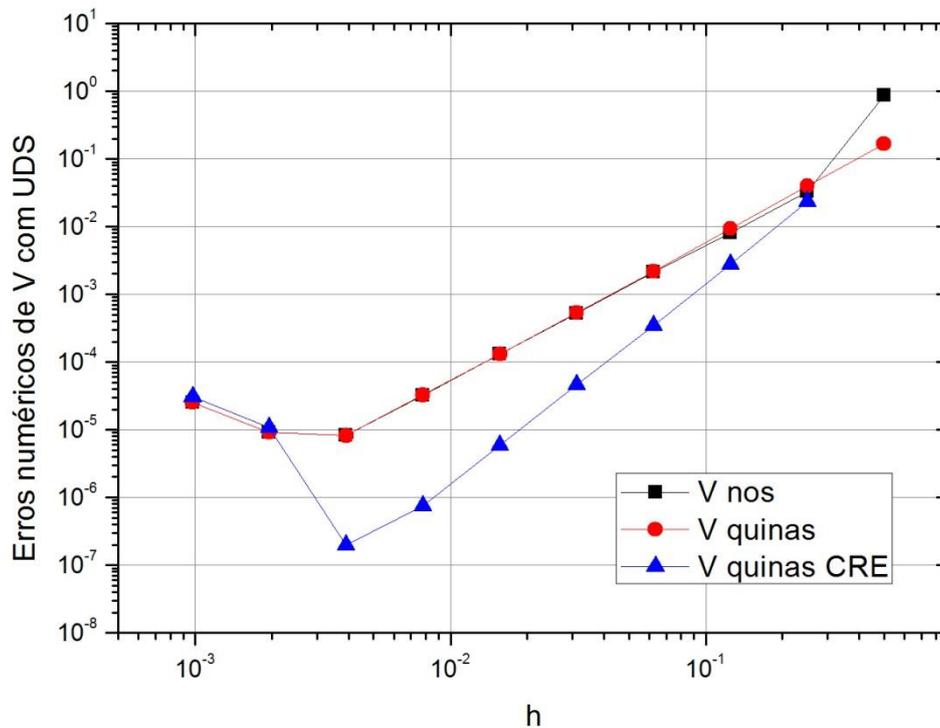
Na variável  $p$  com CDS-2 para esse problema de solução exponencial notamos que uma extrapolação de CRE não confere nenhum efeito no decaimento do erro numérico.

Os resultados da média da norma L1 para a variável  $v$  e  $p$  com UDS-1 podem ser vistos na Tabela B.5 e Fig. B.5.

Tabela B.5: da média da norma L1 para a variável  $v$  com UDS-1

h	V nós	V quinas	V quinas CRE
0,5	8,75163273590507E-01	1,67744924332391E-01	
0,25	3,28634305055111E-02	4,00662188887028E-02	2,37310392773604E-02
0,125	8,09931900277942E-03	9,28230590727209E-03	2,74160584617702E-03
0,0625	2,10716619457933E-03	2,17615522463308E-03	3,45154778612169E-04
0,03125	5,24903894004700E-04	5,31996650652166E-04	4,57527951084453E-05
0,015625	1,30598003121797E-04	1,31208103508383E-04	5,95245552916663E-06
0,0078125	3,25101062732123E-05	3,25731782465521E-05	7,54186545030714E-07
0,00390625	8,19691236261849E-06	8,20422403664449E-06	1,96448317352691E-07
0,001953125	9,17744877614057E-06	9,20307921363366E-06	1,09085925586049E-05
0,000976563	2,52314174540199E-05	2,52779542222671E-05	3,09033294777732E-05

Figura B.5: média da norma L1 para a variável  $v$  com UDS-1

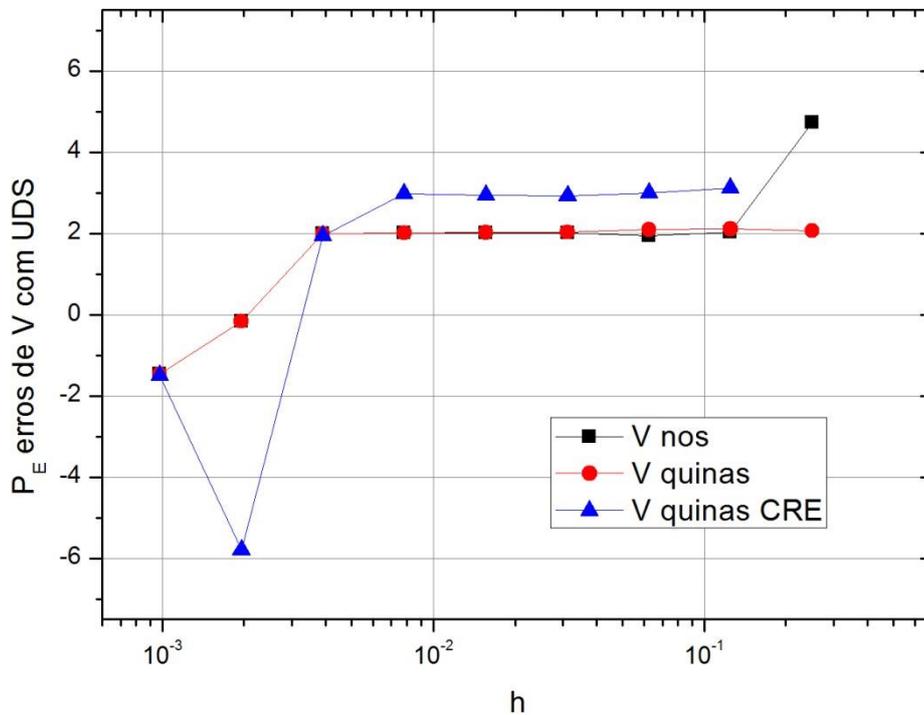


As ordens efetivas das médias da norma L1 para a variável  $v$  da solução com UDS-1 podem ser observados na Tabela B.6 e na Fig. B.6.

Tabela B.6: Ordem efetiva da média da norma L1 da variável  $v$  com UDS-1

h	PE V nós	PE V quinas	PE V quinas CRE
0,25	4,734997205	2,065810842	
0,125	2,020610571	2,109831218	3,113682205
0,0625	1,942496505	2,092701776	2,98970581
0,03125	2,0051789	2,032292399	2,915311671
0,015625	2,006920462	2,019560338	2,94230304
0,0078125	2,006172661	2,010100426	2,98049162
0,00390625	1,987735794	1,9892457	1,940771602
0,001953125	-0,163012584	-0,165749758	-5,795171354
0,000976563	-1,459056194	-1,457691158	-1,502297305

Figura B.6: Ordem efetiva da média da norma L1 da variável  $v$  com UDS-1



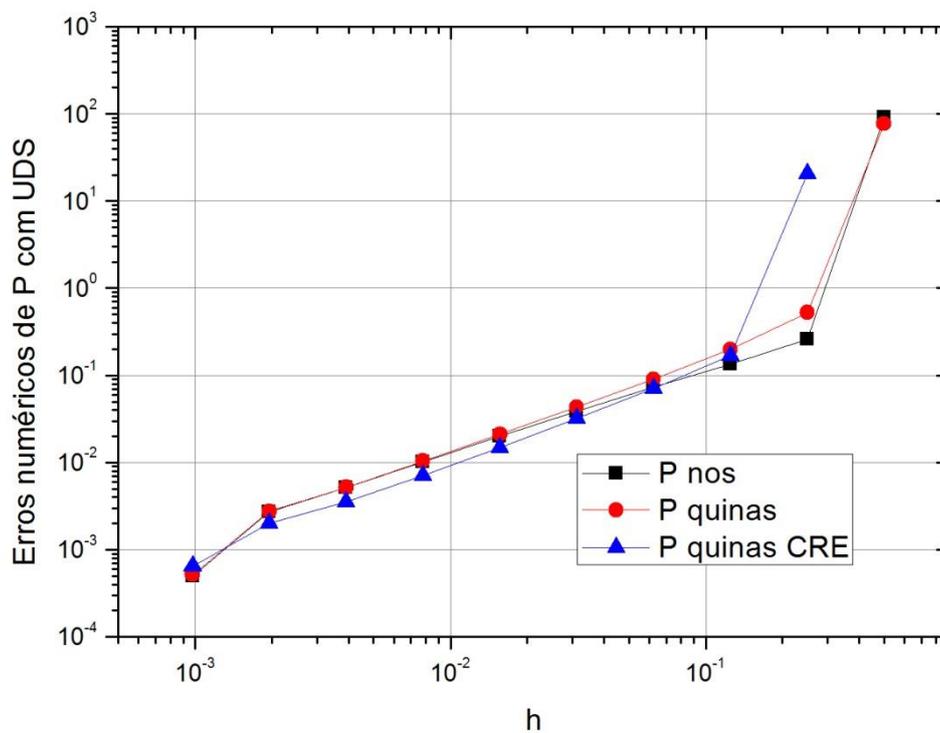
Os resultados indicam que o primeiro nível de CRE contribui para o decaimento do erro numérico, fazendo subir de 2 para 3 a ordem de decaimento do erro numérico da variável  $v$  com UDS-1.

Os resultados da média da norma L1 para a variável  $p$  com UDS-1 podem ser vistos na Tabela B.7 e na Fig. B.7.

Tabela B.7: média da norma L1 para a variável  $p$  com UDS-1

h	P nós	P quinas	P quinas CRE
0,5	9,09070484148709E+01	7,74792045102470E+01	
0,25	2,60613506301711E-01	5,24652270845801E-01	2,06444560552995E+01
0,125	1,35678877210422E-01	1,98859709907719E-01	1,69273493239321E-01
0,0625	7,33196260595408E-02	9,05128088478139E-02	7,06651605441637E-02
0,03125	3,86906162627441E-02	4,33500569946445E-02	3,17982468639717E-02
0,015625	1,99411687910207E-02	2,11665998741731E-02	1,48710689880035E-02
0,0078125	1,01285542802116E-02	1,04440576014716E-02	7,15621132467720E-03
0,00390625	5,10390688704478E-03	5,18123564511446E-03	3,50011341337730E-03
0,001953125	2,72796322280779E-03	2,75188836112555E-03	1,98773536200853E-03
0,000976563	5,00273080015847E-04	5,21508996115169E-04	6,51863593355694E-04

Figura B.7: média da norma L1 para a variável  $p$  com UDS-1

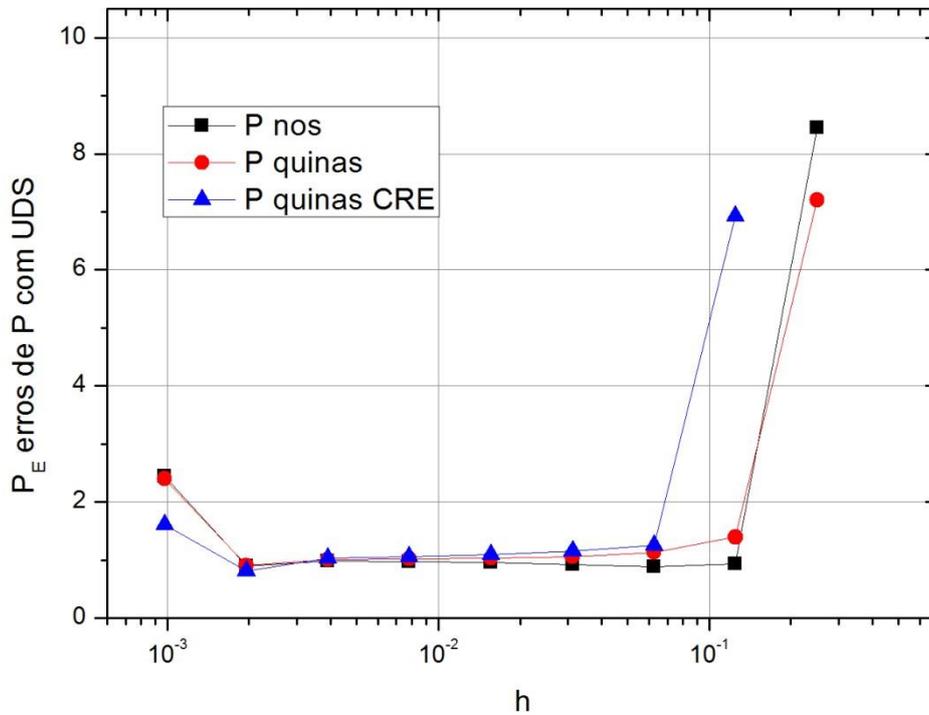


Os resultados das ordens efetivas equivalentes das médias da norma L1 para a variável  $p$  com UDS-1 podem ser observados na Tabela B.8 e Fig. B.8.

Tabela B.8: ordem efetiva equivalente da média da norma L1 para a variável  $p$  com UDS-1

h	PE P nós	PE P quinas	PE P quinas CRE
0,25	8,446336493	7,206303782	
0,125	0,941715717	1,399610542	6,930254519
0,0625	0,887924803	1,135557134	1,260285062
0,03125	0,92221572	1,062088078	1,152051883
0,015625	0,956233737	1,034244352	1,09643887
0,0078125	0,977321709	1,019107219	1,055240461
0,00390625	0,988754348	1,011314215	1,031794321
0,001953125	0,903777815	0,912874256	0,816275974
0,000976563	2,447036467	2,399657899	1,608483688

Figura B.8: ordem efetiva equivalente da média da norma L1 para a variável  $p$  com UDS-1

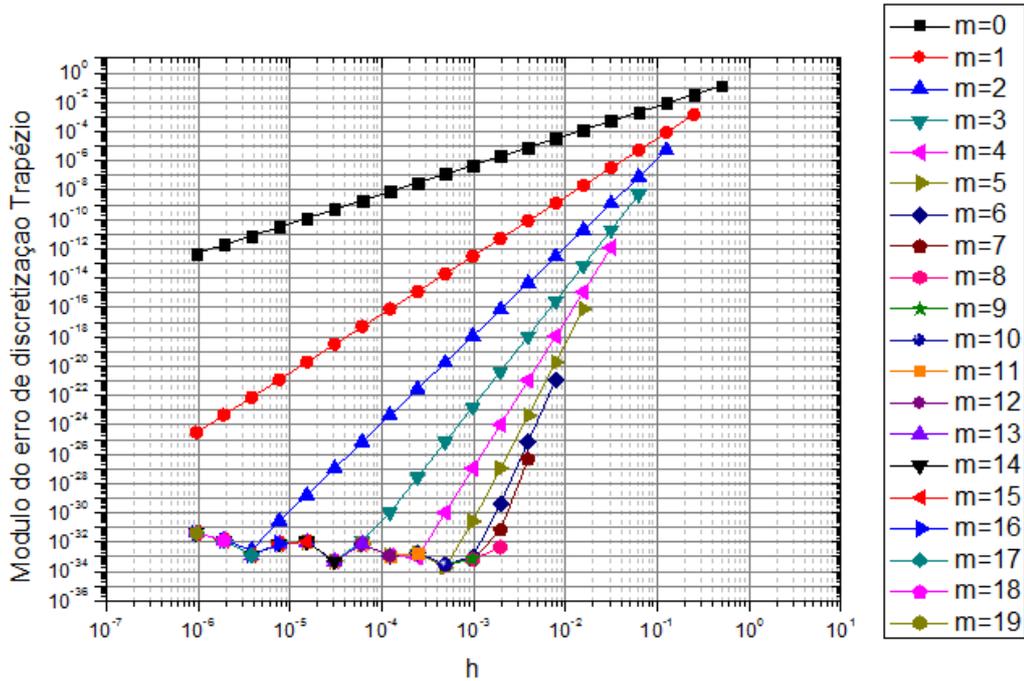


Na variável  $p$  com UDS-1 para esse problema de solução exponencial é possível notar que uma extrapolação de CRE não confere nenhum efeito no decaimento do erro numérico.

## APÊNDICE C – RESULTADOS COMPLEMENTARES DA TEMPERATURA MÉDIA

Os resultados da temperatura média com emprego de MER para o modelo da Eq. (3.43) pela Regra do Trapézio, Eq. (2.48), são mostrados na Fig. C.1.

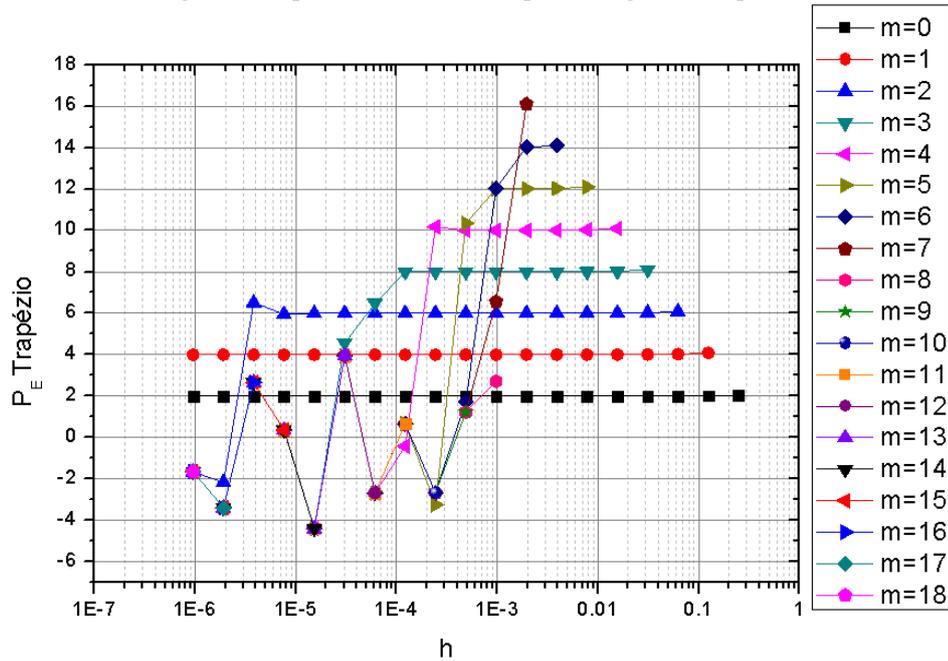
Figura C.1: Em versus  $h$  versus  $m$ , para a Regra do Trapézio, com até 19 níveis de MER



Na Fig. C.1 são mostrados 19 níveis de MER. As soluções representadas por  $m = 0$  são sem extrapolação em cada uma das 20 malhas. O decaimento do módulo do erro ocorre gradualmente até o 8º nível de MER e então erros de arredondamento permeiam as soluções. No 8º nível de extrapolação ( $m = 8$ ) o erro é inferior a  $10^{-32}$ .

A Fig. C.2 mostra as ordens efetivas equivalentes versus o tamanho de malha em cada um dos 19 níveis de MER, com  $p_E$  versus  $h$  versus  $m$ , para a Regra do Trapézio.

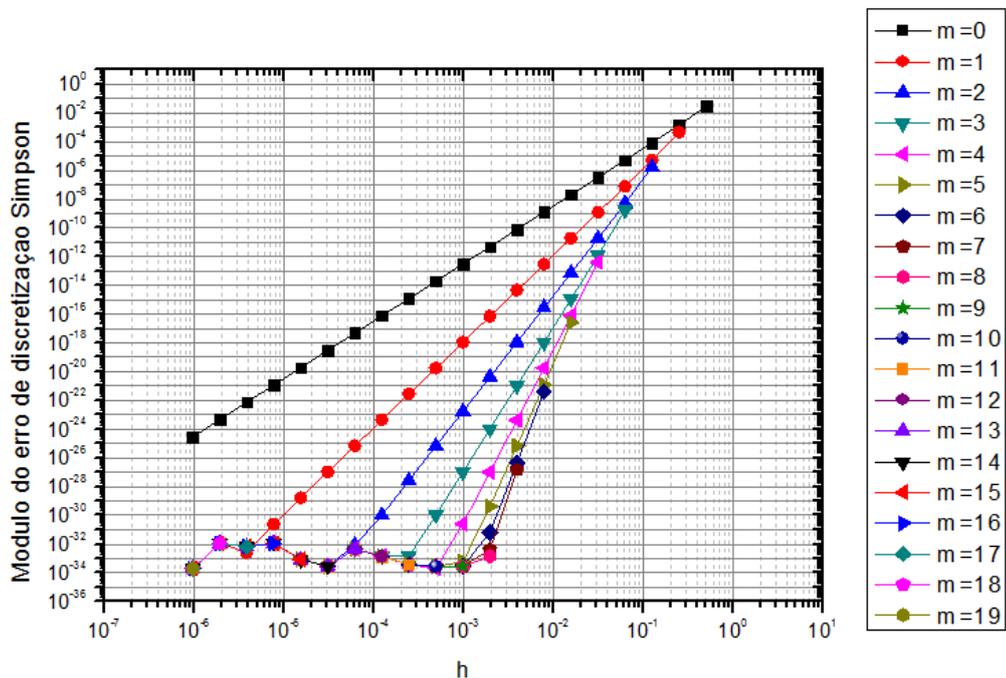
Figura C.2:  $p_E$  versus  $h$  versus  $m$  para a Regra do Trapézio



De Marchi e Germer (2013) temos que a ordem de acurácia da Regra do Trapézio é 2, chegando a 4 com uma extrapolação e a 6 com duas. Na Fig. C.2 com 7 níveis de MER foi atingida a ordem 16.

Os valores de  $E_m$  versus  $h$  versus  $m$ , para a Regra de Simpson, com até 19 níveis de MER, podem ser observados na Fig. C.3.

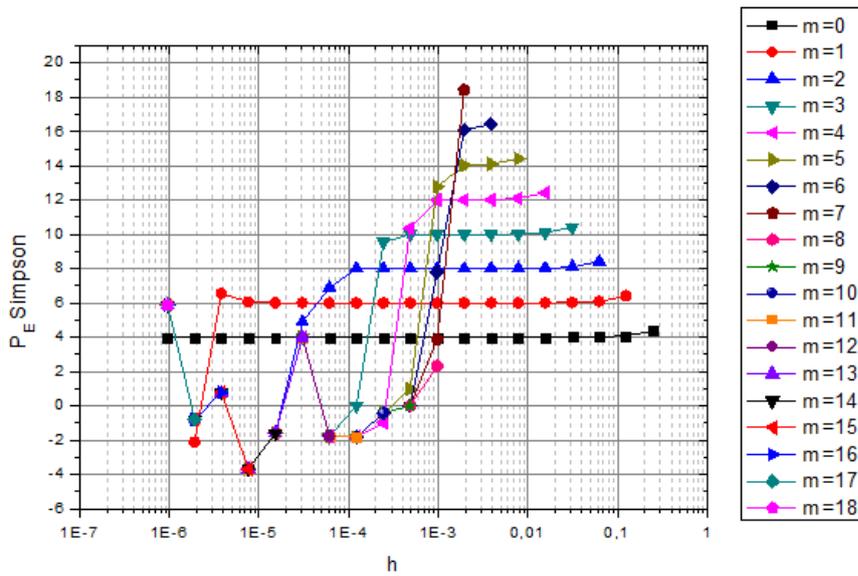
Figura C.3:  $E_m$  versus  $h$  versus  $m$ , para a Regra de Simpson, com até 19 níveis de MER



Na Fig. C.3 são mostrados 19 níveis de MER. As soluções representadas por  $m = 0$  são sem extrapolação em cada uma das 20 malhas. O decaimento do módulo do erro ocorre gradualmente até o 8º nível de MER e então erros de arredondamento permeiam as soluções. No 8º nível de extrapolação ( $m = 8$ ) o erro é inferior a  $10^{-32}$ .

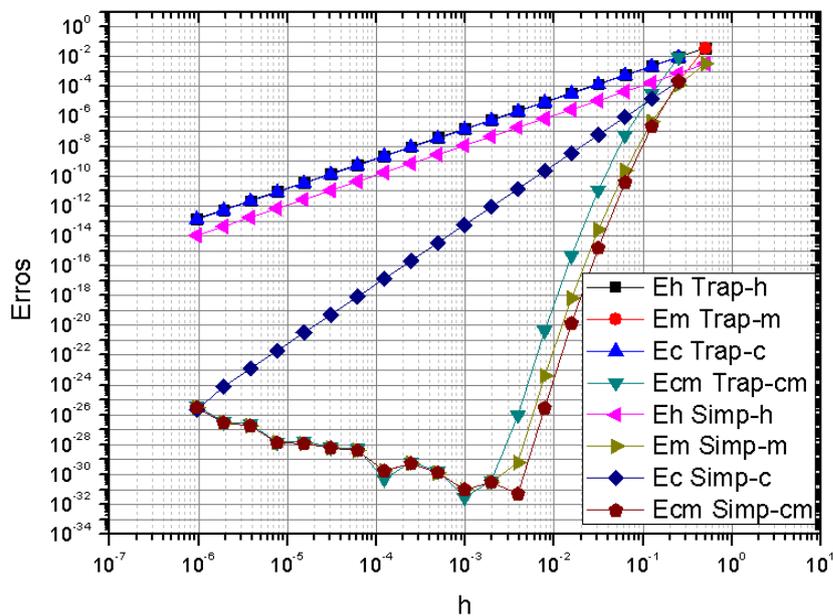
A Fig. C.4 mostra as ordens efetivas equivalentes versus o tamanho de malha em cada um dos 19 níveis de MER, com  $p_E$  versus  $h$  versus  $m$ , para a Regra de Simpson.

Figura C.4:  $p_E$  versus  $h$  versus  $m$ , para a Regra de Simpson



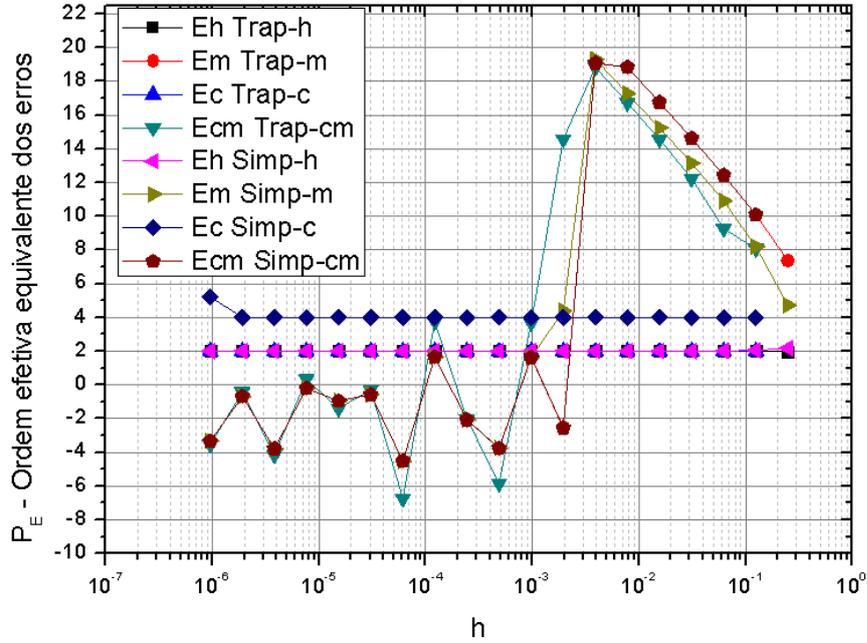
As curvas de  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  versus  $h$  para Regra do Trapézio e Regra de Simpson são mostradas na Fig. C.5.

Figura C.5:  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  versus  $h$  para as Regras do Trapézio e de Simpson no caso exponencial



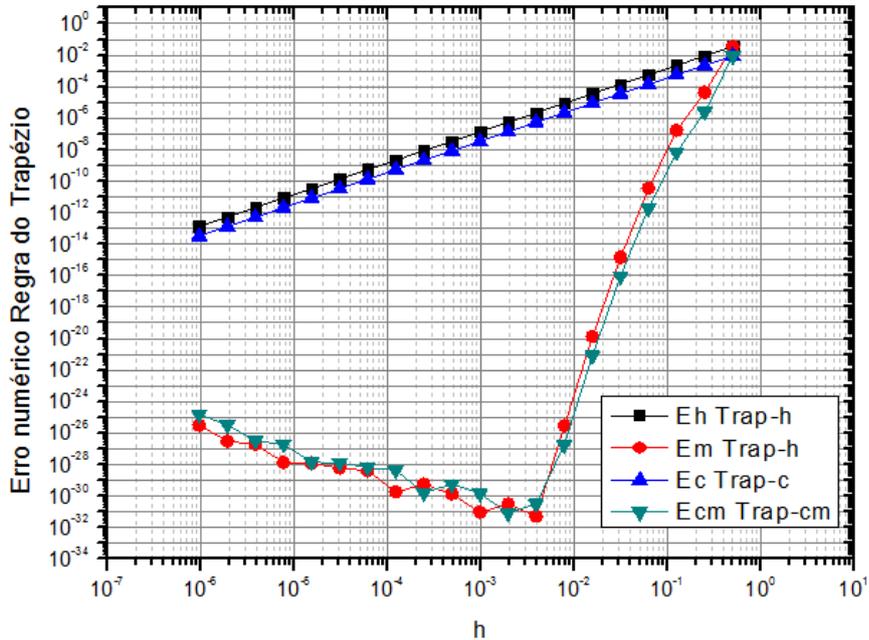
Ordens efetivas equivalentes de Eh, Em, Ec e Ecm versus h para Regra do Trapézio e Regra de Simpson são mostradas na Fig C.6.

Figura C.6: Eh, Em, Ec e Ecm versus h para Regra do Trapézio e Regra de Simpson no caso exponencial



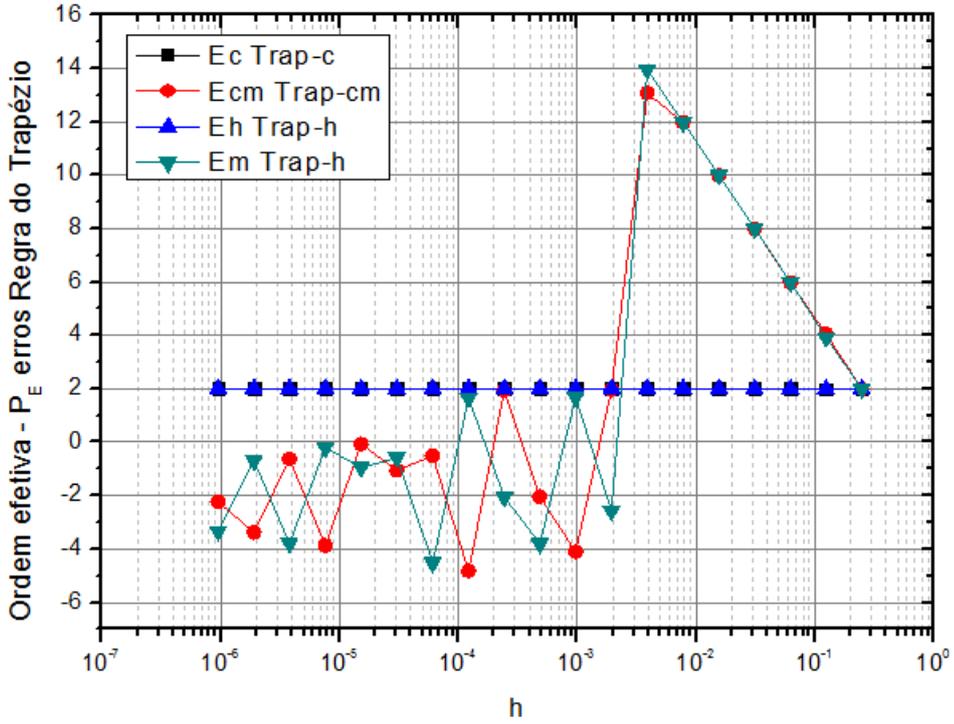
Dos experimentos numéricos realizados em poisson 1D com termo fonte exponencial, discretização em Diferenças Finitas e esquema de aproximação para a 2ª derivada CDS-4, o gráfico com as curvas de Eh, Em, Ec e Ecm versus h para a Regra do Trapézio é exibido na Fig. C.7.

Figura C.7: Eh, Em, Ec e Ecm versus h para a Regra do Trapézio com CDS-4



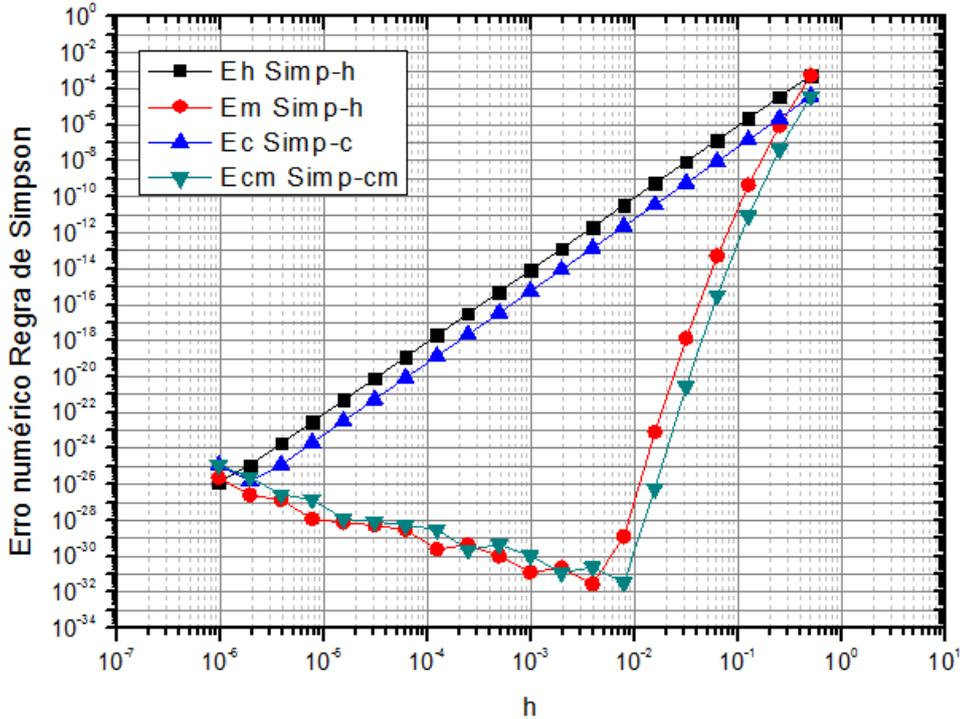
A ordem efetiva equivalente de cada curva Eh, Em, Ec e Ecm é ilustrada na Fig. C.8.

Figura C.8:  $p_E$  de Eh, Em, Ec e Ecm versus h para a Regra do Trapézio com CDS-4



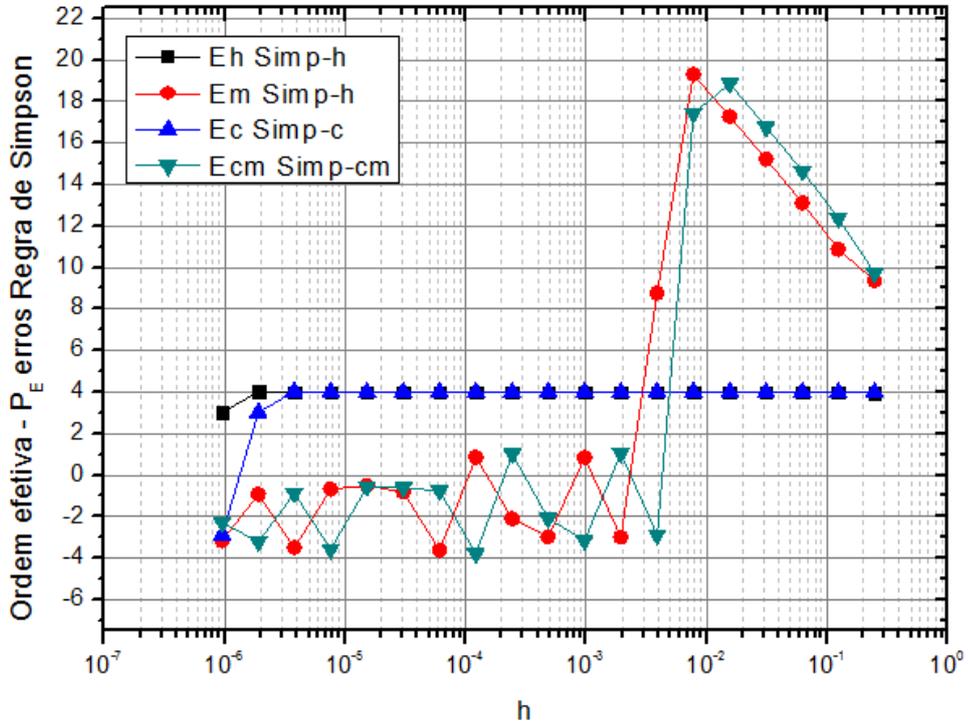
Um gráfico com as curvas de Eh, Em, Ec e Ecm versus h para a Regra de Simpson é mostrado na Fig. C.9.

Figura C.9: Eh, Em, Ec e Ecm versus h para a Regra de Simpson com CDS-4



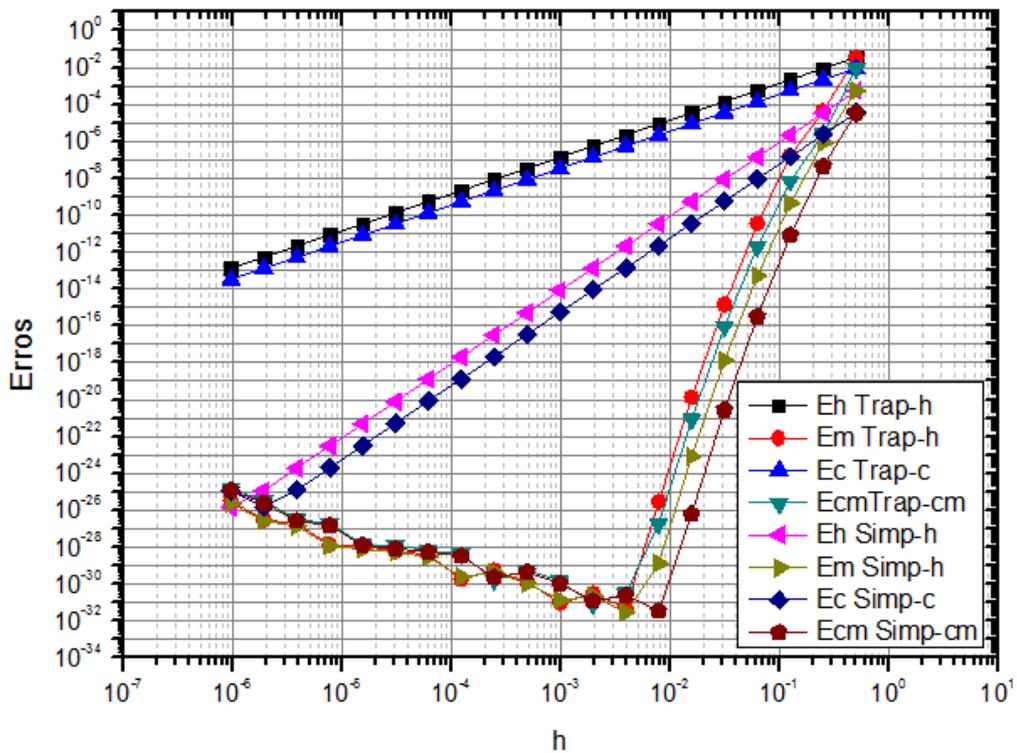
A ordem efetiva equivalente de cada curva Eh, Em, Ec e Ecm é mostrada na Fig. C.10.

Figura C. 10: ordem efetiva equivalente de cada curva Eh, Em, Ec e Ecm para a Regra de Simpson com CDS-4



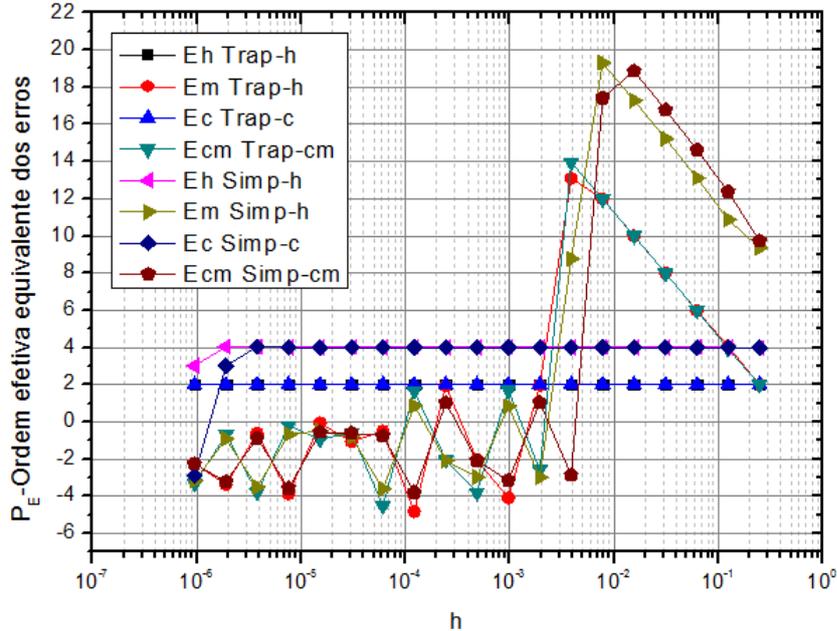
As curvas de Eh, Em, Ec e Ecm versus h para Regra do Trapézio e Regra de Simpson são mostradas na Fig. C.11.

Figura C.11: Eh, Em, Ec e Ecm versus h para Regra do Trapézio e Regra de Simpson



A ordem efetiva equivalente de  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  versus  $h$  para Regra do Trapézio e Regra de Simpson é mostrada no gráfico da Fig. C.12

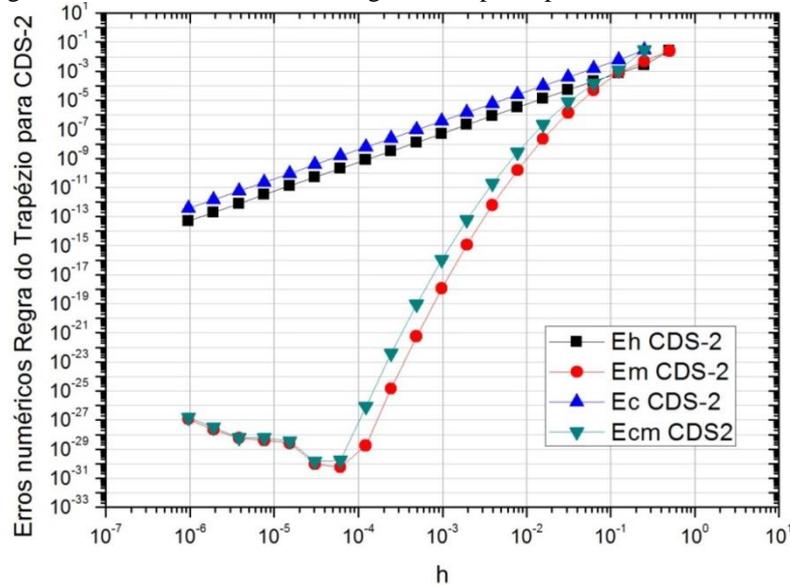
Figura C.12:  $p_E$  de  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  versus  $h$  para Regra do Trapézio e Regra de Simpson



Do experimento numérico realizado na equação 1D de advecção-difusão de calor, com esquemas de discretização CDS-2, QUICK e UDS-1 para termos advectivos, CDS-2, CDS-4 e CDS-2 para termos difusivos. Resolvido com volumes finitos e precisão quádrupla e calculado em 20 malhas com razão de refino 2 com  $N = 2, 4, 8, \dots, 1048576$  volumes. A solução analítica é: 0.19321634509369576890398009909698721577570855357081.

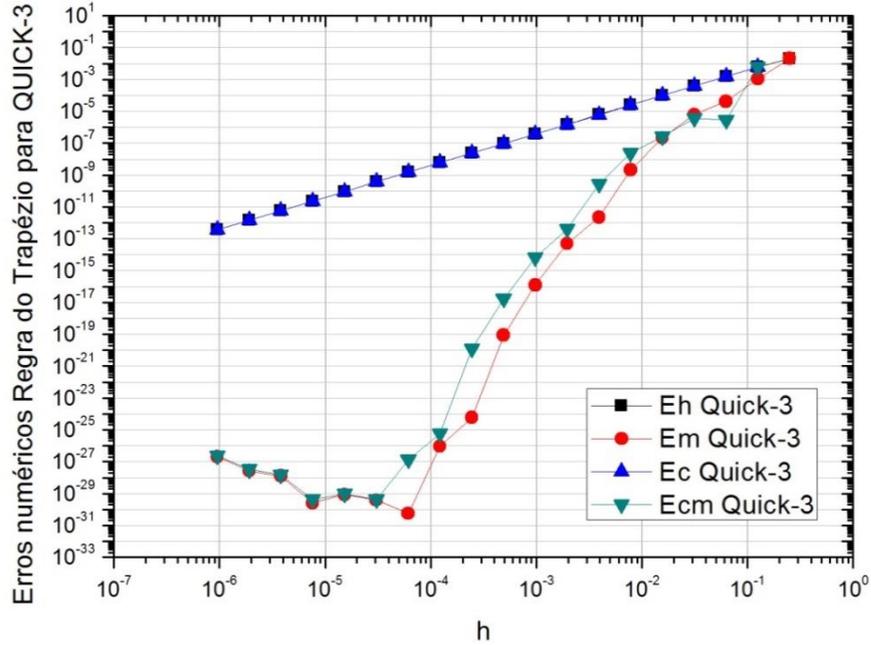
Desse modelo, os erros numéricos da Regra do Trapézio e CDS-2 mostra a Fig. C.13.

Figura C.13: erros numéricos da Regra do Trapézio para CDS- MER e CRE



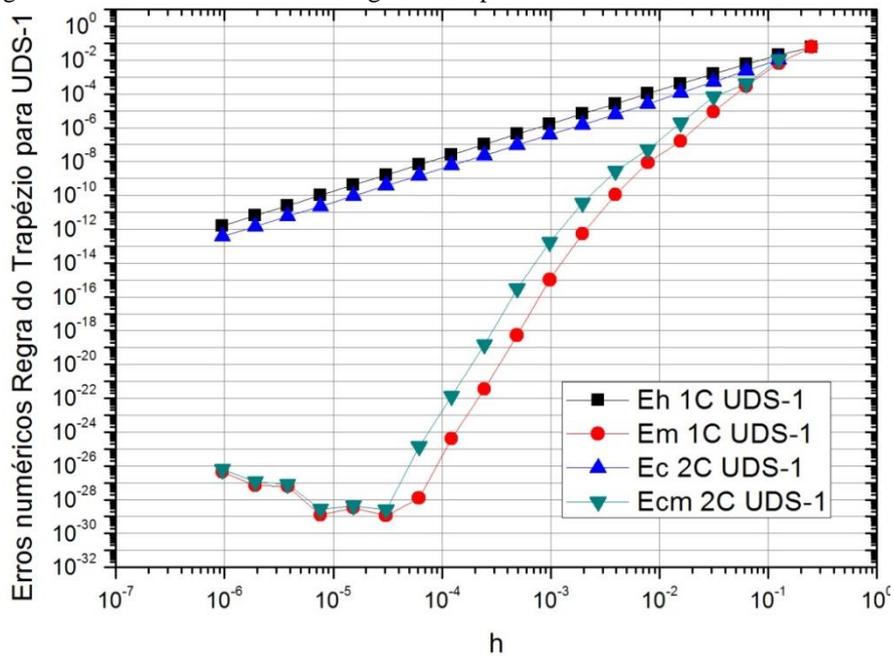
Erros numéricos da Regra do Trapézio e QUICK-3 é mostrado na Fig. C.14.

Figura C.14: erros numéricos da Regra do Trapézio para QUICK-3 com MER e CRE



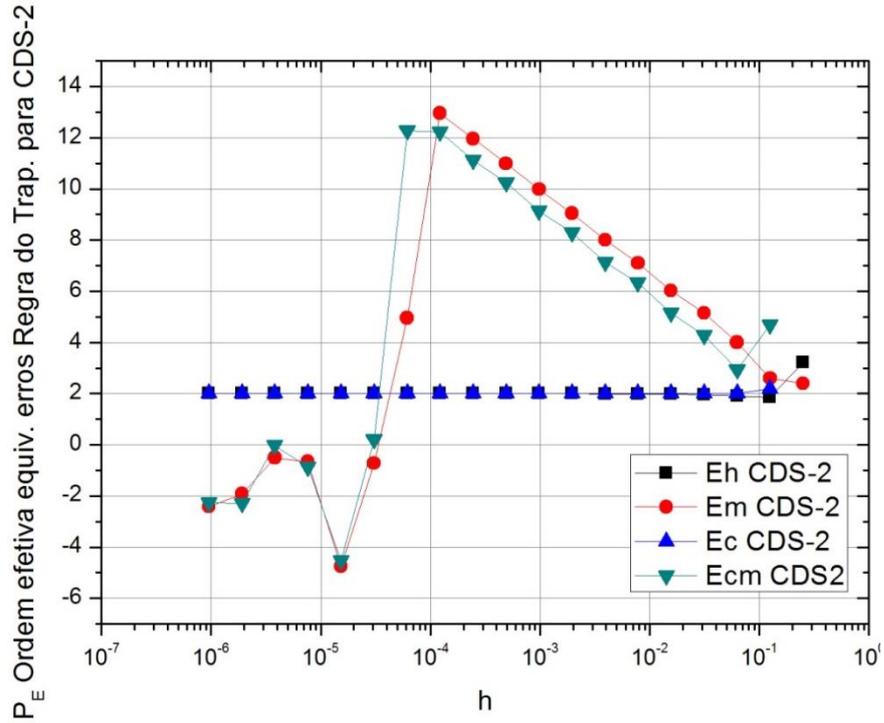
Erros numéricos da Regra do Trapézio e UDS-1 com 1 e 2 níveis de CRE é mostrado na Fig. C.15.

Figura C.15: Erros numéricos da Regra do Trapézio e UDS-1 com 1 e 2 níveis de CRE



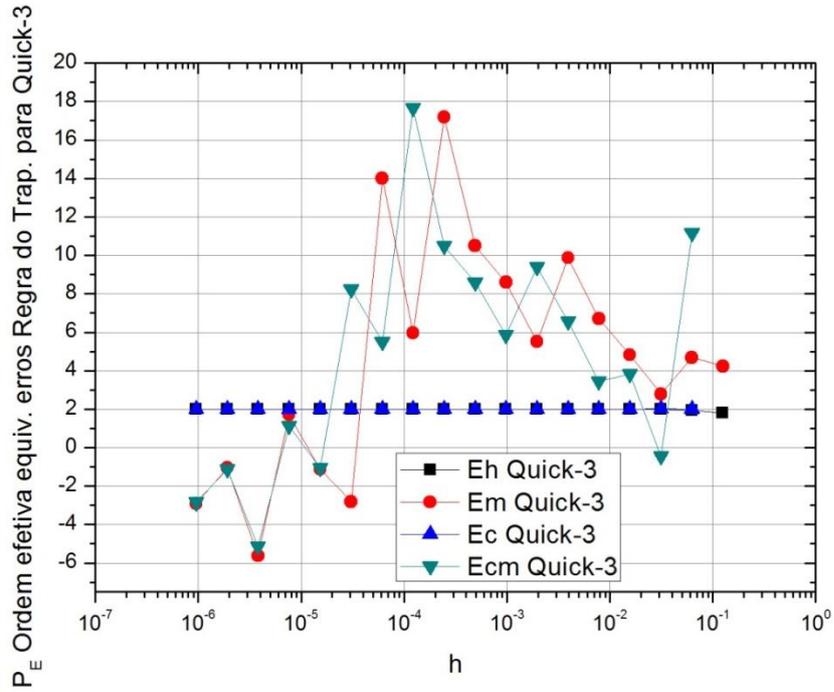
As ordens efetivas equivalentes dos erros com CDS-2 para a Regra do Trapézio são mostrados na Fig. C.16.

Figura C.16: ordens efetivas equivalentes dos erros com CDS-2 para a Regra do Trapézio



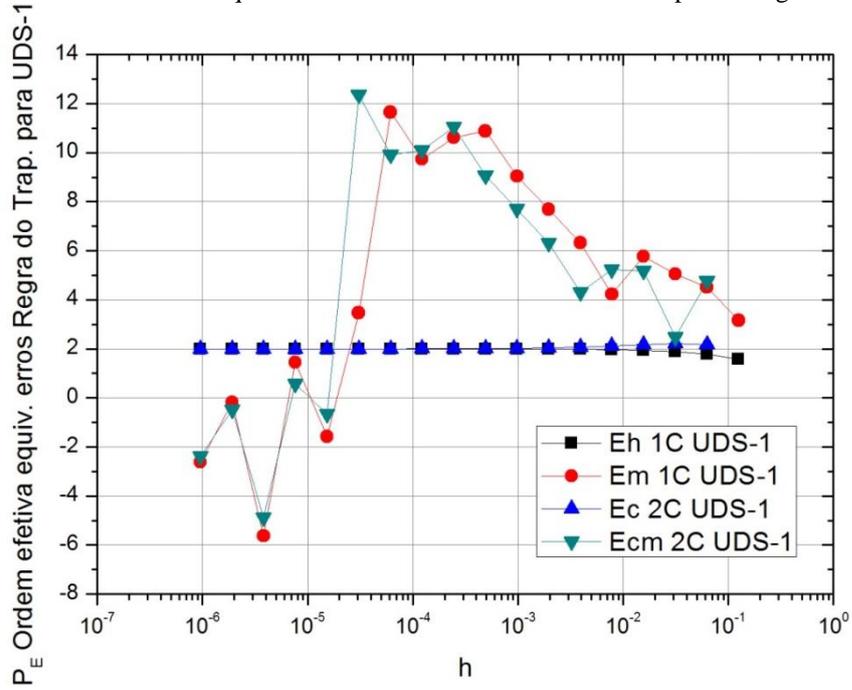
As ordens efetivas equivalentes dos erros com QUICK-3 para a Regra do Trapézio são mostrados na Fig. C.17.

Figura C.17: ordens efetivas equivalentes dos erros com QUICK-3 para a Regra do Trapézio



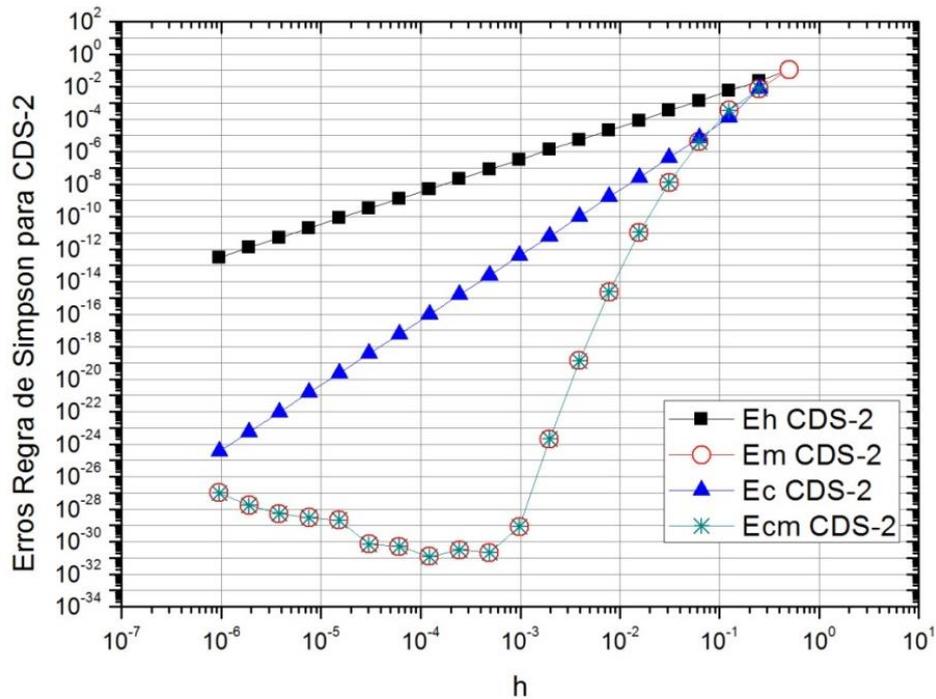
As ordens efetivas equivalentes dos erros com 1 e 2 níveis de CRE com UDS-1 para a Regra do Trapézio são mostrados na Fig. C.18.

Figura C.18: ordens efetivas equivalentes dos erros com UDS-1 e CRE para a Regra do Trapézio

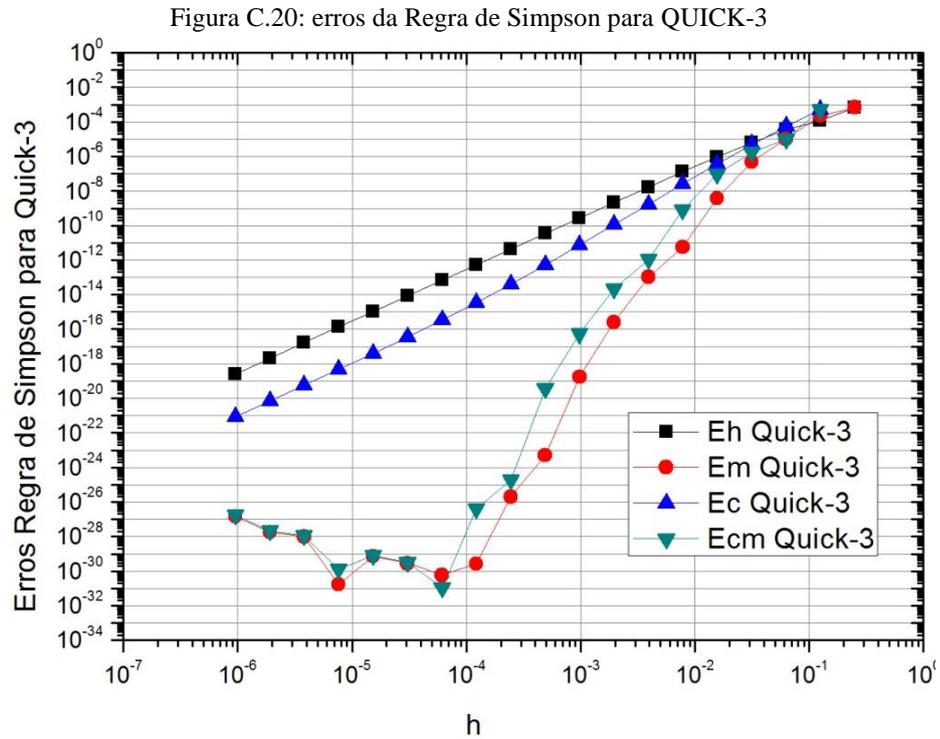


A seguir são exibidos os resultados com a Regra de Simpson. A Fig. C.19 apresenta os erros da Regra de Simpson para CDS-2.

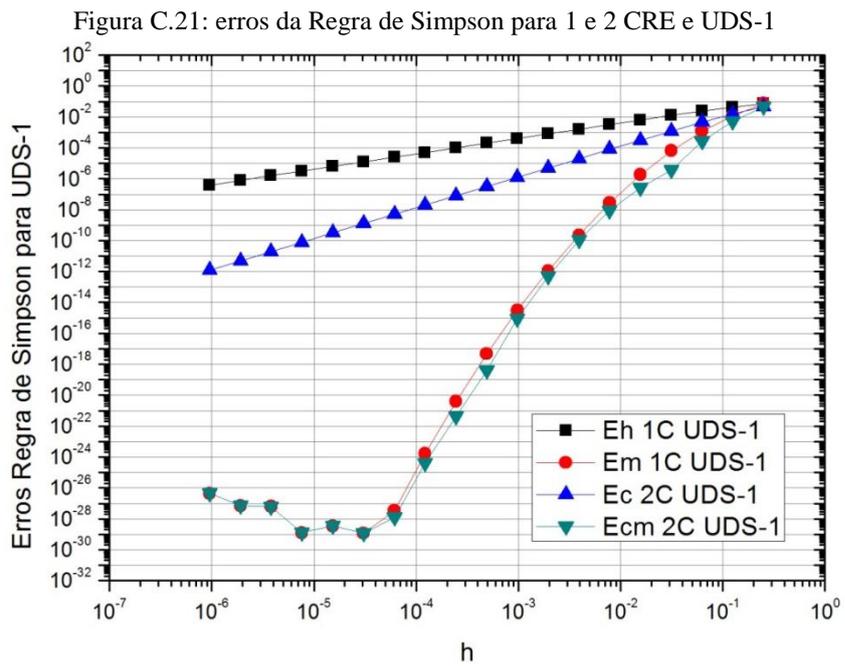
Figura C.19: erros da Regra de Simpson para CDS-2



3. Na Fig. C.20 podem ser vistos os erros numéricos para a Regra de Simpson e QUICK-3.

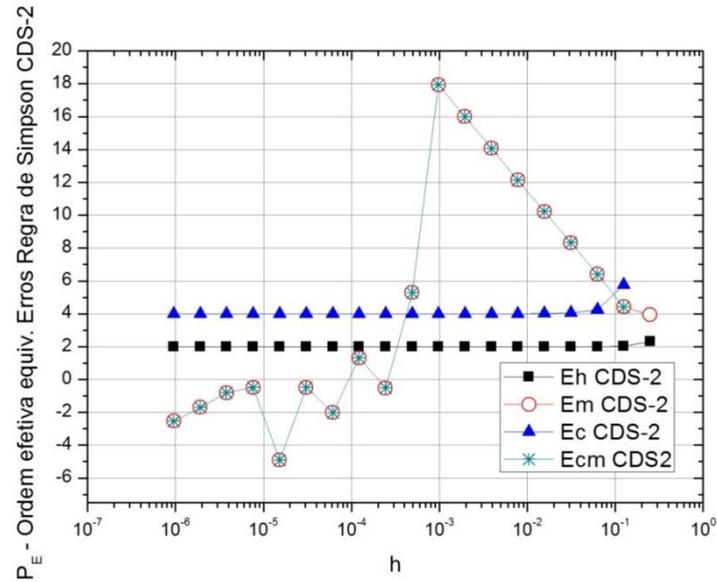


Os erros numéricos para a Regra de Simpson, com 1 e 2 níveis de CRE, podem ser observados na Fig. C.21.



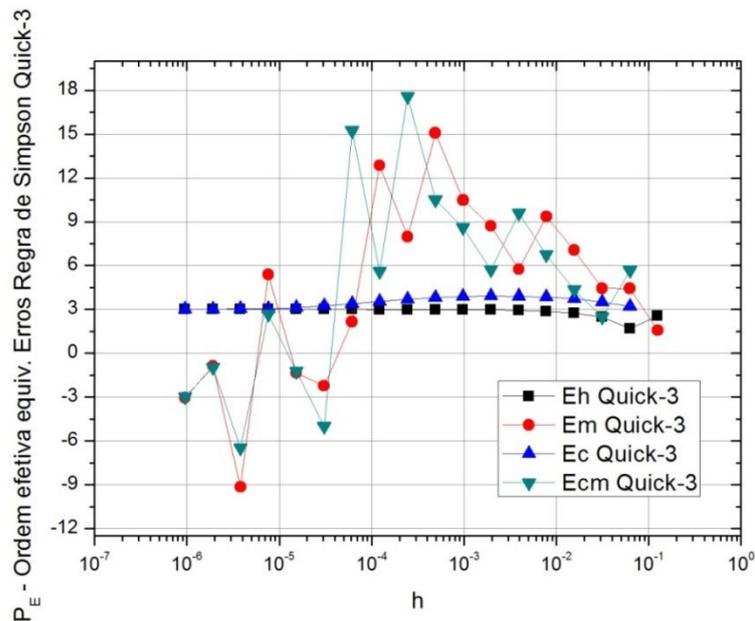
A ordem efetiva equivalente dos erros para a Regra de Simpson e CDS-2 são exibidos na Fig. C.22.

Figura C.22: ordem efetiva equivalente dos erros para a Regra de Simpson e CDS-2



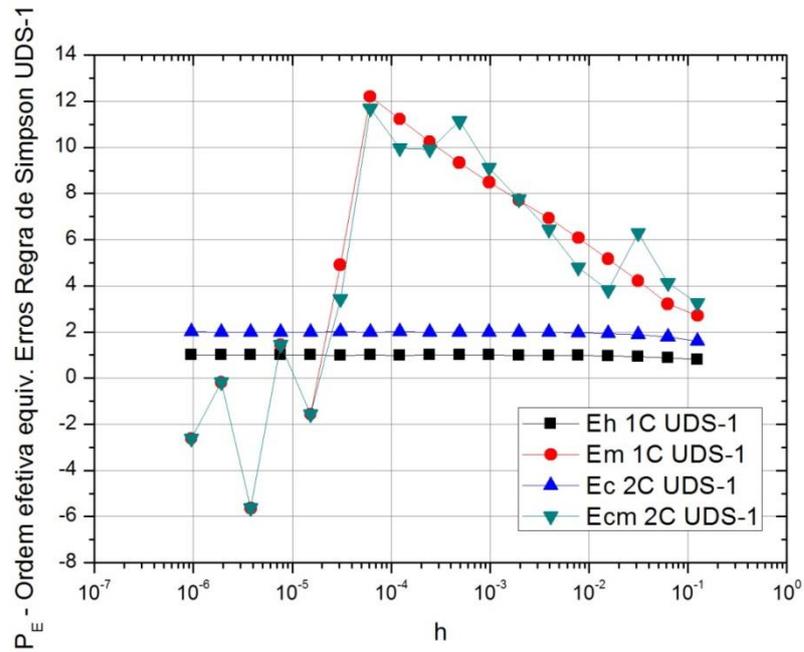
A ordem efetiva equivalente dos erros para a Regra de Simpson e QUICK-3 é exibida na Fig. C.23.

Figura C.23: ordem efetiva equivalente dos erros para a Regra de Simpson e QUICK-3



A ordem efetiva equivalente dos erros para a Regra de Simpson com 1 e 2 níveis de CRE e UDS-1 são exibidos na Fig. C.24.

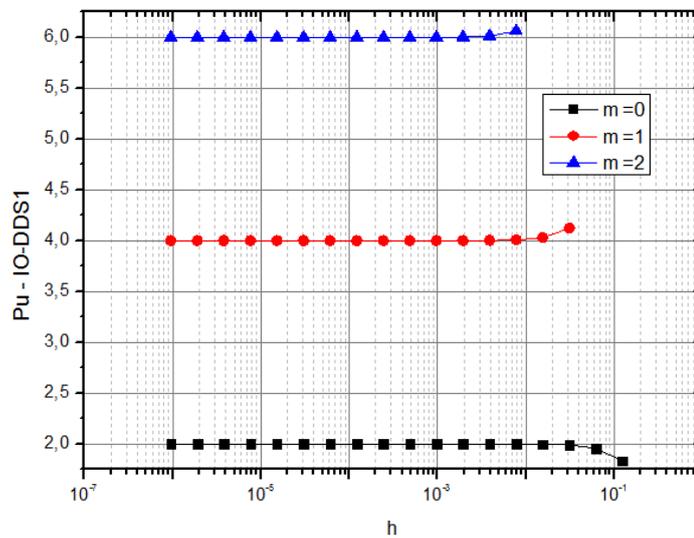
Figura C.24: ordem efetiva equivalente dos erros para a Regra de Simpson com 1 e 2 níveis de CRE e UDS-1



## APÊNDICE D – RESULTADOS COMPLEMENTARES DA INCLINAÇÃO DOS CONTORNOS

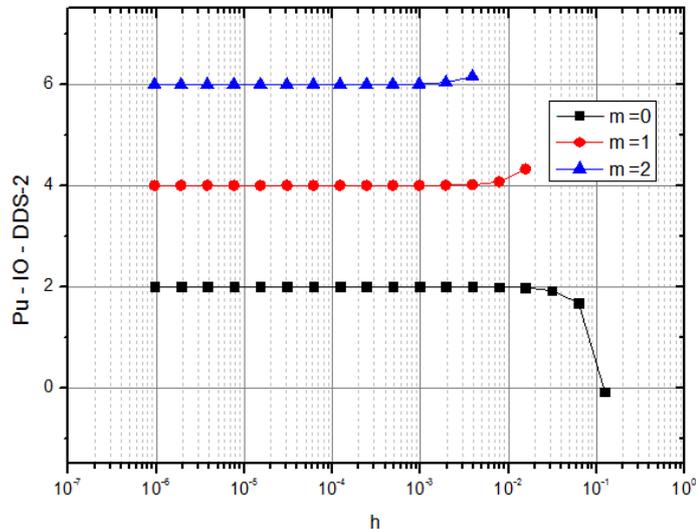
Para a função solução da Eq. (3.2), os resultados obtidos com experimentos numéricos de DDS-1 são mostrados a seguir. Para IO1, a Fig. D.1 mostra o gráfico da ordem aparente ( $P_u$ ) da estimativa de erro em função do tamanho de malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ).

Figura D.1: ordem aparente ( $P_u$ ) da estimativa de erro em função de  $h$  e  $m$  para DDS-1



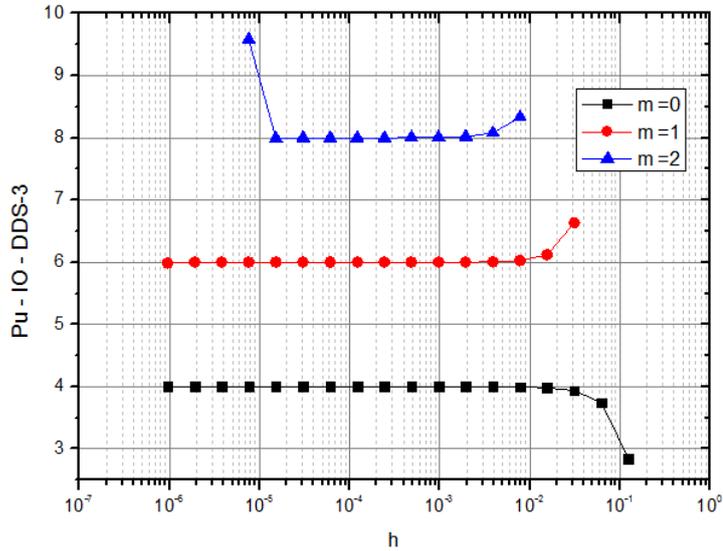
Para IO2, o gráfico da ordem aparente ( $P_u$ ) da estimativa de erro em função do tamanho de malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) é ilustrado na Fig. D.2.

Figura D.2: ordem aparente ( $P_u$ ) da estimativa de erro em função de  $h$  e  $m$  para DDS-2



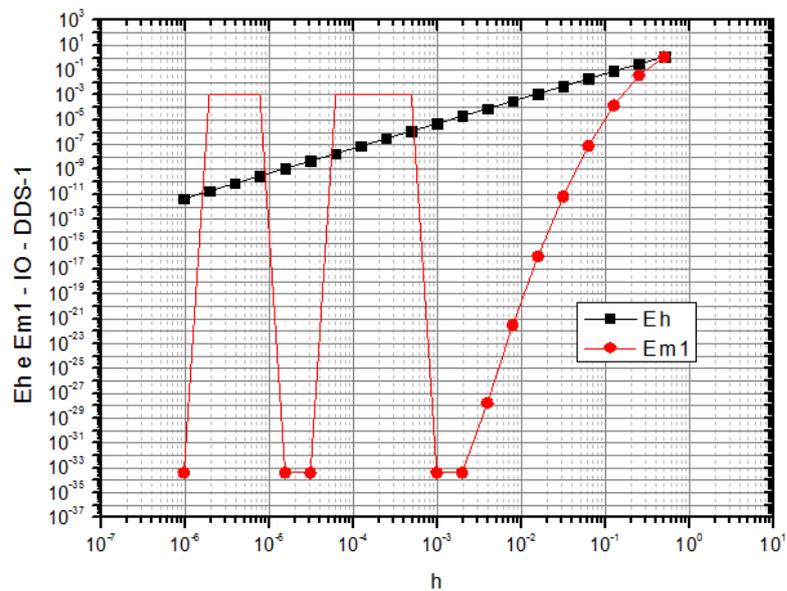
Para IO3, o gráfico da ordem aparente (Pu) da estimativa de erro em função do tamanho de malha (h) e número de extrapolações (m) é mostrado na Fig. D.3.

Figura D.3: ordem aparente (Pu) da estimativa de erro em função de h e m para DDS-3



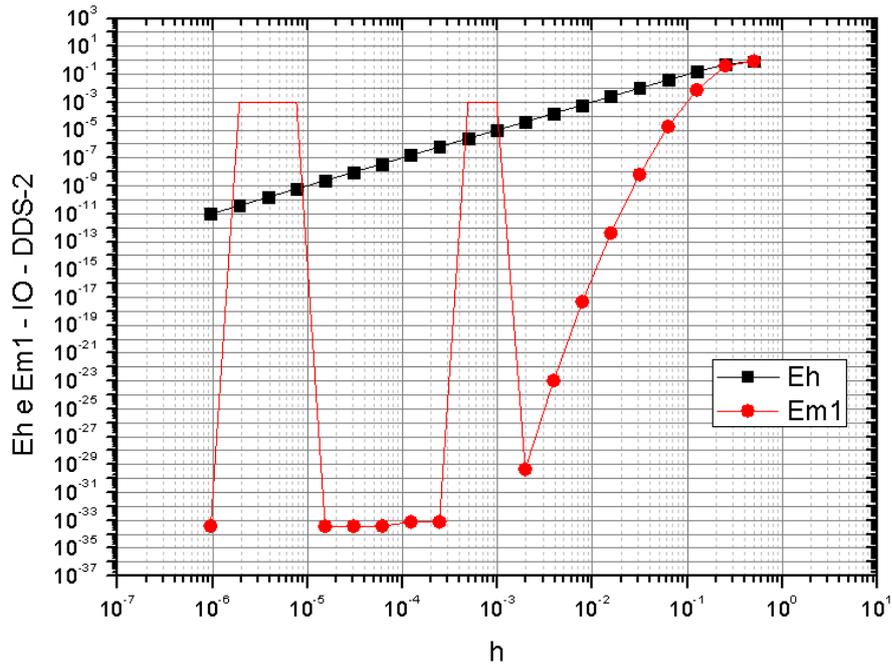
O gráfico de Eh e Em1 versus h, onde Em1 é o erro de MER para o maior número de extrapolações de h, para IO1 é exibido na Fig. D.4.

Figura D.4: Eh e Em1 versus h para IO1



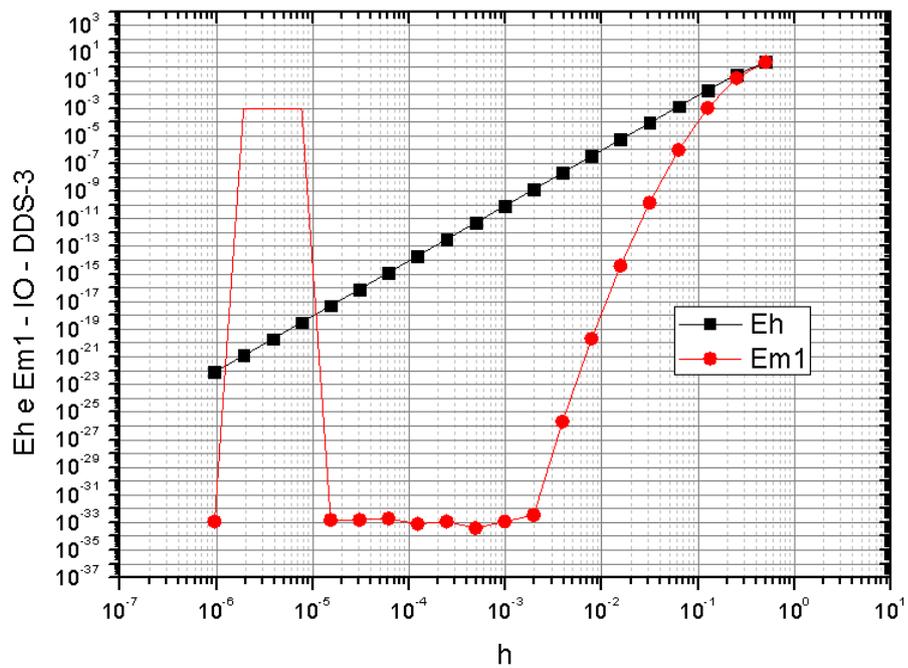
O gráfico de Eh e Em1 versus h, onde Em1 é o erro de MER para o maior número de extrapolações de h, para IO2 é exibido na Fig. D.5.

Figura D.5: Eh e Em1 versus h para IO2



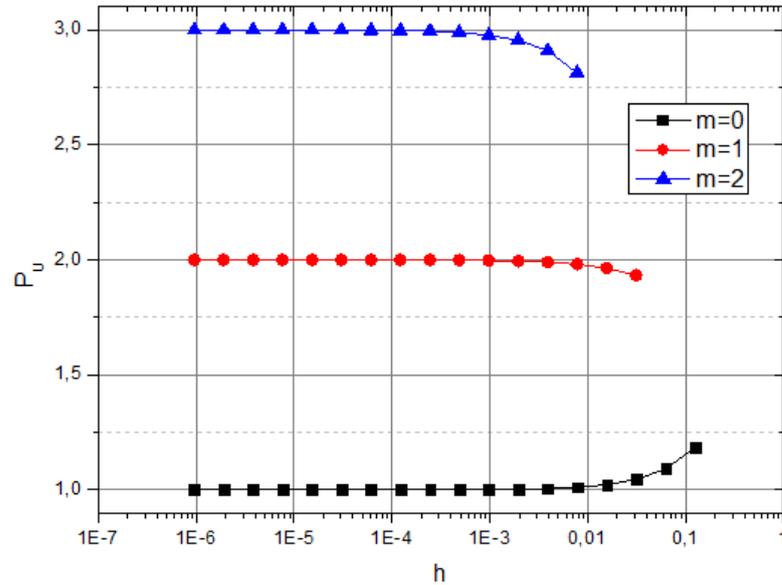
O gráfico de  $E_h$  e  $E_{m1}$  versus  $h$ , onde  $E_{m1}$  é o erro de MER para o maior número de extrapolações de  $h$ , para IO3 é exibido na Fig. D.6.

Figura D.6: Eh e Em1 versus h para IO3



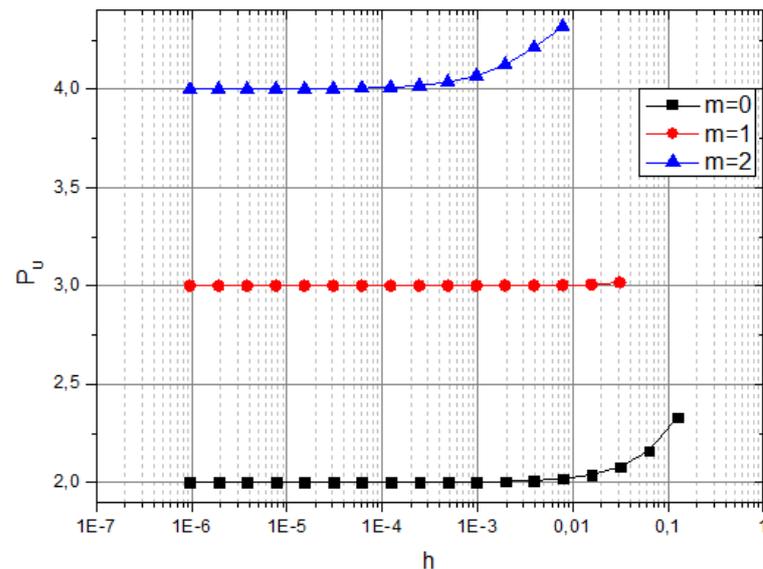
Em Poisson com termo fonte exponencial, para IO1, o gráfico da ordem aparente ( $P_u$ ) da estimativa de erro em função do tamanho de malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) é mostrado na Fig. D.7.

Figura D.7: ordem aparente ( $P_u$ ) da estimativa de erro em função de  $h$  e  $m$  para IO1



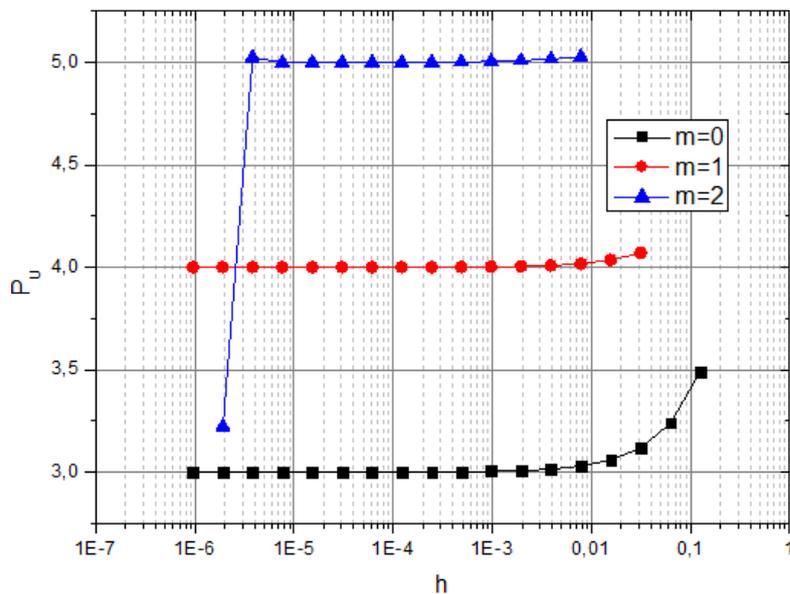
Para IO2, o gráfico da ordem aparente ( $P_u$ ) da estimativa de erro em função do tamanho de malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) é mostrado na Fig. D.8.

Figura D.8: ordem aparente ( $P_u$ ) da estimativa de erro em função de  $h$  e  $m$  para IO2



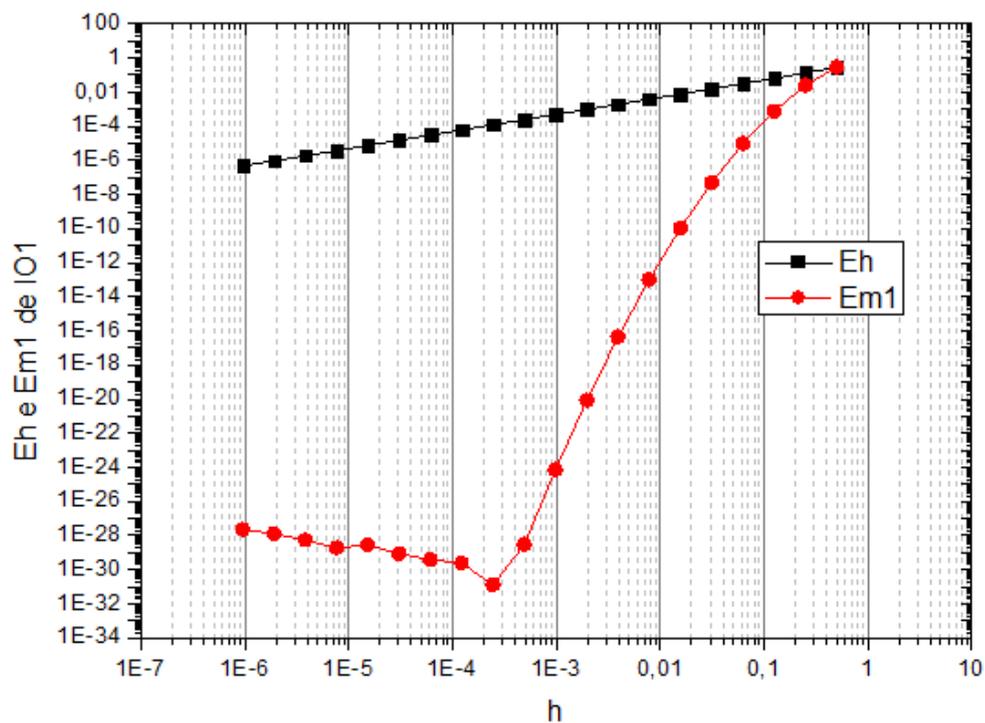
Para IO3, gráfico da ordem aparente ( $P_u$ ) da estimativa de erro em função do tamanho de malha ( $h$ ) e número de extrapolações ( $m$ ) é mostrado na Fig. D.9.

Figura D.9: ordem aparente ( $P_u$ ) da estimativa de erro em função de  $h$  e  $m$  para IO3

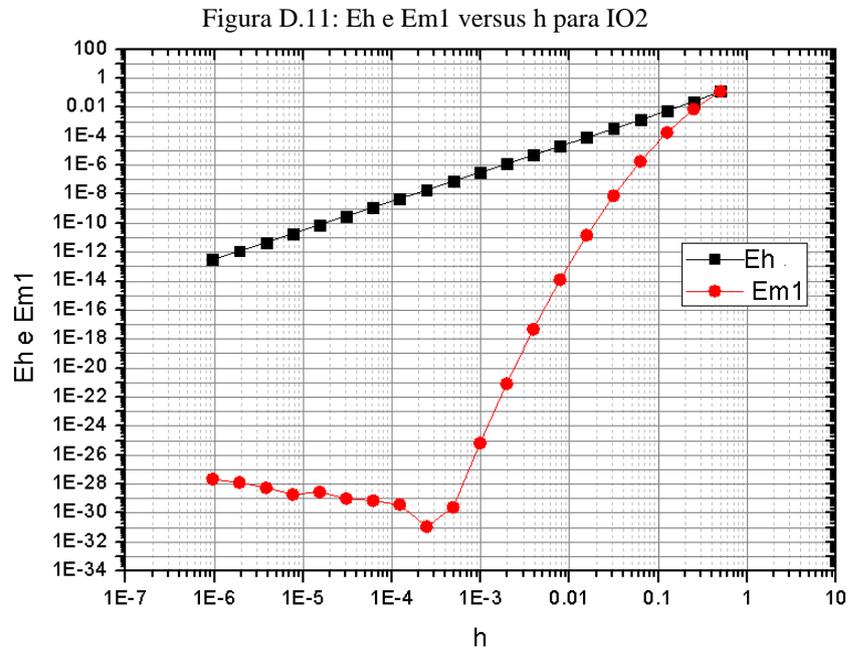


O gráfico de  $E_h$  e  $E_{m1}$  versus  $h$ , onde  $E_{m1}$  é o erro de MER para o maior número de extrapolações de  $h$ , para IO1 é exibido na Fig. D.10.

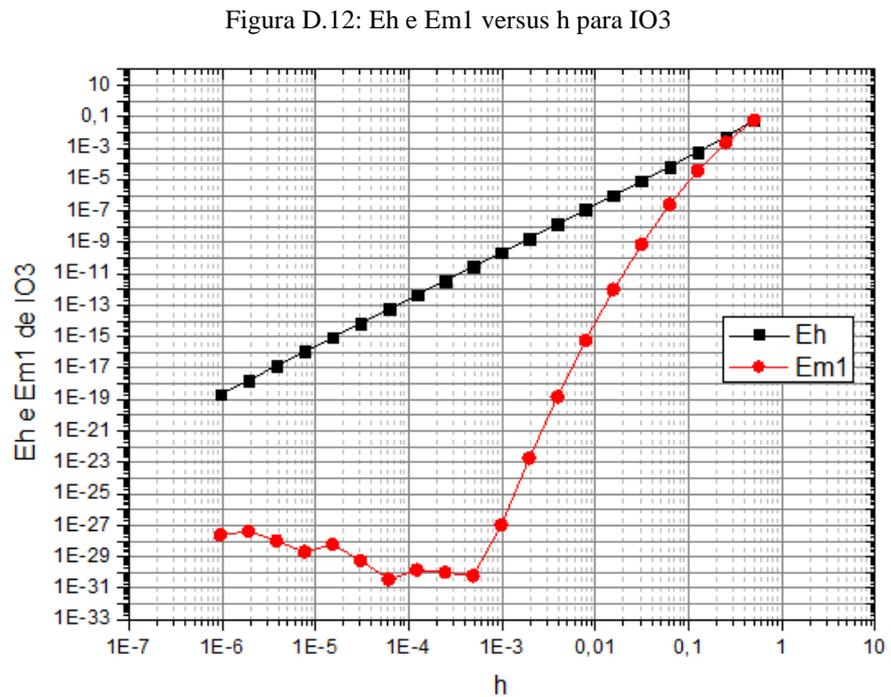
Figura D.10:  $E_h$  e  $E_{m1}$  versus  $h$  para IO1



O gráfico de  $E_h$  e  $Em_1$  versus  $h$ , onde  $Em_1$  é o erro de MER para o maior número de extrapolações de  $h$ , para IO2 é exibido na Fig. D.11.

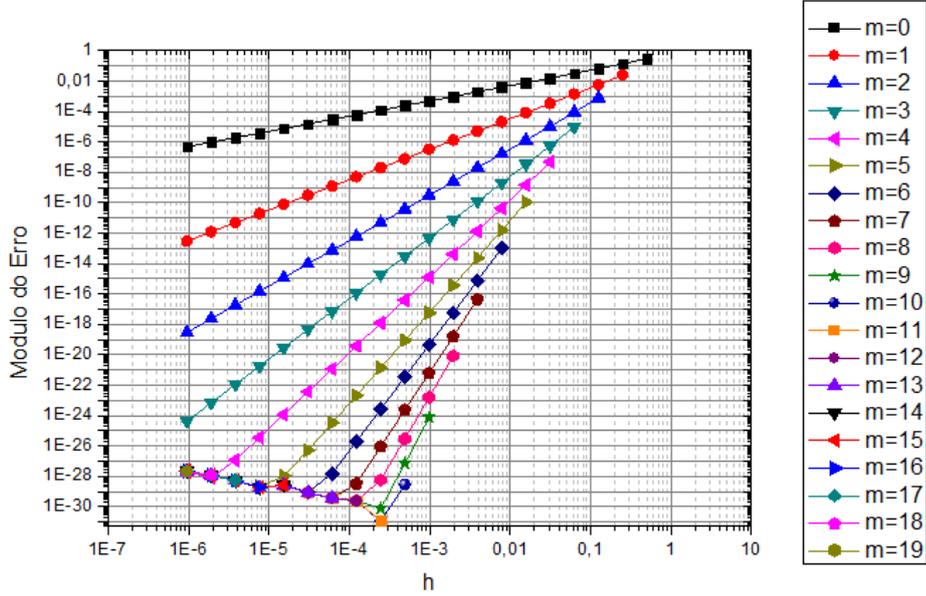


O gráfico de  $E_h$  e  $Em_1$  versus  $h$ , onde  $Em_1$  é o erro de MER para o maior número de extrapolações de  $h$ , para IO3 é exibido na Fig. D.12.



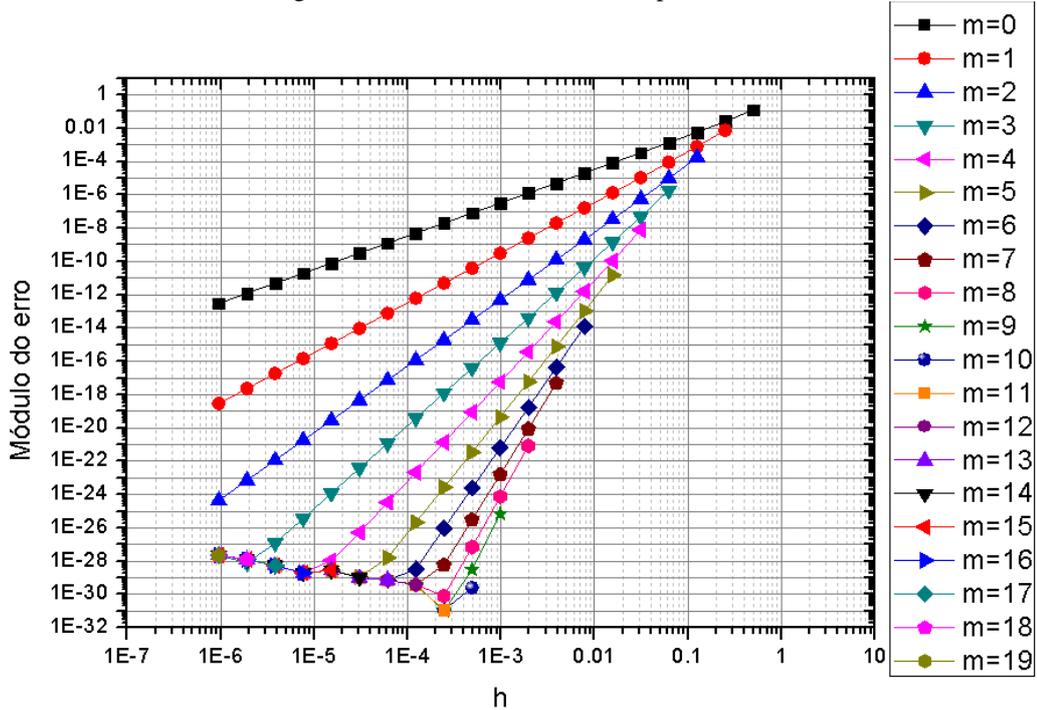
O gráfico com  $E_m$  versus  $h$  versus  $m$  para IO1 é apresentado na Fig. D.13.

Figura D.13:  $E_m$  versus  $h$  versus  $m$  para IO1



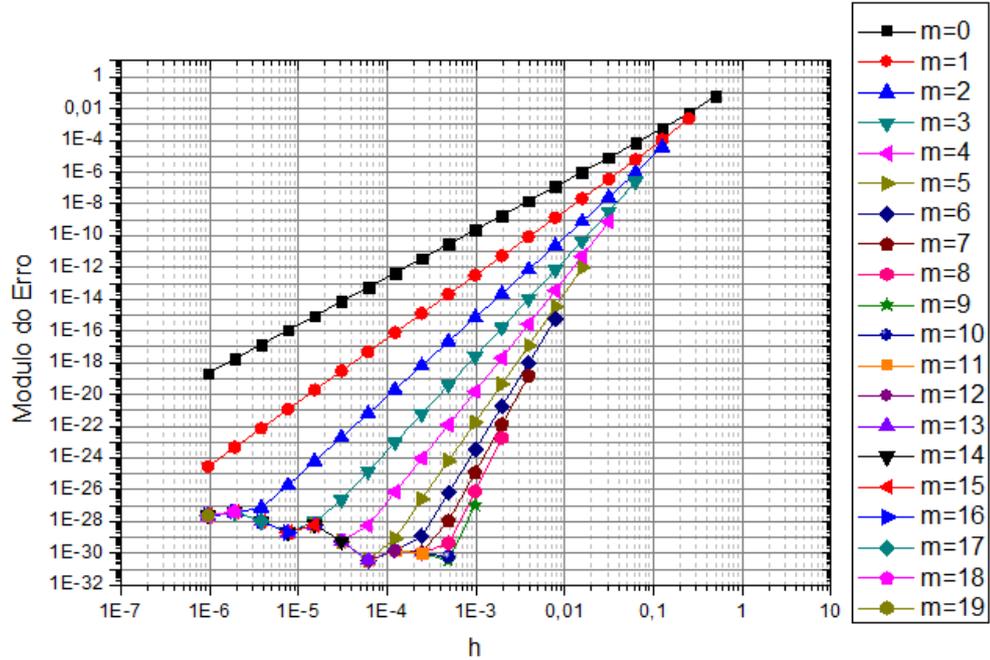
O gráfico com  $E_m$  versus  $h$  versus  $m$  para IO2 é apresentado na Fig. D.14.

Figura D.14:  $E_m$  versus  $h$  versus  $m$  para IO2



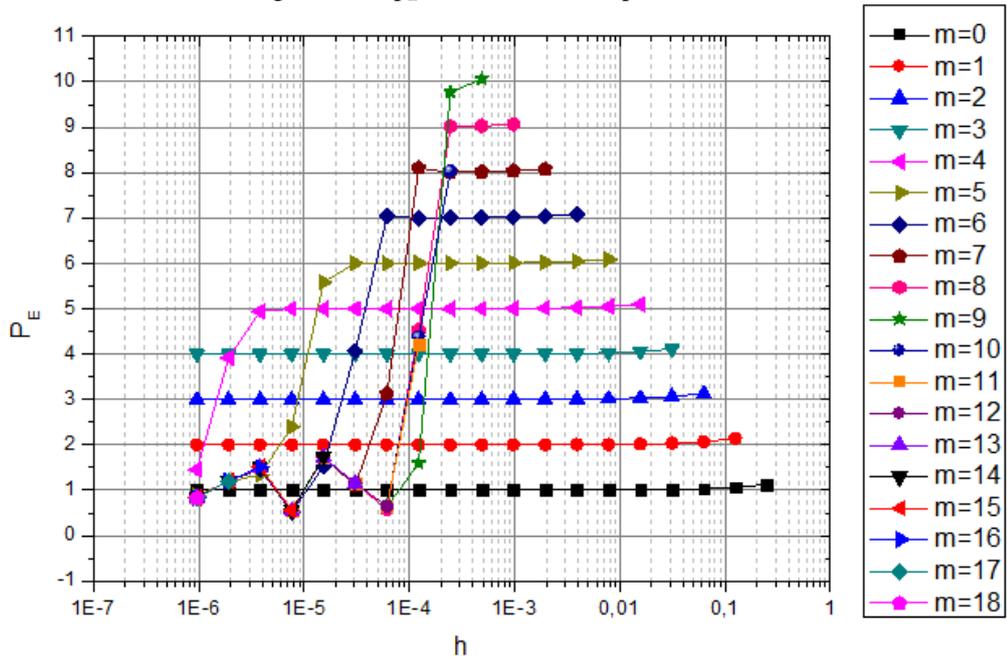
O gráfico com  $E_m$  versus  $h$  versus  $m$  para IO3 é apresentado na Fig. D.15.

Figura D.15:  $E_m$  versus  $h$  versus  $m$  para IO3



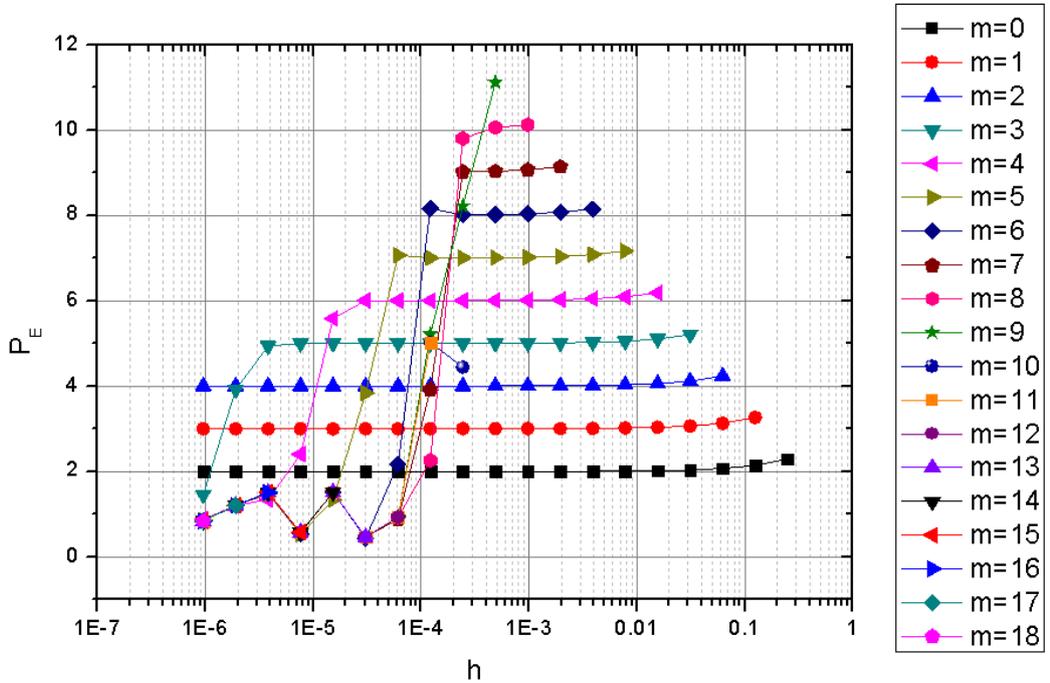
O gráfico com  $p_E$  versus  $h$  versus  $m$  para a IO1 é exibido na Fig. D.16.

Figura D.16:  $p_E$  versus  $h$  versus  $m$  para a IO1



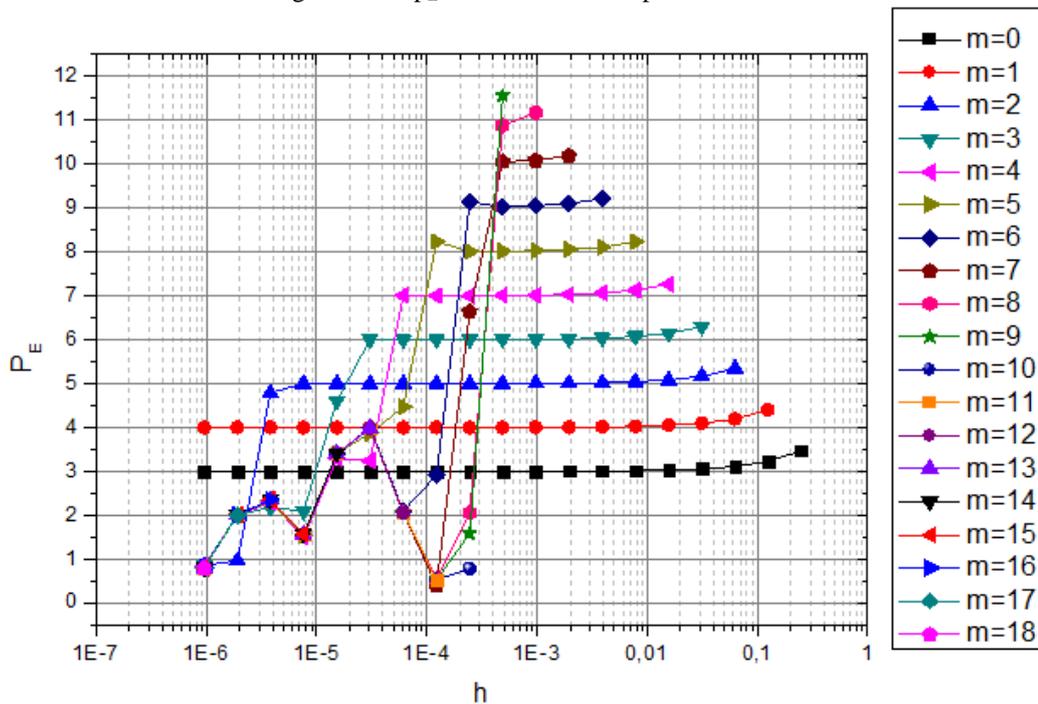
O gráfico com  $p_E$  versus  $h$  versus  $m$  para a IO2 é exibido na Fig. D.17.

Figura D.17:  $p_E$  versus  $h$  versus  $m$  para a IO2

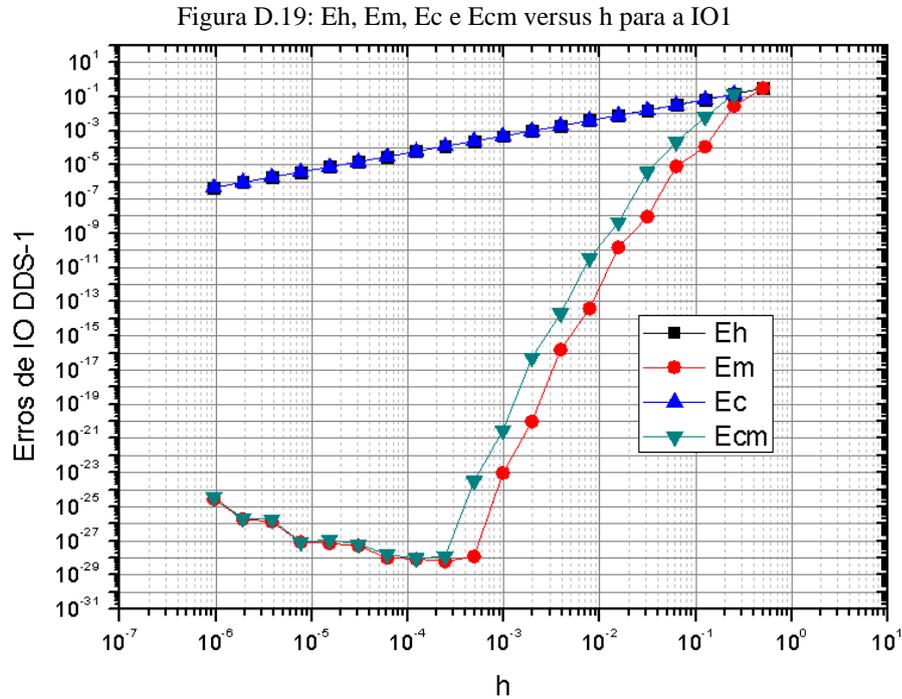


O gráfico com  $p_E$  versus  $h$  versus  $m$  para a IO3 é exibido na Fig. D.18.

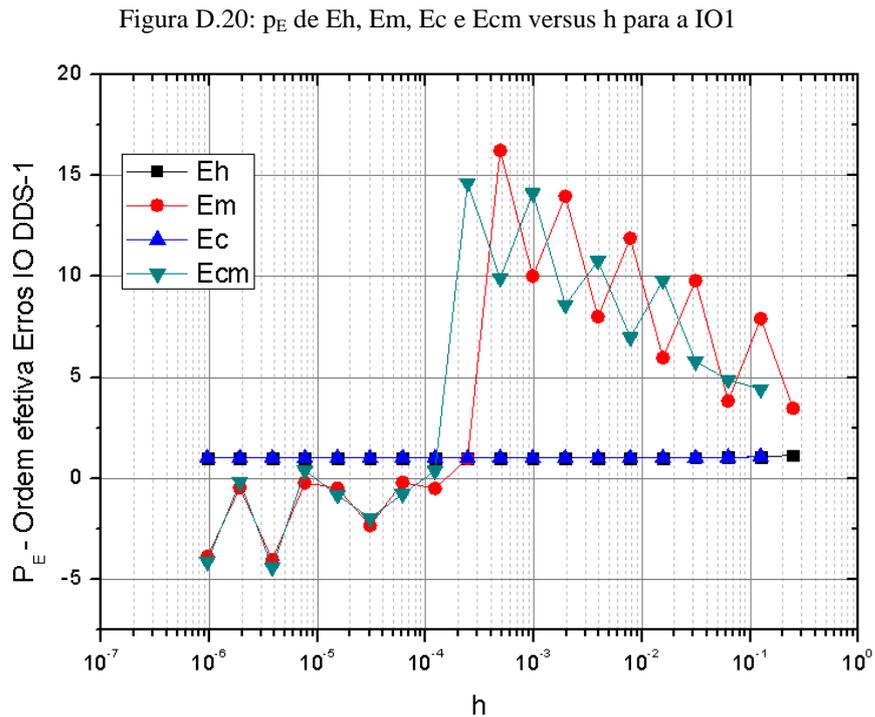
Figura D.18:  $p_E$  versus  $h$  versus  $m$  para a IO3



O gráfico com as curvas de  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  versus  $h$  para a IO com DDS-1 é mostrado na Fig. D.19.

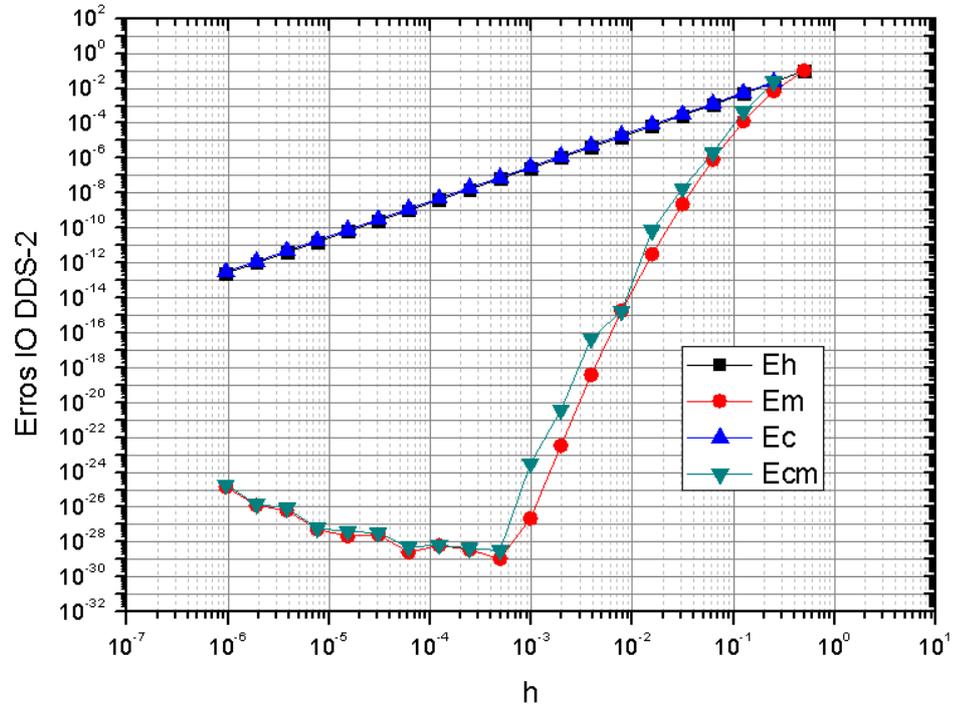


A ordem efetiva equivalente de cada curva  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  de IO com DDS-1 é mostrada na Fig. D.20.



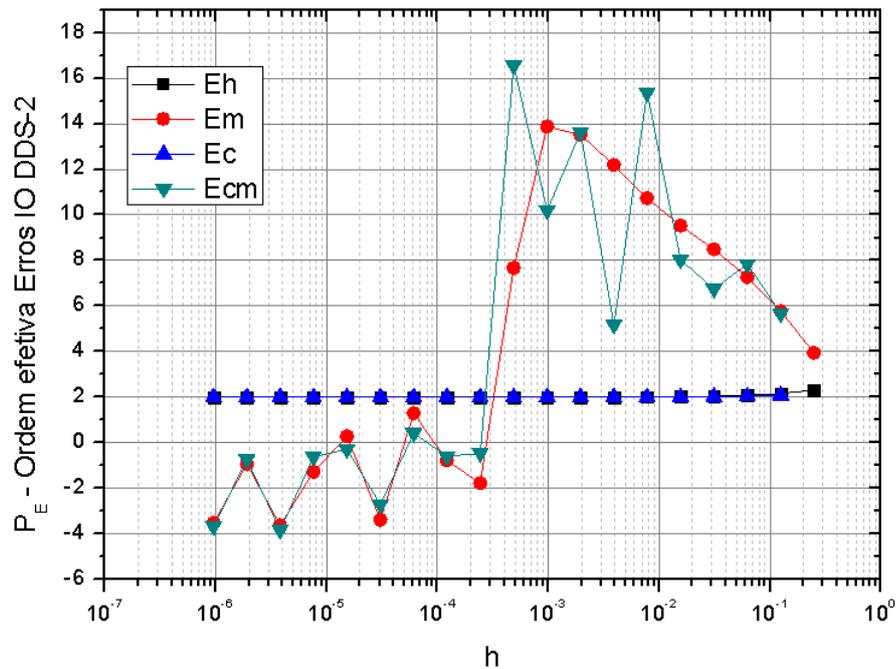
O gráfico com as curvas de  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  versus  $h$  para a IO com DDS-2 é mostrado na Fig. D.21.

Figura D.21:  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  versus  $h$  para a IO2



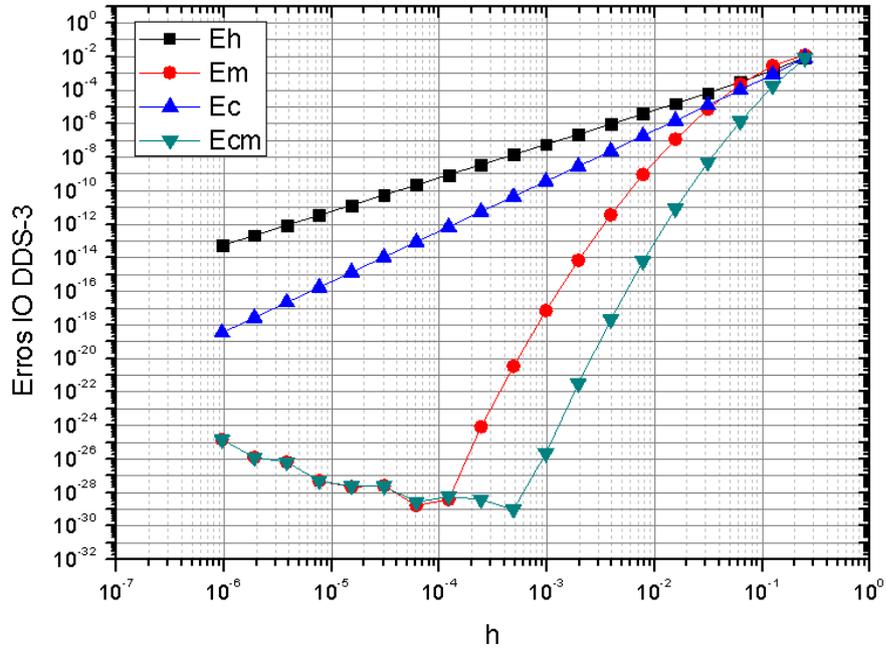
A ordem efetiva equivalente de cada curva  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  de IO com DDS-2 é mostrada na Fig. D.22.

Figura D.22:  $p_E$  de  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  versus  $h$  para a IO2



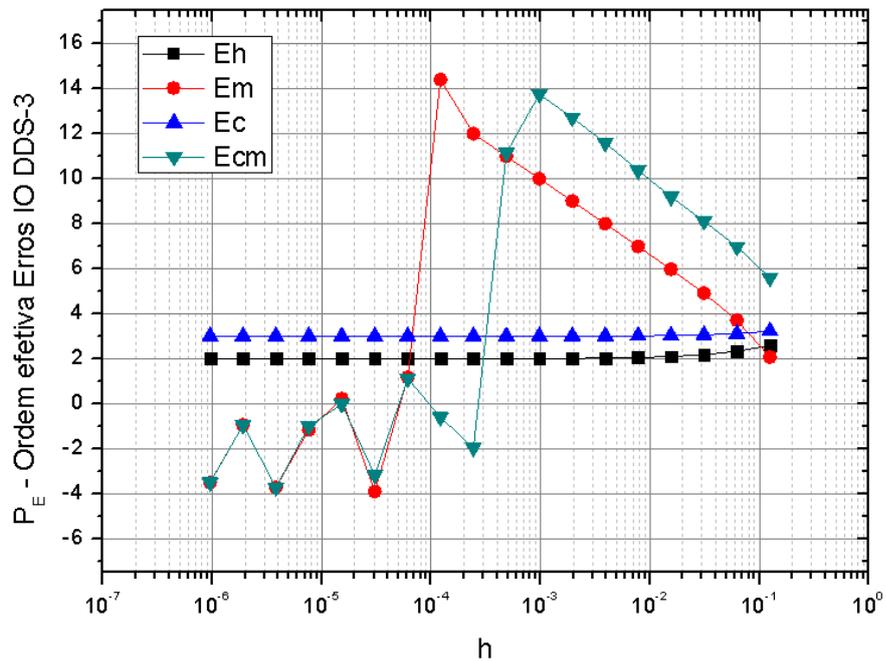
O gráfico com as curvas de  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  versus  $h$  para a IO com DDS-3 é mostrado na Fig. D.23.

Figura D.23:  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  versus  $h$  para a IO3



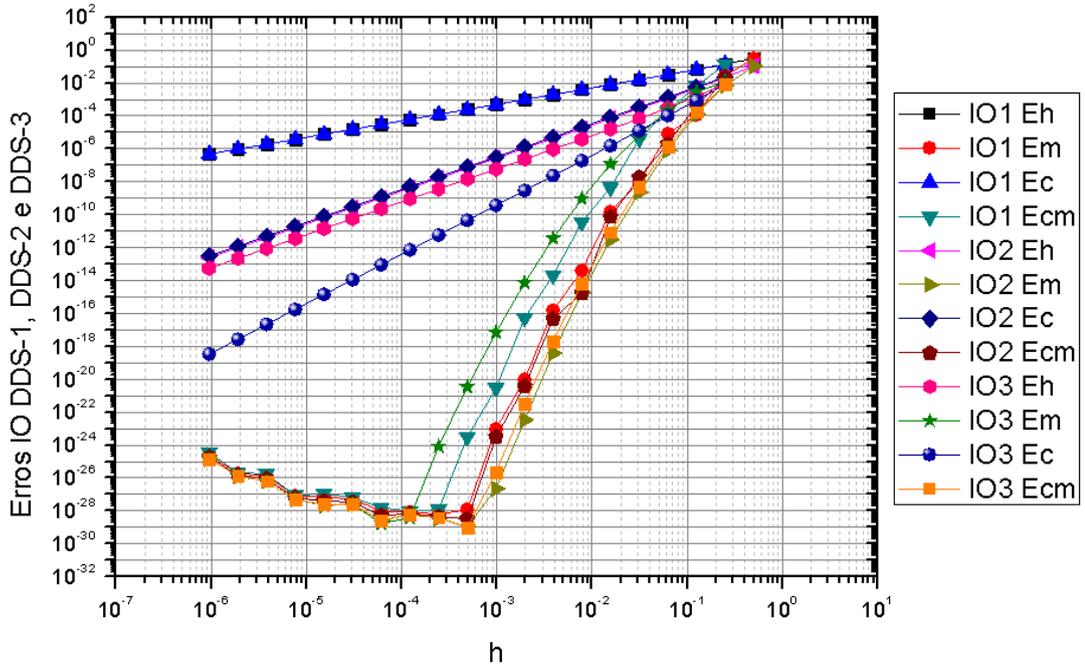
A ordem efetiva equivalente de cada curva  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  de IO com DDS-3 é mostrado na Fig. D.24.

Figura D.24:  $p_E$  de  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  versus  $h$  para a IO3



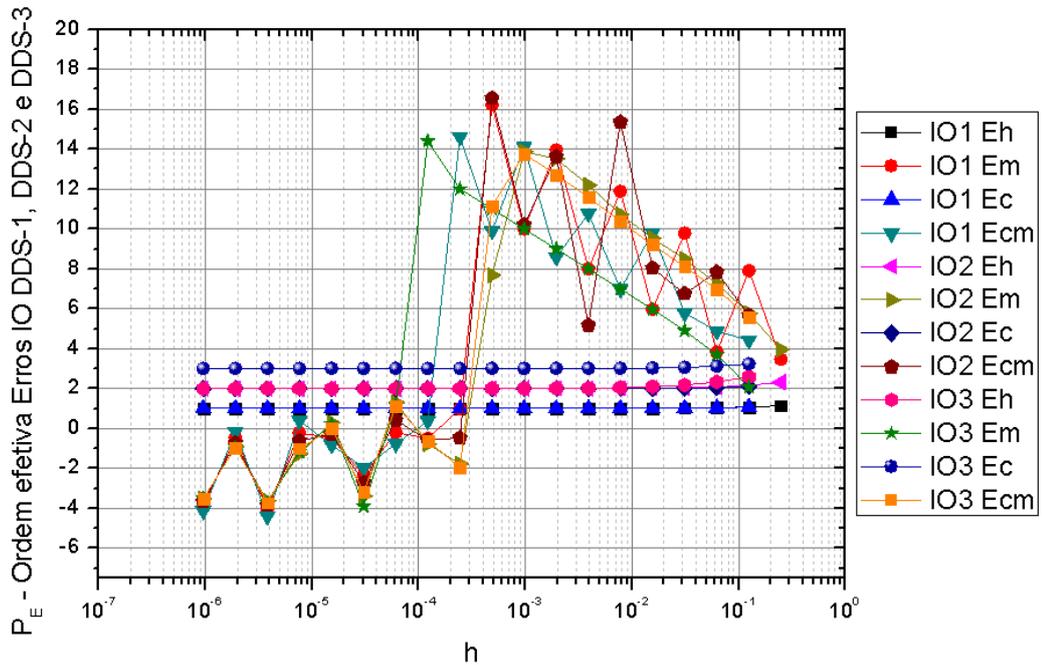
As curvas de  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  versus  $h$  para IO com DDS-1, DDS-2 e DDS-3 são exibidas na Fig. D.25.

Figura D.25:  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  versus  $h$  para IO com DDS-1, DDS-2 e DDS-3



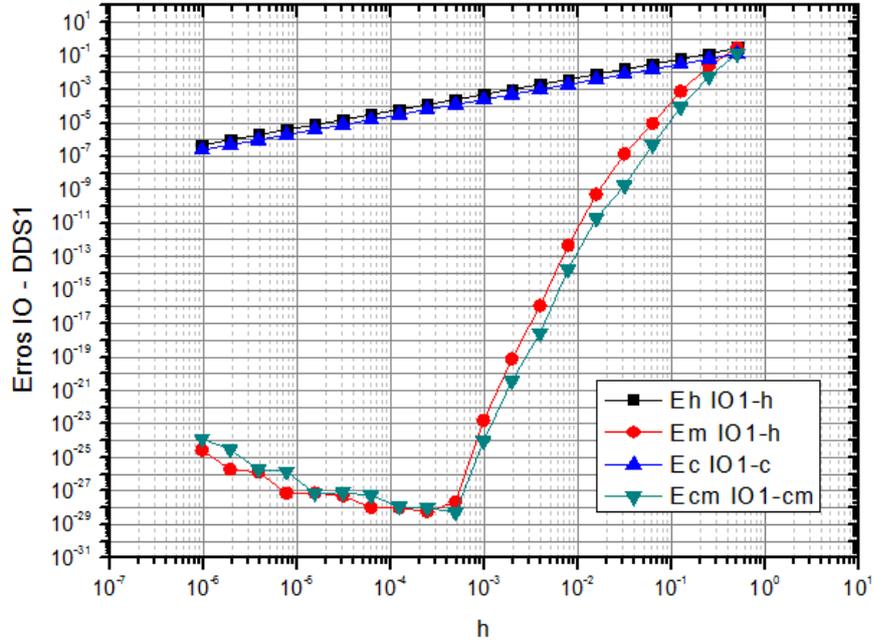
A ordem efetiva equivalente de  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  versus  $h$  para IO com DDS-1, DDS-2 e DDS-3 é exibida na Fig. D.26.

Figura D.26:  $p_E$  de  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  versus  $h$  para IO com DDS-1, DDS-2 e DDS-3



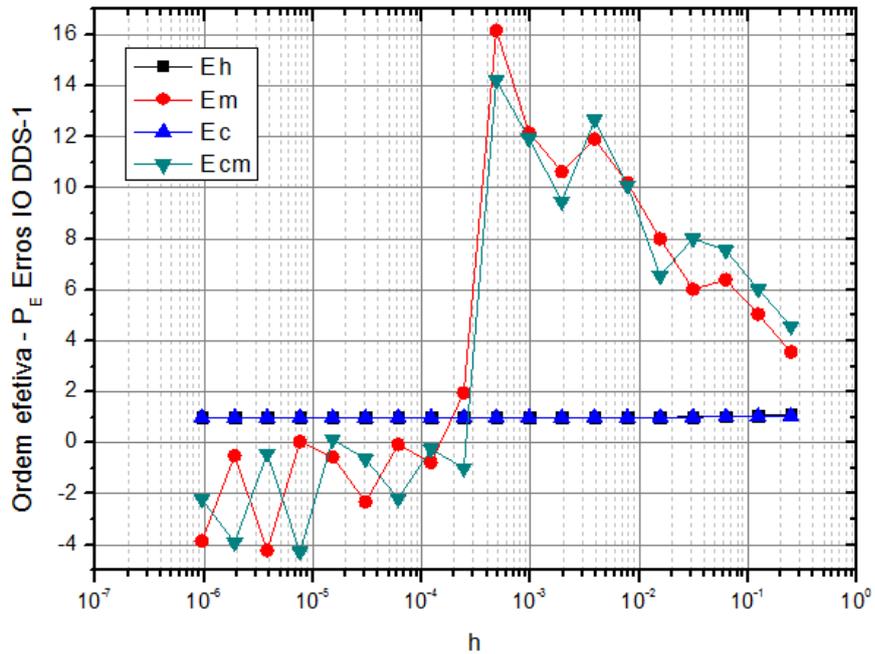
Testes em Poisson 1D com termo fonte exponencial e discretização CDS-4 compacto geraram, conforme Fig. D.27 as curvas de  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  versus  $h$  para a IO com DDS-1.

Figura D.27:  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  versus  $h$  para a IO com DDS-1 para CDS-4 compacto

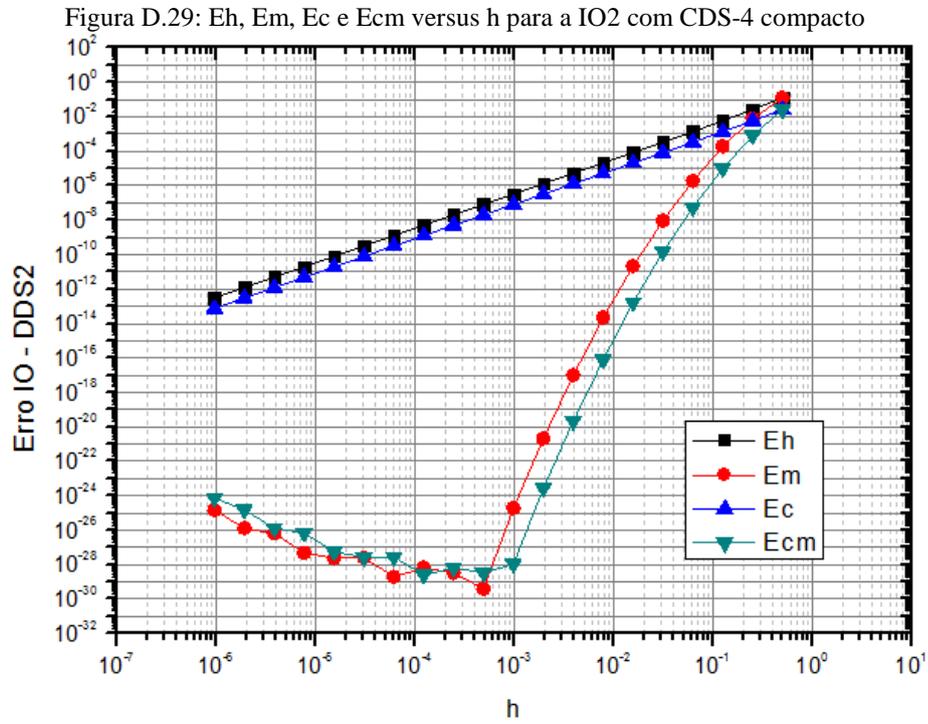


A ordem efetiva equivalente de cada curva  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  de IO com DDS-1 é mostrada na Fig. D.28.

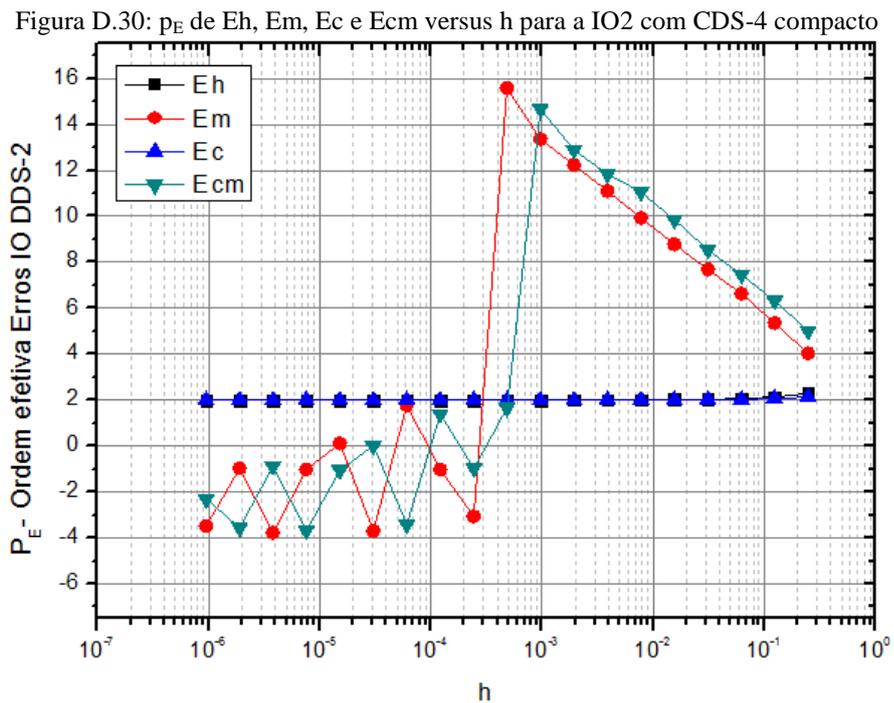
Figura D.28:  $p_E$  de  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  versus  $h$  para a IO1 com CDS-4 compacto



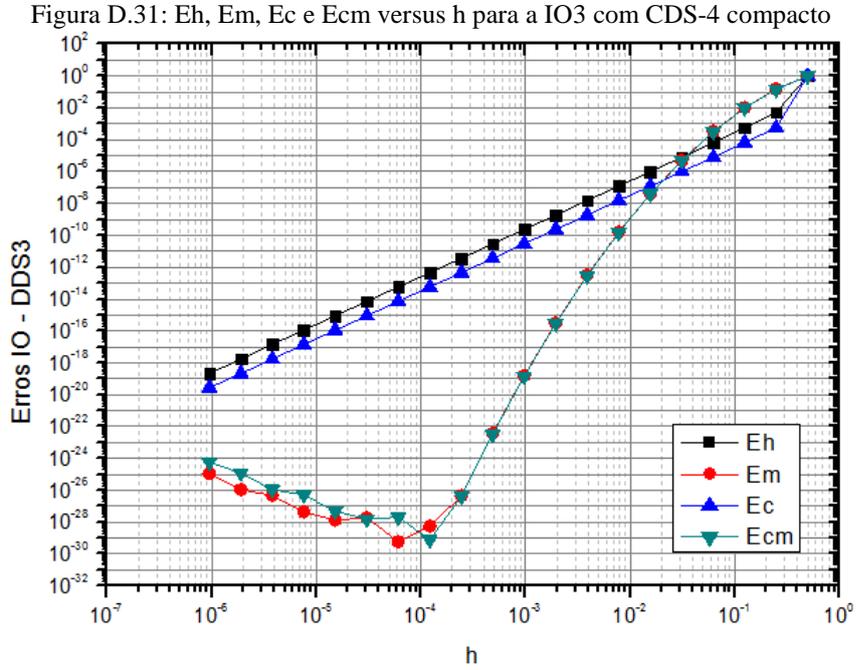
O gráfico com as curvas de  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  versus  $h$  para a IO com DDS-2 é mostrado na Fig. D.29.



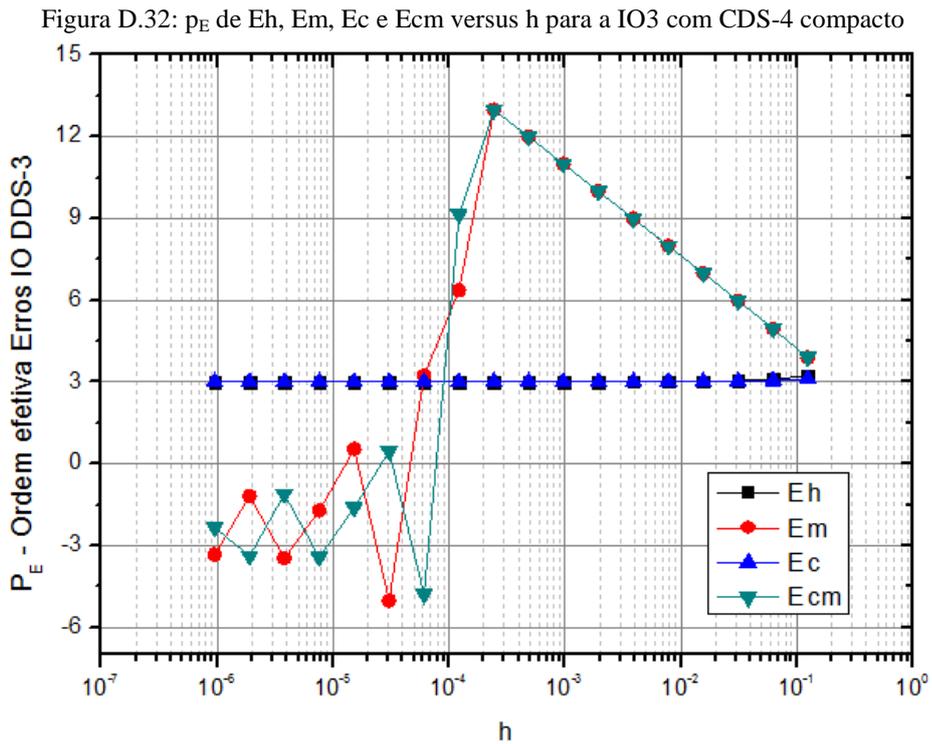
A ordem efetiva equivalente de cada curva  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  de IO com DDS-2 é mostrada na Fig. D.30.



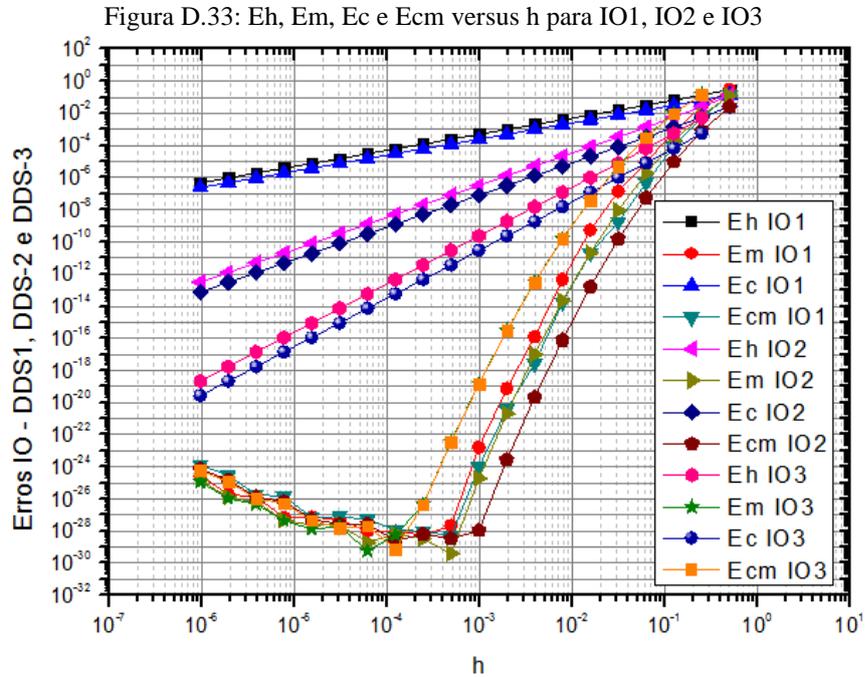
O gráfico com as curvas de  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  versus  $h$  para a IO com DDS-3 é mostrado na Fig. D.31.



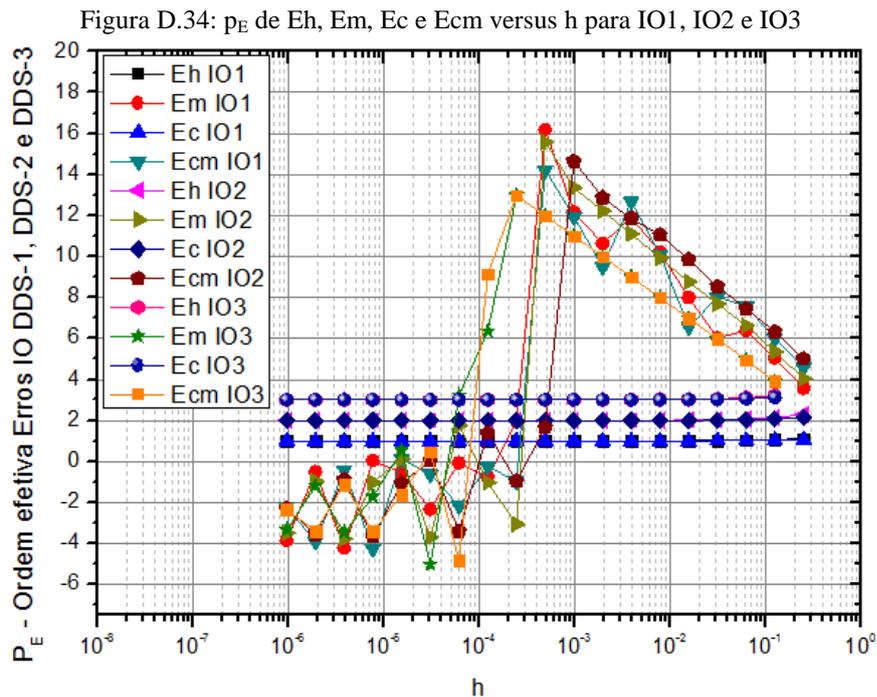
A ordem efetiva equivalente de cada curva  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  de IO com DDS-3 é mostrada na Fig. D.32.



As imagens de  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  versus  $h$  para IO com DDS-1, DDS-2 e DDS-3 são mostradas na Fig. D.33.

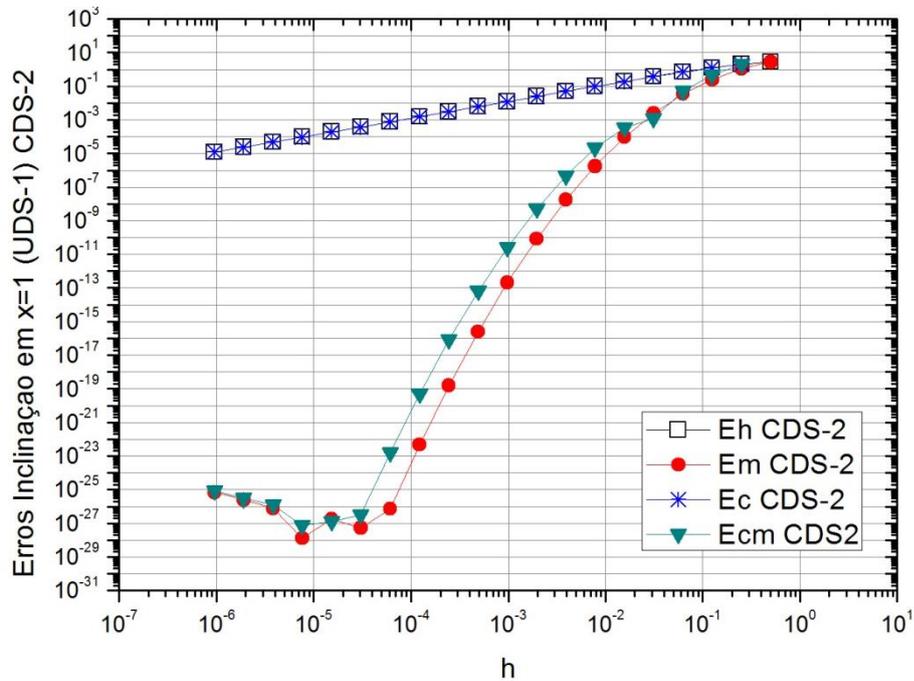


A ordem efetiva equivalente de  $E_h$ ,  $E_m$ ,  $E_c$  e  $E_{cm}$  versus  $h$  para IO com DDS-1, DDS-2 e DDS-3 é mostrada na Fig. D.34.



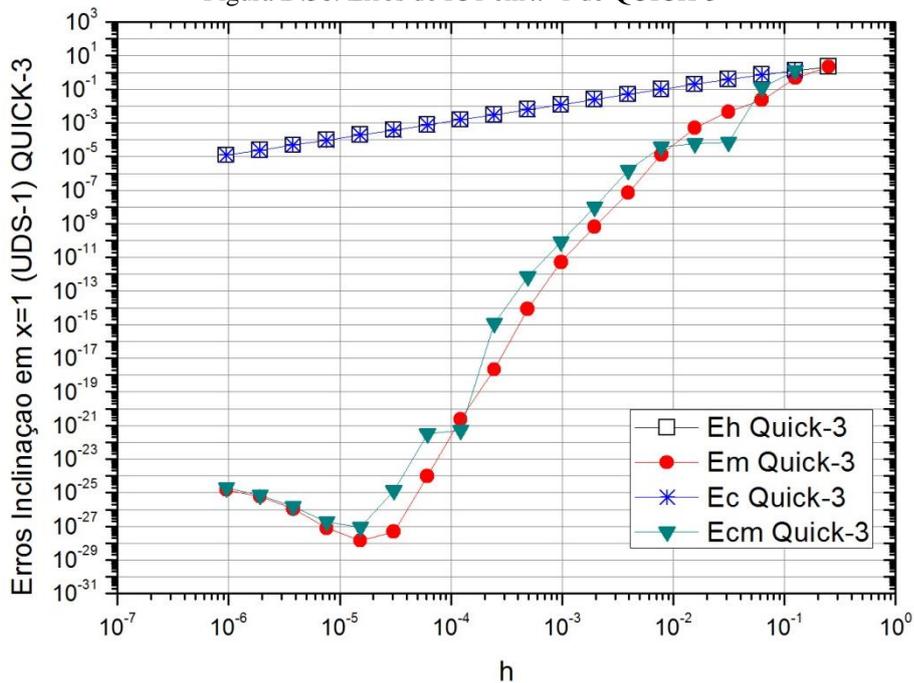
Dos experimentos numéricos na inclinação em  $x = 1$ , contorno direito de uma malha unitária, na equação 1D de advecção-difusão de calor, Eq. (3.11), pode ser visto na Fig. D.35 os resultados dos erros numéricos do caso (UDS-1) CDS-2.

Figura D.35: Erros de IO1 em  $x=1$  de CDS-2

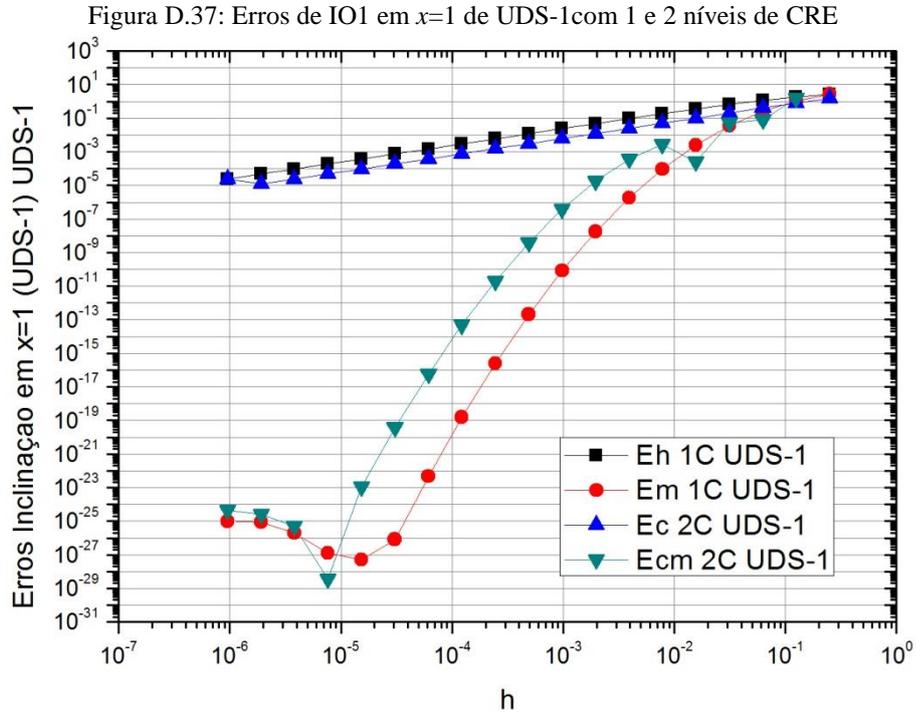


A Fig. D.36 exibe os erros numéricos de IO1 do caso QUICK-3.

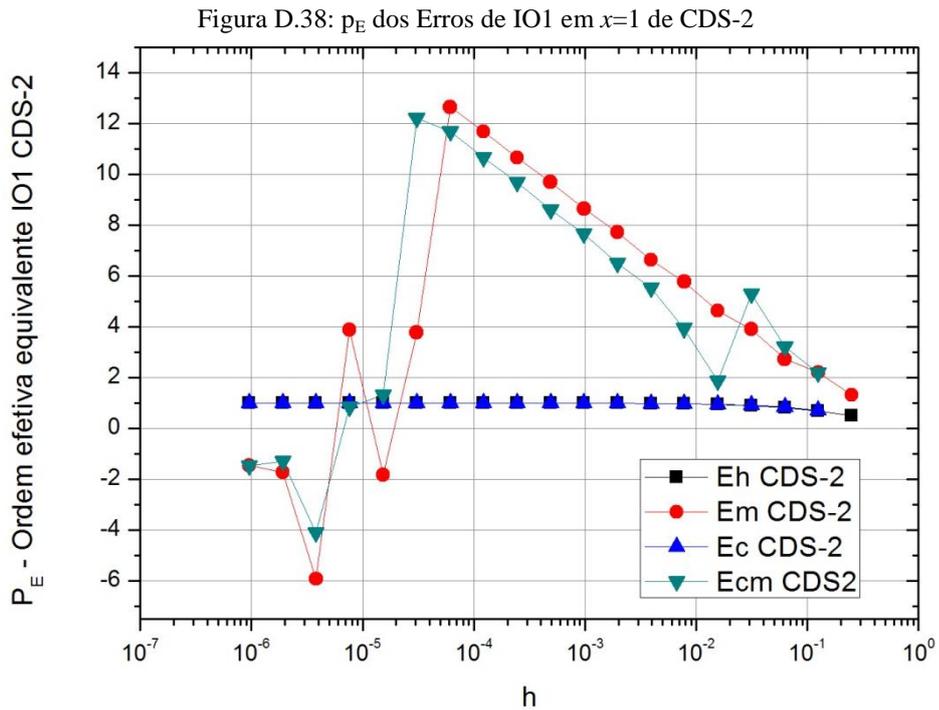
Figura D.36: Erros de IO1 em  $x=1$  de QUICK-3



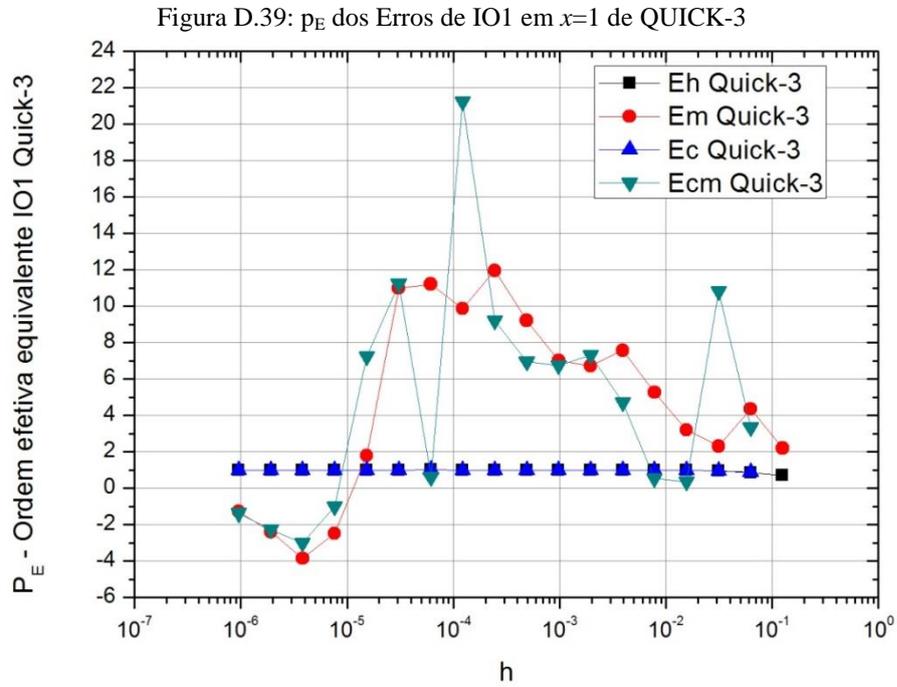
A Fig. D.37 exibe os erros numéricos de IO1 do caso UDS-1 com 1 e 2 níveis de CRE.



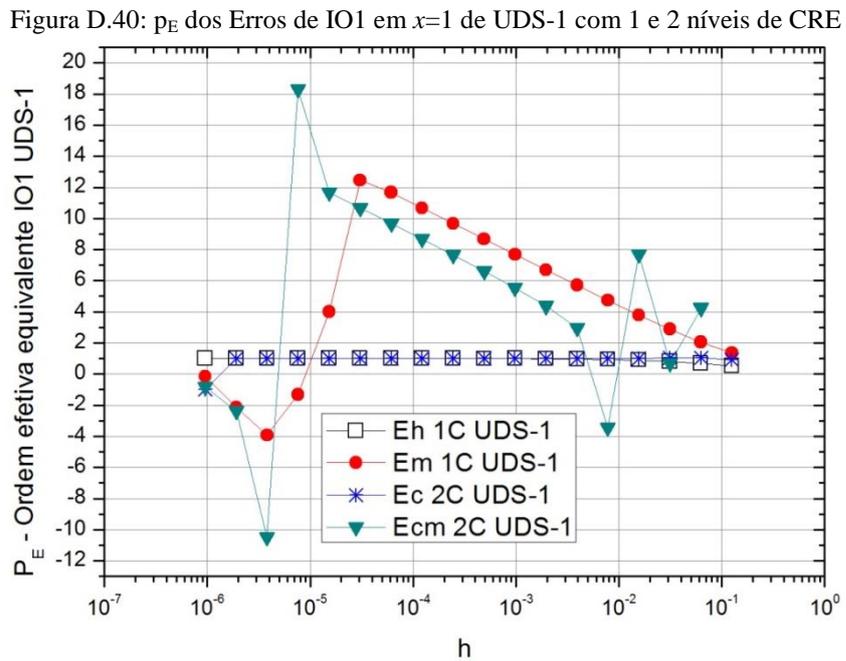
A ordem efetiva equivalente erros de IO1 em  $x=1$  de CDS-2 é mostrada na Fig. D.38.



A ordem efetiva equivalente erros de IO1 em  $x=1$  de QUICK-3 é mostrada na Fig. D.39.

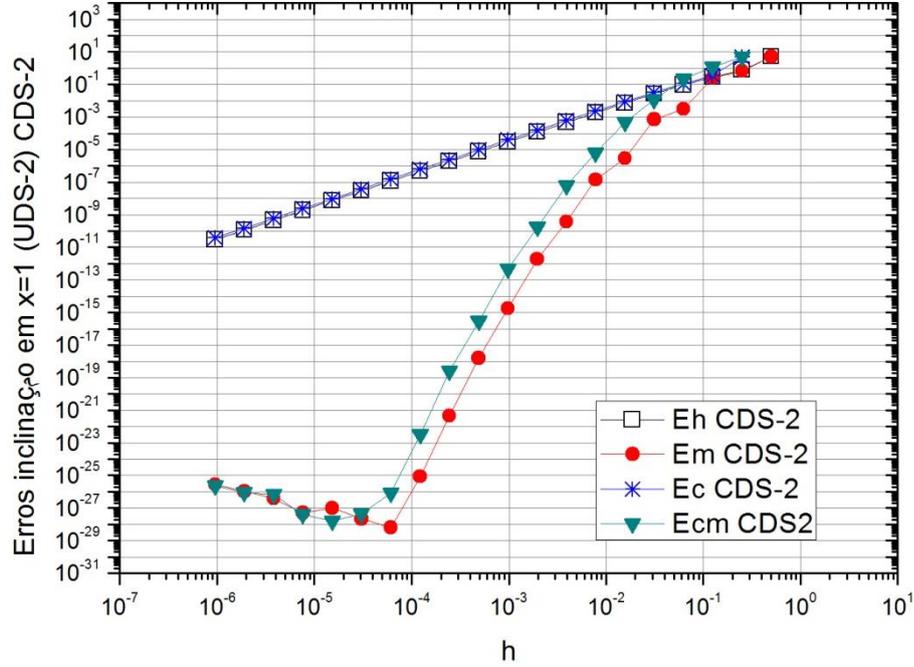


A ordem efetiva equivalente erros de IO1 em  $x=1$  de UDS-1 com 1 e 2 níveis de CRE é mostrada na Fig. D.40.



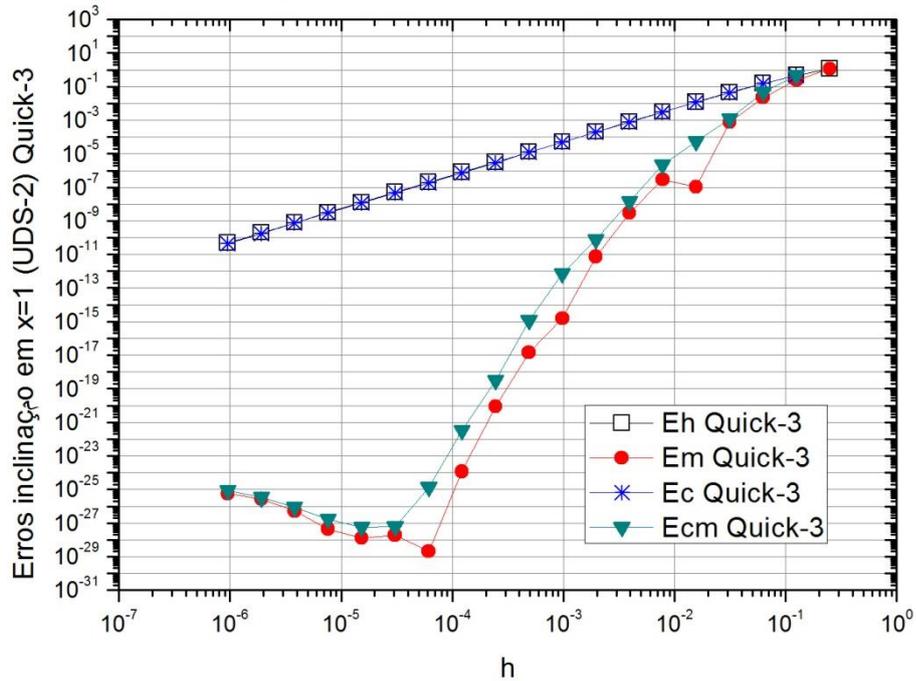
A Fig. D.41 exibe os erros numéricos de IO2 do caso CDS-2.

Figura D.41: Erros de IO2 em  $x=1$  de CDS-2



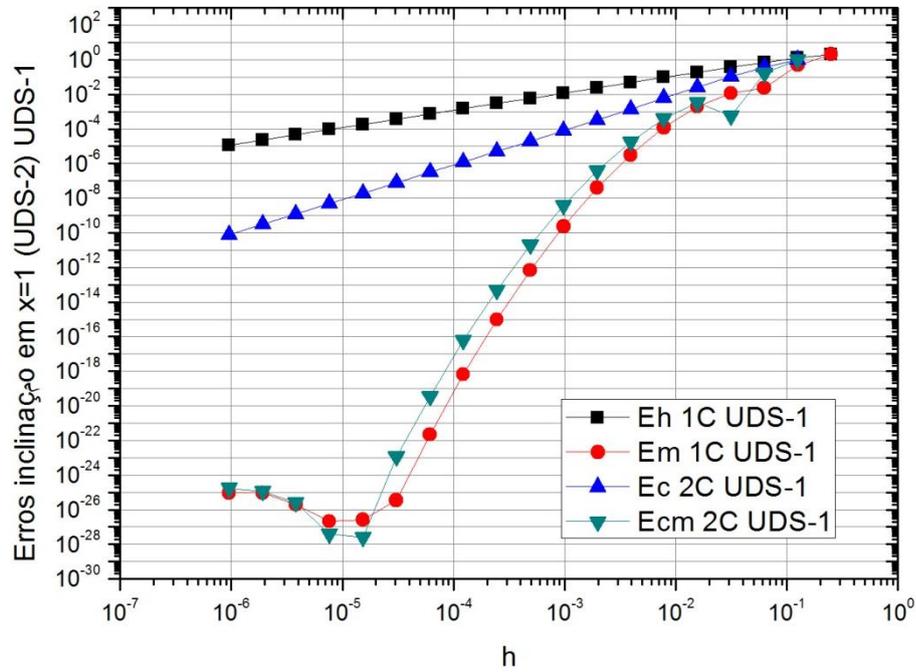
A Fig. D.42 exibe os erros numéricos de IO2 do caso QUICK-3.

Figura D.42: Erros de IO2 em  $x=1$  de QUICK-3



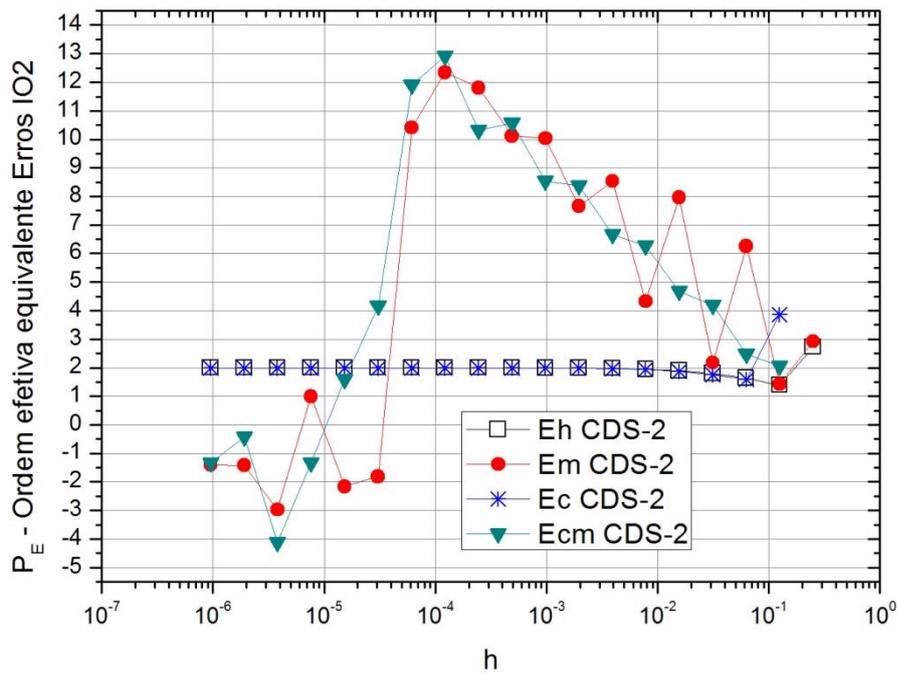
A Fig. D.43 exibe os erros numéricos de IO2 do caso UDS-1 com 1 e 2 níveis de CRE.

Figura D.43: Erros de IO2 em  $x=1$  de UDS-1 com 1 e 2 níveis de CRE

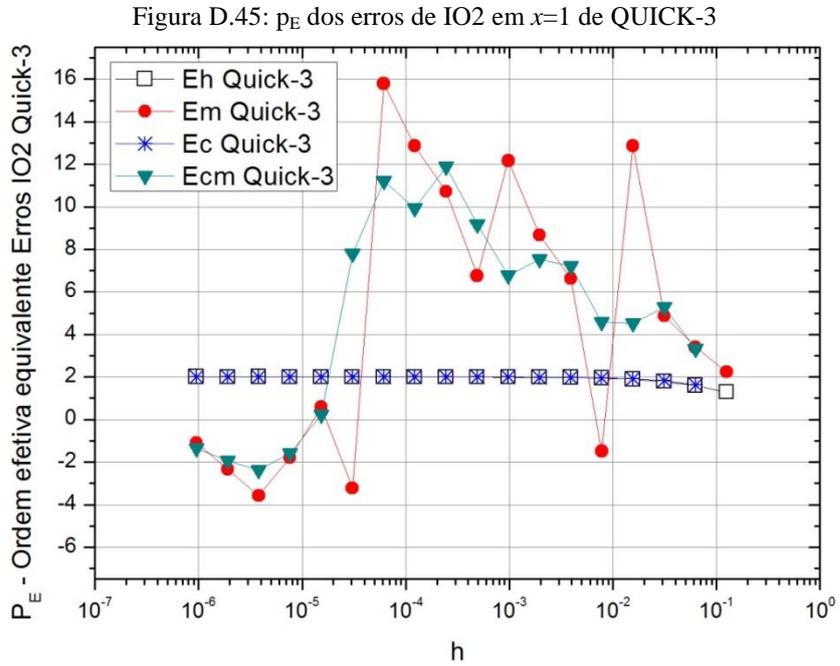


A ordem efetiva equivalente erros de IO2 em  $x=1$  de CDS-2 é mostrada na Fig. D.44.

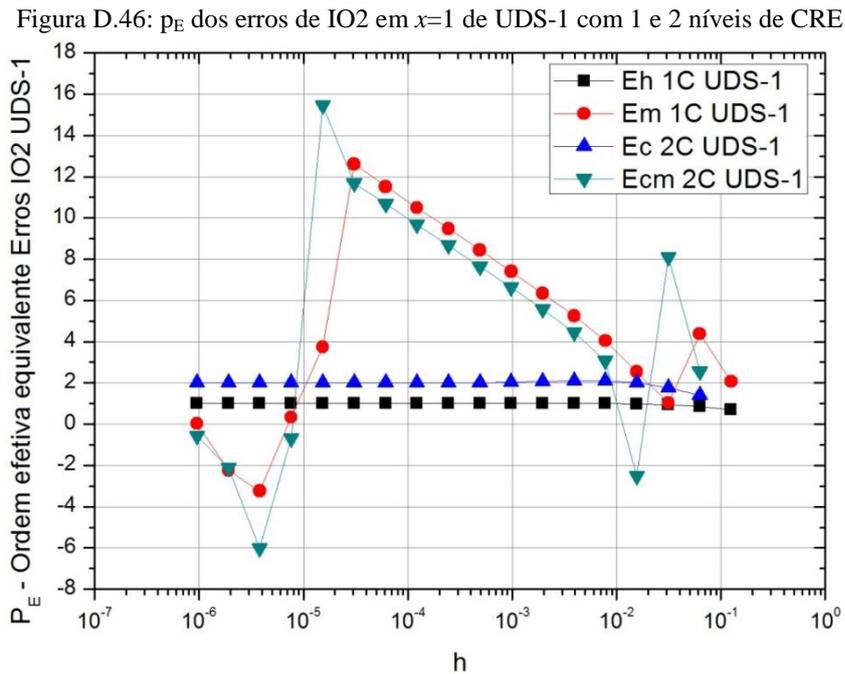
Figura D.44:  $p_E$  dos Erros de IO2 em  $x=1$  de CDS-2



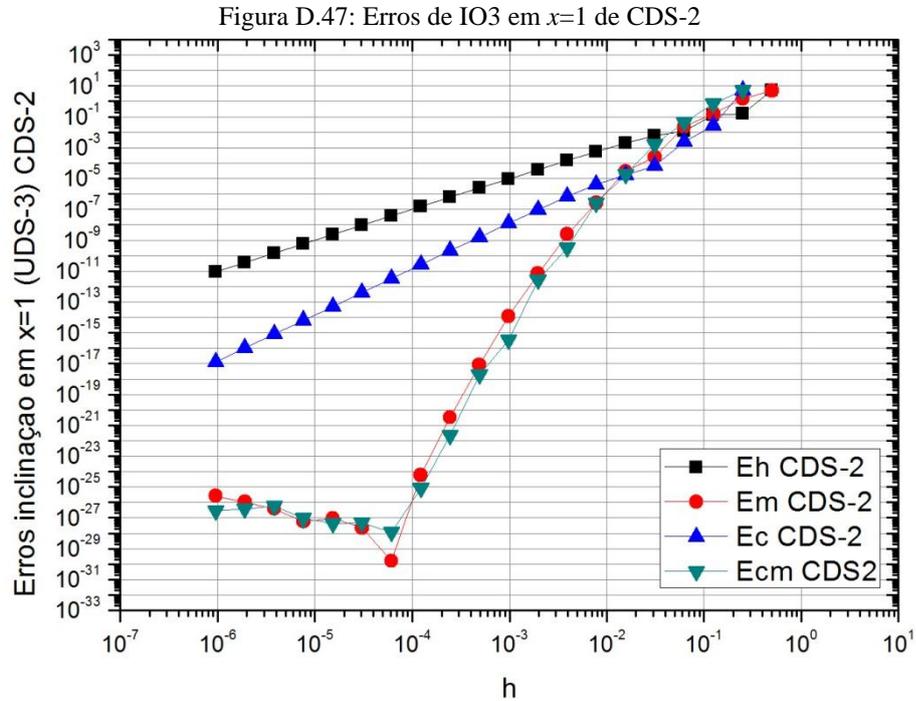
A ordem efetiva equivalente erros de IO2 em  $x=1$  de QUICK-3 é mostrada na Fig. D.45.



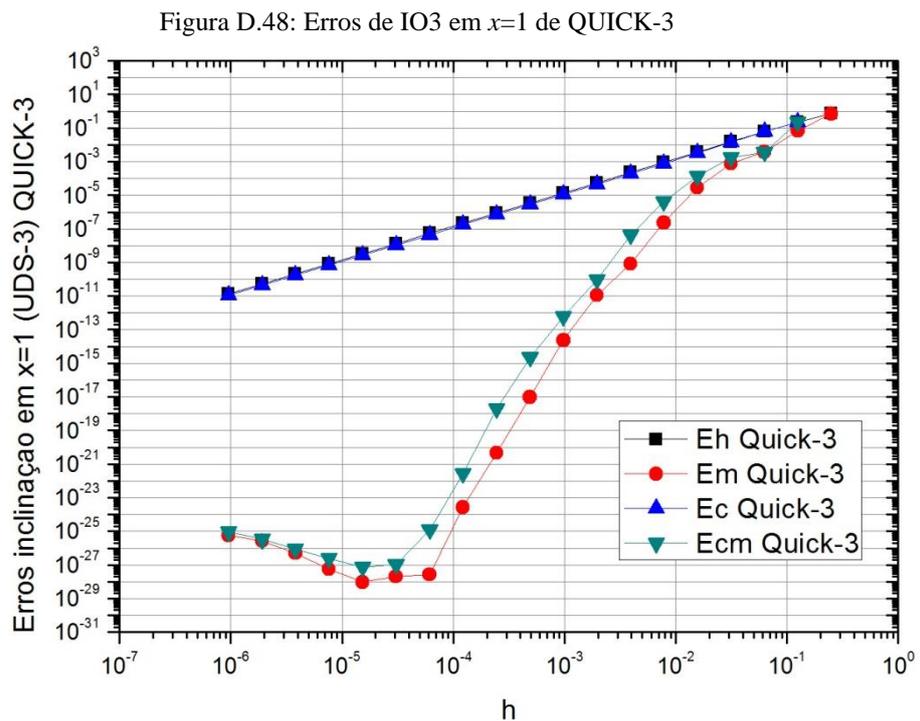
A ordem efetiva equivalente erros de IO2 em  $x=1$  de UDS-1 com 1 e 2 níveis de CRE é mostrada na Fig. D.46.



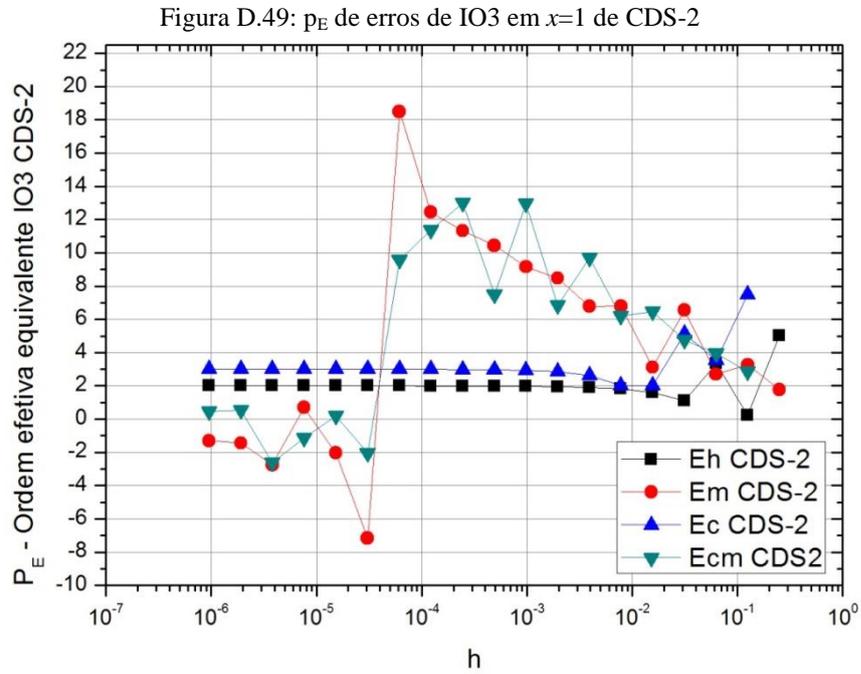
Com o emprego de UDS-3, os erros numéricos da Inclinação em  $x=1$  no caso CDS-2 são mostrados na Fig. D.47.



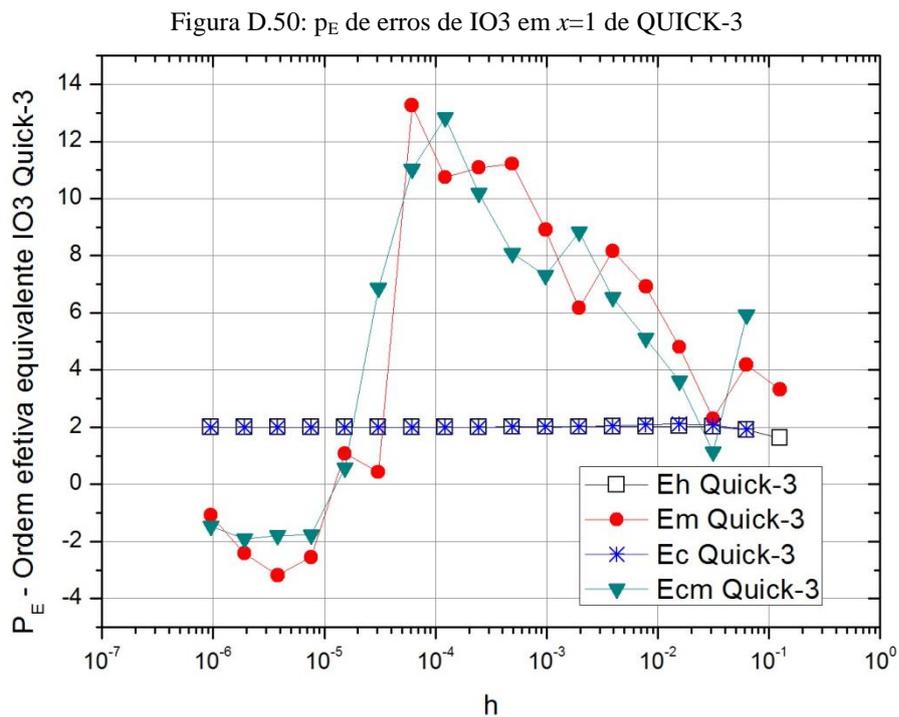
Os erros numéricos da Inclinação em  $x=1$  no caso QUICK-3 são mostrados na Fig. D.48.



A ordem efetiva equivalente erros de IO3 em  $x=1$  de CDS-2 é mostrada na Fig. D.49.



A ordem efetiva equivalente erros de IO3 em  $x=1$  de QUICK-3 é mostrada na Fig. D.50.



## APÊNDICE E: RESULTADOS COMPLEMENTARES DO FLUXO DE MASSA E DA FORÇA DE ARRASTO VISCOZO

No modelo que utiliza as equações de Navier-Stokes e a solução fabricada de Shih *et. al* (1999) foram realizados testes com a variável secundária fluxo de massa em  $y = 1/2$ . O problema foi inicialmente resolvido usando os esquemas UDS e CDS, foram realizadas simulações para análise do impacto de CRE, MER e CRE-MER na variável. Por se tratar de uma integração foram empregados os métodos Regra do Trapézio e Regra de Simpson.

Os resultados das simulações com os erros de discretização e as ordens efetivas equivalentes obtidas seguem nos gráficos a seguir. Os erros do fluxo de massa em CDS-2 são apresentados na Fig. E.1 e as ordens efetivas equivalentes correspondentes na Fig E.2.

Figura E.1: Erros de M em CDS-2 com Regra do Trapézio

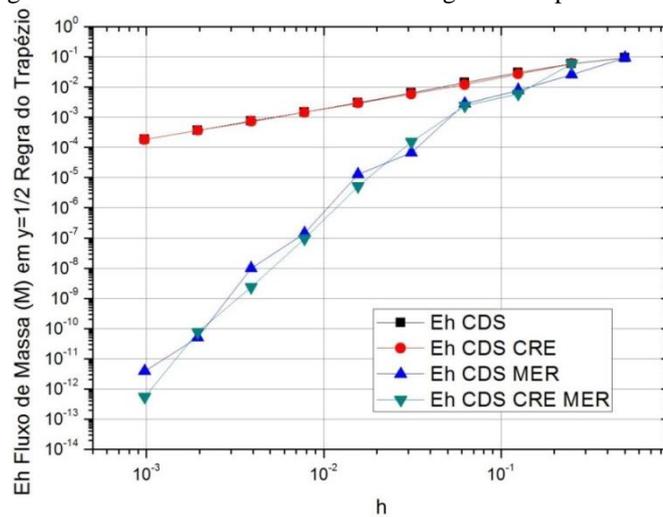
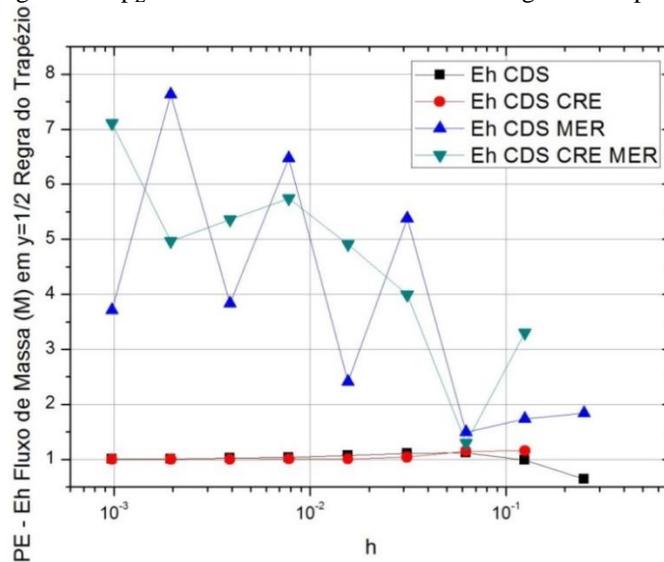


Figura E.2:  $p_E$  dos erros de M em CDS-2 com Regra do Trapézio



Os erros do fluxo de massa em UDS-1 com 0, 1 e 2 níveis de CRE e Regra do Trapézio são apresentados na Fig. E.3 e as ordens efetivas equivalentes correspondentes na Fig E.4.

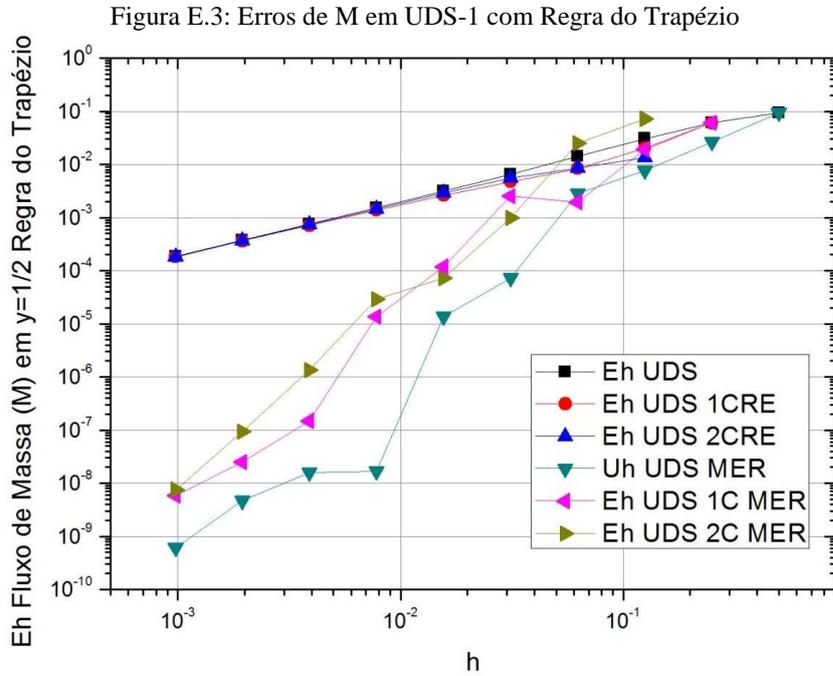
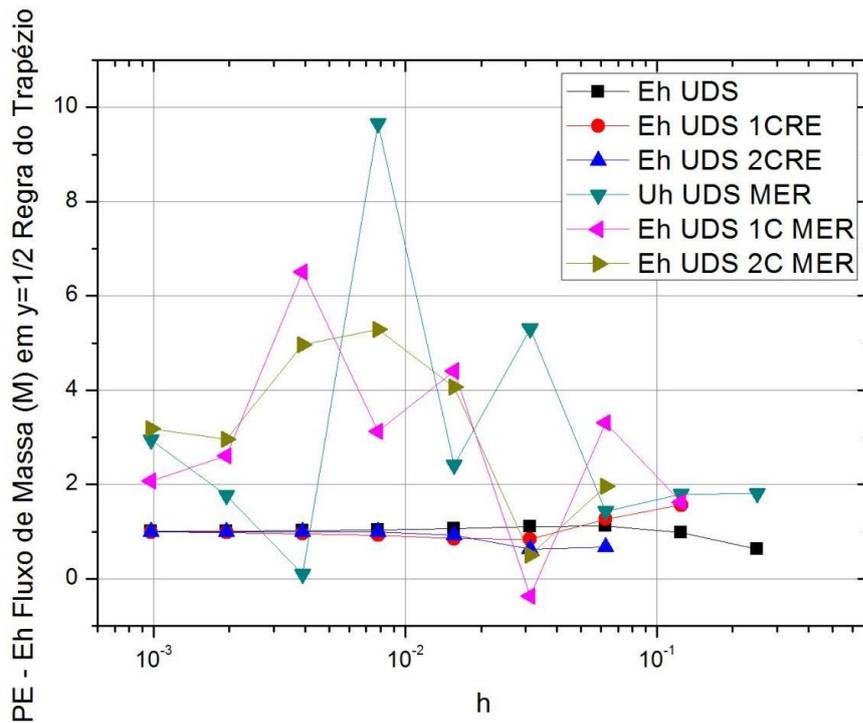


Figura E.4: p<sub>E</sub> dos erros de M em UDS-1 com Regra do Trapézio



Os erros do fluxo de massa em CDS-2 e Regra de Simpson são apresentados na Fig. E.5 e as ordens efetivas equivalentes correspondentes na Fig E.6.

Figura E.5: Erros de M em CDS-2 com Regra de Simpson

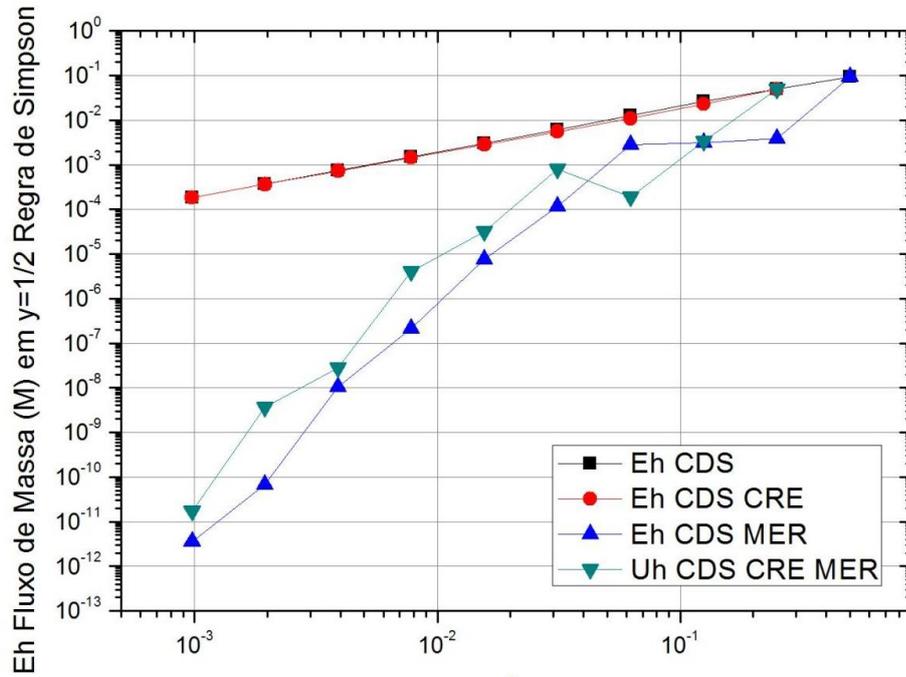
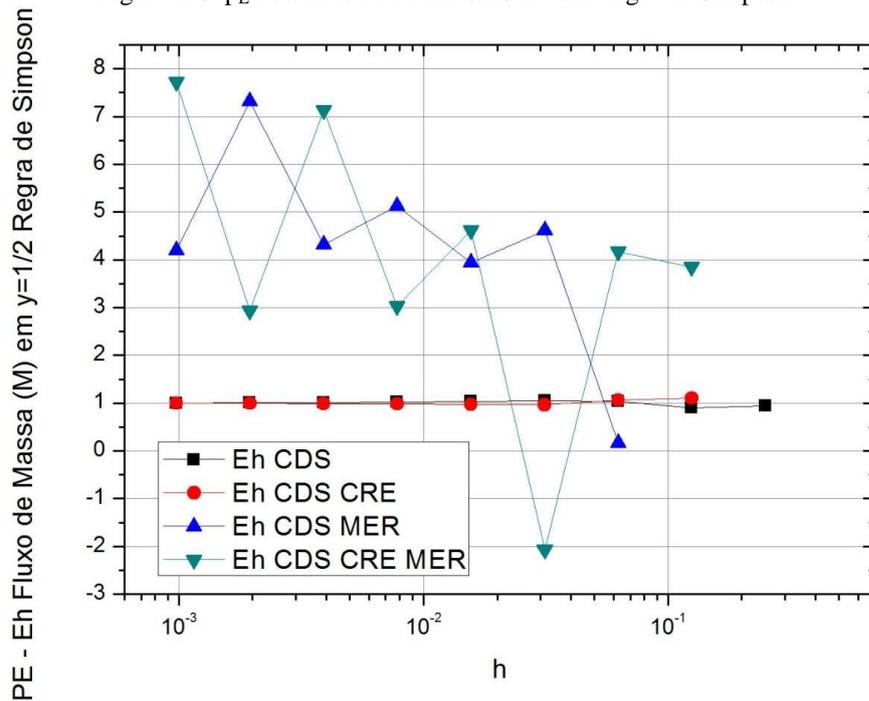


Figura E.6:  $p_E$  dos erros de M em CDS-2 com Regra de Simpson



No modelo que utiliza as equações de Navier-Stokes e a solução fabricada de Shih *et. al* (1999) foi realizado testes com a variável secundária força de arrasto viscosa. O problema foi resolvido usando os esquemas UDS e CDS. Foram realizadas simulações para análise do impacto de CRE, MER e CRE-MER na variável. Por se tratar de uma derivação e posterior integração foram empregados os métodos DDS-1, DDS2 e DDS-3 combinados com a Regra do Trapézio e a Regra de Simpson. Os resultados de CDS-2 dos erros do Trapézio e DDS-1 são mostrados na Fig. E.7 e as ordens efetivas equivalentes obtidas na Fig. E.8.

Figura E.7: Erros de F em CDS-2 com Regra do Trapézio e DDS-1

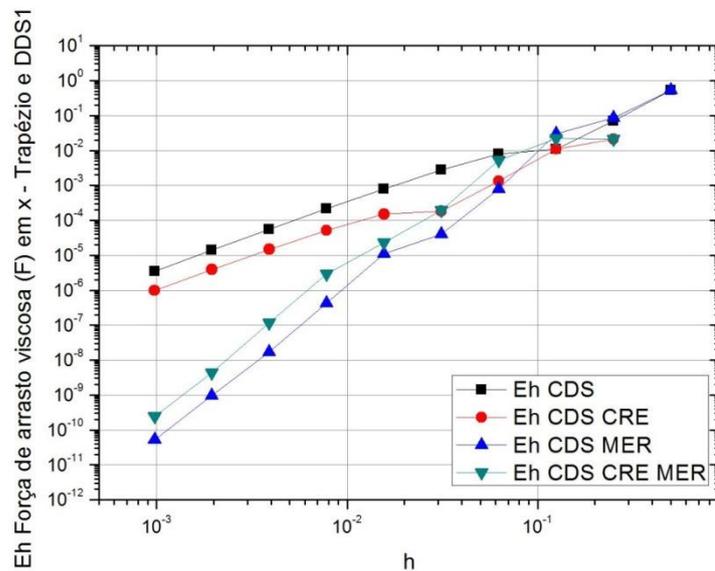
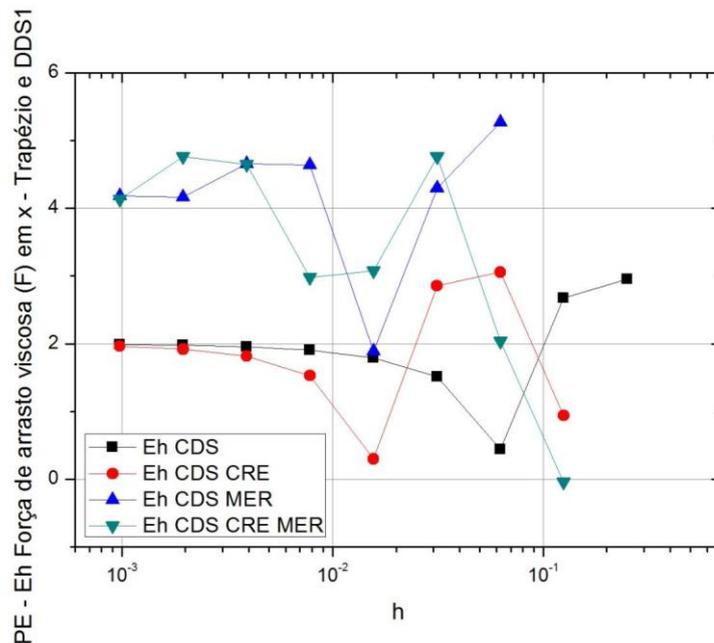


Figura E.8:  $p_E$  dos erros de F em CDS-2 com Regra do Trapézio e DDS-1



Os resultados de UDS-1 com 0, 1 e 2 níveis de CRE dos erros do Trapézio e DDS-1 são mostrados na Fig. E.9 e as ordens efetivas equivalentes obtidas na Fig. E.10.

Figura E.9: Erros de F em UDS-1 com 0, 1 e 2 níveis de CRE com Regra do Trapézio e DDS-1

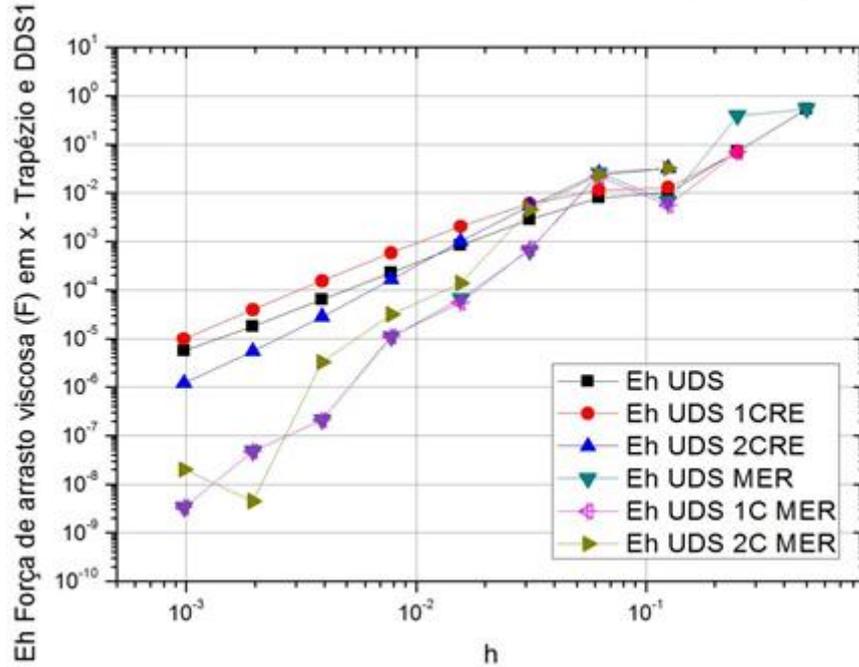
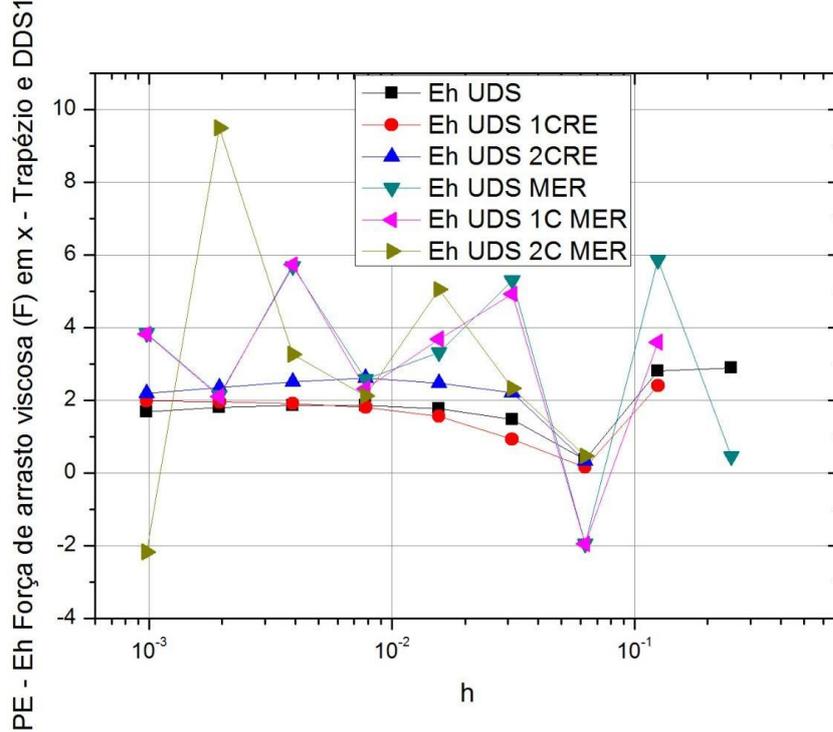


Figura E.10:  $p_E$  dos Erros de F em UDS-1 com 0, 1 e 2 níveis de CRE com Regra do Trapézio e DDS-1



Os resultados de CDS-2 dos erros do Trapézio e DDS-2 são mostrados na Fig. E11 e as ordens efetivas equivalentes obtidas na Fig. E.12.

Figura E.11: Erros de F em CDS-2 com Regra do Trapézio e DDS-2

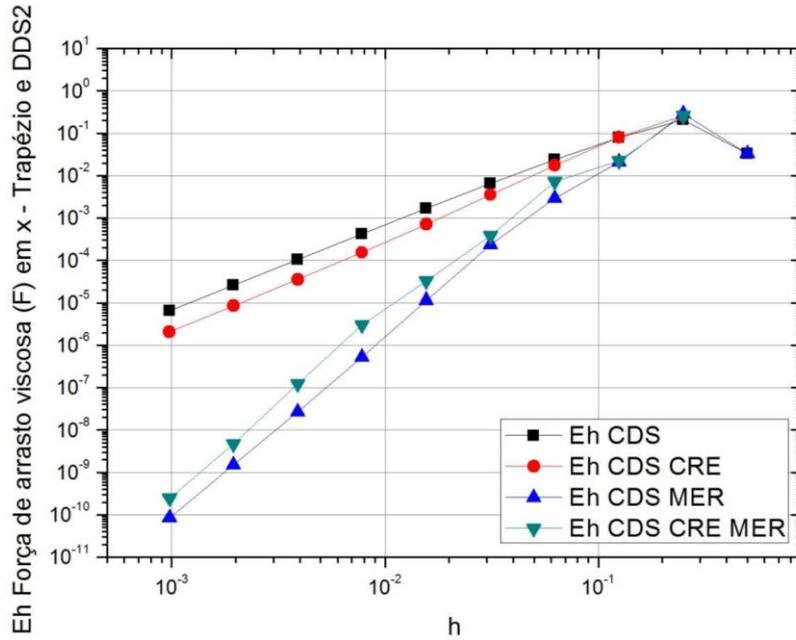
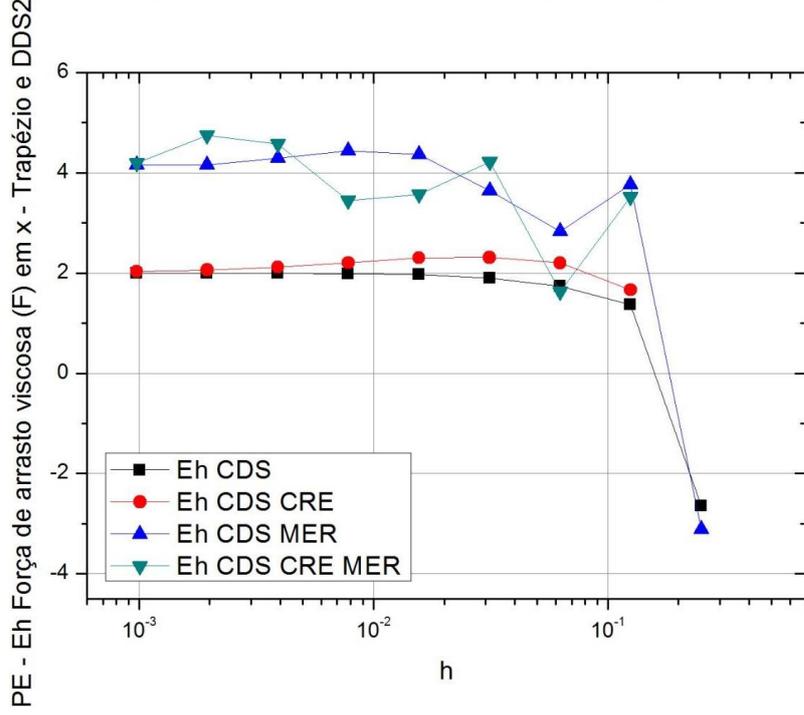


Figura E.12:  $p_E$  dos erros de F em CDS-2 com Regra do Trapézio e DDS-2



Os resultados de UDS-1 com 0, 1 e 2 níveis de CRE dos erros do Trapézio e DDS-2 são mostrados na Fig. E.13 e as ordens efetivas equivalentes obtidas na Fig. E.14.

Figura E.13: Erros de F em UDS-1 com 0, 1 e 2 níveis de CRE com Regra do Trapézio e DDS-2

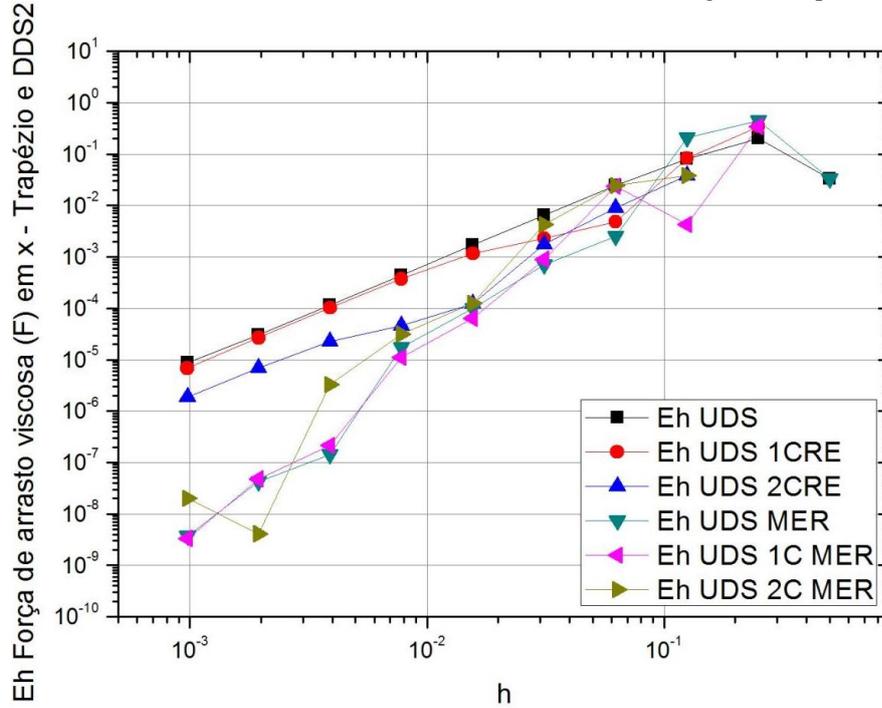
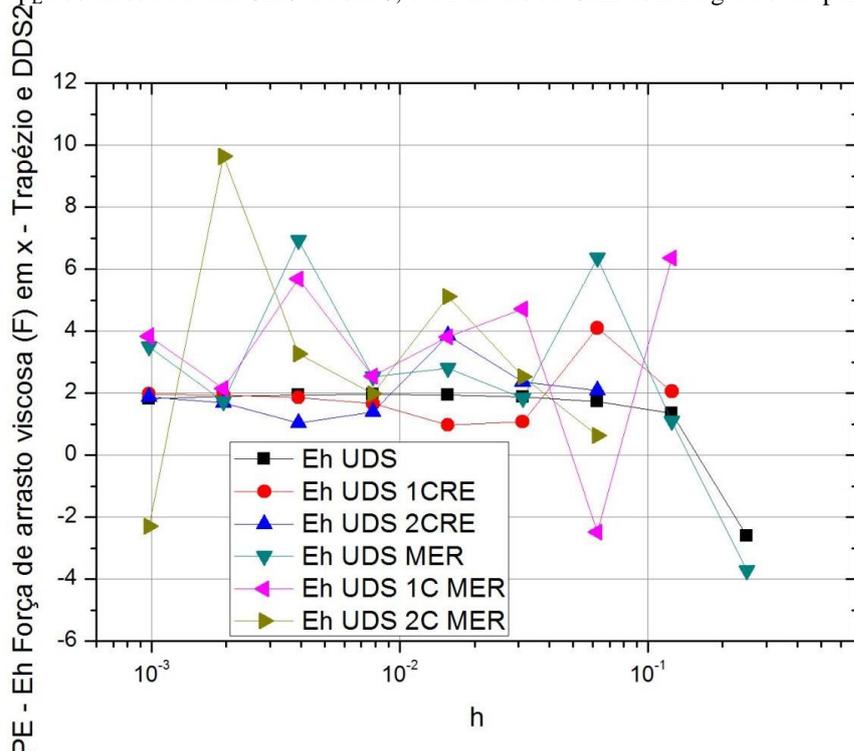


Figura E.14: PE dos erros de F em UDS-1 com 0, 1 e 2 níveis de CRE com Regra do Trapézio e DDS-2



Os resultados de CDS-2 dos erros do Trapézio e DDS-3 são mostrados na Fig. E.15 e as ordens efetivas equivalentes obtidas na Fig. E.16.

Figura E.15: Erros de F em CDS-2 com Regra do Trapézio e DDS-3

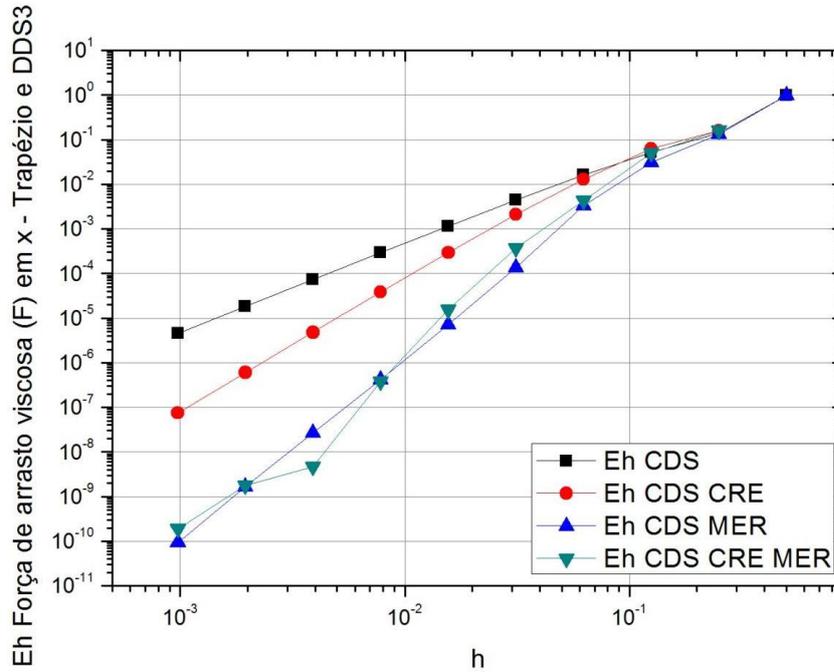
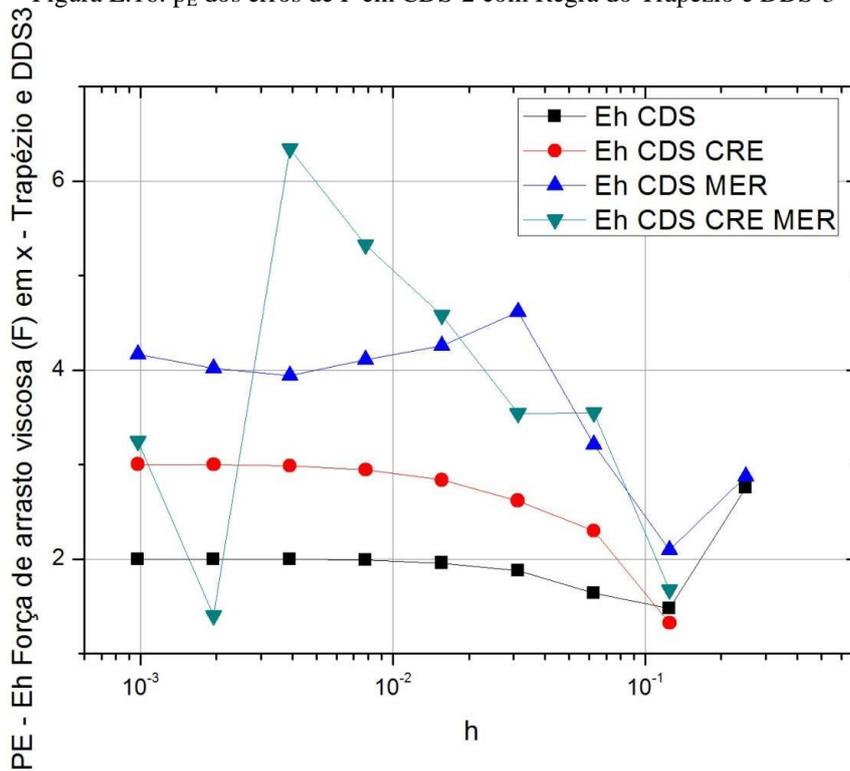


Figura E.16:  $p_E$  dos erros de F em CDS-2 com Regra do Trapézio e DDS-3



Os resultados de UDS-1 com 0, 1 e 2 níveis de CRE dos erros do Trapézio e DDS-3 são mostrados na Fig. E.17 e as ordens efetivas equivalentes obtidas na Fig. E.18.

Figura E.17: Erros de F em UDS-1 com 0, 1 e 2 níveis de CRE com Regra do Trapézio e DDS-3

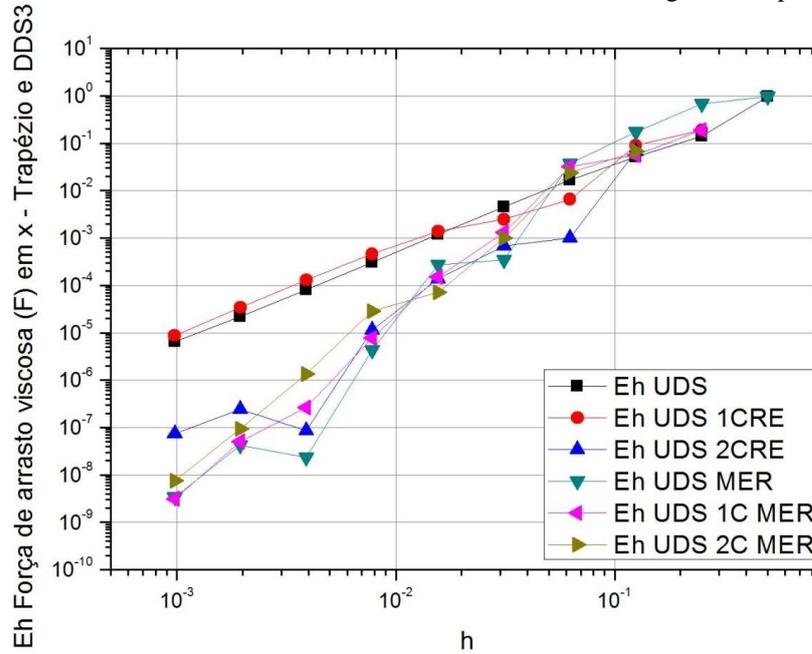
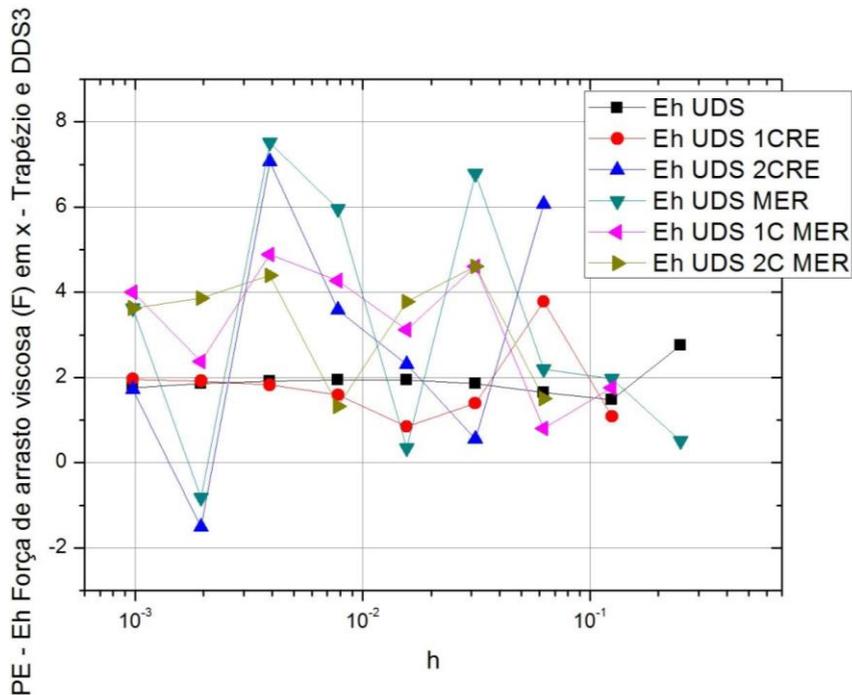
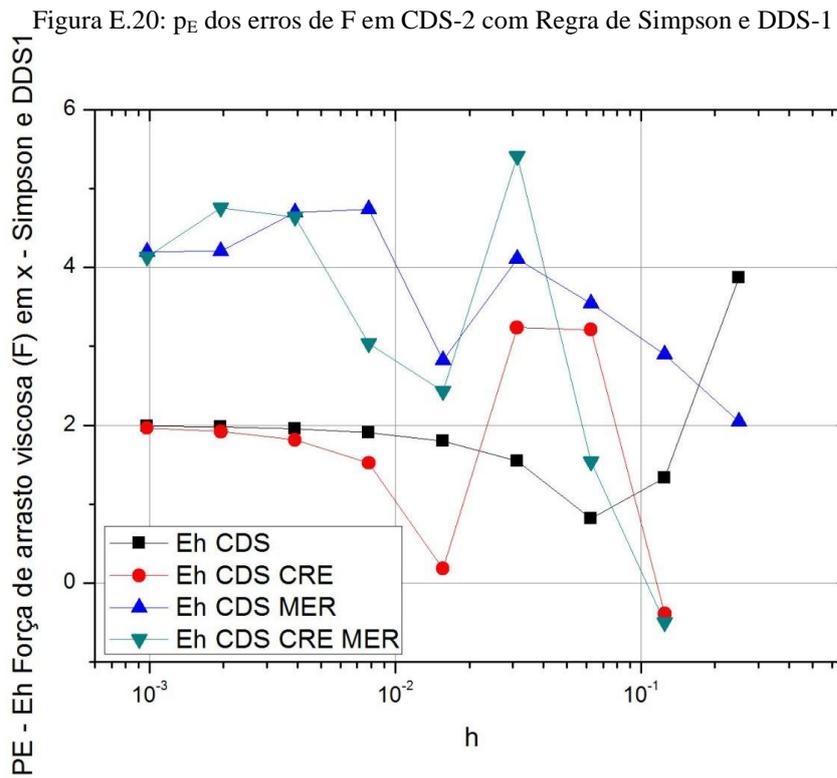
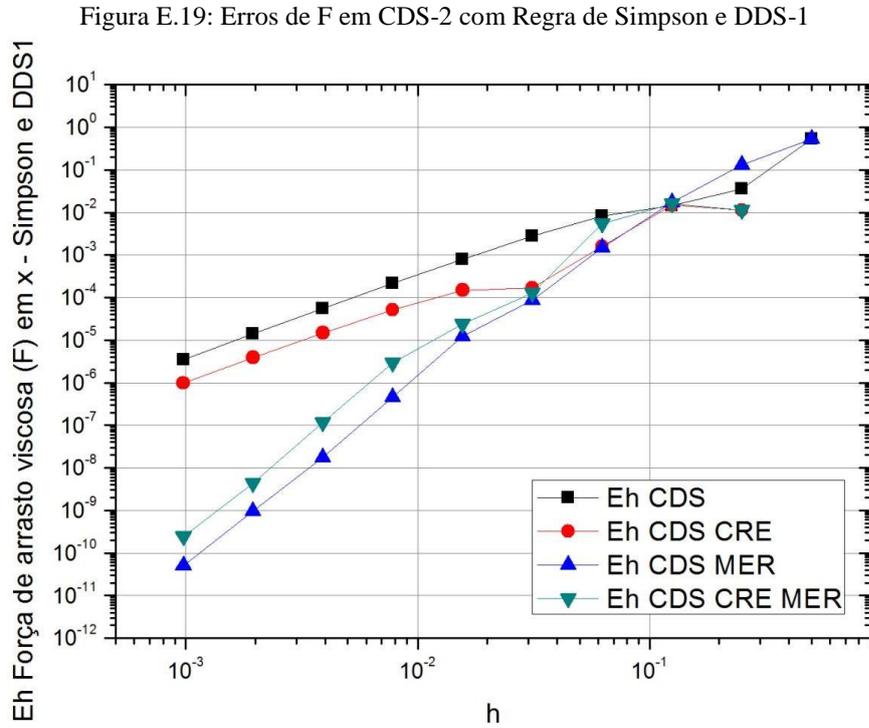


Figura E.18:  $p_E$  dos erros de F em UDS-1 com 0, 1 e 2 níveis de CRE com Regra do Trapézio e DDS-3



Os resultados de CDS-2 dos erros de Simpson e DDS-1 são mostrados na Fig. E.19 e as ordens efetivas equivalentes obtidas na Fig. E.20.



Os resultados de UDS-1 com 0, 1 e 2 níveis de CRE dos erros de Simpson e DDS-1 são mostrados na Fig. E.21 e as ordens efetivas equivalentes obtidas na Fig. E.22.

Figura E.21: Erros de F em UDS-1 com 0, 1 e 2 níveis de CRE com Regra de Simpson e DDS-1

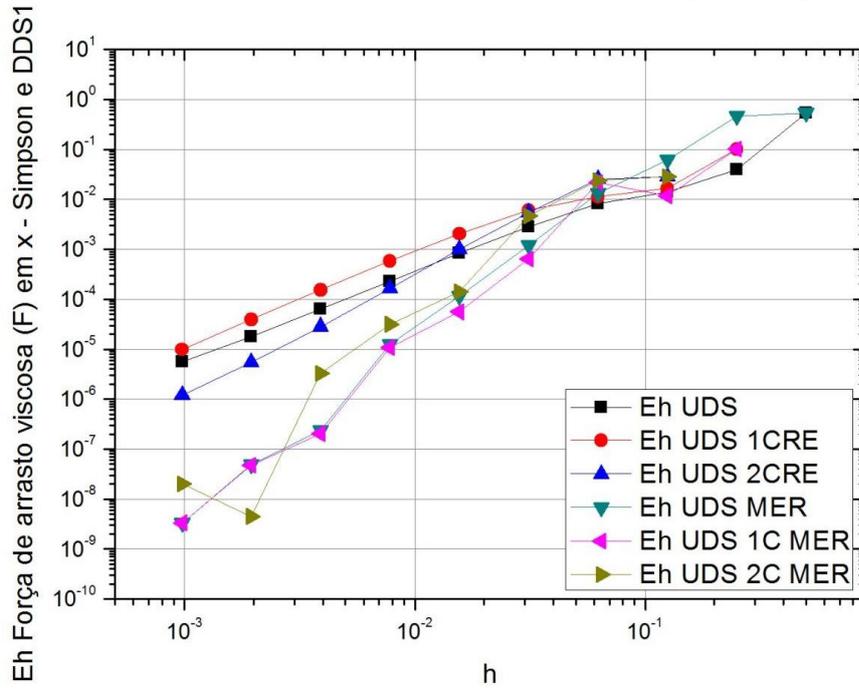
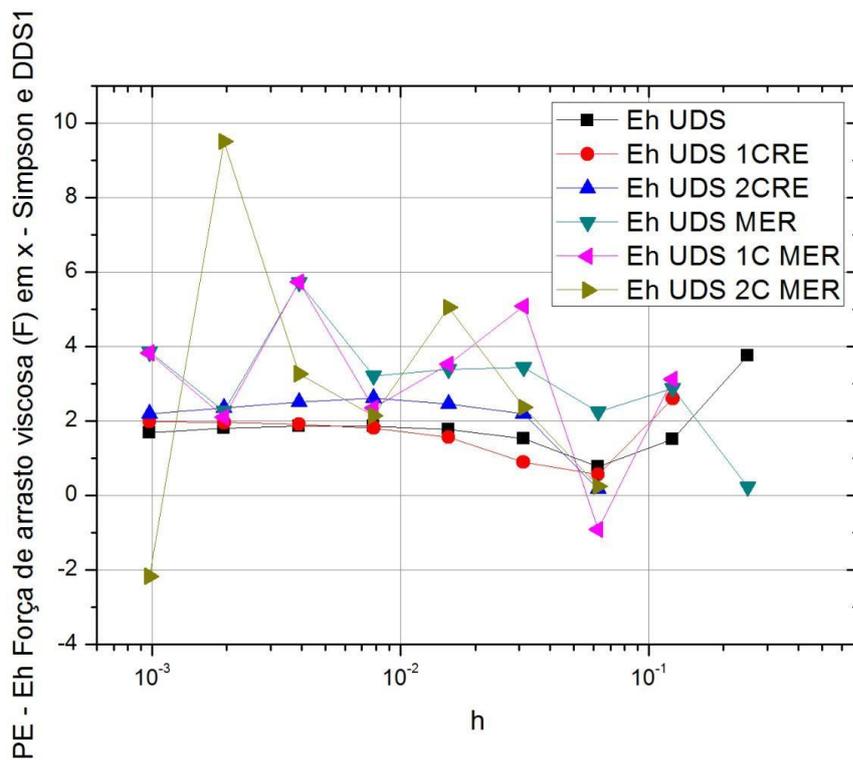


Figura E.22:  $p_E$  dos erros de F em UDS-1 com 0, 1 e 2 níveis de CRE com Regra de Simpson e DDS-1



Os resultados de CDS-2 dos erros de Simpson e DDS-2 são mostrados na Fig. E.23 e as ordens efetivas equivalentes obtidas na Fig. E.24.

Figura E.23: Erros de F em CDS-2 com Regra de Simpson e DDS-2

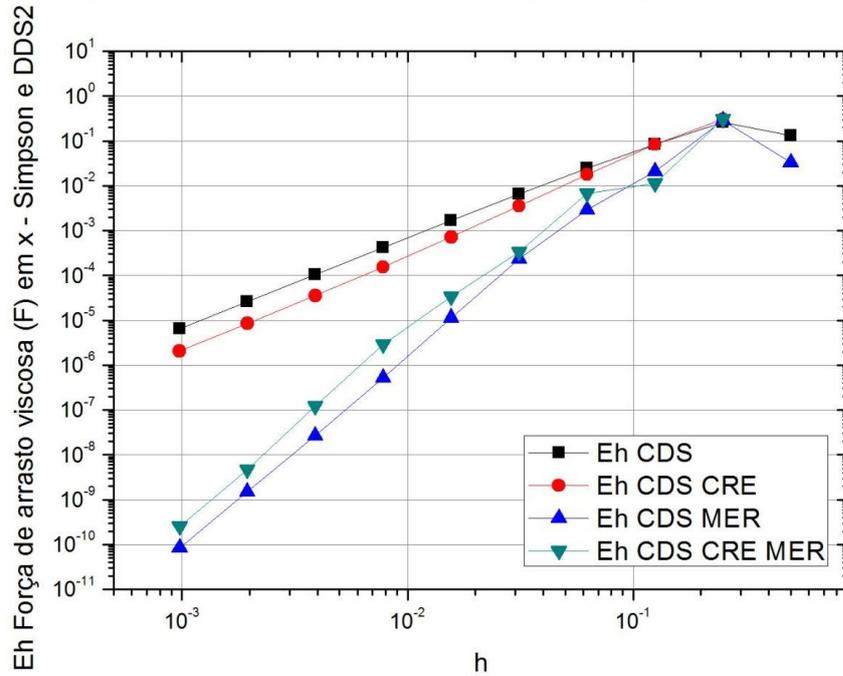
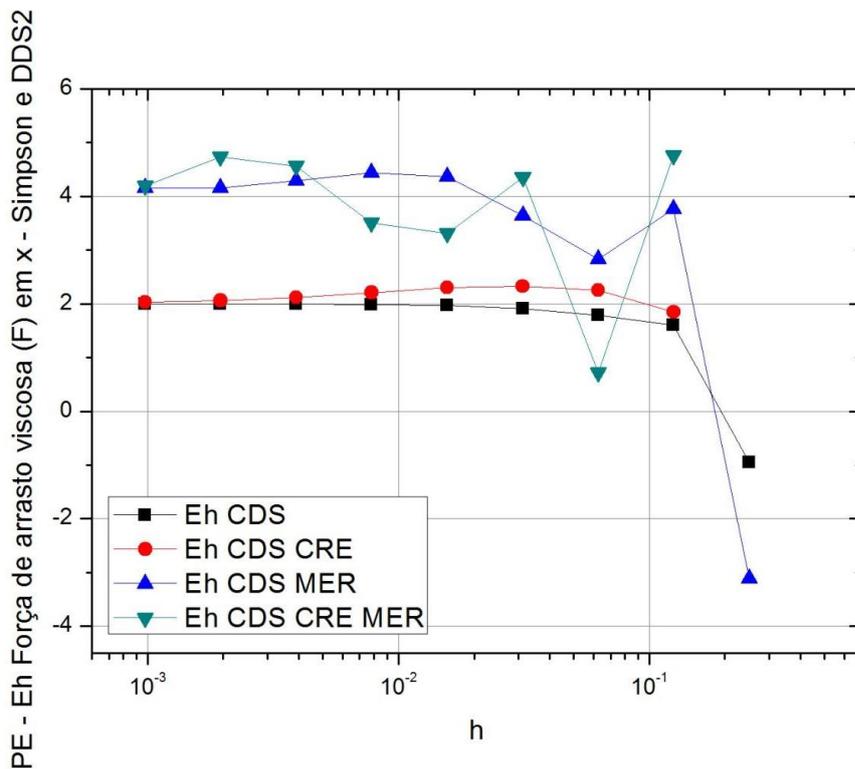


Figura E.24:  $p_E$  dos erros de F em CDS-2 com Regra de Simpson e DDS-2



Os resultados de UDS-1 com 0, 1 e 2 níveis de CRE dos erros de Simpson e DDS-2 são mostrados na Fig. E.25 e as ordens efetivas equivalentes obtidas na Fig. E.26.

Figura E.25: Erros de F em UDS-1 com 0, 1 e 2 níveis de CRE com Regra de Simpson e DDS-2

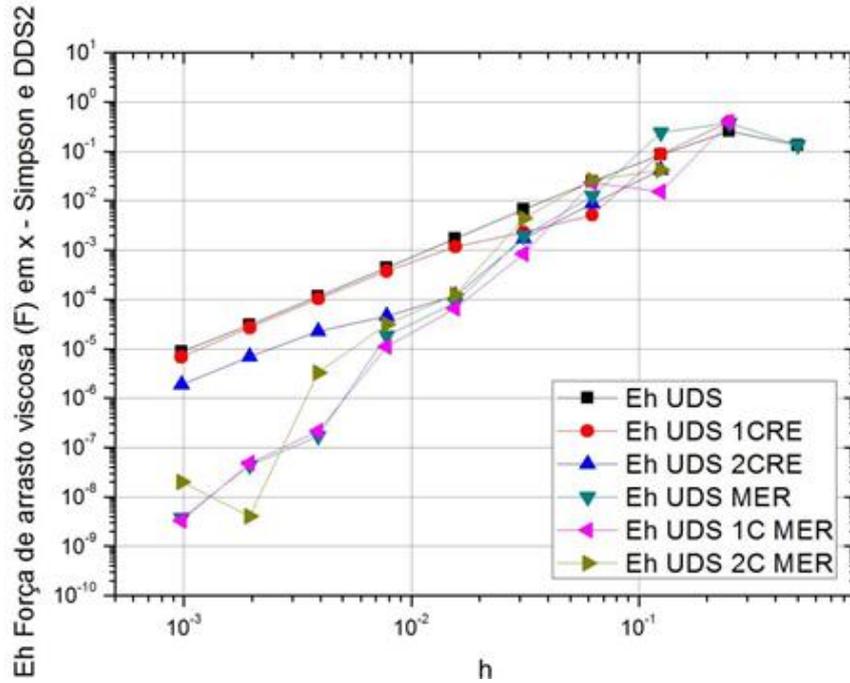
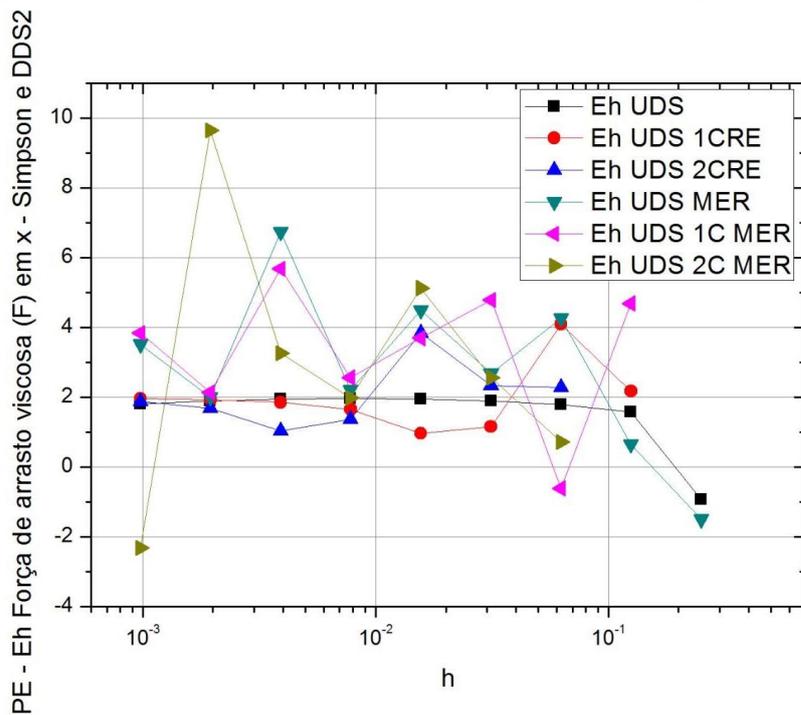


Figura E.26:  $p_E$  dos erros de F em UDS-1 com 0, 1 e 2 níveis de CRE com Regra de Simpson e DDS-2



Os resultados de UDS-1 com 0, 1 e 2 níveis de CRE dos erros de Simpson e DDS-3 são mostrados na Fig. E.27 e as ordens efetivas equivalentes obtidas na Fig. E.28.

Figura E.27: Erros de F em UDS-1 com 0, 1 e 2 níveis de CRE com Regra de Simpson e DDS-3

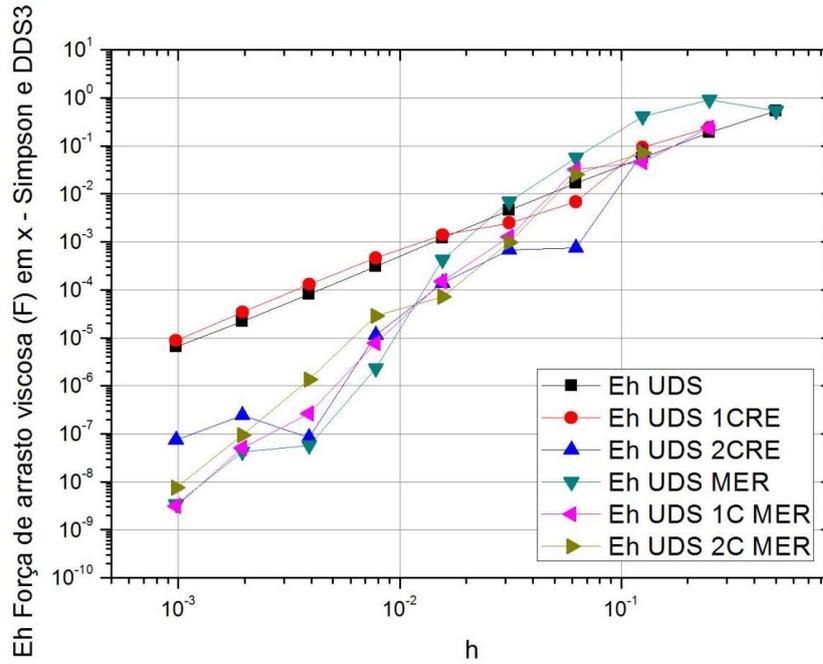


Figura E.28:  $p_E$  dos erros de F em UDS-1 com 0, 1 e 2 níveis de CRE com Regra de Simpson e DDS-3

