

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ**

**ABIMAEAL ALVES DE OLIVEIRA JUNIOR**

**OTIMIZAÇÃO NUMÉRICA DE COEFICIENTE DE  
ARRASTO DE NARIZ DE FOGUETE EM  
ESCOAMENTO SUPERSÔNICO**

**CURITIBA**

**2018**

**ABIMAEAL ALVES DE OLIVEIRA JUNIOR**

**OTIMIZAÇÃO NUMÉRICA DE COEFICIENTE DE ARRASTO  
DE NARIZ DE FOGUETE EM ESCOAMENTO  
SUPERSÔNICO**

Tese apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Doutor em Engenharia Mecânica no Curso de Doutorado em Engenharia Mecânica, Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná, na área de concentração Fenômenos de Transporte e Mecânica dos Sólidos.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Henrique Marchi

Coorientador: Prof. Dr. Guilherme Bertoldo

CURITIBA  
2018

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR  
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

O48o

Oliveira Junior, Abimael Alves de

Otimização numérica de coeficiente de arrasto de nariz de foguete em escoamento supersônico / Abimael Alves de Oliveira Junior. – Curitiba, 2018.

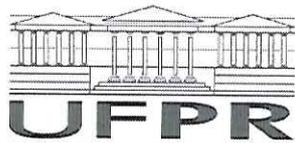
Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2018.

Orientador: Carlos Henrique Marchi – Coorientador: Guilherme Bertoldo.

1. Aerodinâmica supersônica. 2. Arrasto (Aerodinâmica). 3. Equações diferenciais. 4. Foguetes (Aeronáutica). 5. Computational fluid dynamics. 6. Otimização matemática. I. Universidade Federal do Paraná. II. Marchi, Carlos Henrique. III. Bertoldo, Guilherme. IV. Título.

CDD: 629.1323

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894



## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA MECÂNICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **ABIMAEAL ALVES DE OLIVEIRA JUNIOR** intitulada: **OTIMIZAÇÃO NUMÉRICA DE COEFICIENTE DE ARRASTO DE NARIZ DE FOGUETE EM ESCOAMENTO SUPERSÔNICO**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 11 de Setembro de 2018.

GUILHERME BERTOLDO  
Presidente da Banca Examinadora (UTFPR)

ADMILSON TEIXEIRA FRANCO  
Avaliador Externo (UTFPR)

ANTONIO FABIO CARVALHO DA SILVA  
Avaliador Externo (UESC)

LUCIANO KIYOSHI ARAKI  
Avaliador Interno (UFPR)

Dedico este trabalho a Deus e à minha família

# Agradecimentos

A Deus, pelo dom da vida e pelo Seu imenso amor.

Aos meus orientadores, professor Carlos Henrique Marchi e professor Guilherme Bertoldo, pela orientação, confiança e paciência.

À duas pessoas mais importantes de minha vida: minha esposa, Liliane Léa de Oliveira e meu filho, Abimael Neto, pelo amor, compreensão e apoio em todas as horas.

Aos meus outros familiares que compreenderam meu período de dedicação a este trabalho.

Ao Fábio Sato, pelo seu apoio e amizade.

Ao Réverton Luis Neudorf, pela amizade e pelas conversas técnicas.

Ao Simepar, na pessoa do sr. César Beneti, pelo suporte e pela bolsa de estudos concedida.

Aos meus colegas do LENA, em especial, Nicolas Dicati, Diego Moro e Antonio Foltran, pela amizade e companheirismo.

Aos meus colegas, amigos e demais pessoas, que de algum modo contribuíram e deram-me apoio para realização deste trabalho.

Aos CENAPADs da Universidade Federal do Rio Grande do Sul e Universidade Federal do Ceará, pela disponibilidade de uso dos sistemas computacionais, sem o qual este trabalho não seria possível.

Ao pessoal do campus da UTFPR-Francisco Beltrão, pela disponibilidade do cluster.

*Feliz é o homem que acha sabedoria e o homem que adquire conhecimento*

(Bíblia Sagrada, Provérbios 3.13)

*"[The purpose of flight research] is to separate the real from the imagined problems and to make known the overlooked and the unexpected."*

Hugh L. Dryden (1898-1965)

# RESUMO

A redução do arrasto aerodinâmico é uma tarefa dos projetistas de foguetes e aeronaves. Nos foguetes, mesmo quando são veículos projetados para o transporte em voos orbitais, o arrasto aerodinâmico está presente durante a trajetória dentro da atmosfera. O assunto abordado neste trabalho é a redução de arrasto aerodinâmico de nariz de foguete. O nariz ou ogiva corresponde à parte frontal do foguete e foi modelado por um corpo axissimétrico deslocando-se no ar, no regime supersônico. O perfil geométrico deste corpo foi obtido por um Polinômio Interpolador Monotônico Cúbico. Foram consideradas neste estudo, três razões de aspecto (razão entre o comprimento pelo diâmetro do corpo) iguais a 2, 3 e 4. Para avaliar o efeito do número de Mach nos perfis otimizados, foram selecionados três valores, 1,5, 3,0 e 6,0. Para otimização do perfil geométrico foi utilizado o Método de Otimização de Forma, empregando quatro conjuntos de variáveis de otimização, contendo 1, 2, 4 e 8 variáveis. Estas variáveis de otimização constituem-se em ordenadas de pontos sobre o perfil a ser otimizado, interpolados no perfil pelo Polinômio Interpolador. Elas foram obtidas por um algoritmo do tipo Região de Confiança (TRUST REGION). A otimização teve como objetivo reduzir o coeficiente de arrasto aerodinâmico dos perfis geométricos. Este coeficiente foi obtido por solução de escoamento modelado matematicamente pelas Equações de Euler e resolvido numericamente pelo Método dos Volumes Finitos. Para aumentar a acurácia das soluções numéricas do coeficiente de arrasto, foi empregado Multiextrapolação de Richardson, a partir de soluções obtidas por 3 malhas, com 2 níveis de extrapolação. Os resultados obtidos permitiram perceber que o número de variáveis de otimização tem influência no valor do coeficiente de arrasto. Para todos os casos, o perfil otimizado por 8 variáveis sempre apresentou o menor valor para o coeficiente de arrasto. Para avaliar os valores de coeficiente de arrasto obtidos para os perfis com razões de aspecto 2 e 4, comparou-se esses resultados com os valores de Kraiko et al. (2003). Os autores utilizaram Cálculo Variacional aplicado no Modelo de Equações de Euler para calcular o valor otimizado de diversas formas geométricas. Quando comparados os valores de coeficiente de arrasto obtidos com 8 variáveis, tem-se que todos os resultados apresentaram diferença menor que 1% para com os valores de Kraiko et al. (2003), sendo que dois perfis apresentaram coeficiente de arrasto menor. Quando comparam-se os perfis otimizados com 4 variáveis de otimização, todos os seis perfis apresentaram valor de coeficiente de arrasto maior que os valores obtidos por Kraiko et al. (2003), porém a diferença foi de até 2,27%. Com exceção de apenas um perfil, os raios frontais obtidos eram menores do que raios frontais obtidos pelos autores citados. As formas otimizadas concordaram com a literatura e apresentaram perfis geométricos mais afinados com o aumento do número de Mach.

**Palavras-chave:** Aerodinâmica supersônica. Arrasto (Aerodinâmica). Equações diferenciais. Foguetes (Aeronáutica). CFD. otimização matemática.

# ABSTRACT

The reduction of aerodynamic drag is a task for designers of aircraft and rockets. On rockets, even if the vehicle is designed for orbital flight, aerodynamic drag is present during the course in the atmosphere. The theme addressed in this study is the aerodynamic drag reduction of rocket nose. This rocket nose or ogive is the front part of the rocket and was modeled by an axisymmetric body, moving in the air, on the supersonic regime. The geometric profile of this body was defined by Polynomial Monotone Cubic interpolation. Three aspect ratio (ratio between length and diameter of the body) were used, equals to 2, 3 and 4. To evaluate the effect of the Mach number on the profiles optimized, three values were selected, 1.5, 3.0 and 6.0. For the optimization of the geometrical profile, a Shape Optimization Method was used, using 4 sets of optimization variables, containing 1, 2, 4 and 8 variables. These optimization variables form the ordinates of the points on the profile to be optimized, interpolated by the Polynomial interpolator. These optimization variables were obtained by a Trust-Region algorithm. The optimization goal was to reduce the aerodynamic drag coefficient of the geometrical profiles, calculated by the Finite Volume Method. To increase the accuracy of the numerical solutions of the aerodynamic drag coefficient it was used Repeated Richardson Extrapolation, from the solutions in 3 grids, with 2 extrapolation levels. The results obtained allow realizing that the number of variables has an impact on the value of the drag coefficient. For all cases, the optimized profile by 8 variables showed the lower value to the drag coefficient. To evaluate the results obtained, the values of the drag coefficient obtained by the profiles with aspect ratio 2 and 4 were compared with the results of Kraiko et al. (2003). The authors used Variational Calculus applied to the Euler's Equations model to calculate the optimized profile of several geometrical forms. When compared the values of the drag coefficient obtained with 8 variables, all the results showed difference lower than 1% to the values from Kraiko et al. (2003). And 2 profiles showed drag coefficient lower than the values from Kraiko et al. (2003). When compared optimized profiles with 4 optimization variables, all the 6 profiles showed drag coefficient value greater than the values from these authors, nevertheless, the difference is up to 2.27%. With the exception of only one profile, the nose radius was lower than the nose radius from Kraiko et al. (2003) The optimized forms agreed with bibliography and showed more slender with the increase of the Mach number

**keywords:** Supersonic aerodynamic. Drag. Differential equations. mathematical optimization. CFD. Rockets.

# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AIAA	American Institute of Aeronautics and Astronautics
ASME	American Society of Mechanical Engineers
CFD	Computational Fluid Dynamics
ER	Extrapolação de Richardson
MER	Multiextrapolação de Richardson
MSI	Modified Strongly Implicit Procedure
MVF	Método dos Volumes Finitos
SIMPLE	Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations
SIMPLE-C	SIMPLE-Consistent
UDS	Upwind Differencing Scheme

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Romanos

$A_b$	Área da base do corpo	$m^2$
$C_{Df}$	Coeficiente de arrasto frontal	1
$c_p$	Calor específico a pressão constante	J/kg K
$c_{p\infty}$	Calor específico de corrente livre	J/kg K
$\mathbf{f}$	Força de corpo por unidade de massa	$N \cdot kg^{-1}$
$f_r$	Razão de aspecto (comprimento/diâmetro da base)	1
$F_x$	Força de arrasto ao longo do eixo $x$	N
$g$	Função do corpo axissimétrico	
$h$	Entalpia	J/kg
$h_\infty$	Entalpia de corrente livre	J/kg
$h(c)$	Parâmetro para controlar a variação de $\Delta t$	-
$J$	Jacobiano	
$l_o$	Comprimento da ogiva do corpo axissimétrico	m
$l_r$	Comprimento do corpo axissimétrico	m
$M$	Número de Mach	1
$M_\infty$	Número de Mach de corrente livre	1
$\hat{n}$	Vetor unitário normal (para dentro) ao contorno do domínio computacional	
$q$	Pressão dinâmica	Pa
$q_\infty$	Pressão dinâmica de corrente livre	Pa
$r_b$	Raio da base do corpo axissimétrico	m
Re	Número de Reynolds	1
$r_f$	Raio frontal do corpo axissimétrico	m
$R_g$	Constante do gás	J/mol K
$R_{g_i}$	Constante do gás para a espécie química	J/kg K
$T$	Temperatura	K
$t$	Tempo	s
$U$	Componente contravariante do vetor velocidade	$m \cdot s^{-1}$
$u$	Velocidade na direção axial	$m \cdot s^{-1}$
$U_C$	Estimativa do erro numérico obtida com estimador convergente	diversas

$U_{GCI}$	Incerteza numérica obtida com estimador GCI	diversas
$U_m$	Estimativa do erro numérico obtida com estimador baseado em MER	diversas
$U_{MC}$	Estimativa do erro numérico obtida com estimador multicoeficiente	diversas
$U_{Ri}$	Estimativa do erro numérico obtida com estimador de Richardson	diversas
$\vec{u}$	Vetor velocidade com componentes $u_i$ ou $u, v, w$	$m \cdot s^{-1}$
$V$	Componente contravariante do vetor velocidade	$m \cdot s^{-1}$
$v$	Velocidade na direção radial	$m \cdot s^{-1}$
$V_\infty$	Velocidade de escoamento livre	$m \cdot s^{-1}$
$y$	Coordenada radial	m
$\mathbf{X}$	Vetor de variáveis de otimização	m

## Símbolos gregos

$\alpha$	Componente do tensor métrico	$m^2$
$\beta$	Componente do tensor métrico	$m^2$
$\gamma$	Relação de calores específicos	1
$\Delta t$	Intervalo de tempo	s
$\eta$	Coordenada do sistema curvilíneo	
$\xi$	Coordenada do sistema curvilíneo	
$\rho$	Massa específica	$kg/m^3$
$\Phi$	Solução exata (ou analítica) de um modelo	diversas
$\phi$	Variável genérica	
$\phi_C$	Solução extrapolada obtida com o estimador Convergente	diversas
$\phi_\eta$	Derivada parcial de $\phi$ em relação a $\eta$ , $\frac{\partial \phi}{\partial \eta}$	-
$\phi_\infty$	Solução estimada através de extrapolação	diversas
$\psi$	Razão de convergência	-
$\psi_M$	Razão de convergência da solução multiextrapolada	-
$\phi_\xi$	Derivada parcial de $\phi$ em relação a $\xi$ , $\frac{\partial \phi}{\partial \xi}$	-
$\phi_M$	Solução multiextrapolada obtida com MER	diversas
$\phi_{Ri}$	Solução extrapolada obtida com a extrapolação de Richardson	diversas

$\phi_{xx}$	Derivada parcial de segunda ordem em relação a $x$ , $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$	-
$\phi_{xy}$	Derivada parcial de segunda ordem em relação a $x$ e em relação a $y$ , $\frac{\partial^2 \phi}{\partial xy}$	-
$\phi_{yy}$	Derivada parcial de segunda ordem em relação a $y$ , $\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$	-
$\theta$	Ângulo	°
$\mu$	Viscosidade	Pa · s

## Sobrescritos

+ Indica variável parametrizada

## Subscritos

$\infty$	Indica propriedade de corrente livre
e, w, n, s	Refere-se as faces do volume elementar (faces Leste, Oeste, Norte e Sul)
$N, S, W, E$	Pontos cardeais do Método dos Volumes Finitos
$nb, NB$	No Método dos Volumes Finitos, indica ponto cardinal vizinho ou volume vizinho
num	Relativo a solução numérica
$NW, NE, SW, SE$	Pontos cardeais do Método dos Volumes Finitos

# SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	16
1.1	DESCRIÇÃO DO PROBLEMA . . . . .	19
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO . . . . .	22
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA . . . . .	23
2.1	FORMAS OTIMIZADAS . . . . .	23
2.2	MULTIEXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON . . . . .	38
2.2.1	Extrapolção de Richardson . . . . .	38
2.2.2	Multiextrapolção de Richardson . . . . .	40
3	METODOLOGIA . . . . .	43
3.1	REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DA GEOMETRIA . . . . .	43
3.2	SIMULAÇÃO DO ESCOAMENTO . . . . .	45
3.2.1	Condições de contorno . . . . .	48
3.2.2	Grandezas de interesse . . . . .	49
3.3	MODELO NUMÉRICO . . . . .	51
3.3.1	Método dos volumes finitos . . . . .	52
3.3.2	Geração da malha . . . . .	53
3.3.3	Equações em coordenadas generalizadas . . . . .	57
3.3.4	Integração de equações em volume elementar . . . . .	58
3.3.5	Correção da pressão . . . . .	61
3.3.6	Condições de contorno . . . . .	67
3.3.7	Resolução dos sistemas lineares . . . . .	73
3.3.8	Grandezas de interesse . . . . .	75
3.3.9	Algoritmo . . . . .	75
3.4	MULTIEXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON . . . . .	77
3.5	OTIMIZAÇÃO . . . . .	78
3.5.1	Método de Otimização de Forma . . . . .	78
3.5.2	Algoritmo de Otimização . . . . .	79
3.6	PROCEDIMENTO GERAL DE OTIMIZAÇÃO . . . . .	83
4	VERIFICAÇÃO . . . . .	87
4.1	VERIFICAÇÃO DE CÓDIGO . . . . .	88
4.2	VERIFICAÇÃO DE SOLUÇÃO . . . . .	90
4.2.1	Metodologia . . . . .	94
4.2.2	Resultados e discussões . . . . .	95

4.3	RESUMO . . . . .	98
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES . . . . .	100
5.1	PARAMETRIZAÇÃO DAS OTIMIZAÇÕES . . . . .	100
5.1.1	Parâmetros do cálculo dos escoamentos . . . . .	100
5.1.2	Parâmetros de otimização . . . . .	103
5.1.3	Ambientes computacionais . . . . .	104
5.1.4	Organização dos resultados . . . . .	106
5.2	FORMAS OTIMIZADA E COEFICIENTE DE ARRASTO PARA $f_r=2$ . . . . .	107
5.2.1	Número de Mach $M_\infty = 1,5$ . . . . .	107
5.2.2	Número de Mach $M_\infty = 3,0$ . . . . .	113
5.2.3	Número de Mach $M_\infty = 6,0$ . . . . .	116
5.3	FORMA OTIMIZADA E COEFICIENTE DE ARRASTO PARA $f_r=4$ . . . . .	120
5.3.1	Número de Mach $M_\infty = 1,5$ . . . . .	120
5.3.2	Número de Mach $M_\infty = 3,0$ . . . . .	126
5.3.3	Número de Mach $M_\infty = 6,0$ . . . . .	130
5.4	FORMAS OTIMIZADAS E COEFICIENTE DE ARRASTO PARA $f_r=3$ . . . . .	134
5.4.1	Número de Mach $M_\infty = 1,5$ . . . . .	134
5.4.2	Número de Mach $M_\infty = 3,0$ . . . . .	139
5.4.3	Número de Mach $M_\infty = 6,0$ . . . . .	141
5.5	RAIOS FRONTAIS . . . . .	147
5.6	RESUMO . . . . .	149
6	CONCLUSÃO . . . . .	151
6.1	CONTRIBUIÇÕES . . . . .	154
6.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS . . . . .	155
	REFERÊNCIAS . . . . .	157
	APÊNDICES . . . . .	164
	APÊNDICE A – MODELAGEM DO ESCOAMENTO . . . . .	165
A.1	COEFICIENTES E TERMO FONTE DA EQUAÇÃO DISCRETIZADA . . . . .	165
A.2	COEFICIENTES E TERMO FONTE DA EQUAÇÃO DE CORREÇÃO DE PRESSÃO . . . . .	166
	APÊNDICE B – PARÂMETROS DAS OTIMIZAÇÕES . . . . .	167
B.1	PARÂMETROS DA OTIMIZAÇÃO PARA $f_r=2$ e $M_\infty=3,0$ . . . . .	167
B.2	PARÂMETROS DA OTIMIZAÇÃO PARA $f_r=2$ e $M_\infty=6,0$ . . . . .	167
B.3	PARÂMETROS DA OTIMIZAÇÃO PARA $f_r=4$ e $M_\infty=3,0$ . . . . .	168

<b>B.4</b>	<b>PARÂMETROS DA OTIMIZAÇÃO PARA <math>f_r=4</math> e <math>M_\infty=6,0</math></b> . . . . .	<b>168</b>
<b>B.5</b>	<b>PARÂMETROS DA OTIMIZAÇÃO PARA <math>f_r=3</math> e <math>M_\infty=3,0</math></b> . . . . .	<b>168</b>
<b>B.6</b>	<b>PARÂMETROS DA OTIMIZAÇÃO PARA <math>f_r=3</math> e <math>M_\infty=6,0</math></b> . . . . .	<b>169</b>
	<b>APÊNDICE C – FIGURAS</b> . . . . .	<b>170</b>
<b>C.1</b>	<b>FIGURAS DE CAMPOS PARA <math>f_r=2</math></b> . . . . .	<b>170</b>
<b>C.1.1</b>	<b>Figuras de campos para <math>M_\infty=3,0</math></b> . . . . .	<b>170</b>
<b>C.1.2</b>	<b>Figuras de campos para <math>M_\infty=6,0</math></b> . . . . .	<b>172</b>
<b>C.2</b>	<b>FIGURAS DE CAMPOS PARA <math>f_r=4</math></b> . . . . .	<b>174</b>
<b>C.2.1</b>	<b>Figuras de campos para <math>M_\infty=3,0</math></b> . . . . .	<b>174</b>
<b>C.2.2</b>	<b>Figuras de campos para <math>M_\infty=6,0</math></b> . . . . .	<b>176</b>
<b>C.3</b>	<b>FIGURAS DE CAMPOS PARA <math>f_r=3</math></b> . . . . .	<b>178</b>
<b>C.3.1</b>	<b>Figuras de campos para <math>M_\infty=3,0</math></b> . . . . .	<b>178</b>
<b>C.3.2</b>	<b>Figuras de campos para <math>M_\infty=6,0</math></b> . . . . .	<b>180</b>

# 1 INTRODUÇÃO

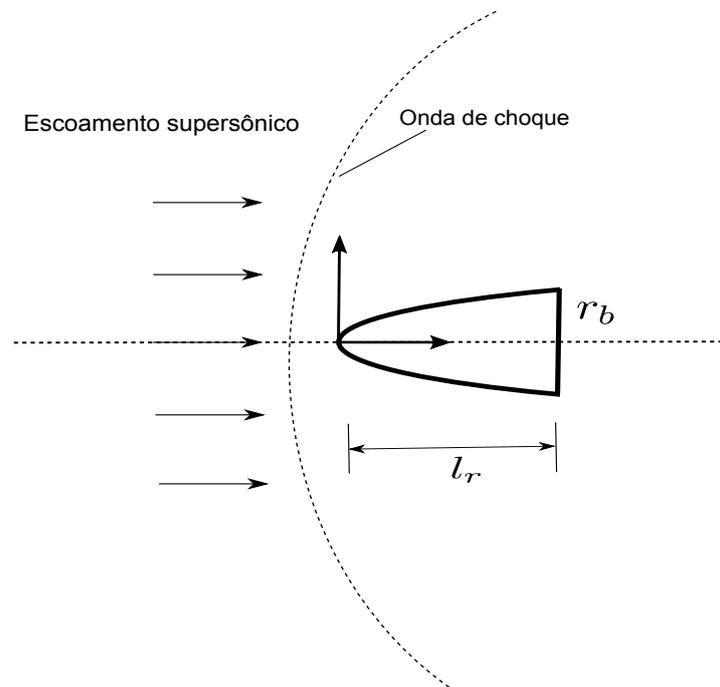
No âmbito da Engenharia, a proposta de nova solução para determinado problema, a partir da melhor compreensão da solução apresentada anteriormente, é prática já amplamente adotada. Não se trata de descartar a solução anterior, mas de aprender e melhorar a solução já elaborada.

Este trabalho trata do problema de otimização do coeficiente de arrasto de um nariz de foguete em regime supersônico. Este nariz de foguete é modelado como um corpo axissimétrico com razão de aspecto  $f_r$  conhecida, dada pela expressão

$$f_r = \frac{l_r}{2r_b}, \quad (1.1)$$

onde  $l_r$  é o comprimento do corpo e  $2r_b$  é o diâmetro da base. A Fig. 1.1 mostra um esquema do problema.

Figura 1.1 – MODELO DO CORPO AXISSIMÉTRICO



Fonte – O autor(2018)

Apesar da aparente modernidade pela presença da palavra “foguete” na frase anterior, o problema não é novo ou recente. Sir Isaac Newton (NEWTON, 1846)<sup>1</sup> há mais de 300 anos já havia trabalhado nesse problema.

<sup>1</sup> A referência mencionada é uma tradução para o inglês de 1846 do texto original de Isaac Newton *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* de 1687. O texto foi traduzido por Andrew Motte e revisada por N. W. Chittenden.

Com o uso de ferramenta que seria posteriormente conhecida como Cálculo Variacional, Newton obteve o perfil geométrico que minimiza o arrasto (resistência ao deslocamento) do corpo em deslocamento pelo fluido. Este corpo deveria ter superfície frontal  $r_f$  e arco suave ligando o raio frontal até o raio na base  $r_b$  do corpo. O problema é mencionado na sua obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* de 1687 e é denominado como “Problema de Newton de Mínima Resistência” (BUTTAZZO; KAWOHL, 2001) ou simplesmente “Problema de Newton”.

Na busca por uma nova solução e, como explica Rao (1996), otimização “é o ato de obter o melhor resultado sob dadas circunstâncias”, este problema de Newton vem sendo analisado desde o início do século XX, visando obter perfis geométricos mais otimizados, ou seja, com menor arrasto aerodinâmico. Mas, com um melhor suporte da compreensão da Mecânica dos Fluidos e também com o conhecimento de outras ferramentas matemáticas, que permitiram analisar o problema e resolvê-lo. Esse conhecimento não estava a disposição de Newton, inclusive, ele mesmo estabeleceu algumas premissas e asserções para resolver o problema, que são consideradas inválidas atualmente (HAYES; PROBSTEIN, 1959).

Mais de 200 anos depois, o trabalho de Von Kármán (1935) volta a analisar o problema de Newton, otimizando o perfil geométrico para o corpo axissimétrico deslocando no ar, mas em regime supersônico. Seu trabalho foi apresentado ainda antes da 2ª Guerra Mundial, determinando o perfil otimizado, denominado Ogiva de Von Kármán e obtendo, analiticamente, o valor do coeficiente de arrasto para esse perfil. A característica de seu trabalho tinha como premissa que o corpo deveria ser delgado e o escoamento foi resolvido com a utilização do modelo linearizado,

Eggers et al. (1958) utilizaram a mesma Lei de Pressão de Newton e Cálculo Variacional para identificarem que algumas combinações de propriedades dos perfis a serem determinados deveriam ser prescritas. Eles perceberam que ocorrem duas situações distintas para perfis com coeficiente de arrasto otimizado: se o comprimento é prescrito, o perfil necessariamente é rombudo, porém se o comprimento não é prescrito, o perfil otimizado é mais pontiagudo, levando a perfis mais delgados. Os autores efetuaram experimentos em túnel de vento com perfis do tipo lei de potência com 4 valores para o expoente e razão de aspecto igual a 3. A faixa de número de Mach utilizada foi entre 2.73 a 6.28. O perfil geométrico que apresentou o melhor coeficiente de arrasto foi o perfil com expoente  $\frac{3}{4}$ .

Miele (1965) também utilizando o modelo de Newton, mas com a hipótese de corpos delgados, concordou com o valor do expoente obtido por Eggers et al. (1958). Ele também obteve o valor do coeficiente de arrasto para este corpo específico, que é inversamente proporcional ao quadrado da razão de aspecto do corpo.

Os experimentos de Perkins et al. (1958) realizados em túnel de vento, com números de Mach entre 1,24 a 6,28, razão de aspecto igual a 3 e número de Reynolds baseados no comprimento do corpo igual a  $10^6$ , demonstraram concordância com os

experimentos de Eggers et al. (1958): o corpo com menor arrasto é o corpo com perfil do tipo lei de potência e de expoente igual a  $\frac{3}{4}$ . Entretanto, para valores de número de Mach próximos de 1, o corpo com menor arrasto foi o de expoente igual a  $\frac{1}{2}$ .

Powers (1964) elaborou um procedimento de otimização numérico em corpo formado por junção de uma esfera e um arco em forma de lei de potência com expoente igual a  $\frac{3}{4}$ . A partir deste perfil básico, um método de perturbação foi aplicado para obter outras formas a serem avaliadas. Utilizando o método das características para resolver o escoamento, conseguiu obter um perfil otimizado parecido com o perfil inicial, porém com redução do coeficiente de arrasto em 15%.

Kraiko et al. (2003) realizaram um estudo rigoroso para obter diversos perfis otimizados a partir do Método de Newton, utilizando Cálculo Variacional. O escoamento foi resolvido com o emprego das Equações de Euler, resolvidas através do Método das Características. Este estudo produziu um conjunto de formas otimizadas para as quais foi obtido o coeficiente de arrasto. O estudo foi conduzido para 6 números de Mach na faixa entre 1,5 a 10 para 8 razões de aspecto entre 0,125 a 10.

Mason e Lee (1994) e Sahai et al. (2014) efetuaram otimizações numéricas para obter os perfis geométricos com menor coeficiente de arrasto. Entretanto, os trabalhos dos autores são diferentes entre si. Mason e Lee (1994) efetuaram estudo numérico com simulações utilizando o modelo de Euler para solução do escoamento, visando determinar qual era o perfil geométrico que apresentava o menor coeficiente de arrasto. As simulações resolveram o escoamento numericamente utilizando o Método dos Volumes Finitos. Os perfis avaliados foram do tipo lei de potência com expoente na faixa de 0,65 a 1, com razão de aspecto igual a 3 e número de Mach prescritos e na faixa entre 3 a 12. Os autores determinaram que o perfil com menor arrasto é o perfil com expoente igual a 0,69. Este valor é menor que o valor do expoente do perfil do tipo de lei de potência obtido por Eggers et al. (1958) e Miele (1965), que é igual a  $\frac{3}{4}$ . Sahai et al. (2014) efetuaram a otimização com o objetivo de obter perfis otimizados, mas sem empregar um perfil inicial para as otimizações. Os autores utilizaram BSplines (FARIN, 1990) com dois pontos, sendo que estes pontos eram as variáveis de otimização. O perfil foi ajustado até que apresentasse o menor valor de coeficiente de arrasto. Entretanto, a distribuição de pressão sobre a superfície do corpo foi calculada com base em um método de Newton modificado. Os autores obtiveram valores de coeficiente de arrasto até 21% menores quando comparados com a ogiva de Von Kármán e, valores de coeficiente de arrasto até 1,6% menores quando comparados com o valor do coeficiente de arrasto para o perfil do tipo lei de potência obtido por Mason e Lee (1994).

Bertoldo (2014) empregou o Método de Otimização de Forma para otimizar três perfis baseados em lei de potência. Com o emprego de um algoritmo de Evolução Diferencial associado ao Método das Superfícies de Resposta para a otimização e, um programa de CFD para solução do escoamento através das equações de Navier-Stokes, obteve três perfis otimizados, sendo um deles sem face plana frontal e os outros dois,

com face plana frontal. O método foi aplicado para números de Mach 1,5, 3,0 e 6,0, faixa do número de Reynolds inverso ( $Re^{-1}$ ) entre 0 a  $10^{-3}$  e para razões de aspecto igual a 2 e 4. Os valores dos coeficientes de arrasto foram comparados com os valores obtidos por Kraiko et al. (2003). A diferença relativa entre os valores de cdf obtidos por Bertoldo (2014) e os valores de Kraiko et al. (2003) para o número de Mach igual 1,5 e para a razão de aspecto igual a 2, foi igual a 2% enquanto que, para a razão de aspecto igual a 4 foi de 3,7%. Além da obtenção de perfis que apresentaram coeficiente de arrasto com valores próximos dos valores obtidos por Kraiko et al. (2003), o autor ainda comentou que “Há um intervalo do número de Reynolds em que os perfis otimizados não variam significativamente, dentro de uma tolerância prescrita. Neste intervalo, as formas otimizadas com base no modelo de Euler podem ser aplicadas sem um aumento significativo no coeficiente de arrasto” (BERTOLDO, 2014). Pela análise efetuada, a diferença relativa do valor de Cdf comparado entre formas obtidas com modelo de Euler e Navier-Stokes, foi menor que 2% para Reynolds inverso ( $Re^{-1} \geq 10^{-5}$ ).

Percebe-se que nas décadas de 50 e 60, houve busca pela otimização utilizando-se as ferramentas disponíveis tais como o Cálculo Variacional. Entretanto, os modelos físicos empregados apresentavam algum tipo de limitação para descrever o escoamento. O trabalho de Kraiko et al. (2003) constitui-se em uma excelente fonte de referência de valores de coeficiente de arrasto, entretanto apresenta a solução das Equações de Euler pelo Método das Características. Mesmo o trabalho mais atual (SAHAI et al., 2014), na segunda década do século XXI, utiliza o método modificado de Newton para resolver a distribuição de pressão sobre o corpo.

Apesar do problema antigo, a redução do arrasto aerodinâmico de corpo axissimétrico ainda tem espaço para desenvolvimento. Entende-se que com o aumento da disposição de recursos computacionais, o emprego de CFD é uma excelente ferramenta para trazer mais conhecimento e permitir a análise de um problema que há muito tem intrigado os aerodinamicistas.

## 1.1 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Entende-se que os trabalhos avaliados utilizaram modelos que continham algum tipo de simplificação na modelagem física. Estas simplificações utilizaram aproximações do modelo através de linearização ou um modelo baseado na lei de pressão de Newton. Outros trabalhos que tentaram utilizar modelos baseados em Equações de Euler (MASON; LEE, 1994), utilizaram formas já predeterminadas e que já haviam sido obtidas por modelos pouco realistas.

Em face deste contexto, o objetivo central deste trabalho é obter perfis geométricos para o nariz de foguete, modelado por um corpo axissimétrico, que minimizem o coeficiente de arrasto no regime supersônico, utilizando o modelo matemático baseado nas Equações

de Euler. O emprego das Equações de Euler baseia-se no estudo de Bertoldo (2014), que concluiu que, as formas obtidas através do modelo invíscido podem ser aplicadas pois não aumentam significativamente o valor do coeficiente de arrasto, desde que dentro de uma tolerância prescrita e para uma faixa de número de Reynolds.

Um procedimento de otimização de perfis geométricos necessita, essencialmente, de duas informações: o modelo para obtenção da geometria do corpo que se deseja otimizar e o modelo físico para o escoamento. Dentro do âmbito da obtenção da geometria vários métodos podem ser empregados (SAMAREH, 1999). Porém, deve-se ter o cuidado com o número de variáveis de otimização (ou variáveis de design<sup>2</sup>). Isto se deve porque o emprego do Método de Otimização de Forma depende de um número de variáveis de otimização que descrevem o perfil a ser otimizado e, mesmo com o avanço dos computadores, a otimização de forma para aplicações em Aerodinâmica ainda permanece como tarefa complexa e de alto custo computacional (MARTINELLI; BEUX, 2008). Logo, necessita-se de uma modelagem adequada da forma a ser otimizada, pois com pequena quantidade de variáveis, pode não ser suficiente para descrever o modelo adequadamente e por conta disto, não ocorre a otimização ou a forma produzida não é descrita adequadamente. Por outro lado, o excesso de variáveis pode implicar em excessiva avaliação destas variáveis durante a otimização, implicando em tempo computacional excessivo ou obrigar o projetista a prescrever uma tolerância muito baixa, que pode invalidar o processo de otimização (HAN; ZINGG, 2014).

Para diminuir o número de variáveis de otimização, a descrição de formas utilizando polinômio é adequada (SAMAREH, 1999). Este polinômio pode ser descrito por funções de base ou por curvas de Bezier. Segundo Samareh (1999) curvas de Bezier tem a vantagem de serem obtidas de forma rápida (algoritmo de Bernstein), permitindo a descrição de curvas simples de forma acurada. A descrição de um perfil axissimétrico em uma curva de Bezier com grau três (curva de Bezier cúbica), definida por quatro pontos, é possível e é suficiente, não necessitando de curvas de Bezier com mais pontos (SAHAL et al., 2014). Entretanto, no âmbito da otimização de corpo axissimétrico com comprimento e raio da base prescritos, entende-se que há dois problemas relacionados ao uso de curvas de Bezier para gerar o perfil axissimétrico a ser otimizado. O primeiro refere-se às curvas de Bezier que são regidas pelos chamados “Pontos de Controle”, que ao serem modificados, produzem novas curvas de Bezier ou novos perfis. Mas estes pontos não são pontos que pertencem à curva em si, excetuando-se o primeiro e o último para o caso axissimétrico, os quais usualmente, estarão fixos (SAHAL et al., 2014). Isto tem implicação direta de que a visualização da forma, independente de ser ou não a forma otimizada, requer uma aplicação que desenhe a curva, pois o simples fato da observação direta dos pontos de controle da curva (excetuando-se os dois primeiros) não é suficiente para avaliação da curva. Ou seja, o projetista necessitará, mesmo durante a rotina do

<sup>2</sup> a tradução de *design* é projeto

procedimento de otimização, obrigatoriamente, de ferramenta para apresentar (desenhar) a forma que está sendo analisada, pois a simples observação do valor dos pontos não descreve qual é o formato da curva. O segundo é consequência do primeiro mas que se reflete no número de variáveis de otimização. Os dois pontos fixos (primeiro e último) da curva de Bezier permanecem como sendo variáveis de otimização, pois será necessário que o algoritmo avalie o perfil com todos os pontos de controle da curva, sugerindo novos pontos para a curva, pois esta é definida por todos os pontos de controle. Então, em termos de quantidade de variáveis, na realidade tem-se o número  $N$ , como sendo o número de pontos de controle da curva de Bezier, mas a rigor tem-se  $N-2$  variáveis que realmente alteram a forma do corpo axissimétrico. Em termos práticos, a curva de Bezier cúbica como a utilizada por Sahai et al. (2014) pode ser adequada, pois mesmo utilizando-se apenas dois pontos, obteve-se o perfil otimizado. Entretanto, um número maior de pontos poderiam ser utilizados, mas os perfis otimizados produzidos por mais pontos de controle produziram perfis semelhantes ao com apenas três pontos (SAHAI et al., 2014). Como não fica claro se isto ocorreu porque a distribuição de pressão foi calculada por método aproximado, o que impediu melhor avaliação do escoamento para as diferentes formas geométricas obtidas, entende-se que o uso de polinômio seja a alternativa mais apropriada para representar o perfil geométrico.

Quanto à solução do escoamento e do cálculo do coeficiente de arrasto do perfil, utilizando-se um suporte físico que reflita adequadamente a realidade do problema, necessita-se do emprego de Equações de Navier-Stokes ou Equações de Euler. A solução destas equações implica em método numérico e, por conta disto, sempre haverá algum tipo de aproximação a ser empregada, resultando em erro de discretização. Para resolver este problema devido ao método numérico, procura-se empregar esquemas para discretização que aumentem a ordem de acurácia e, deste modo, reduzam o erro de discretização. Outra alternativa é resolver o escoamento em malhas muito finas. Entretanto, ambas as soluções apresentam problemas que podem implicar em custo computacional para solução do escoamento e, também, aumento no custo computacional da otimização. O primeiro apresenta a complexidade inerente na implementação de esquema de ordem mais alta (ROY et al., 2004; VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007), que muitas vezes apenas aumenta em uma ordem a solução obtida (MARCHI et al., 1998). O segundo implica em custo computacional para a solução do escoamento e, como já mencionado, aumenta o custo computacional para o procedimento de otimização.

No âmbito do problema deste trabalho, as Equações de Euler serão resolvidas pelo Método dos Volumes Finitos (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007; MALISKA, 2004). Para descrição do perfil geométrico a ser otimizado será utilizado o Polinômio Interpolador Cúbico (FRITSCHT; CARLSON, 1980), onde as variáveis de otimização são coordenadas  $y$  de pontos inseridos entre a parte frontal e o raio da base do perfil. O número de variáveis de otimização para definição do perfil geométrico foram definidos como 1 (um), 2 (dois), 4 (quatro) e 8 (oito) variáveis. Assim, a descrição do corpo axissimétrico será efetuada por

um ponto, por dois pontos, por quatro pontos e oito pontos. Diferentemente dos pontos de controle de uma curva de Bezier, estes pontos farão parte do perfil geométrico a ser otimizado. A otimização estará a cargo de um algoritmo de *trust region*<sup>3</sup> denominado TRUST-NCG, que é baseado em gradiente. A escolha deste algoritmo foi conservadora, visto que o uso de outros tipos de algoritmos poderiam implicar em custo computacional elevado. Como o procedimento já emprega a solução do escoamento com as Equações de Euler, decidiu-se por uma estratégia mais conservadora na escolha do método de otimização. Para aumentar a acurácia da solução utilizada como valor para o algoritmo de otimização (valor da função objetivo), será empregada Multiextrapolação de Richardson ou MER (MARTINS et al., 2013; ERTURK et al., 2004). O uso de Multiextrapolação de Richardson aumenta a ordem de acurácia da solução numérica. O entendimento é que no âmbito das simulações para solução do escoamento, a aplicação de MER resultará em soluções mais acuradas.

As razões de aspecto escolhidas para o estudo são 2, 3 e 4. Os números de Mach de corrente livre  $M_\infty$  foram definidos como 1,5, 3,0 e 6,0.

## 1.2 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Apresenta-se nesta seção a organização deste trabalho. O texto prossegue com o Capítulo 2, que apresenta a Revisão Bibliográfica realizada no âmbito da otimização aerodinâmica de escoamentos supersônicos ou hipersônicos. O Capítulo 3 explica a Metodologia empregada, detalhando a representação matemática dos perfis geométricos, a simulação do escoamento, cálculo do coeficiente de arrasto, a Multiextrapolação de Richardson e a Otimização. O Capítulo 4 explica o procedimento de Verificação da solução. Os resultados são apresentados no Capítulo 5, mostrando os perfis obtidos para cada de aspecto e número de Mach. Além dos perfis otimizados, são apresentados os raios frontais para cada perfil. Também são apresentadas as discussões a respeito dos resultados. Finalizando, o Capítulo 6 apresenta as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

---

<sup>3</sup> tradução Região de Confiança

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo de revisão bibliográfica apresenta os principais trabalhos e resultados relativos a otimização de formas geométricas de corpos de simetria axial (com comprimento definido  $l_r$  e raio da base  $r_b$ , conhecidos *a priori*) em diversos regimes de escoamento. São apresentados trabalhos analíticos, experimentais e numéricos estudados e a evolução dos diversos métodos de otimização em corpos de simetria axial.

### 2.1 FORMAS OTIMIZADAS

O trabalho de Isaac Newton (NEWTON, 1846) em hidrodinâmica iniciou as primeiras observações sobre otimizações de perfis geométricos. A partir de conjecturas a respeito da estrutura física do fluido, estabeleceu uma lei, denominada Lei de Pressão de Newton (HAYES, 1965),

$$C_p = 2 \sin^2 \theta \quad (2.1)$$

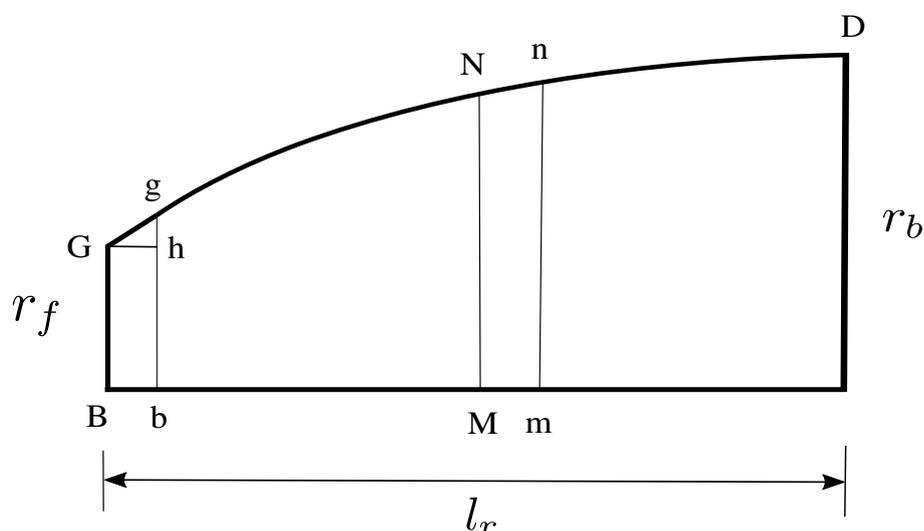
onde  $C_p$  é o coeficiente de pressão e  $\theta$  é o ângulo de inclinação do perfil do corpo, medido em relação ao escoamento livre onde o corpo está deslocando-se. Além da expressão 2.1, Newton explicou que, para o corpo de revolução com simetria axial, deslocando-se em velocidade constante pelo fluido, ter a menor resistência ao escoamento, necessariamente, deveria ter um raio frontal  $r_f$  diferente de zero. A Fig. 2.1 mostra o esquema deste corpo otimizado. Este corpo é formado pelo pequeno tronco de cone Ggb e pelo arco suave até o raio da base  $r_b$ .

Segundo a explicação de Hayes (1965)<sup>1</sup> sobre o corpo com arrasto minimizado obtido por Newton, este utilizou-se de uma ferramenta matemática, que posteriormente seria conhecida como Cálculo Variacional, para otimizar o formato do corpo. Para obter a otimização, o arco formado pelos segmentos GgNnD na Fig. 2.1 é a curva a ser ajustada, ou no jargão do Cálculo Variacional, extremizada. Os segmentos BGgb formam um tronco de cone e o ângulo hGg é 45°. Definindo uma variável independente  $z$  dada por  $z = (Mm - Bb)/2$ . Pela definição do método de variação de Newton, os segmentos bM e Bb + Mm são considerados fixos e não variam. A cada pequena variação em  $z$ , o segmento gN varia (translada), mas é independente de  $z$ . Pelo Cálculo Variacional, as variações eram provocadas para minimizar um funcional, considerando o comprimento  $l_r$  e o raio da base  $r_b$  fixos. Este processo determinava que a coordenada  $y$  frontal era diferente de zero e portanto, o corpo otimizado pelo método de Newton apresenta raio frontal  $r_f > 0$ . Algumas das conjecturas e premissas utilizadas por Newton para obter este corpo

<sup>1</sup> Segundo comentário de Hayes (1965), no trabalho de Newton em sua obra *Principia*, não há explicação sobre como foi obtido o corpo minimizado

são consideradas inválidas atualmente, entretanto, seu trabalho foi seminal e sem contar com o conhecimento de Mecânica dos Fluidos e aerodinâmica, disponíveis apenas muitos anos após o seu trabalho (HAYES; PROBSTEIN, 1959; ANDERSON, 2000). Como bem ressaltam Hayes e Probstein (1959), não se trata de diminuir a importância do trabalho de Newton, mas sim enaltecer a genialidade de Newton ao estabelecer premissas que foram estabelecidas e comprovadas posteriormente. Entende-se que as premissas não são válidas para todos os regimes de escoamento. Entretanto, como explica Anderson (2000), estas aproximações para a física do escoamento em regime hipersônico são válidas se, ao considerar o limite de Mach de corrente livre  $M_\infty$  tendendo ao infinito ( $M_\infty \rightarrow \infty$ ), considerar-se também que a razão de calores específicos tendendo para 1 ( $\gamma \rightarrow 1$ ).

Figura 2.1 – PERFIL DO CORPO AXISSIMÉTRICO OTIMIZADO DE NEWTON



Fonte – Adaptada de (HAYES, 1965)

Outra forma para explicar o método empregado por Newton é apresentado por Eggers (1965). Neste método, Eggers (1965) utiliza uma nomenclatura mais atualizada para os termos. Então, dado que a derivada  $dy/dx = y'$  é a tangente de  $\theta$ , a Eq. (2.1) é dada por

$$C_P = \frac{2y'^2}{1 + y'^2} \quad (2.2)$$

Então, o arrasto frontal é dado por (EGGERS, 1965)

$$D/2\pi q_\infty = \int_0^{l_r} C_P y y' dx, \quad (2.3)$$

onde  $D$  é o arrasto frontal e  $q_\infty$  é a pressão dinâmica de corrente livre.

Reescrevendo, tem-se (EGGERS, 1965)

$$D/2\pi q_\infty = \int_{x_i}^{x_f} \left[ \frac{2y'^3}{1 + y'^2} \right] dx + r_f^2, \quad (2.4)$$

onde  $x_i$  é a coordenada  $x$  inicial,  $x_f$  é a coordenada  $x$  onde está o raio da base  $r_b$ .

Eggers (1965) explica que a expressão dada pela Eq. (2.4) é o funcional a ser minimizado (ou na linguagem de Cálculo Variacional, extremizado). Este funcional pode ser avaliado em função de valores prescritos, tais como o diâmetro e o comprimento do corpo, a área e o diâmetro ou comprimento do corpo, ou, o volume e diâmetro ou comprimento do corpo. Este funcional é avaliado pelo Cálculo Variacional e se constitui na base de todos os métodos de otimização que se baseiam no Método de Newton.

Em seu trabalho apresentado na V Conferência Alessandro Volta, Von Kármán (1935) obteve a expressão para a forma geométrica com o menor arrasto frontal para o corpo com simetria axial, sendo conhecidos o comprimento e o raio da base. Este formato otimizado (“*best ogive*”)<sup>2</sup> foi obtido matematicamente a partir da aproximação de corpos delgados juntamente com a Teoria de Escoamento Linearizado. A expressão para o perfil geométrico  $g(x)$  é dado pela expressão:

$$\left(\frac{g}{2r_b}\right)^2 = \frac{1}{2\pi} \left[ \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{l_r}}\right) + \left(2\frac{x}{l_r} - 1\right) \sqrt{\frac{x}{l_r} \left(1 - \frac{x}{l_r}\right)} \right] \quad (2.5)$$

onde  $g$  é a expressão para a coordenada vertical do corpo,  $x$  é a coordenada horizontal  $0 \leq x \leq l_r$ ,  $r_b$  é raio da base e  $l_r$  é comprimento do corpo, no caso, da ogiva. Devido ao pioneirismo do trabalho de Von Kármán (1935), o corpo obtido através da expressão dada por 2.5 é usualmente referido na literatura como “Ogiva de Von Kármán”.

Von Kármán (1935) também obteve a expressão do arrasto de pressão frontal para o perfil, baseado na área da base e na pressão dinâmica de corrente livre e é dado por (Von Kármán, 1935):

$$F_x = \pi r_b^2 q \left(\frac{2r_b}{l_r}\right)^2 \quad (2.6)$$

onde  $q$  é a pressão dinâmica dada por  $\frac{1}{2}\rho u^2$ ,  $\rho$  é a massa específica do fluido e  $u$ , a velocidade do corpo em relação ao fluido.

O Coeficiente de Arrasto Frontal  $C_{Df}$  para a Ogiva de Von Kármán é definido, a partir da expressão do coeficiente de força (HOUGHTON et al., 2013),

$$C_{Df} = \frac{F_x}{\frac{1}{2}\rho u^2 S}, \quad (2.7)$$

onde  $C_{Df}$  é o Coeficiente de Arrasto Frontal,  $F_x$  é a força de arrasto dada pela Eq. (2.6),  $\rho$  é a massa específica do fluido,  $u$  é a velocidade do corpo em relação ao escoamento e  $S$  é a área longitudinal do corpo dada por  $\pi r_b^2$ . Assim, fazendo as simplificações devidas, tem-se que o Coeficiente de Arrasto Frontal  $C_{Df}$ , obtido a partir da força de arrasto frontal, é dado por:

$$C_{Df} = \frac{1}{f_r^2}, \quad (2.8)$$

<sup>2</sup> Von Kármán utiliza o termo *best ogive* (melhor ogiva em tradução livre) para referir-se ao formato obtido com menor arrasto

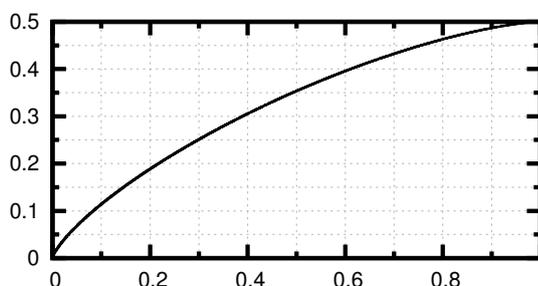
onde  $f_r$  é a razão de aspecto, dada por:

$$f_r = \frac{l_r}{2r_b}. \quad (2.9)$$

Von Kármán (1935) exemplifica o valor do Coeficiente de Arrasto Frontal para um corpo com razão de aspecto  $f_r=3$ , que tem o valor  $C_{Df} = 0,111111$ . Passados mais de 200 anos, o problema do corpo de axissimetria radial volta a ser tratado, mas dentro do regime de escoamento supersônico.

Como se percebe pelas expressões 2.5 e 2.8 tanto o perfil geométrico  $g(x)$  quanto o coeficiente de arrasto independem do número de Mach  $M_\infty$  de corrente livre. A figura (Fig. 2.2) mostra o perfil obtido.

Figura 2.2 – OGIVA DE VON KÁRMÁN



Fonte – O autor(2018)

Diferentemente de Von Kármán (1935), Eggers et al. (1958) utilizaram a lei de pressão de Newton (NEWTON, 1846), dada pela equação 2.1 para obter o perfil geométrico  $g(x)$  de menor arrasto devido a pressão frontal. Para isto, o coeficiente de força  $C_F$  é descrito como coeficiente de pressão  $C_P$ , substituindo-se a razão entre a força e a área na expressão Eq. (2.7) e introduzindo a expressão de pressão dinâmica  $q$ , tem-se:

$$C_P = \frac{p - p_\infty}{q_\infty}, \quad (2.10)$$

onde  $p_\infty$  é a pressão de corrente livre,  $q_\infty$  é a pressão dinâmica expressa por  $\rho u_\infty^2/2$ . Com a Eq. (2.10) e substituindo-se na expressão de Newton (HAYES; PROBSTEIN, 1959), Eq. (2.1), tem-se

$$p = p_\infty + 2q_\infty \sin^2(\theta) \quad (2.11)$$

onde  $p_\infty$  e  $q_\infty$  são, respectivamente, a pressão estática e pressão dinâmica de corrente livre,  $p$  é a pressão e  $\theta$  é a inclinação local do perfil do corpo.

Eggers et al. (1958) utilizaram a mesma dedução aplicada por Newton e, definiram restrições como comprimento  $l_r$  e diâmetro da base  $2r_b$  conhecidos, obtiveram expressões em formato paramétrico que dependem da derivada da coordenada vertical  $y$ . As expressões para coordenadas horizontal  $x$  e vertical  $y$  em função da derivada  $y'$  são

dadas por (EGGERS et al., 1958; EGGERS, 1965)

$$\begin{aligned} y &= \frac{r_f (1 + y'^2)^2}{4 y'^3} \\ x &= \frac{r_f}{4} \left( \frac{3}{4y'^4} + \frac{1}{y'^2} - \frac{7}{4} + \ln y' \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Adotando-se a notação deste trabalho e normalizando em relação ao comprimento do corpo  $l_r$  e ao diâmetro  $2r_b$ , tem-se

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{2r_b} &= \frac{r_f}{8r_b} \frac{(1 + y'^2)^2}{y'^3} \\ \frac{x}{l_r} &= \frac{r_f}{8f_r} \left( \frac{3}{4y'^4} + \frac{1}{y'^2} - \frac{7}{4} + \ln y' \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde  $r_b$  é o raio da base do corpo,  $f_r$  é a razão de aspecto dada por  $l_r/2r_b$ .

Segundo Eggers et al. (1958), o perfil deveria ter face plana, pois não seria possível que a curva  $g(x)$  passasse pelos pontos com coordenadas  $(0, 0)$  e  $(l_r, r_b)$  para dada razão de aspecto qualquer. Ou seja, a forma otimizada obrigatoriamente deveria apresentar raio frontal diferente de 0 ( $r_f \neq 0$ ), semelhante à forma de Newton. Mais tarde, os autores expressaram o coeficiente de arrasto frontal  $C_{Df}$  dado pela expressão (EGGERS, 1965):

$$C_{Df} = \frac{h_N^2}{16} \left( 2y_b'^2 + \frac{10}{y_b'^2} + \frac{3}{y_b'^4} - 4 \ln y' - 15 \right), \quad (2.14)$$

onde  $h_N$  é a razão dos raios frontal e da base dado por (BERTOLDO, 2014)<sup>3</sup>:

$$h_N = \frac{r_f}{r_b}. \quad (2.15)$$

Os autores também concluíram que, se o comprimento do corpo não fosse definido, os raios frontais seriam cada vez menores e o corpo seria delgado (fino), enquanto que com o comprimento do corpo determinado, obrigatoriamente, o corpo terá raio frontal. O autor explica que para os casos de corpos muito delgados, os corpos deveriam ter perfis baseados em lei de potência

$$\frac{g(x)}{r_b} = \left( \frac{x}{l_r} \right)^n. \quad (2.16)$$

com o corpo com menor arrasto aerodinâmico com expoente  $n = 3/4$ .

Miele (1965) trabalhando com o modelo de Newton para o coeficiente da pressão e com a hipótese de corpo delgado,

$$\left( \frac{dg(x)}{dx} \right) \ll 1, \quad (2.17)$$

acabou por concordar com a afirmação de Eggers et al. (1958) de que o corpo, com comprimento e raio da base prescritos, que possui o menor coeficiente de arrasto frontal

<sup>3</sup> Em (EGGERS, 1965) o termo informado corresponde ao  $\frac{1}{h_N}$

$C_{Df}$  é o corpo com perfil dado pela lei de potência Eq. (2.16), com o expoente  $n = 3/4$ . Miele (1965) também obteve para este corpo, o valor do coeficiente de arrasto de pressão frontal  $C_{Df}$ , dado por

$$C_{Df} = \frac{27}{64} \frac{1}{f_r^2}. \quad (2.18)$$

Eggers et al. (1958) também efetuaram experimentos que foram realizados em túnel de vento com diversos perfis geométricos com razões de aspecto  $f_r = 3$  e  $f_r = 5$ . Os perfis foram formados pela lei de potência dados pela Eq. (2.16), com vários expoentes  $n \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$ . A Tab. 1 apresenta os números de Mach  $M_\infty$  e os números de Reynolds  $Re$  para o corpo com  $f_r = 3$ , disponibilizados pelos autores. A terceira coluna mostra o número de Reynolds baseado no comprimento  $l_r$ . Os autores informam que há uma incerteza na obtenção dos valores de  $C_{Df}$  entre  $\pm 0,001$  para  $M_\infty=2,73$  e  $\pm 0,005$  para  $M_\infty=6,28$ . Segundo os autores, esta incerteza está relacionada com a montagem e dificuldades de medição da pressão e da força de arrasto.

Tabela 1 – NÚMEROS DE MACH  $M$  E DE REYNOLDS  $Re$  UTILIZADOS NO EXPERIMENTO PARA CORPOS COM  $f_r=3$

$M$	$Re$	$Re(l_r)$
2,73	$7,00 \cdot 10^5$	$2,10 \cdot 10^6$
3,50	$9,50 \cdot 10^5$	$2,85 \cdot 10^6$
4,00	$7,20 \cdot 10^5$	$2,16 \cdot 10^6$
5,50	$3,50 \cdot 10^5$	$1,05 \cdot 10^6$
6,28	$1,50 \cdot 10^5$	$4,50 \cdot 10^5$

Fonte – Adaptado de (EGGERS et al., 1958)

Os resultados foram apresentados na forma de gráficos no texto original (EGGERS et al., 1958). Os valores para  $f_r=3$  foram extraídos da figura que contém os gráficos e tabulados por Bertoldo (2014). Os valores de  $C_{Df}$  apresentam uma incerteza de  $\pm 0,005$  devido a obtenção dos valores. A Tab. 2 apresenta os valores transcritos de (BERTOLDO, 2014). Os corpos com expoente  $n = 3/4$  apresentam o menor valor de coeficiente  $C_{Df}$ ,

Tabela 2 – VALORES DE  $C_{Df}$  PARA CORPOS  $f_r=3$

$M_\infty$	$C_{Df}$			
	$n = \frac{1}{4}$	$n = \frac{1}{2}$	$n = \frac{3}{4}$	$n = 1$
2,73	0,247	0,096	0,079	0,088
3,50	0,247	0,088	0,072	0,081
4,00	0,249	0,083	0,066	0,078
5,05	0,263	0,083	0,067	0,076
6,28	0,294	0,096	0,077	0,089

Fonte – Transcritos de (BERTOLDO, 2014)

conforme previsto na teoria dos autores. Para os corpos com  $f_r = 3$  informados na Tab. 2, a redução do valor de  $C_{Df}$  entre o corpo de  $n = 3/4$  e o corpo com  $n = 1$  variou de 11% para  $M_\infty = 2,73$  a 18% para  $M_\infty = 4,0$ .

No trabalho experimental de Perkins et al. (1958) foram avaliados diversos perfis tais como lei de potência, hemisfério-cone e também perfil da Ogiva de Von Kármán. Os perfis foram feitos com  $f_r = 3$ , com valores de Mach entre 1,24 a 3,67. Os experimentos foram realizados em túnel de vento sendo informada a incerteza do número de Reynolds como sendo 4%, aproximadamente,  $\pm 0,2 \cdot 10^6$ . A incerteza para o número de Mach informada pelos autores é de  $\pm 0,003$ . A Tab. 3 apresenta os números de Mach e os respectivos números de Reynolds utilizados no experimento.

Tabela 3 – NÚMEROS DE MACH E  $Re$  UTILIZADOS NO EXPERIMENTO PARA CORPOS COM  $f_r = 3$

$M_\infty$	$Re_\infty$
1,24	2,42
1,44	3,14
1,96	4,14
3,06	4,00
3,67	3,45

Fonte – Transcrito de (EGGERS et al., 1958)

O dados referentes aos valores do Coeficiente de Arrasto Frontal  $C_{Df}$  não foram tabulados mas apresentados apenas em gráficos. Os valores obtidos através de extração de dados <sup>4</sup> de duas figuras dos gráficos (figuras 12a e 15) disponíveis em (PERKINS et al., 1958) estão na Tab. 4. A incerteza da leitura dos dados dos coeficientes de arrasto frontal  $C_{Df}$  é de  $\pm 0,0003$ . Estes dados são referentes apenas para os perfis obtidos por lei de potência com expoentes  $n \in \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$ , com razão de aspecto  $f_r = 3$ , para o perfil tipo lei de potência com expoente  $n=1$  e razão de aspecto = 3,38 e, para o perfil do tipo Von Kármán, com razão de aspecto  $f_r = 3$ . O valor de  $C_{Df}$  para o expoente  $n = 1$ , para  $M_\infty = 3,67$  não pode ser extraído da figura, pois não estava disponível no gráfico.

Perkins et al. (1958) concluíram que dentro da faixa do número de Mach testado,  $1,24 \leq M \leq 3,67$ , os perfis com expoente  $n = \frac{3}{4}$  e com expoente  $n = 1$ , têm o valor do coeficiente de arrasto reduzido quando há aumento do número de Mach  $M$ . Destes dois perfis, o que apresenta o menor valor de arrasto frontal é o perfil expoente  $n = \frac{3}{4}$  para a faixa de número de Mach  $M$  acima de 1,5. Os autores também comentam que a Ogiva de Von Kármán não apresentou o menor arrasto frontal e que os valores obtidos estão em concordância com os valores do experimento de Eggers et al. (1958).

Powers (1964) aplicou método de otimização para minimizar o coeficiente de arrasto frontal de corpo de revolução axissimétrico. O corpo deveria ser formado por nariz

<sup>4</sup> Ferramenta de extração de dados WebPlotDigitizer disponível em (ROHATGI, 2017)

Tabela 4 – VALORES DE  $C_{Df}$  PARA CORPOS  $f_r = 3$ 

$M_\infty$	$C_{Df}$				Von Kármán
	$n = \frac{1}{4}$	$n = \frac{1}{2}$	$n = \frac{3}{4}$	$n = 1$	
1,24	0,145	0,071	0,103	0,106	0,084
1,44	0,173	0,093	0,097	0,121	0,095
1,99	0,211	0,092	0,082	0,128	0,084
3,06	0,244	0,089	0,072	0,135	0,074
3,67	0,249	0,085	0,069	—	0,074

Fonte – Transcrito de (PERKINS et al., 1958)

em formato esférico e, tangente a esfera, uma curva suave até o raio da base. A razão de aspecto deveria ser mantida em  $f_r=4$  com o escoamento considerado invíscido, em equilíbrio químico e ao nível do mar. O número de Mach  $M$  foi arbitrado como sendo igual a 7,0.

Segundo o autor, foi definido um perfil inicial, que era um corpo com comprimento  $l_r=1$ , formado por uma esfera tangente a uma curva baseada na lei de potência com expoente  $n = \frac{3}{4}$ . Foi utilizado o método de perturbação polinomial no trecho do perfil entre o ponto de tangência da curva com a esfera até a base do corpo. Esta função de perturbação definia a variação na direção vertical  $\Delta y$ , que é função de variação das coordenadas  $x$  máxima e do ponto de tangência com a esfera. Com as condições de contorno impostas, a função  $y$  foi dividida em duas partes (ou seja, duas funções de perturbação). A partir destas condições, estabeleceu-se uma função polinomial para o coeficiente de arrasto  $C_{Df}$ . Para minimizar essa função, utilizou-se o método dos Mínimos Quadrados e o escoamento foi resolvido computacionalmente pelo Método das Características.

Segundo Powers (1964), obteve-se um valor de coeficiente de arrasto  $C_{Df}$  igual a 0,03163 para o perfil otimizado. Ele conclui que o procedimento de otimização obteve o valor de coeficiente de arrasto  $C_{Df}$  15% menor que o valor de  $C_{Df}$  do corpo inicial, que era igual a 0,03721.

Mason e Lee (1994) efetuaram um estudo numérico para obter o perfil do tipo lei de potência com o menor expoente  $n$  e que apresentasse o menor coeficiente de arrasto  $C_{Df}$ . O perfil deveria ter comprimento  $l_r$  e área de seção reta máxima na base do corpo. O escoamento foi resolvido utilizando as equações de Euler, com o número de Mach  $M$  variando na faixa de 3 a 12. A solução numérica dos diversos perfis foi obtida pelo Método dos Volumes Finitos e com técnica de marcha espacial. Os valores dos expoentes avaliados variou de  $n$  entre 0,65 a 1.

Os autores obtiveram o perfil com menor valor de coeficiente de arrasto  $C_{Df}$  formado pelo expoente  $n=0,69$  para o corpo com razão de aspecto  $f_r=3$ . Os autores comentam que este valor é diferente do valor estabelecido pelos modelos teóricos baseados no modelo de Newton, onde o perfil com expoente de menor coeficiente de

arrasto  $C_{Df}$  é o perfil definido pelo expoente  $n=0,75$  (EGGERS et al., 1958). Os autores mostraram que para o intervalo de número de Mach entre 4 a 8, o valor do coeficiente de arrasto varia pouco, porém diminui. Este comportamento é observado também para os outros perfis geométricos com expoentes avaliados, mas o perfil com expoente  $n=0,69$  permaneceu tendo menor coeficiente de arrasto  $C_{Df}$  em toda a faixa de números de Mach  $M$  avaliados.

A Tab. 5 mostra os valores de coeficiente de arrasto  $C_{Df}$  para corpo com razão de aspecto  $f_r=3$ , para os expoentes  $n=0,69$ ,  $n=0,75$  e  $n=1$ . Estes valores foram extraídos a partir da figura 9 do texto, onde os valores foram plotados para números de Mach  $M$  na faixa de valores entre 2 a 9. Pela extração de dados a partir da figura, estima-se que os valores para número de Mach têm incerteza de  $\pm 0,05$  e incerteza de  $\pm 0,0003$  para os valores de  $C_{Df}$ . Observa-se que todos os valores de  $C_{Df}$  na Tab. 5 diminuem com o aumento do número de Mach, porém o valor de  $C_{Df}$  para expoente  $n=0,69$  é o menor valor quando comparado com os outros valores de  $C_{Df}$ , para o mesmo número de Mach.

Tabela 5 – VALORES DE  $C_{Df}$  PARA CORPOS CORPOS  $f_r=3$

$M_\infty$	$C_{Df}$		
	$n=0,69$	$n=0,75$	$n=1,0$
2,99	0,0671	0,0683	0,0823
3,99	0,0604	0,0611	0,0736
5,05	0,0559	0,0565	0,0685
6,28	0,0523	0,0529	0,0650
8,00	0,0493	0,0499	0,0620

Fonte – Transcrito de (MASON; LEE, 1994)

Mason e Lee (1994) ainda avaliaram o efeito dos modelos de gás perfeito e para o ar em equilíbrio termodinâmico. Para o escoamento resolvido pela equações de Euler, os autores tabularam valores para número de Mach  $M_\infty$  iguais a 6,28, 8,00 e 12,0. As condições de equilíbrio correspondem a uma altitude de 96000 pés, aproximadamente, 31780 m. A conclusão é de que o modelo do gás tem pouca influência nos valores do coeficiente de arrasto. Os valores de  $C_{Df}$  para o perfil com expoente  $n=0,75$  e escoamentos resolvidos através das equações de Euler, estão listados na Tab. 6, transcritos da tabela 2 de Mason e Lee (1994).

Os autores concluíram que o expoente com menor valor de coeficiente de arrasto  $C_{Df}$  é o  $n=0,69$ , diferentemente do que estabelece os estudos teóricos, em que o valor  $n=0,75$  é descrito como o expoente de corpo com menor valor de  $C_{Df}$ . Os autores recomendam que, apesar das diferenças no coeficiente de arrasto  $C_{Df}$  serem aparentemente pequenas (conforme a Tab. 5), não devem ser desprezadas pois podem ter impacto significativo no projeto dos perfis aerodinâmicos otimizados.

Tabela 6 – EFEITO DE MODELO DE GÁS SOBRE OS VALORES DE  $C_{Df}$ 

$M_\infty$	$C_{Df}$ ( $n=0,75$ )		
	Gás Perfeito	Ar em equilíbrio	Diferença relativa (%)
6,28	0,053070	0,053063	0,013
8,00	0,049987	0,049981	0,012
12,00	0,046350	0,046349	0,002

Fonte – Transcrito de (MASON; LEE, 1994)

Kraiko et al. (2003) obtiveram o valor do coeficiente de arrasto frontal  $C_{Df}$  para diversos corpos axissimétricos, para vários valores de comprimento  $l_r$  e raio de base  $r_b$ , definidos previamente. A estratégia dos autores para obtenção da expressão para o coeficiente de arrasto foi a construção de curvas características formadas a partir de linhas entre o perfil geométrico e a onda de choque próxima deste perfil. A curva característica é determinada entre a onda de choque e o raio da base do corpo e atravessa a onda de rarefação que surge pelo escoamento e uma quina do corpo. Outros métodos mencionados pelos autores sugerem que o corpo deveria ter mais que uma quina para que o valor do arrasto fosse mínimo, entretanto os autores explicam que não há necessidade de diversas quinas sobre o corpo. Deste modo, os perfis foram formados como tendo apenas a quina devido à junção entre o raio frontal  $r_f$  e o arco formado até o raio da base  $r_b$ . Os autores ainda explicam que o coeficiente de arrasto frontal  $C_{Df}$  deveria ser a soma do arrasto produzido pela face plana frontal e o arrasto da região da curva formado pelo arco até o raio da base.

Os autores combinaram o uso de Cálculo Variacional para resolver a curva característica e o uso das equações de Euler para a solução do escoamento. Os resultados obtidos são classificados pelos próprios autores tanto como exatos quanto aproximados. Os resultados obtidos por Kraiko et al. (2003) foram tabulados e a tabela 7 apresenta os valores obtidos para coeficiente  $C_{Df}$  transcritos a partir do trabalho de Bertoldo (2014). Os valores estão agrupados por número de Mach de corrente livre  $M_\infty$  e a coluna “A/E” informa quais os valores são aproximados e quais foram calculados de forma exata, onde a letra “E” representa valores obtidos de forma exata, enquanto que aqueles identificados por “A” foram obtidos de forma aproximada.

Sahai et al. (2014) estudaram numericamente o efeito da razão de aspecto  $f_r$  para obterem perfis otimizados para corpos axissimétricos, com menor coeficiente de arrasto  $C_{Df}$  em regime hipersônico. Os autores explicam que utilizaram otimização aerodinâmica de forma<sup>5</sup>. Para solução do escoamento foi escolhido um método modificado para a pressão a partir do modelo de Newton. Os autores explicam que não há necessidade da solução completa do escoamento, apenas da distribuição de pressão. Deste modo, como o modelo é aproximado, o modelo proposto é considerado por eles como sendo de

<sup>5</sup> tradução de *aerodynamic shape optimization*

Tabela 7 – VALORES DE  $C_{Df}$  DAS FORMAS OTIMIZADAS

$M_\infty$	A/E	$f_r$	$r_f/r_b$	$C_{Df}$
1,5	E	0,125	0,81	0,8632
	E	0,25	0,724	0,6938
	E	0,5	0,595	0,5096
	E	1	0,399	0,3156
	A	2	0,175	0,144
	A	4	0,042	0,0482
	A	6	0,015	0,0234
	A	10	0,004	0,0090
2,0	A	1	0,297	0,3300
	A	2	0,109	0,136
	A	4	0,024	0,0446
	A	6	0,01	0,02188
	A	10	0,0025	0,00858
3,0	E	0,125	0,784	1,121
	E	0,25	0,654	0,9050
	E	0,5	0,452	0,6118
	A	1	0,238	0,3132
	A	2	0,079	0,121
	A	4	0,018	0,0396
	A	6	0,0065	0,0198
	A	10	0,0023	0,00798
4,0	E	0,125	0,776	1,160
	E	0,25	0,633	0,9280
	E	0,5	0,43	0,6098
	A	1	0,22	0,2998
	A	2	0,071	0,112
	A	4	0,016	0,0364
	A	6	0,006	0,0183
	A	10	0,002	0,00750
6,0	E	0,125	0,77	1,188
	E	0,25	0,615	0,9404
	E	0,5	0,42	0,6014
	A	1	0,209	0,2856
	A	2	0,065	0,101
	A	4	0,015	0,0322
	A	6	0,0078	0,0163
	A	10	0,0022	0,00678
10,0	E	0,125	0,765	1,203
	E	0,25	0,608	0,9450
	E	0,5	0,419	0,5964
	A	1	0,205	0,2764
	A	2	0,063	0,0932
	A	4	0,014	0,0280
	A	6	0,0055	0,0140
	A	10	0,0024	0,00586

Fonte – Transcrito de (BERTOLDO, 2014)

“baixa fidelidade”. Para representação geométrica do perfil a ser otimizado, os autores utilizaram curva de Bezier de 3º grau, com 4 (quatro) pontos de controle. Através de avaliação sobre o tipo de curva de Bezier a ser utilizada, os autores concluíram que a curva de Bezier com 4 (quatro) pontos era suficiente para o método de otimização empregado. Entretanto, dos quatro pontos de controle da curva, dois pontos (o primeiro e o último) não sofrem alteração, pois representam o comprimento e o diâmetro do corpo axissimétrico, fixados arbitrariamente. Os autores especificaram que a otimização seria sem restrições, e a função objetivo seria o valor do coeficiente de arrasto. Como variáveis de otimização foram definidas as coordenadas dos pontos da curva de Bezier do perfil geométrico que poderiam sofrer alterações (2º e 3º pontos). O algoritmo de otimização escolhido foi o algoritmo *Steepest descent*<sup>6</sup> (NOCEDAL; WRIGHT, 2006). Este método é de busca de direções baseado na avaliação do gradiente da função objetivo. O vetor de variáveis de otimização, de comprimento igual a quatro (dois pontos da curva de Bezier com duas coordenadas  $(x,y)$  para cada ponto) para um ciclo de otimização é dado por

$$\mathbf{X}_i^{k+1} = \mathbf{X}_i^k - \lambda^k \frac{\partial C_d}{\partial \mathbf{X}_i}, \quad (2.19)$$

onde  $k$  é o ciclo de otimização e  $i$  é um índice para as variáveis de otimização. As derivadas são obtidas por diferenças centrais, dadas por

$$\frac{\partial C_d}{\partial \mathbf{X}_i} = \frac{C_d^k(\mathbf{X}_i + \epsilon) - C_d^k(\mathbf{X}_i)}{\epsilon}, \quad (2.20)$$

onde  $\epsilon$  é uma pequena perturbação, sendo empregado o valor de 0,001mm. Segundo os autores, não há necessidade de utilizar valores menores, pois não produzem diferenças significativas no cálculo das derivadas. Os autores explicam que  $\lambda$  serve como uma taxa para acelerar a convergência e é dada por

$$\lambda^k = \begin{cases} \alpha \lambda^{k-1} & \text{se } C_d^k > C_d^{k-1} \\ \beta \lambda^{k-1} & \text{para outra condição,} \end{cases} \quad (2.21)$$

onde os fatores  $\alpha$  e  $\beta$  foram escolhidos como 0,5 e 1,4, após vários testes.

Os autores explicam a otimização, onde inicia-se com um perfil geométrico, usualmente um cone, mas podendo ser outra forma geométrica. Obtém-se então o valor do coeficiente de arrasto para o perfil geométrico, através do cálculo das pressões sobre a superfície utilizando um método modificado de Newton. Determinam-se então, os pontos de controle da curva de Bezier, tendo-se então um novo perfil geométrico. Retorna-se ao cálculo das pressões e do coeficiente de arrasto. Os passos são repetidos até que um destes critérios ocorra:

- (i) o ângulo no vértice frontal não pode ser igual a 90°;

<sup>6</sup> *Steepest descent* é traduzido como descida mais íngreme. Não há uma concordância na literatura sobre utilizar ou não utilizar o texto em inglês. Neste trabalho foi mantido o nome em inglês.

- (ii) a diferença relativa entre o valor do coeficiente de arrasto entre duas geometrias propostas for menor que uma tolerância prescrita, definida como  $10^{-10}$ ;
- (iii) o número total de ciclos de otimização  $k$  seja igual a 100000 (cem mil), sendo que este valor pode ser definido pelo usuário.

Os autores comentam que o último critério nunca foi atingido e que, usualmente, o critério (i) foi atingido para perfis com pequena razão de aspecto e o critério (ii) foi atingido para perfis com razões de aspecto maiores. Os autores efetuaram validação deste procedimento de otimização utilizando perfis do tipo lei de potência e concluíram que há “boa concordância com os resultados de (EGGERS et al., 1958)”. Para perfis com razão de aspecto  $f_r=3$ , o expoente  $n$  que produziu perfil com menor coeficiente de arrasto foi  $n=0,735$  e, segundo os autores, este valor está em concordância com os resultados de (MASON; LEE, 1994). Entretanto, não foi informado o valor da incerteza numérica e também não foi efetuada comparação entre os valores dos coeficientes de arrasto dos textos mencionados.

O valor do coeficiente de arrasto  $C_{Df}$  para os perfis otimizados para diferentes razões de aspecto e para número de Mach  $M=12$  foram tabulados pelos autores, juntamente com os valores para a Ogiva de Von Kármán e também os valores obtidos pelo perfil otimizado de Mason e Lee (1994). Estes valores são mostrados na Tab. 8, juntamente com a redução (em %) no valor deste coeficiente em relação ao valores obtidos para a Ogiva de Von Kármán e do valor obtido por Mason e Lee (1994).

Tabela 8 – VALORES DE  $C_{Df}$  PARA CORPOS OTIMIZADOS -  $M=12$

$f_r$	Von Kármán		Lei de Potência		Perfil otimizado (SAHAI et al., 2014)
	$C_{Df}$	redução (%)	$C_{Df}$	redução (%)	
1	0,34633	13,58	0,30403	1,55	0,29931
2	0,11015	18,29	0,09037	0,41	0,09000
4	0,02995	20,73	0,02394	0,84	0,02374
6	0,01355	21,18	0,01078	0,93	0,01068

Fonte – Transcrito de (SAHAI et al., 2014)

Sahai et al. (2014) ainda avaliaram o efeito da teoria simplificada (método modificado de Newton) para o escoamento, visto que este pode ser um fator de limitação do procedimento apresentado. Para o número de Mach =6 e corpo delgado, devido a variação de pressão sobre o corpo, os autores informam que o coeficiente de arrasto teve diferença relativa de 20% em relação ao valor do coeficiente obtido com o emprego de simulação em CFD utilizando modelo de Euler, enquanto que para um corpo rombudo em número de Mach = 1,5, a diferença relativa foi de 2%. Os autores comentam que as simulações utilizando CFD obtém valores de coeficiente de arrasto maiores e explicam que

a concordância entre os valores do coeficiente de arrasto obtidos pelo método proposto e com simulações de CFD, utilizando modelo de Euler, é percebida apenas para corpos rombudos em regime hipersônico.

O trabalho de Bertoldo (2014) contitui-se em um trabalho de otimização de perfis axissimétricos que produzem menor coeficiente de arrasto frontal  $C_{Df}$ , com razão de aspecto  $f_r$  prescrita. O autor propõe que o escoamento seja resolvido com as equações de Navier-Stokes para que o escoamento seja resolvido de modo mais realista. Para isto, estas equações foram resolvidas numericamente utilizando o Método dos Volumes Finitos. O algoritmo de otimização utilizado foi o algoritmo de Evolução Diferencial (FEOKTISTOV, 2006), combinado com o método de Superfície de Resposta.

Bertoldo (2014) definiu duas razões de aspecto  $f_r$  iguais a 2 e 4, e também arbitrou três números de Mach  $M_\infty$  iguais a 1,5, 3 e 6. O autor preocupou-se em demonstrar os efeitos viscosos sobre o arrasto e escolheu um conjunto de seis números de Reynolds, mais precisamente, o inverso deste número  $Re^{-1}$ , iguais a  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$ ,  $10^{-5}$ ,  $10^{-6}$ ,  $10^{-7}$  e 0. O valor de  $Re^{-1} = 0$  indica ausência de forças viscosas enquanto que valores menores para  $Re^{-1}$  indicam maiores efeitos viscosos.

Foram otimizados três perfis geométricos:

- perfil 1C: perfil do tipo lei de potência mas sem a face plana ( $r_f = 0$ ). A expressão para este perfil é dada por

$$g(x) = r_b \left( \frac{x}{l_r} \right)^n, \quad 0 \leq x \leq l_r;$$

- perfil 2C: perfil do tipo lei de potência mas com o raio frontal  $r_f \neq 0$ , com transição suave para a junção do arco formado até a base. A expressão para este perfil é

$$g(x) = r_b \left[ h + (1 - h) \left( \frac{x}{l_r} \right)^n \right], \quad 0 \leq x \leq l_r;$$

- perfil 2C-NS: perfil do tipo lei de potência com o raio frontal  $r_f \neq 0$  mas sem a transição suave para o arco até a base do corpo. Foi dado por

$$g(x) = r_b \left[ h^{1/n} + (1 - h^{1/n}) \left( \frac{x}{l_r} \right)^n \right]^n, \quad 0 \leq x \leq l_r.$$

As variáveis de otimização dependeram de cada perfil a ser otimizado, sendo que para o perfil 1C, a variável de otimização era o expoente  $n$  e para os perfis 2C e 2C-NS, duas variáveis de otimização, o valor  $h$  e o expoente  $n$ .

Os valores obtidos para os coeficientes de arrasto frontal  $C_{Df}$  otimizados foram tabulados pelo autor. Os valores para razão de aspecto  $f_r=2$  foram transcritos para a Tab. 9 e os valores para razão de aspecto  $f_r=4$  foram transcritos para a Tab. 10, a partir das tabelas 9.2 e 9.3 de (BERTOLDO, 2014), respectivamente. Apenas os valores dos  $C_{Df}$  para escoamentos invíscidos foram transcritos devido o escopo deste trabalho estar restrito

às equações de Euler e regime invíscido. Os valores apresentados nas Tab. 9 e Tab. 10 apresentam também os valores do erro numérico estimado.

Tabela 9 – VALORES DE  $C_{Df}$  DAS FORMAS OTIMIZADAS PARA  $f_r=2$

$M_\infty$	$f_r$	Perfil	$C_{Df}$
1,5	2	1C	$0,1533 \pm 0,0010$
		2C-S	$0,1467 \pm 0,0004$
		2C-NS	$0,14697 \pm 0,00007$
3,0	2	1C	$0,1239 \pm 0,0008$
		2C-S	$0,1217 \pm 0,0011$
		2C-NS	$0,1218 \pm 0,0012$
6,0	2	1C	$0,1027 \pm 0,0006$
		2C-S	$0,1014 \pm 0,0008$
		2C-NS	$0,1014 \pm 0,0007$

Fonte – Transcrito de (BERTOLDO, 2014)

Tabela 10 – VALORES DE  $C_{Df}$  DAS FORMAS OTIMIZADAS PARA  $f_r=4$

$M_\infty$	$f_r$	Perfil	$C_{Df}$
1,5	4	1C	$0,0504 \pm 0,0006$
		2C-S	$0,0504 \pm 0,0009$
		2C-NS	$0,0501 \pm 0,0006$
3,0	4	1C	$0,0400 \pm 0,0004$
		2C-S	$0,0400 \pm 0,0005$
		2C-NS	$0,0399 \pm 0,0005$
6,0	4	1C	$0,0322 \pm 0,0003$
		2C-S	$0,0322 \pm 0,0004$
		2C-NS	$0,0321 \pm 0,0004$

Fonte – Transcrito de (BERTOLDO, 2014)

Os valores do coeficiente de arrasto  $C_{Df}$  de Bertoldo (2014) ficaram bem próximos dos valores obtidos por Kraiko et al. (2003). A máxima diferença relativa para as razões de aspecto  $f_r=2$  e  $f_r=4$  foi percebida para  $M=1,5$  e foi de 2% para a primeira e de 3,7% para a última. As menores diferenças para ambas as razões de aspecto ocorreram para  $M=6$ , sendo que para a razão de aspecto  $f_r=2$  foi de 0,4% e de 0,3% para a razão de aspecto  $f_r=4$ . O autor também comenta que para números de Mach  $M_\infty$  menores, os perfis otimizados são mais rombudos, sendo que a face plana frontal ( $r_f > 0$ ) contribui para redução do valor de  $C_{Df}$ . Ele ainda explica que os resultados mostram que os perfis otimizados apresentam pequenas variações com o aumento do número de Mach (princípio de independência do número de Mach (ANDERSON, 2000)). O autor também comenta

que dentro de determinada tolerância, pode-se admitir que os efeitos viscosos são pouco perceptíveis, e assim, o modelo de Euler pode ser utilizado para resolução do escoamento.

## 2.2 MULTIESTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON

A seção a seguir visa fornecer informações sobre a Multiextrapolação de Richardson e o emprego na redução de erros numéricos.

### 2.2.1 Extrapolação de Richardson

Como explica Sidi (2003), em métodos de soluções numéricas, usualmente são empregados métodos iterativos, muitas vezes com convergência lenta. Estes métodos podem ser acelerados por métodos de extrapolação (SIDI, 2003), e como comenta Martins (2013), a Extrapolação de Richardson é um método bem conhecido.

Em seu artigo seminal, Richardson (1910) descreveu um método para eliminação de termos de uma série (SIDI, 2003), que melhorou as soluções de segunda ordem, obtidas por diferenças finitas <sup>7</sup>. Ele considerou duas soluções obtidas a partir de 2 intervalos  $h$  diferentes, com razão de refino (razão entre os comprimentos dos intervalos)  $r=2$ . Logo, o intervalo  $h_1$  teria a metade do intervalo  $h_2$ . A partir destas soluções nestes dois intervalos, obteve um método de extrapolação para uma aproximação da solução exata, denominada Extrapolação de Richardson.

A importância do trabalho de Richardson pode ser medida pela declaração de (ROACHE, 1972) apud Roache (1998), com respeito ao trabalho de (RICHARDSON, 1910): “o artigo de Richardson deve ser considerado o pilar da análise numérica moderna em equações diferenciais parciais”.

Inicialmente a Extrapolação de Richardson era utilizada para combinar as soluções aproximadas para aumento da acurácia da solução resultante. Este procedimento foi aplicado para razão de refino  $r=2$ . Posteriormente, foi generalizado para qualquer razão de refino (ROACHE, 1998). <sup>8</sup>

A expressão para a Extrapolação de Richardson Generalizada é deduzida a seguir. Dada uma solução numérica  $\phi$  obtida através de uma malha com tamanho  $h$  e a estimativa da solução analítica  $\phi_\infty$ , O erro numérico é a diferença entre o valor estimado da solução analítica pela solução numérica obtida (ROACHE, 1998):

$$U(\phi) = \phi - \phi_\infty \quad (2.22)$$

<sup>7</sup> Em (RICHARDSON; GAUNT, 1927), ele considerou apenas termos com expoentes pares na expansão em série de Taylor. Também comentou que os expoentes ímpares fossem inseridos, eles seriam anulados, pelo esquema utilizado. Para maiores detalhes, ver Eqs.(10.3) e (10.6) em (RICHARDSON; GAUNT, 1927)

<sup>8</sup> Para dedução da Extrapolação de Richardson do ponto de vista da Análise Matemática, recomenda-se os textos de Sidi (2003) e Brezinski e Zaglia (1991)

onde  $U(\phi)$  é a estimativa do erro da solução  $\phi$ ,  $\phi_\infty$  solução analítica estimada,  $\phi$  solução numérica obtida. Não se conhece o erro na Eq. (2.22) *a priori*. Empregando a expansão em séries de Taylor, mas utilizando apenas o primeiro expoente, chamado de  $p_L$ , pode-se aproximar o erro da Eq. (2.22) por (MARCHI, 2001):

$$U_\phi = Ch^{p_L} \quad (2.23)$$

onde  $C$  é um coeficiente qualquer, constante,  $h$  o tamanho dos elementos de malha,  $p_L$  é a ordem assintótica do erro de discretização.

Pode-se utilizar a expressão dada pela Eq. (2.23) para soluções numéricas obtidas em malhas diferentes, ou seja, diferentes tamanhos de volumes  $h$ . Deste modo, tem-se soluções numéricas  $\phi_1$  e  $\phi_2$  obtidas a partir de malhas com tamanhos  $h_1$  e  $h_2$ , respectivamente. Dados  $h_1$  e  $h_2$ , sendo  $h_1$  o menor tamanho e  $h_2$  é o maior tamanho, mas proporcional e uniforme em relação a  $h_1$ , as soluções numéricas  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são obtidas através de malhas denominadas “mais fina” para a malha com tamanho  $h_1$  e “mais grossa” para a malha com tamanho  $h_2$ . Logo expressando Eq. (2.23) para as soluções  $\phi_1$  e  $\phi_2$  (ROY, 2005; MARCHI, 2001):

$$\begin{aligned} U(\phi_1) &= Ch_1^{p_L}, \\ U(\phi_2) &= Ch_2^{p_L}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Aplicando a definição Eq. (2.22) para as expressões em Eq. (2.24), tem-se:

$$\begin{aligned} \phi_\infty - \phi_1 &= Ch_1^{p_L}, \\ \phi_\infty - \phi_2 &= Ch_2^{p_L}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

De Eq. (2.24), considerando  $p_L$  como a ordem assintótica do erro numérico como sendo a ordem do erro de truncamento e expressando  $\phi_\infty$  a partir das duas soluções, tem-se (ROACHE, 1998; MARCHI, 2001):

$$\phi_\infty = \phi_1 + \frac{\phi_1 - \phi_2}{q^{p_L} - 1} \quad (2.26)$$

onde  $q$  é a razão de refino entre os tamanhos dos elementos de malha  $h_1$  e  $h_2$  dado pela razão entre as malhas,  $\frac{h_2}{h_1}$ .  $\phi_\infty$  é uma estimativa para a solução exata e também é denominada solução extrapolada. Esta expressão é denominada Extrapolação Generalizada de Richardson (ROACHE, 1998; ROY, 2005) e será tratada como Extrapolação de Richardson.

Conforme explica Roache (2009), uma importante característica é que a Eq. (2.26) pode ser aplicada para quaisquer esquemas numéricos, como Métodos dos Volumes Finitos ou Diferenças Finitas. Tem-se um exemplo de seu emprego em Método de Elementos de Contorno em (POMERANZ, 2011). A extrapolação também pode ser aplicada tanto para as variáveis obtidas volume a volume ou ponto a ponto, bem como para variáveis globais, como é o caso deste trabalho, que tem interesse no coeficiente  $C_{Df}$ . E esta solução, obtida na Eq. (2.26) tem uma ordem de acurácia maior que a solução  $\phi_1$  (MARTINS, 2013).

## 2.2.2 Multiextrapolação de Richardson

A Eq. (2.26) denominada Extrapolação de Richardson, como já mencionado, aumenta a acurácia da solução numérica obtida na malha mais fina, extrapolando a solução obtida com duas malhas, sendo uma malha fina e outra mais grossa. Pode-se entender que aplicando a estratégia de se obter soluções numéricas com malhas cada vez mais finas, utilizando a Extrapolação de Richardson, pode-se obter uma solução com várias ordens de acurácia aplicando-se esta mesma extrapolação de modo recursivo. É esta a estratégia da Multiextrapolação de Richardson<sup>9</sup>: aplicar a extrapolação de Richardson para malhas mais refinadas de modo repetitivo (ZHANG; ZHANG, 2016; MARCHI; GERMER, 2013). Assim, obtendo-se diversas soluções  $\phi_g$  com um total de  $G$  malhas, onde  $g$  é o número da malha e números maiores para  $g$  indicam malhas cada vez mais refinadas e, aplicando-se a extrapolação de Richardson Eq. (2.26)  $m$  vezes recursivamente, tem-se a expressão para Multiextrapolação de Richardson dada por (MARTINS et al., 2013; MARCHI; GERMER, 2013; MARCHI et al., 2013):

$$\phi_{g,m} = \phi_{g,m-1} + \frac{\phi_{g,m-1} - \phi_{g-1,m-1}}{q^{p_{m-1}} - 1} \quad (2.27)$$

onde  $\phi_{g,m}$  solução numérica multiextrapolada,  $g$  é o número ou índice da malha,  $m$  é o número de extrapolações de Richardson (ou nível de extrapolação) e  $q$  é a razão de refino.

A ordem de acurácia com Multiextrapolação de Richardson aumenta em uma ordem verdadeira a cada nível de extrapolação (ZHANG; ZHANG, 2016; MARCHI et al., 2013). Assim, se as ordens verdadeiras para um determinado esquema numérico são  $p_L \in \{1,2,3,4,5,\dots\}$  e o esquema tem ordem  $p_L = 1$ , com a aplicação de 2 níveis de extrapolação com 3 malhas, a ordem esperada para solução multiextrapolada é 3.

O trabalho de (MARCHI et al., 2013) constitui-se em bom exemplo para a confirmação do aumento da ordem de acurácia de um esquema numérico. O estudo foi elaborado sobre um modelo da equação de Laplace em duas dimensões, avaliando a temperatura no centro do domínio ( $x=1/2; y=1/2$ ), o perfil da temperatura em  $x=1/2$  e a média da temperatura no domínio. Para avaliar o efeito com números de precisão dupla, utilizaram 13 malhas, variando de  $3 \times 3$ , a  $8193 \times 8193$  nós. Com precisão quádrupla, foram avaliados 12 malhas, com a malha mais fina com  $4097 \times 4097$  nós. Os autores concluíram que a aplicação de MER realmente aumentou a ordem de acurácia da solução, pela redução do erro de discretização. Os autores também concluíram que MER não é eficaz em malhas muito grossas e que o erro de arredondamento afeta a performance de MER, pois em malhas muito finas, este tipo de erro acaba por predominar-se no erro de discretização. Os autores também relataram que o emprego de MER reduz o custo computacional pois para alcançar a ordem de acurácia obtida com MER, seriam necessárias malhas muito mais finas. Como exemplo mencionam que para obter um erro de  $5.0 \cdot 10^{-07}$ , é necessária

<sup>9</sup> Na literatura em inglês, é comum o emprego da sigla RRE para *Repeated Richardson Extrapolation*

uma malha de  $1025 \times 1025$  sem a aplicação de MER, enquanto que com MER, uma malha com  $17 \times 17$  nós é suficiente.

Marchi et al. (2013) estudaram o emprego de MER para a equação de Laplace com diversos esquemas numéricos em malhas quadriculares e triangulares. O estudo utilizou malhas quadradas e malhas triangulares com duas geometrias: uma geometria quadrada e outra triangular. Empregou-se também método Multigrid para solução das equações discretizadas a partir de esquemas numéricos CDS, de 2ª ordem. Conforme relatam os autores, as ordens aparente do erro de discretização seguiram o disposto na literatura e, aumentavam de acordo com as ordens do esquema numérico, no caso em variações 2 a 2 (4,6...). O estudo confirmou que para malhas triangulares houve redução do erro de discretização e foi obtida ordem aparente igual a 11. Entretanto as malhas quadradas apresentaram menor erro de discretização em relação às malhas triangulares, não importando se MER foi ou não aplicado. Mas as malhas triangulares tiveram ordem de acurácia efetivas aproximadamente igual a 11. Os autores entenderam que, mesmo com a boa performance do método em reduzir o erro de discretização em todas as variáveis, para avaliação de valores próximos da fronteira, o emprego de MER pode não ser tão eficiente. Segundo os autores, pode ocorrer uma variação na performance, dependendo da geometria do problema e também da localização da variável.

Neste trabalho, o emprego de Multiextrapolação de Richardson visa fornecer valores mais acurados para o algoritmo de otimização. Neste entendimento, o emprego de MER é interessante, porque contribui com o custo computacional, não necessitando de malhas tão finas para obter valores acurados.

A Tab. 11 apresenta um resumo dos trabalhos estudados, o modelo de escoamento e o método de otimização. Por último, apresenta o presente trabalho.

Neste capítulo buscou-se apresentar o referencial bibliográfico estudado no contexto do trabalho de otimização desta tese. Os capítulos a seguir mostrarão a metodologia, verificação e os resultados obtidos.

Tabela 11 – RESUMO DOS TRABALHOS ABORDADOS NESTE CAPÍTULO

Autor(es)	Modelo de escoamento	Método de Otimização
Newton	Lei de pressão de Newton	Cálculo Variacional
Von Kármán	Escoamento linearizado	Cálculo Variacional
Eggers et al. Eggers, Miele	Lei de pressão de Newton Experimental	Cálculo Variacional
Perkins e Jorgensen	Experimental	–
Powers	Mét. das características	Função polinomial Método dos Mínimos Quadrados
Mason e Lee	Equações de Euler Método dos Volumes Finitos	Método de Otimização de Forma
Kraiko et al.	Equações de Euler Método das Características	Cálculo Variacional
Sahai et al.	Método modificado de Newton	Método <i>steepest-descent</i>
Bertoldo	Equações de Navier Stokes Método dos Volumes Finitos	Algoritmo de Evolução diferencial e Método de Superfície de Resposta
Este trabalho	Equações de Euler Método dos Volumes Finitos Emprego de MER	Otimização por algoritmo de região de confiança com método de Newton e gradiente conjugado (TRUST-NCG)

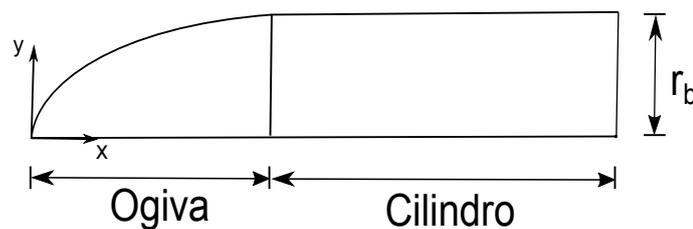
## 3 METODOLOGIA

O processo de otimização para obtenção de perfis geométricos é um processo iterativo em si. A partir de um esboço ou perfil inicial, avaliam-se as restrições e condições e, se não é aprovado, propõe-se novo design. Neste trabalho, a otimização é efetuada com a proposição de um perfil geométrico que é avaliado através de solução numérica do escoamento, obtendo-se o coeficiente de arrasto para o perfil definido. Este capítulo apresenta a metodologia aplicada para a modelagem da geometria com polinômio cúbico, a modelagem do escoamento, o esquema numérico utilizado para obter as variáveis do escoamento e os procedimentos para otimização.

### 3.1 REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DA GEOMETRIA

O interesse neste trabalho é determinar o perfil geométrico do nariz de um foguete que minimize o coeficiente de arrasto frontal  $C_{Df}$ . Este perfil é composto de duas seções distintas: a seção frontal chamada “ogiva” e a seção “cilindro”, conectada imediatamente à seção “ogiva”. Como este nariz é um corpo axissimétrico, é possível reduzir o problema da modelagem do escoamento a duas dimensões como mostrado pela Fig. 3.1, que mostra a geometria utilizada neste trabalho, com as seções ogiva e cilindro. A seção do cilindro é definida pelo comprimento deste cilindro com valor da coordenada  $y = r_b$ , enquanto a ogiva é definida por um arco. Esta seção explica como é definida a geometria da ogiva.

Figura 3.1 – GEOMETRIA DO PERFIL A SER OTIMIZADO



Fonte – O autor(2018)

Na proposta deste trabalho, o arco da ogiva é formado a partir de pontos discretos  $(x_i, y_i)$ , interpolados pelo polinômio cúbico de Fritsch e Carlson (1980). Como já observado na revisão bibliográfica, diferentemente de outras curvas para descrever o perfil geométrico, os pontos que serão inseridos no perfil visando seu ajuste, pertencerão a ele, facilitando o processo de otimização. Além disso, polinômio interpolador cúbico possui características importantes para a preservação do perfil geométrico (KOCIC; MILOVANOVIC, 1997). A principal característica deste polinômio é a preservação da monotonicidade a partir da monotonicidade dos dados. Outra característica importante é a

manutenção da concavidade. Estas características permitem que a forma geométrica seja mantida mesmo com a inserção de novos pontos (KOCIC; MILOVANOVIC, 1997).

Considere um intervalo qualquer  $I = [a, b]$  particionado em  $n - 1$  segmentos,  $x_1 < x_2 < x_3 \cdots < x_n$ , onde  $a = x_1$  e  $b = x_n$ . Para cada  $x_i$  há um valor  $f_i = f(x_i)$  tal que  $f_i < f_{i+1}$ . O polinômio cúbico  $p(x)$  (FRITSCHT; CARLSON, 1980) satisfaz

$$p(x_i) = f_i \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \dots, n - 1 \quad (3.1)$$

e garante a monotonicidade e a concavidade da função interpoladora.

A função  $p(x)$  é obtida a partir das funções de base de Hermite (FRITSCHT; CARLSON, 1980) fornecendo as coordenadas  $(x_i, f_i)$  e impondo-se as derivadas  $d_i$  da função nos pontos  $x_i$ . A imposição das derivadas ocorre justamente para garantir a monotonicidade do polinômio interpolador.

Para se impor as derivadas  $d_i$  adota-se o seguinte procedimento. Os primeiros valores a serem determinados são as secantes dos pontos conhecidos (ou *dataset*):

$$\Delta_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}. \quad (3.2)$$

Para os pontos iniciais e finais, as derivadas são dadas por:

$$\begin{aligned} d_1 &= \Delta_1, \\ d_n &= \Delta_{n-1}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Para as derivadas dos pontos intermediários ( $i = 2 \dots n - 1$ ), as derivadas são dadas, em um primeiro momento, como

$$d_i = \frac{\Delta_i + \Delta_{i+1}}{2}. \quad (3.4)$$

Se os sinais das secantes forem diferentes, a derivada  $d_i$  deve ser igual a zero. Se os valores de duas funções consecutivas forem iguais ( $f_i = f_{i+1}$ ), as derivadas dos dois pontos,  $d_i$  e  $d_{i+1}$  respectivamente, são iguais a zero.

Explicam Fritsch e Carlson (1980) que para se obter uma curva “suave”, ou seja, uma curva que não contém ondulações abruptas ou pontos de pico, deve-se escolher  $\alpha_i$  e  $\beta_i$ , onde

$$\alpha_i = \frac{d_i}{\Delta_i} \quad \text{e} \quad \beta_i = \frac{d_{i+1}}{\Delta_i}, \quad (3.5)$$

tal que o par ordenado  $(\alpha_i, \beta_i)$  esteja dentro de um círculo centrado na origem com raio igual a 3. Se  $(\alpha_i, \beta_i)$  não estiver dentro do círculo de raio 3, então ajusta-se os valores de  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  para  $\alpha_i^*$  e  $\beta_i^*$ , respectivamente, de modo que (FRITSCHT; CARLSON, 1980):

$$\alpha_i^* = \tau_i \alpha_i \quad \text{e} \quad \beta_i^* = \tau_i \beta_i, \quad (3.6)$$

sendo  $\tau_i = 3/\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}$ . E, a partir da Eq. (3.6), deve-se corrigir as derivadas  $d_i$  e  $d_{i+1}$  com

$$\begin{aligned} d_i^* &= \tau_i \alpha_i^* \Delta_i \\ d_{i+1}^* &= \tau_i \beta_i^* \Delta_i. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Após determinação das derivadas  $d_i$  e  $d_{i+1}$ , conforme explicado anteriormente, tem-se o conjunto de pares  $(x_i, f_i)$  e também as derivadas para cada  $x_i, d_i$ . Com estes valores, é possível efetuar a interpolação de um novo  $x$ . Para calcular  $p(x)$  para o novo  $x$  deve-se obter dois valores dentre os valores conhecidos de  $x_i$ . O primeiro valor, denominado  $x_u$  é obtido como sendo o menor valor dentre os  $x_i$  que é maior que  $x$ ; o outro valor, denominado  $x_l$  é o maior valor dentre os  $x_i$  menor que  $x$ . Os valores  $x_l$  e  $x_u$  são consecutivos, então  $x_l \leq x \leq x_u$ . Definindo o intervalo  $h = x_u - x_l$ , e o parâmetro  $t = (x - x_l)/h$ , aplica-se o polinômio interpolador  $p(x)$  dado por (FRITSCHT; CARLSON, 1980; KOCIC; MILOVANOVIC, 1997):

$$p(x) = f_l h_0(t) + h d_l h_1(t) + f_u h_2(t) + h d_u h_3(t) \quad (3.8)$$

onde  $f_l$  e  $d_l$  são a função e a derivada em  $x_l$ ,  $f_u$  e  $d_u$  são a função e a derivada em  $x_u$ ,  $h_0, h_1, h_2, h_3$  são as funções de base de Hermite (FARIN, 1990), dadas por

$$h_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, \quad (3.9)$$

$$h_1(t) = t^3 - 2t^2 + t, \quad (3.10)$$

$$h_2(t) = -2t^3 + 3t^2, \quad (3.11)$$

$$h_3(t) = t^3 - t^2. \quad (3.12)$$

A escolha dos pontos  $x_i$  é arbitrária. Para que sejam necessários menos pontos no processo de interpolação, é apropriado que os pontos  $x_i$  estejam mais concentrados nas regiões em que  $f(x)$  mais varia. Ao analisar o perfil otimizado de Newton, percebe-se que isto ocorre na parte frontal. Por este motivo, escolheu-se a seguinte distribuição de pontos, caso o número de pontos de interpolação  $n_r$  seja menor ou igual a 2

$$x_i = \left( \frac{i-1}{n_r-1} \right)^3 l_o, \quad 1 \leq i \leq n_r. \quad (3.13)$$

e

$$x_i = \begin{cases} \left( \frac{i-1}{n_r-1} \right)^3 l_o & 1 \leq i \leq n_r - 1, \\ 0,99 & i = n_r. \end{cases} \quad (3.14)$$

caso o número de pontos de interpolação  $n_r$  seja maior que 2. Nas Eqs. (3.13) e (3.14),  $l_o$  é o comprimento da ogiva.

## 3.2 SIMULAÇÃO DO ESCOAMENTO

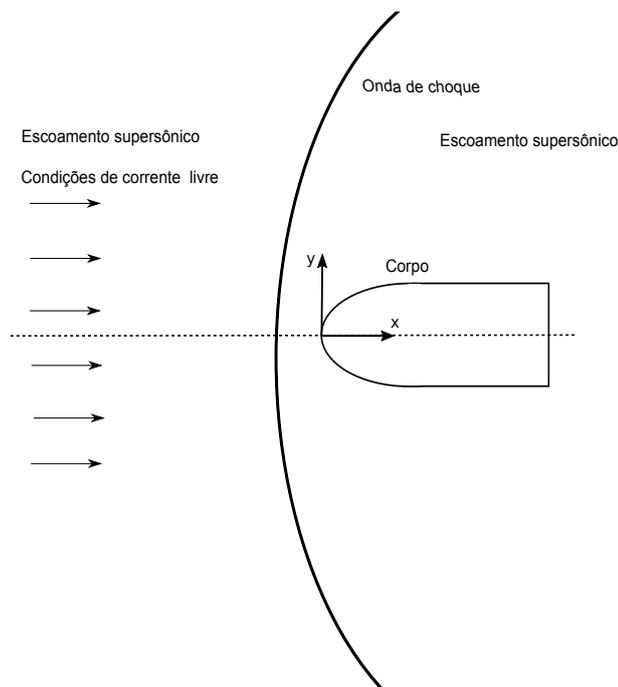
O escoamento de fluido neste trabalho é resolvido através de procedimento de simulação utilizando técnicas de Dinâmica dos Fluidos Computacional (MALISKA, 2004). Esta seção explica as considerações físicas, o modelo matemático, o modelo numérico aplicado e o método utilizado para resolução dos sistemas lineares.

A hipótese é de que o escoamento é aberto, sobre um corpo axissimétrico em velocidade supersônica. Além disso, o fluido é considerado meio contínuo. O regime de escoamento é permanente e invíscido. A Fig. 3.2 mostra um esquema com os principais elementos da modelagem. À frente do corpo, o escoamento é supersônico com as condições físicas de corrente livre<sup>1</sup>. Dada a velocidade supersônica, há formação de uma onda de choque à frente do corpo, não anexada ao corpo (ANDERSON, 2003; WHITE, 2011). A linha pontilhada mostra o eixo de simetria. Considera-se o escoamento como supersônico o escoamento em que o número de Mach, dado pela Eq. (3.15), está entre 1,3 a 5.

$$M = \frac{V}{\sqrt{\gamma R_g T}}, \quad (3.15)$$

onde  $M$  é o Número de Mach,  $V$  é a velocidade do escoamento,  $\gamma$  é a razão de calores específicos,  $R_g$  é a constante do gás e  $T$  é a temperatura.

Figura 3.2 – ESCOAMENTO SUPERSÔNICO SOBRE UM CORPO AXISSIMÉTRICO



Fonte – O autor(2018)

A hipótese de escoamento invíscido é plausível, pois em escoamentos envolvendo foguetes, o número de Reynolds (WHITE, 2011) é da ordem de  $10^7$  e como mostrado na tese de Bertoldo (2014), neste regime de escoamento, as formas otimizadas com base no modelo viscoso (Navier-Stokes) são muito semelhantes às formas otimizadas com base no modelo invíscido (Euler).

O modelo matemático é constituído pelas equações a seguir, em coordenadas cilíndricas (WHITE, 2011):

<sup>1</sup> tradução de *free-stream conditions*

Equação de conservação de massa (ou continuidade)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y}(\rho y v) = 0, \quad (3.16)$$

Equação de Euler para quantidade de movimento para a componente axial  $u$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y}(\rho y v u) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (3.17)$$

Equação de Euler para quantidade de movimento para a componente radial  $v$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y}(\rho y v v) + \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (3.18)$$

Nas Eqs. (3.16), (3.17) e (3.18),  $\rho$  indica a massa específica,  $u$  e  $v$  representam as componentes do vetor velocidade ao longo de  $x$  e  $y$ , respectivamente, e  $p$  é a pressão.

A temperatura  $T$  será obtida através da equação de conservação da entalpia total  $h$  (WHITE, 2011):

$$T = \frac{h_{\infty} - |\vec{u}|^2/2}{c_{p\infty}} \quad (3.19)$$

onde

$$h_{\infty} = \left[ c_{p\infty} T_{\infty} + \frac{u_{\infty}^2}{2} \right], \quad (3.20)$$

$\vec{u}$  é o vetor velocidade,  $c_p$  é o calor específico,  $u$  é a componente do vetor velocidade ao longo de  $x$  e o índice  $\infty$  indica propriedade da corrente livre.

Utiliza-se da equação de estado, que relaciona pressão, massa específica e temperatura, fechando o conjunto de equações necessárias para resolver o escoamento. Neste trabalho, considera-se o gás como ideal, portanto, a equação de estado é dada por

$$p = \rho R_g T, \quad (3.21)$$

onde  $R_g$  é a constante do gás.

Além das equações que descrevem o escoamento e o estado termodinâmico do fluido, necessita-se de propriedades termofísicas para resolução do escoamento. Como explicitado nas equações do modelo matemático, tem-se necessidade de conhecer os valores da constante do gás  $R_g$  e calor específico a pressão constante  $c_p$ . Para calcular tais propriedades, o fluido considerado nas simulações é o próprio ar, composto de oxigênio, nitrogênio e argônio. As propriedades termofísicas da mistura foram obtidas a partir das propriedades de cada espécie, seguindo a metodologia de (MCBRIDE et al., 1993) e descrito no trabalho de Bertoldo (2014). A razão de calores específicos  $\gamma$  é dada por (MORAN et al., 2018):

$$\gamma_{\infty} = \frac{c_{p\infty}}{c_{p\infty} - R_g}. \quad (3.22)$$

Para efetuar o cálculo numérico necessita-se da pressão de corrente livre, embora a solução no modelo de Euler não dependa deste valor. Como há uma arbitrariedade na

escolha da pressão da corrente livre, seu valor será calculado como se o escoamento fosse viscoso com número de Reynolds igual a  $10^7$ . Ao se aplicar o modelo de Navier-Stokes (escoamento viscoso) para este número de Reynolds, os efeitos viscosos sobre o coeficiente de arrasto são desprezíveis comparados com os efeitos inerciais (BERTOLDO, 2014). Desta forma, emprega-se a equação de estado Eq. (3.21) para obter o valor de pressão de corrente livre, a partir da definição do Número de Reynolds  $Re$ , dado por:

$$Re = \frac{V_{\infty} l \rho_{\infty}}{\mu_{\infty}} \quad (3.23)$$

onde  $V_{\infty}$  é a velocidade do escoamento de corrente livre,  $\rho_{\infty}$  é a massa específica de corrente livre,  $\mu_{\infty}$  é a viscosidade do fluido na corrente livre e  $l$  é o comprimento do corpo. A viscosidade é obtida pela metodologia definida em McBride et al. (1993). Empregando-se outros dois parâmetros de similaridade, o número de Mach  $M_{\infty}$  e a razão de aspecto  $f_r$  para obter a velocidade do escoamento e o comprimento do corpo a partir destes parâmetros. Pode-se, então, empregar a Eq. (3.21), para obter a pressão de corrente livre, que é dada em função do Número de Mach  $M_{\infty}$  Eq. (3.15) e razão de aspecto  $f_r$  Eq. (1.1):

$$p_{\infty} = \frac{Re \mu_{\infty} R_g T_{\infty}}{M_{\infty} \sqrt{\gamma R_g T_{\infty}} f_r 2r_b} \quad (3.24)$$

A Tab. 12 apresenta os valores das propriedades termofísicas utilizadas neste trabalho, enquanto os valores da pressão de corrente livre obtidas para  $Re=10^7$  para cada número de Mach  $M_{\infty}$  e razão de aspecto  $f_r$  utilizados estão na Tab. 15.

Tabela 12 – VALOR DE PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS UTILIZADAS NESTE TRABALHO

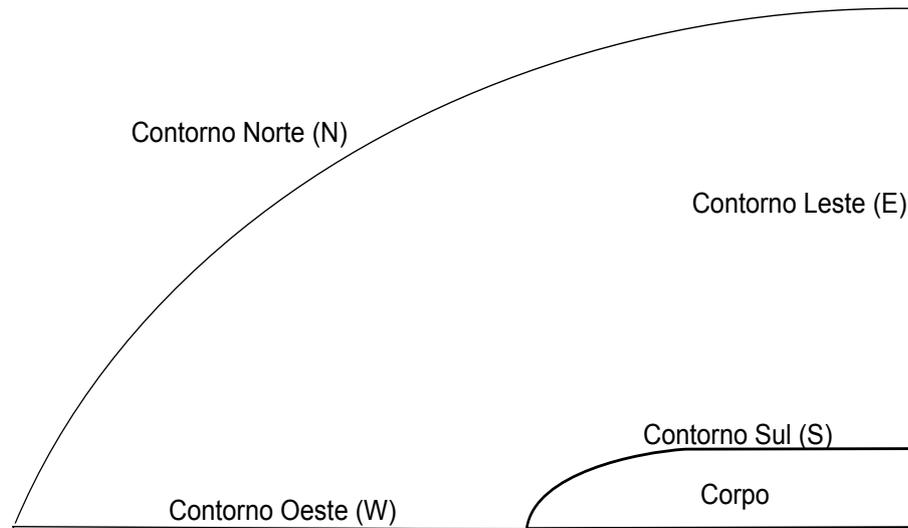
$T_{\infty}$ (K)	$c_{p\infty}$ (J/kg.K)	$R_g$ (J/kg.K)	$\gamma_{\infty}$	$\mu_{\infty}$ ( $10^{-6}$ Pa.s)
200	1002,7	287,0067	1,401	13,2962

Fonte – O autor(2018)

### 3.2.1 Condições de contorno

As condições de contorno são definidas utilizando-se a mesma nomenclatura que as definições em Volumes Finitos (MALISKA, 2004), utilizando os pontos cardeais como referência para cada lado do domínio. Deste modo, a parte superior é o contorno Norte (N), a parte inferior do domínio é o contorno Sul (S) e coincide com a superfície do corpo, as fronteiras direita e esquerda são, respectivamente, os contornos Leste (E) e Oeste (W). A Fig. 3.3 ilustra as regiões de contorno definidas para o problema.

Figura 3.3 – REGIÕES DE CONTORNO - FACES NORTE, SUL, LESTE E OESTE



Fonte – O autor(2018)

No contorno Norte, as características do fluido deverão ser as mesmas que na corrente livre. No contorno Oeste, a velocidade axial ( $u$ ) não tem variação vertical e a velocidade radial ( $v$ ) é igual a zero. Para o contorno Sul, as condições de deslizamento do fluido são aplicadas, pois neste trabalho trata-se de escoamento invíscido. Também não há troca de calor com a parede do corpo (parede adiabática). A fronteira Leste é a fronteira de saída do escoamento, e segundo Maliska (2004), as condições desta fronteira devem ser localmente parabólica. A Tab. 13 mostra as condições em cada face. O vetor  $\hat{n}$  é o vetor

Tabela 13 – LISTA DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO EM CADA FACE PARA AS GRANDEZAS  $u, v$  E  $\rho$

Face	$u$	$v$	$\rho$
Norte	$u_\infty$	0	$\rho_\infty$
Oeste	$(\hat{n} \cdot \nabla)u = 0$	0	$(\hat{n} \cdot \nabla)\rho = 0$
Sul	$(\hat{n} \cdot \vec{u}) = 0$	$(\hat{n} \cdot \vec{u}) = 0$	$(\hat{n} \cdot \nabla)\rho = 0$
Leste	$(\vec{u} \cdot \nabla)u = 0$	$(\vec{u} \cdot \nabla)v = 0$	$(\vec{u} \cdot \nabla)\rho = 0$

Fonte – O autor(2018)

unitário normal ao contorno.

Para a temperatura  $T$ , aplica-se a equação Eq. 3.19 calculando-se a temperatura com a expressão analítica para cada uma das fronteiras do domínio.

### 3.2.2 Grandezas de interesse

Neste trabalho deseja-se identificar perfis aerodinâmicos que sejam otimizados a partir da minimização do arrasto aerodinâmico. Deste modo, há necessidade de quantificar esse arrasto. A força de arrasto surge devido ao efeito do deslocamento do fluido sobre a

superfície do corpo e é força contrária ao movimento desse corpo. A rigor, existem duas forças que tem ação sobre a superfície do corpo, a força de arrasto frontal devido a pressão e a força de arrasto devido a viscosidade. A força de arrasto devido a viscosidade não é objeto de estudo neste trabalho, como já explicado anteriormente. A força de arrasto frontal é a força aplicada pelo fluido devido à pressão deste fluido sobre a superfície do corpo durante o movimento.

Neste trabalho, a grandeza de interesse é o coeficiente de arrasto frontal devido a pressão. Este coeficiente é dado pela razão entre a força devido à pressão sobre a superfície do corpo e o produto da pressão dinâmica pela área do corpo que produz o efeito, neste caso, é a área frontal do corpo na direção do escoamento, dado por (HOUGHTON et al., 2013; KUETHE; CHOW, 1986):

$$C_{Df} = \frac{F_D}{q_\infty A_b}, \quad (3.25)$$

onde  $F_D$  é a componente da força do fluido sobre o corpo na direção axial (“força de arrasto”),  $A_b$  é a área de seção reta da base do corpo e  $q_\infty$  é a pressão dinâmica dada pela expressão:

$$q_\infty = \frac{\rho_\infty u_\infty^2}{2}. \quad (3.26)$$

Por conta disto, é denominado coeficiente de arrasto frontal devido à pressão (ou simplesmente coeficiente de arrasto frontal, simbolizado por  $C_{Df}$ ).

A força  $F_D$  é devido a diferença entre a pressão frontal e da base (suposta  $p_\infty$ ). Deste modo, tem-se

$$F_D = \int_A (p - p_\infty) dA. \quad (3.27)$$

A Fig. 3.4 mostra o esquema dos elementos que compõem o elemento infinitesimal de área  $dA$ , que é o elemento de área reta e corresponde à projeção do elemento  $dS$  da área da superfície do corpo, perpendicular ao eixo  $x$ . O ângulo entre  $ds$  e  $dx$  e o elemento  $dS$  formado pelo comprimento infinitesimal  $ds$  e por  $y d\theta$  é  $\delta$ . Assim, tem-se

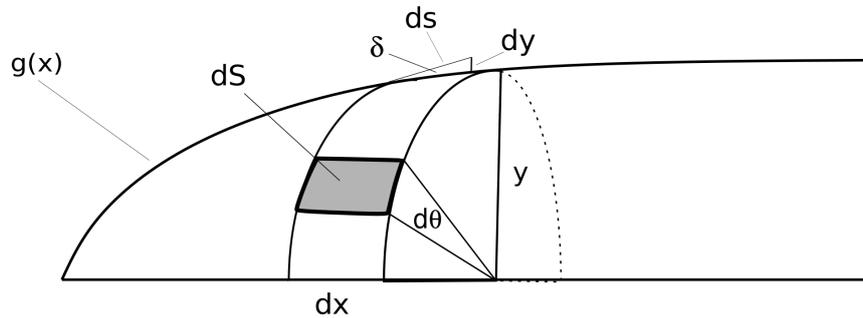
$$dA = (y d\theta ds) \text{sen}(\delta), \quad (3.28)$$

de onde se obtém

$$dA = y d\theta \frac{dy}{dx} dx. \quad (3.29)$$

<sup>2</sup> Usualmente utiliza-se a letra “D” para representar o arrasto devido a tradução da palavra em inglês *drag*, que significa arrasto

Figura 3.4 – ESQUEMA PARA INTEGRAÇÃO NA SUPERFÍCIE DO CORPO AXISSIMÉTRICO



Fonte – Adaptado de (KRASNOV; MORRIS, 1970)

Dada a geometria do corpo considerado, com comprimento total  $l$  e simetria axial, a força é reescrita como:

$$F_x = \int_{x=0}^l \int_{\theta=0}^{2\pi} (p - p_\infty) y \frac{dy}{dx} d\theta dx. \quad (3.30)$$

Integrando-se em relação a  $\theta$ , obtém-se

$$F_x = 2\pi \int_{x=0}^l (p - p_\infty) y \frac{dy}{dx} dx. \quad (3.31)$$

Portanto, o coeficiente de arrasto frontal é dado por:

$$C_{Df} = \frac{2\pi}{q_\infty A_b} \int_0^l (p - p_\infty) y \frac{dy}{dx} dx, \quad (3.32)$$

onde  $y = g(x)$  é a função do perfil geométrico.

### 3.3 MODELO NUMÉRICO

As equações do modelo matemático, Eq. (3.16), Eq. (3.17) e Eq. (3.18), são equações diferenciais parciais não lineares. Na literatura (KREYSZIG, 2008; GREENBERG, 1998) encontram-se diversas técnicas para obtenção de soluções analíticas de equações diferenciais parciais. Como exemplo, menciona-se a Análise de Fourier. Entretanto, as soluções obtidas são apenas para problemas muito específicos e simples. Por conta desta limitação, para solução de problemas de engenharia modelados por essas equações, utilizam-se métodos numéricos. Pode-se citar dentre os vários métodos, o Método dos Volumes Finitos (FERZIGER; PERIC, 1999; VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007) e o Método das Diferenças Finitas (FORTUNA, 2000), que são utilizados para resolução de equações de dinâmica dos fluidos.

O método numérico adotado neste trabalho é o Método dos Volumes Finitos (MVF). Esta seção descreve como são realizadas as discretizações para os volumes, a integração das equações, o procedimento para resolução dos sistemas lineares oriundos da discretização e o cálculo das variáveis de interesse.

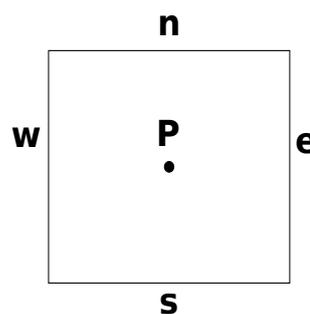
### 3.3.1 Método dos volumes finitos

O Método dos Volumes Finitos (MVF) é utilizado para solução de equações diferenciais parciais baseado na discretização do domínio por meio de pequenos volumes (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007). Este método é composto pelas seguintes etapas:

- Discretização do domínio com geração de malha;
- Integração das equações de transporte de propriedades físicas;
- Resolução do sistema de equações lineares;
- Cálculo de variáveis de interesse.

A discretização do domínio é a geração ou construção da malha. Esta etapa constitui-se em dividir o domínio em regiões menores denominados volumes elementares ou simplesmente, volumes. Cada volume é tratado como tendo um ponto central (centroide), denominado “P”, onde as propriedades físicas do volume são calculadas. Estas propriedades físicas são constantes no interior do volume. As faces do volume recebem identificação segundo os pontos cardeais, utilizando letras minúsculas para identificação. Deste modo, a parede acima do ponto P é a parede Norte, identificada por “n”; a parede abaixo de P é a parede Sul, identificada por “s”; a parede à direita de P é a parede Leste, identificada pela letra “e” e a parede à esquerda de P é a parede Oeste, identificada pela letra “w”. A Fig. 3.5 mostra a organização do volume elementar (FERZIGER; PERIC, 2002).

Figura 3.5 – ESQUEMA DE VOLUME ELEMENTAR UTILIZADO NO MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS



Fonte – O autor(2018)

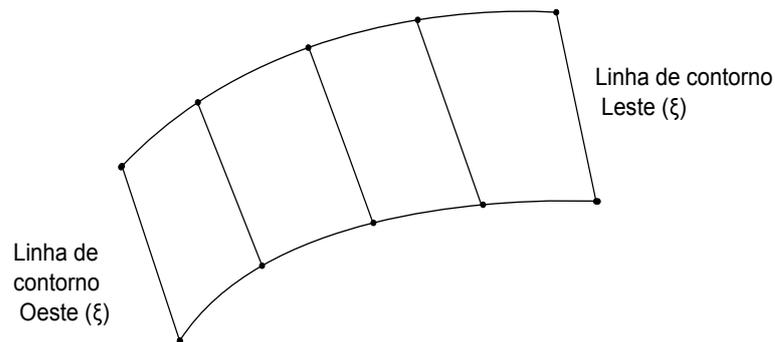
A integração da equação de transporte das propriedades físicas dentro do volume elementar é a etapa principal do MVF. A equação de transporte é uma equação diferencial parcial e, para resolvê-la no volume elementar, integra-se no mesmo. Com isto, tem-se integrais de volume. Empregando-se o teorema da Divergência de Gauss e, assim, alguns termos da equação passam de integral de volume para integral de superfície (ou área) (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007). Como a equação de transporte é uma equação de balanço das propriedades físicas no volume, a equação resultante é a

equação de balanço das propriedades nas faces neste volume elementar. O valor de cada uma das propriedades deve ser obtido no centroide do volume, portanto, o valor das propriedades nas faces deve ser definido em função do valor da propriedade no centroide do volume elementar e dos centroides dos volumes vizinhos. Aplicando-se um esquema de extrapolação e, desenvolvendo-se para cada volume, têm-se uma equação linear, onde o valor da propriedade física é dada em função do valor da propriedade nos volumes vizinhos. Deste modo, obtém-se o conjunto de todas as equações de cada volume elementar, que se constitui no sistema de equações da propriedade física. Para resolver este sistema de equações pode-se empregar métodos diretos ou iterativos. Os métodos diretos resolvem a equação matricial diretamente, enquanto nos métodos iterativos, a solução é obtida por resolver o sistema a partir de estimativas iniciais, e, resolvendo iterativamente, até que algum critério de parada definido *a priori* seja atingido (MALISKA, 2004; VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007). As variáveis primárias são obtidas diretamente da solução deste sistema de equações, enquanto que as variáveis secundárias são obtidas a partir dos valores das variáveis primárias. As seções a seguir explicam os detalhes do método aplicado neste trabalho.

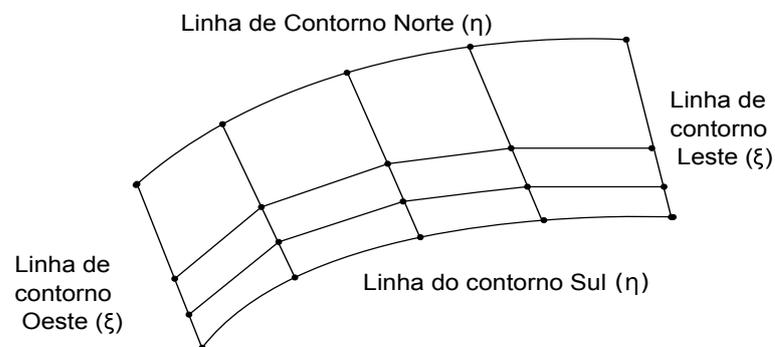
### 3.3.2 Geração da malha

A definição dos volumes dentro do domínio é feita pelo processo denominado Geração de Malha, e segundo Maliska (2004), “é a tarefa mais complexa do processo de simulação numérica”. Cada volume é formado por um conjunto de linhas que dividem o domínio. Estas linhas ao se interceptarem formam vértices, e a interligação entre os vértices definem estes volumes. O método utilizado para geração de malha neste trabalho é o método algébrico (FARRASHKHALVAT; MILES, 2003).

O método algébrico constitui-se em discretizar os contornos Sul e Norte através da divisão e obtenção de coordenadas para os contornos. Os pontos do contorno Sul são conectados aos respectivos pontos do contorno Norte através de segmentos de reta (linhas de  $\xi$  constante no sistema coordenado curvilíneo), como esquematizado na Fig. 3.6. Os segmentos de reta são discretizados e ligados com novos segmentos de reta (linhas de  $\eta$  constante), como mostra a Fig. 3.7. A distribuição dos pontos ao longo das linhas  $\xi$  é feita de modo que a distância entre pontos sucessivos varie de acordo com uma progressão geométrica. Os pontos são concentrados nas proximidades do contorno Sul, pois nesta região espera-se variações mais significativas nos campos de pressão, velocidade e temperatura.

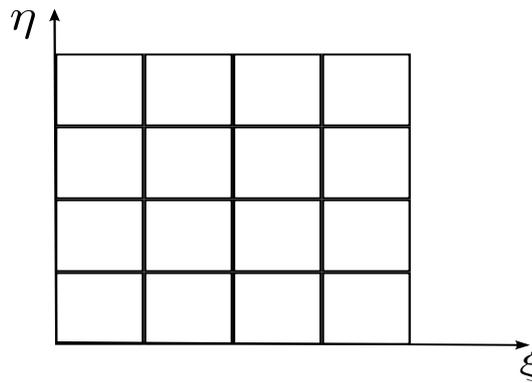
Figura 3.6 – LINHAS  $\xi$ 

Fonte – O autor(2018)

Figura 3.7 – LINHAS  $\xi$  E LINHAS  $\eta$ 

Fonte – O autor(2018)

Como pode-se perceber pelas figuras Fig. 3.6 e Fig. 3.7, os quadriláteros formados pelos vértices não são ortogonais. Para uso em modelo numérico é ideal que cada volume seja ortogonal. Para isto, a estratégia para geração de malha busca a obtenção das coordenadas generalizadas pois há necessidade de “adaptar” a malha obtida para a geometria definida fisicamente em uma outra malha retangular e ortogonal, mais apropriada para os cálculos computacionais. Este novo sistema é denominado “sistema transformado” (FERZIGER; PERIC, 2002). Neste sistema ou nesta nova malha, cada volume tem as mesmas dimensões que seus vizinhos, e é ortogonal. A malha esquematizada na Fig. 3.7 é um esquema da malha já transformada no sistema ortogonal de coordenadas  $(\xi, \eta)$ . Cada volume tem comprimento ao longo do eixo  $\xi$  igual a  $\Delta_\xi$  e ao longo do eixo  $\eta$  igual a  $\Delta_\eta$ , não sendo necessariamente quadrado. A Fig. 3.8 mostra o sistema transformado  $\xi\eta$ .

Figura 3.8 – MALHA ORTOGONAL NO SISTEMA  $(\xi, \eta)$ 

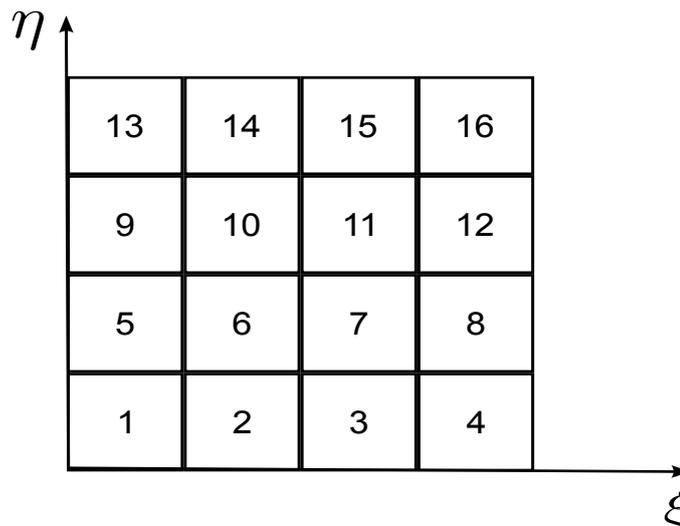
Fonte – O autor(2018)

Após a geração da malha, cada volume precisa ser indexado de modo a ser identificado durante os cálculos das propriedades. Isto é feito através de um único índice  $P$ , que é escrito em termos de variáveis  $i$  e  $j$ , que representam respectivamente a coluna e a linha de volumes. A expressão a seguir mostra como:

$$P = (n_x) j + i. \quad (3.33)$$

onde  $n_x$  é número de volumes na horizontal,  $i$  é índice da coluna  $\xi$  e  $j$  é o índice da linha  $\eta$ . Este tipo de malha é denominado malhas estruturada. A Fig. 3.9 mostra um esquema da malha numerada com um único índice no sistema transformado  $\xi$  e  $\eta$ .

Figura 3.9 – VOLUMES INDEXADOS NA MALHA ORTOGONAL



Fonte – O autor(2018)

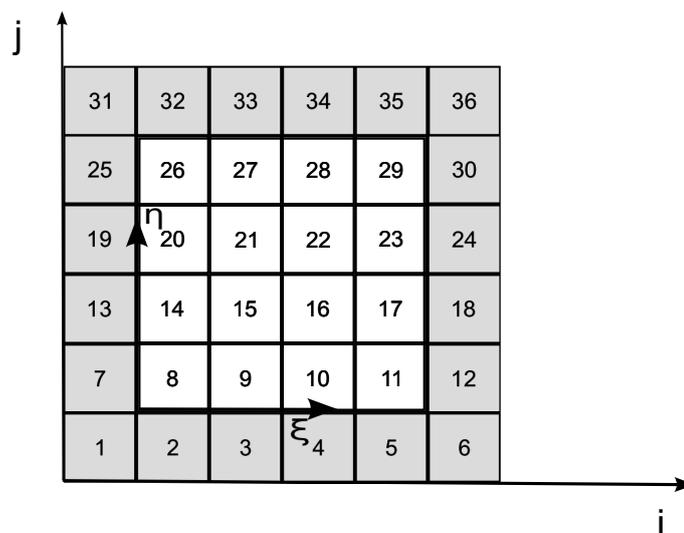
Com a malha definida no sistema transformado, deve-se especificar o tratamento das condições de contorno. Para aplicação das condições de contorno utiliza-se a estratégia dos Volumes Fictícios (MALISKA, 2004). Os Volumes Fictícios são inseridos

apenas para facilitar a codificação das condições de contorno, pois não fazem parte do domínio de cálculo em si (daí o nome Fictícios). Apesar de facilitar a implementação, têm a desvantagem de adicionar 2 linhas e 2 colunas na malha bidimensional, aumentando o número de volumes a serem indexados. Em termos práticos, o número de equações a serem resolvidas também aumenta, conforme será visto adiante. Para identificar os volumes deve-se alterar a expressão definida anteriormente para um único índice, Eq. (3.33), para a expressão que identifique os volumes, levando em conta os volumes fictícios adicionados à malha. Tem-se então, a expressão para um único índice em função dos índices para linha e para coluna como:

$$P = (n_x + 2)(j - 1) + i. \quad (3.34)$$

onde  $n_x$  é número de volumes reais na horizontal,  $i$  é o índice da linha e  $j$  é o índice da coluna. Deste modo, para cada volume fictício, deve-se ter a equação algébrica para que a condição de contorno seja aplicada ao sistema de equações. A Fig. 3.10 mostra o esquema para a malha com volumes fictícios destacados na cor cinza. Convém enfatizar que estes volumes fictícios não se constituem a partir do domínio físico, mas sim constituem-se na “estratégia” para aplicação das condições de contorno. Diante disto, surge uma nomenclatura aos volumes que são do domínio físico, que recebem o nome de volumes reais, e os volumes das condições de contorno, que são chamados fictícios. A Fig. 3.10 mostra a mudança na indexação dos volumes com a inclusão dos volumes fictícios. Observa-se que nesta malha com volumes fictícios, o primeiro volume real é o de índice 8 e não mais 1, como mostrado anteriormente na Fig. 3.9.

Figura 3.10 – MALHA COM OS VOLUMES FICTÍCIOS



Fonte – Adaptado de Bertoldo (2014)

### 3.3.3 Equações em coordenadas generalizadas

Com o conjunto de volumes preparado, as equações definidas no modelo matemático necessitam ser ajustadas para o sistema de coordenadas transformado (chamado de  $\xi, \eta$ ), para que sejam integradas em cada volume. Como já explicado na seção anterior, este sistema de coordenadas generalizadas é mais apropriado para uso computacional, com o ônus de trazer complexidade adicional para a modelagem matemática.

O sistema de coordenadas  $(\xi, \eta)$  é o sistema de coordenadas generalizadas (ou transformado) (FLETCHER, 1991). Para que as propriedades físicas definidas no sistema de coordenadas  $(x, y)$  sejam obtidas corretamente neste sistema, há necessidade de proceder com um conjunto de equações para realizar corretamente esta transformação, de modo que os resultados obtidos no sistema generalizado sejam mapeados de volta no sistema de coordenadas cilíndricas  $(x, y)$ . Assim, deve-se obter relações de modo que as coordenadas  $x$  (coordenada axial) e  $y$  (coordenada radial) sejam mapeadas no sistema  $(\xi, \eta)$ . Deste modo, tem-se que (TANNEHILL et al., 1997)

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta), \\ y &= y(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde  $x(\xi, \eta)$  e  $y = y(\xi, \eta)$  determinam uma relação bijetora entre o sistema  $\xi\eta$  e o sistema de coordenadas cilíndricas  $xy$  utilizado neste trabalho. Utilizando-se a notação com índices dados por  $\xi$  e  $\eta$  para expressar derivadas parciais. Tem-se:

$$x_\xi = \frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad x_\eta = \frac{\partial x}{\partial \eta}, \quad y_\xi = \frac{\partial y}{\partial \xi}, \quad y_\eta = \frac{\partial y}{\partial \eta}. \quad (3.36)$$

Com as expressões de Eq. (3.36) e utilizando os procedimentos descritos por Maliska (2004) para determinação das regras de transformação e a partir do texto de Bertoldo (2014), as equações de conservação (Eq. (3.16), Eq. (3.17) e Eq. (3.18)) tornam-se:

- Equação de conservação de massa:

$$\left[ \frac{1}{J} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{1}{y} \frac{\partial(\rho y U \phi)}{\partial \xi} + \frac{1}{y} \frac{\partial(\rho y V \phi)}{\partial \eta} \right] = 0 \quad (3.37)$$

onde  $U$  e  $V$  são as componentes contravariantes do vetor velocidade dados por:

$$U = uy_\eta - vx_\eta, \quad V = vx_\xi - uy_\xi, \quad (3.38)$$

$J$  é o jacobiano da transformação, dado por:

$$J = [x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi]^{-1}. \quad (3.39)$$

- Equação de conservação de quantidade de movimento em  $u$ :

$$\left[ \frac{1}{J} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{1}{y} \frac{\partial(\rho y U u)}{\partial \xi} + \frac{1}{y} \frac{\partial(\rho y V u)}{\partial \eta} \right] - \left[ \frac{\partial(py_\xi)}{\partial \eta} + \frac{\partial(py_\eta)}{\partial \xi} \right] = 0 \quad (3.40)$$

- Equação de conservação de quantidade de movimento em  $v$ :

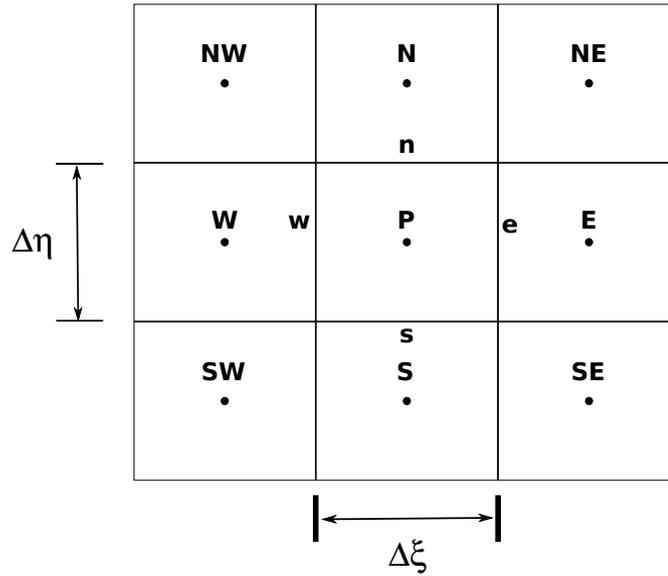
$$\left[ \frac{1}{J} \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{1}{y} \frac{\partial(\rho y U v)}{\partial \xi} + \frac{1}{y} \frac{\partial(\rho y V v)}{\partial \eta} \right] - \left[ \frac{\partial(p x_\eta)}{\partial \xi} + \frac{\partial(p x_\xi)}{\partial \eta} \right] = 0 \quad (3.41)$$

### 3.3.4 Integração de equações em volume elementar

A integração das equações do modelo matemático é uma fase do MVF (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007) e é efetuada nos volumes definidos pela geração de malha e ajustados para o sistema de coordenadas transformado. Em cada volume as grandezas massa específica  $\rho$  e velocidades axial (em  $x$ ) e radial (em  $y$ ) precisam ser determinadas através da integração das equações Eq. (3.37), Eq. (3.40) e Eq. (3.41) nestes volumes. Além destas grandezas, a pressão  $p$  e a temperatura  $T$  são obtidas para estes volumes. Além da integração geométrica, deve-se integrar em um intervalo de tempo  $[t - \Delta t, t]$  (MALISKA, 2004). Este processo de integração é que promove a discretização das variáveis, pois estas serão obtidas a partir dos valores em cada ponto central dos volumes e de seus vizinhos, através de uma equação para cada volume da malha gerada.

A identificação do volumes será através de nomenclatura similar aos pontos cardeais, referenciando o volume em que é feita a integração como volume P e ao seu redor, os volumes recebem nomes conforme a sua posição, Norte, Sul, Leste e Oeste (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007). Assim, o volume que está uma linha acima do volume elementar corrente (P) é o volume Norte (N); o volume situado em uma linha abaixo é o volume Sul; o volume situado a direita é o volume Leste (E) e o volume situado a esquerda é o volume Oeste (W). Além destes volumes, tem-se ainda os volumes posicionados nos cantos do volume elementar P. Assim, o volume situado a direita e na linha acima do volume P é o volume Nordeste (NE); o volume situado a esquerda e na linha acima do volume P é o volume Noroeste (NW); o volume situado a direita e na linha abaixo é o volume Sudeste (SE) e o volume situado à esquerda e na linha abaixo é o volume Sudoeste (SW). Como os pontos centrais de cada volume (centroides) recebem as letras maiúsculas, as faces são nomeadas com letras minúsculas, como já explicado no início da seção 3.3.1. Tem-se então faces Norte (n), Sul (s), Leste (e) e Oeste (w). A Fig. 3.11 ilustra este esquema com o volume genérico P, seus respectivos volumes vizinhos e as suas faces.

Figura 3.11 – VOLUME DE CONTROLE GENÉRICO P E SEUS VIZINHOS



Fonte – Adaptado de Fletcher (1991)

Para resolver as equações de conservação de massa e de quantidades de movimento necessita-se integrar em cada volume elementar, sobre as coordenadas geométricas deste volume e dos vizinhos, e também em um intervalo de tempo (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007). Então, para o sistema de coordenadas transformados  $\xi\eta$ , tem-se:

$$\int_{t-\Delta t}^t \int_{\eta_s}^{\eta_n} \int_{\xi_w}^{\xi_e} 2\pi y [D\phi] d\xi d\eta dt', \quad (3.42)$$

onde  $[D\phi]$  é o termo a ser integrado. Adotou-se a Regra do Retângulo para integração espacial e aplicou-se a aproximação totalmente implícita para a integração temporal (HIRSCH, 1988; FERZIGER; PERIC, 2002).

As equações (massa, quantidade de movimento axial e radial) são discretizadas após a integração. Escrevendo em formato compacto a partir das equações com  $\phi = 1$  para massa específica ( $\rho$ ),  $\phi = u$  para velocidade axial,  $\phi = v$  para velocidade radial e o índice  $^\circ$  indicando valor do intervalo de tempo anterior, tem-se:

$$\left[ \frac{(\mathcal{M}_P \phi_P) - (\mathcal{M}_P \phi_P)^\circ}{\Delta t} + \frac{\dot{\mathcal{M}}_e \phi_e - \dot{\mathcal{M}}_w \phi_w}{\Delta \xi} + \frac{\dot{\mathcal{M}}_n \phi_n - \dot{\mathcal{M}}_s \phi_s}{\Delta \eta} \right] = y_P P_P^\phi + \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta \xi^2) + \mathcal{O}(\Delta \eta^2) \quad (3.43)$$

onde

$$\Delta \xi = \xi_e - \xi_w, \quad (3.44)$$

$$\Delta \eta = \eta_n - \eta_s, \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_P &= \left( \frac{\rho y}{J} \right)_P, \\
\dot{\mathcal{M}}_e &= (\rho y U)_e, \\
\dot{\mathcal{M}}_w &= (\rho y U)_w, \\
\dot{\mathcal{M}}_n &= (\rho y V)_n, \\
\dot{\mathcal{M}}_s &= (\rho y V)_s
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Os valores de  $P_P^\phi$ , da Eq. (3.43), são dados por

$$P_P^1 = 0, \tag{3.47}$$

$$P_P^u = \frac{(py\xi)_n - (py\xi)_s}{\Delta\eta} - \frac{(py\eta)_e - (py\eta)_w}{\Delta\xi}, \tag{3.48}$$

$$P_P^v = \frac{(px\eta)_e - (px\eta)_w}{\Delta\xi} - \frac{(px\xi)_n - (px\xi)_s}{\Delta\eta}. \tag{3.49}$$

Os termos advectivos que envolvem os valores nas faces expressos por  $\phi_e, \phi_w, \phi_n, \phi_s$  na Eq. (3.43) são aproximados ou discretizados por valores que se encontram nos pontos centrais dos volumes. Neste trabalho emprega-se o esquema UDS e as expressões para os termos nas faces são dadas por:

$$\phi_e = \left( \frac{1}{2} + \hat{\alpha}_e \right) \phi_P + \left( \frac{1}{2} - \hat{\alpha}_e \right) \phi_E + \mathcal{O}(\Delta\xi), \tag{3.50}$$

$$\phi_w = \left( \frac{1}{2} + \hat{\alpha}_w \right) \phi_W + \left( \frac{1}{2} - \hat{\alpha}_w \right) \phi_P + \mathcal{O}(\Delta\xi), \tag{3.51}$$

$$\phi_n = \left( \frac{1}{2} + \hat{\alpha}_n \right) \phi_P + \left( \frac{1}{2} - \hat{\alpha}_n \right) \phi_N + \mathcal{O}(\Delta\eta), \tag{3.52}$$

$$\phi_s = \left( \frac{1}{2} + \hat{\alpha}_s \right) \phi_S + \left( \frac{1}{2} - \hat{\alpha}_s \right) \phi_P + \mathcal{O}(\Delta\eta) \tag{3.53}$$

onde

$$\hat{\alpha}_e = \frac{\text{sgn } U_e}{2}, \quad \hat{\alpha}_w = \frac{\text{sgn } U_w}{2}, \quad \hat{\alpha}_n = \frac{\text{sgn } V_n}{2}, \quad \hat{\alpha}_s = \frac{\text{sgn } V_s}{2}. \tag{3.54}$$

Como mencionado no início desta seção, a integração das equações é o passo do Método dos Volumes Finitos para a discretização. A Eq. (3.43), os termos das Eqs.(3.47), (3.48) e (3.49), juntamente com os termos de discretização dos termos nas faces Eq. (3.50) até a Eq. (3.53) são ajustados em uma única equação discretizada para um volume elementar para cada variável indicada por:

$$A_P^\phi \phi_P + A_e^\phi \phi_e + A_w^\phi \phi_w + A_n^\phi \phi_n + A_s^\phi \phi_s + A_{sw}^\phi \phi_{sw} + A_{se}^\phi \phi_{se} + A_{nw}^\phi \phi_{nw} + A_{ne}^\phi \phi_{ne} = B_P^\phi \tag{3.55}$$

onde  $\phi \in \{1, u, v\}$  e os coeficientes  $A^\phi$  e o termo fonte  $B^\phi$  são mostrado no apêndice A.1.

### 3.3.5 Correção da pressão

A Eq. (3.55) é um conjunto de equações para um único volume e para cada uma das três variáveis  $\rho$ , componente do vetor velocidade  $u$  e componente do vetor velocidade  $v$ . Para o fechamento deste conjunto, utiliza-se as equações de conservação de Entalpia Total Eq. (3.19) e equação de estado Eq. (3.21).

Como explica Ferziger e Peric (2002), pode-se resolver um único sistema de equações contendo as equações discretizadas das grandezas em uma única matriz. Este modo de resolução tem alto custo computacional devido ao tamanho da matriz obtida. A outra alternativa é utilizar um conjunto de equações para  $\rho$ , outro conjunto para  $u$  e outro para  $v$ , resolvendo cada conjunto independentemente, produzindo matrizes para resolução do sistema linear independente para cada variável. Este tipo de solução é denominado Segregado (FERZIGER; PERIC, 2002). Maliska (2004) afirma que este tipo de solução tem a desvantagem de ampliar o problema dos acoplamentos entre as variáveis devido a não linearidade das equações. Identifica-se o acoplamento ao verificar as equações de conservação de massa e de quantidade de movimento, Eq. (3.37), Eq. (3.40), Eq. (3.41) e também a Eq. (3.43), pois os termos das componentes do vetor velocidade multiplicam a massa específica  $\rho$ . Ainda, com exceção da equação para conservação de massa, as expressões das componentes do vetor velocidade estão vinculadas com a pressão (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007; FERZIGER; PERIC, 2002), que não é conhecida no momento da solução das equações das componentes do vetor velocidade. Este problema implica em um método para corrigir a pressão, explicado a seguir.

Conforme comenta Maliska (2004), o problema é que não é possível obter o valor da pressão a partir das equações de movimento de modo que as componentes do vetor velocidade satisfaçam a equação da continuidade. Para resolver este impasse, propõe-se um algoritmo, onde um valor de pressão é proposto e, através de um processo iterativo, este valor seja corrigido com os valores das velocidades que são obtidos pelas equações de conservação de quantidade de movimento (ou equações para as componentes do vetor velocidade) Maliska (2004) ainda comenta que existem diversos métodos para resolver este acoplamento pressão-velocidade, contudo o programa Mach2D utilizado neste trabalho, aplica o método denominado SIMPLEC<sup>3</sup> (DOORMAAL; RAITHBY, 1984).

O método SIMPLEC é derivado do método SIMPLE<sup>4</sup>, desenvolvido por Patankar e Spalding (1972) (PATANKAR, 1980). Este método constitui-se em obter a pressão como a soma de uma estimativa para a pressão  $p^*$  com uma correção de pressão indicada por  $p'$  (PATANKAR; SPALDING, 1972):

$$p = p^* + p'. \quad (3.56)$$

Estimando um campo de pressão  $p^*$ <sup>5</sup>, resolve-se as equações das componentes

<sup>3</sup> SIMPLE Consistent

<sup>4</sup> Semi Implicit Method for Pressure-Linked Equations

<sup>5</sup> O sobrescrito \* é utilizado para indicar grandezas obtidas a partir da estimativa de pressão  $p^*$ .

do vetor velocidade e também a equação de estado, obtendo, respectivamente, as componentes do vetor velocidade  $u^*$  e  $v^*$  e massa específica  $\rho^*$ . Ou seja,

$$\rho^* = \rho(p^*), \quad (3.57)$$

$$u^* = u(p^*), \quad (3.58)$$

$$v^* = v(p^*). \quad (3.59)$$

Estas componentes do vetor velocidade,  $u^*$ ,  $v^*$ , e a massa específica  $\rho^*$  não satisfazem a equação da continuidade. Então, determina-se o desvio da pressão  $p' = p - p^*$  a partir da pressão  $p$  que satisfaria a equação da continuidade. Obtém-se as componentes do vetor velocidade  $u$ ,  $v$  e a massa específica  $\rho$  dadas em função deste desvio de pressão  $p'$ :

$$\begin{aligned} \rho &= \rho(p') \\ u &= u(p') \\ v &= v(p') \end{aligned} \quad (3.60)$$

As Eqs.(3.60) são denominadas acoplamento pressão-massa específica e pressão-velocidade (FERZIGER; PERIC, 2002; MALISKA, 2004).

Obtendo a massa específica  $\rho$  a partir da equação de estado, obtém-se

$$\rho = \frac{p^* + p'}{R_g T}. \quad (3.61)$$

Separando a soma em suas parcelas:

$$\rho^* = \frac{p^*}{R_g T}, \quad (3.62)$$

$$\rho' = \frac{p'}{R_g T}, \quad (3.63)$$

tem-se que a massa específica  $\rho$  é dada por

$$\rho = \rho^* + \rho'. \quad (3.64)$$

Como mencionado anteriormente, as variáveis são calculadas nos centroides dos volumes. Este arranjo é denominado arranjo colocalizado (FERZIGER; PERIC, 2002). Deste modo, sabe-se que a massa específica será calculada sobre o centroide, utilizando as equações Eq. (3.61) e Eq. (3.62). Entretanto, na equação da continuidade tem-se os fluxos de massa, que devem ser avaliados sobre as faces dos volumes. Neste trabalho adotou-se o esquema UDS para aproximação das variáveis sobre as faces, onde tem-se as expressões para estes termos dadas por:

$$\rho_e = \rho_e^* + \rho_e', \quad (3.65)$$

$$\rho_w = \rho_w^* + \rho_w', \quad (3.66)$$

$$\rho_n = \rho_n^* + \rho_n', \quad (3.67)$$

$$\rho_s = \rho_s^* + \rho_s', \quad (3.68)$$

onde

$$\rho_e^* = \left(\frac{1}{2} + \hat{\alpha}_e\right) \rho_P^* + \left(\frac{1}{2} - \hat{\alpha}_e\right) \rho_E^*, \quad (3.69)$$

$$\rho_w^* = \left(\frac{1}{2} + \hat{\alpha}_w\right) \rho_W^* + \left(\frac{1}{2} - \hat{\alpha}_w\right) \rho_P^*, \quad (3.70)$$

$$\rho_n^* = \left(\frac{1}{2} + \hat{\alpha}_n\right) \rho_P^* + \left(\frac{1}{2} - \hat{\alpha}_n\right) \rho_N^*, \quad (3.71)$$

$$\rho_s^* = \left(\frac{1}{2} + \hat{\alpha}_s\right) \rho_S^* + \left(\frac{1}{2} - \hat{\alpha}_s\right) \rho_P^* \quad (3.72)$$

e os termos de desvios de pressão nas faces são:

$$\rho'_e = \left(\frac{1}{2} + \hat{\alpha}_e\right) \left(\frac{p'}{R_g T}\right)_P + \left(\frac{1}{2} - \hat{\alpha}_e\right) \left(\frac{p'}{R_g T}\right)_E, \quad (3.73)$$

$$\rho'_w = \left(\frac{1}{2} + \hat{\alpha}_w\right) \left(\frac{p'}{R_g T}\right)_W + \left(\frac{1}{2} - \hat{\alpha}_w\right) \left(\frac{p'}{R_g T}\right)_P, \quad (3.74)$$

$$\rho'_n = \left(\frac{1}{2} + \hat{\alpha}_n\right) \left(\frac{p'}{R_g T}\right) + \left(\frac{1}{2} - \hat{\alpha}_n\right) \left(\frac{p'}{R_g T}\right)_N, \quad (3.75)$$

$$\rho'_s = \left(\frac{1}{2} + \hat{\alpha}_s\right) \left(\frac{p'}{R_g T}\right)_S + \left(\frac{1}{2} - \hat{\alpha}_s\right) \left(\frac{p'}{R_g T}\right)_P. \quad (3.76)$$

onde os termos  $\hat{\alpha}_e$ ,  $\hat{\alpha}_w$ ,  $\hat{\alpha}_n$  e  $\hat{\alpha}_s$  são dados pela Eq. (3.54)

Para resolver os fluxos nas faces para a equação da continuidade Eq. (3.43), necessita-se das componentes do vetor velocidade  $u$  e  $v$ . Como já mencionado, o acoplamento pressão-velocidade necessita ser tratado, para obter-se as componentes  $u$  e  $v$  do vetor velocidade e então, retornar na Eq. (3.43) para resolver a continuidade.

A equação discretizada para as componentes do vetor velocidade  $u$  e  $v$  obtida a partir da Eq. (3.55) é dada por (MALISKA, 2004):

$$A_P^\phi \phi_P + \sum_{nb} A_{nb}^\phi \phi_{NB} = \frac{\mathcal{M}_P^\circ \phi_P^\circ}{\Delta t} + y_P P_P^\phi, \quad \phi \in \{u, v\}, \quad (3.77)$$

onde  $P_P^\phi$  é o termo da discretização do gradiente da pressão, apresentado no apêndice A.1.

Fazendo o mesmo procedimento utilizado para a massa específica, obtém-se a expressão para a velocidade a partir do campo de pressão estimado  $p^*$ , tem-se componentes do vetor velocidade  $u$  e  $v$  também estimados (MALISKA, 2004):

$$A_P^\phi \phi_P^* + \sum_{nb} A_{nb}^\phi \phi_{NB}^* = \frac{\mathcal{M}_P^\circ \phi_P^\circ}{\Delta t} + \omega_P^\phi + y_P \left(P_P^\phi\right)^*, \quad \phi \in \{u, v\} \quad (3.78)$$

Então, satisfazendo a equação da continuidade, tem-se um desvio de velocidade, subtraindo-se a Eq. (3.78) da Eq. (3.77), tem-se:

$$A_P^\phi (\phi_P - \phi_P^*) + \sum_{nb} A_{nb}^\phi (\phi_{NB} - \phi_{NB}^*) = \frac{\mathcal{M}_P^\circ \phi_P^\circ}{\Delta t} + y_P \left[ P_P^\phi - \left(P_P^\phi\right)^* \right], \quad \phi \in \{u, v\}, \quad (3.79)$$

Conforme explica Doormaal e Raithby (1984), para efetuar uma aproximação mais consistente, o termo  $\sum_{nb}(\phi_P)$  é subtraído dos dois lados da Eq. (3.79). Esta variação do método SIMPLE, denominada SIMPLER, despreza o termo  $\sum_{nb} A_{nb}^\phi (\phi'_P - \phi'_{NB})$  (DOORMAAL; RAITHY, 1984) enquanto que no SIMPLE, o termo  $(\phi_{NB} - \phi_{NB}^*)$  é desprezado (MALISKA, 2004). A aproximação SIMPLER basicamente consiste em fazer:

$$\phi'_P = \phi'_{NB} \quad (3.80)$$

O resultado é uma aproximação para as componentes do vetor velocidade  $u$  e  $v$  dadas por:

$$u_P = u_P^* + \frac{y_P (P_P^u)'}{A_P^u + \sum_{nb} A_{nb}^u} \quad (3.81)$$

e

$$v_P = v_P^* + \frac{y_P (P_P^v)'}{A_P^v + \sum_{nb} A_{nb}^v}. \quad (3.82)$$

De modo semelhante ao efetuado para a massa específica, ao resolver a equação da continuidade, necessita-se das velocidades nas faces do volume. Bertoldo (2014) adotou o procedimento recomendado por Maliska (2004) efetuando a aproximação através de interpolação diretamente nas equações dos sistemas lineares. Maliska (2004) explica que este procedimento deve ser adotado pois, aplicando apenas a média entre os valores dos centroides, não haveria um acoplamento entre a velocidade e a pressão. Assim, a interpolação entre os elementos das equações de movimento é utilizada (PERIC et al., 1988; MALISKA, 2004), obtendo o valor das velocidades corrigidas nas faces dos volumes. A seguir, o procedimento de interpolação está aplicado para a face leste mas pode ser estendido para as outras faces bastando utilizar os valores adequados para cada face, ou seja, os valores com índices  $e$  e  $E$  são substituídos pelos índices das faces correspondentes. Os passos a seguir foram transcritos de Bertoldo (2014).

As expressões para  $\phi_P$  e  $\phi_E$  nos centroides dos volumes são dadas por:

$$\left(A_P^\phi\right)_P \phi_P + \left(\sum_{nb} A_{nb}^\phi \phi_{NB}\right)_P = \frac{\mathcal{M}_P^\circ \phi_P^\circ}{\Delta t} + y_P P_P^\phi, \quad \phi \in \{u, v\} \quad (3.83)$$

e

$$\left(A_P^\phi\right)_E \phi_E + \left(\sum_{nb} A_{nb}^\phi \phi_{NB}\right)_E = \frac{\mathcal{M}_E^\circ \phi_E^\circ}{\Delta t} + y_E P_E^\phi, \quad \phi \in \{u, v\}. \quad (3.84)$$

onde  $y_P P_P^\phi$  e  $y_E P_E^\phi$  são termos de aproximação do gradiente de pressão, disponíveis no Apêndice A.1.

Somando as Eqs. (3.83) e (3.84) e aplicando as seguintes aproximações:

$$\left(A_P^\phi\right)_P \phi_P + \left(A_P^\phi\right)_E \phi_E = \left[\left(A_P^\phi\right)_P + \left(A_P^\phi\right)_E\right] \phi_e + \mathcal{O}(\Delta\xi^2), \quad (3.85)$$

$$\mathcal{M}_P^\circ \phi_P^\circ + \mathcal{M}_E^\circ \phi_E^\circ = [\mathcal{M}_P^\circ + \mathcal{M}_E^\circ] \phi_e^\circ + \mathcal{O}(\Delta\xi^2), \quad (3.86)$$

$$y_P P_P^\phi + y_E P_E^\phi = 2y_e P_e^\phi + \mathcal{O}(\Delta\xi^2), \quad (3.87)$$

resulta em:

$$\begin{aligned} \left[ \left( A_P^\phi \right)_P + \left( A_P^\phi \right)_E \right] \phi_e + \left( \sum_{nb} A_{nb}^\phi \phi_{NB} \right)_P + \left( \sum_{nb} A_{nb}^\phi \phi_{NB} \right)_E &= \frac{\mathcal{M}_P^\circ + \mathcal{M}_E^\circ}{\Delta t} \phi_e^\circ \\ &+ \omega_P^\phi + \omega_E^\phi \\ &+ 2y_e P_e^\phi, \quad \phi \in \{u, v\}, \end{aligned} \quad (3.88)$$

onde  $P_e^\phi$  representa a aproximação de  $P^\phi$  na face leste. Aplica-se então, para a Eq. (3.88), a mesma pressão estimada  $p^*$  (MARCHI; MALISKA, 1994), obtendo a expressão:

$$\begin{aligned} \left[ \left( A_P^\phi \right)_P + \left( A_P^\phi \right)_E \right] \phi_e^* + \left( \sum_{nb} A_{nb}^\phi \phi_{NB}^* \right)_P + \left( \sum_{nb} A_{nb}^\phi \phi_{NB}^* \right)_E &= \frac{\mathcal{M}_P^\circ + \mathcal{M}_E^\circ}{\Delta t} \phi_e^\circ \\ &+ \omega_P^\phi + \omega_E^\phi \\ &+ 2y_e (P_e^\phi)^*, \quad \phi \in \{u, v\}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

A expressão da correção da velocidade  $\phi'_e = \phi_e - \phi_e^*$  é obtida subtraindo a expressão Eq. (3.89) da Eq. (3.88). Tem-se,

$$\begin{aligned} \left[ \left( A_P^\phi \right)_P (\phi_e - \phi_e^*) \right] + \left[ \left( A_P^\phi \right)_E (\phi_e - \phi_e^*) \right] + \\ \left[ \sum_{nb} A_{nb}^\phi (\phi_{NB} - \phi_{NB}^*) \right]_P + \left[ \sum_{nb} A_{nb}^\phi (\phi_{NB} - \phi_{NB}^*) \right]_E &= \\ 2y_e \left[ (P_e^\phi) - (P_e^\phi)^* \right], \quad \phi \in \{u, v\}. \end{aligned} \quad (3.90)$$

e, utilizando a aproximação SIMPLEC

$$\phi'_{NB} = \phi'_e, \quad (3.91)$$

e, escrevendo  $(P_e^\phi)' = P_e^\phi - (P_e^\phi)^*$ , obtém-se

$$\left[ \left( A_P^\phi + \sum_{nb} A_{nb}^\phi \right)_P + \left( A_P^\phi + \sum_{nb} A_{nb}^\phi \right)_E \right] \phi'_e = 2y_e (P_e^\phi)', \quad \phi \in \{u, v\}. \quad (3.92)$$

Isolando  $\phi_e$ ,

$$\phi_e = \phi_e^* + \frac{2y_e (P_e^\phi)'}{\left[ \left( A_P^\phi + \sum_{nb} A_{nb}^\phi \right)_P + \left( A_P^\phi + \sum_{nb} A_{nb}^\phi \right)_E \right]}, \quad \phi \in \{u, v\}, \quad (3.93)$$

e isolando  $\phi_e^*$  na Eq. (3.89), obtém-se:

$$\begin{aligned} \phi_e^* &= \frac{\frac{\mathcal{M}_P^\circ + \mathcal{M}_E^\circ}{\Delta t} \phi_e^\circ - \left( \sum_{nb} A_{nb}^\phi \phi_{NB}^* \right)_P - \left( \sum_{nb} A_{nb}^\phi \phi_{NB}^* \right)_E}{\left( A_P^\phi \right)_P + \left( A_P^\phi \right)_E} \\ &+ \frac{\omega_P^\phi + \omega_E^\phi + y_P \tilde{S}_P^\phi + y_E \tilde{S}_E^\phi + 2y_e (P_e^\phi)^*}{\left( A_P^\phi \right)_P + \left( A_P^\phi \right)_E}, \quad \phi \in \{u, v\}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

A aproximação para o termo de  $(P_e^\phi)^*$  com  $\phi \in \{u, v\}$  na Eq. (3.94) é dada por:

$$(P_e^u)^* = \left[ y_\xi \frac{\partial p^*}{\partial \eta} - y_\eta \frac{\partial p^*}{\partial \xi} \right]_e = (y_\xi)_e \frac{p_{NE}^* + p_N^* - p_{SE}^* - p_S^*}{4\Delta\eta} - (y_\eta)_e \frac{p_E^* - p_P^*}{\Delta\xi} + \mathcal{O}(\Delta\xi^2) + \mathcal{O}(\Delta\eta^2), \quad (3.95)$$

$$(P_e^v)^* = \left[ x_\eta \frac{\partial p^*}{\partial \xi} - x_\xi \frac{\partial p^*}{\partial \eta} \right]_e = (x_\eta)_e \frac{p_E^* - p_P^*}{\Delta\xi} - (x_\xi)_e \frac{p_{NE}^* + p_N^* - p_{SE}^* - p_S^*}{4\Delta\eta} + \mathcal{O}(\Delta\xi^2) + \mathcal{O}(\Delta\eta^2), \quad (3.96)$$

Para obter a correção da pressão  $P_e^{\phi'}$ , substitui-se  $p^*$  por  $p'$  para obter as equações para  $P_e^{\phi'}$ . Segundo (MALISKA, 2004) apud (BERTOLDO, 2014) o termo  $\left. \frac{\partial p'}{\partial \eta} \right|_e$  pode ser desprezado. Então, o acoplamento pressão-velocidade para componentes do vetor velocidade nas faces são dados por

$$u_e = u_e^* + u_e', \quad (3.97)$$

$$v_e = v_e^* + v_e', \quad (3.98)$$

onde os termos de correção da velocidade são:

$$u_e' = d_e^u (p'_P - p'_E), \quad (3.99)$$

$$v_e' = d_e^v (p'_E - p'_P), \quad (3.100)$$

e os termos  $d_e^u$  e  $d_e^v$  são

$$d_e^u = \frac{2y_e (y_\eta)_e / \Delta\xi}{(A_P^u + \sum_{nb} A_{nb}^u)_P + (A_P^u + \sum_{nb} A_{nb}^u)_E}, \quad (3.101)$$

$$d_e^v = \frac{2y_e (x_\eta)_e / \Delta\xi}{(A_P^v + \sum_{nb} A_{nb}^v)_P + (A_P^v + \sum_{nb} A_{nb}^v)_E}, \quad (3.102)$$

As componentes do vetor velocidade nas faces, devido às componentes contravariantes, também são obtidas através da correção da pressão com o procedimento similar às componentes  $u_e, v_e$

$$U_e = U_e^* + U_e', \quad (3.103)$$

$$U_w = U_w^* + U_w' \quad (3.104)$$

Utilizando por base as expressões Eq. (3.38), as componentes do vetor velocidade contravariante para o campo estimado de pressão ( $p^*$ ) são dadas por:

$$U_e^* = u_e^* (y_\eta)_e - v_e^* (x_\eta)_e, \quad (3.105)$$

$$U_w^* = u_w^* (y_\eta)_w - v_w^* (x_\eta)_w \quad (3.106)$$

e, as componentes do vetor velocidade contravariantes devido o desvio da pressão ( $p'$ ) são:

$$U_e' = d_e^U (p'_P - p'_E), \quad (3.107)$$

$$U_w' = d_w^U (p'_W - p'_P), \quad (3.108)$$

e os termos  $d$  (coeficientes de acoplamentos do SIMPLEC) dados por

$$d_e^U = d_e^u (y_\eta)_e + d_e^v (x_\eta)_e, \quad (3.109)$$

$$d_w^U = d_w^u (y_\eta)_w + d_w^v (x_\eta)_w, \quad (3.110)$$

Até este momento, os acoplamentos pressão-velocidade e pressão-massa específica dependem do campo estimado  $p^*$  para obter o desvio da pressão  $p'$ , a partir da pressão que satisfaz a equação da continuidade. Esta equação contém termos que representam fluxos Eq. (3.43), mas precisamente os termos explicados pela Eq. (3.46) necessitam ser calculados sobre as faces dos volumes. Como se tratam de produtos entre duas variáveis ( $\rho$  e as componentes do vetor velocidade), há necessidade de linearização. Bertoldo (2014) explica que utilizou a linearização dada por Ferziger e Peric (1999). Para a face leste, o produto, obtido utilizando as Eqs.(3.65) e (3.103), é dado por:

$$(\rho y U)_e = [(\rho^* + \rho') y (U^* + U')]_e \quad (3.111)$$

$$(\rho y U)_e = (\rho^* y U')_e + (\rho' y U^*)_e + (\rho^* y U^*)_e + (\rho' y U')_e, \quad (3.112)$$

As expressões obtidas para a correção da pressão  $p'$  conduzem a um sistema linear dado por:

$$A_P^{p'} p'_P + A_W^{p'} p'_W + A_E^{p'} p'_E + A_S^{p'} p'_S + A_N^{p'} p'_N = B_P^{p'}. \quad (3.113)$$

O Apêndice A.2 fornece os coeficientes deste sistema.

### 3.3.6 Condições de contorno

As condições de contorno são aplicadas para as variáveis  $\rho, u, v, p$  e  $T$ . Também deve-se aplicá-las para o desvio de pressão  $p'$ , pois um sistema de equações discretizado foi elaborado para resolver a correção de pressão, conforme explicado na seção 3.3.5. Nesta seção são dados detalhes das condições de contorno para cada variável.

Para cada fronteira (ou contorno) há uma condição específica que deve respeitar o modelo físico. As condições de contorno explicadas na seção 3.2.1 são aplicadas utilizando-se a técnica de volumes fictícios (MALISKA, 2004; VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007), como mencionado na seção 3.3.2 Estes volumes tem a função apenas de auxiliar na formação das condições na fronteira, permitindo um código do programa mais simples para ser desenvolvido (MALISKA, 2004). Deste modo, equações discretizadas específicas para a fronteira são elaboradas para tratar os valores destes volumes. Então variáveis referidas para calcular no volume  $P$  são as variáveis obtidas ou calculadas no centroide do volume fictício enquanto os valores de fronteira situam-se sobre a face deste volume.

As variáveis  $\rho, u, v, T, p$  e  $p'$  devem ter valores de condição de contorno aplicados nas equações discretizadas. Para a correção de pressão  $p'$ , a condição é imposta de modo

que a massa seja conservada (que é justamente a premissa do método de acoplamento), enquanto que a pressão é extrapolada, visto que  $\rho$ ,  $T$  e  $p$  estão relacionadas pela Equação de Estado Eq. (3.21). A Temperatura  $T$  também é extrapolada pois é obtida através de equação analítica, expressa pela equação de conservação de entalpia total, Eq. (3.19).

No contorno Norte, as variáveis  $\rho$ ,  $u$ ,  $v$  e  $T$  são definidas pela condição de corrente livre. Aplica-se o esquema UDS, que implica que o valor no volume fictício é o próprio valor prescrito da variável. O desvio de pressão  $p'$  tem valor 0, pois as componentes do vetor velocidade são conhecidas no contorno, bem como a pressão. Assim, tem-se para  $\rho$ ,  $u$  e  $v$  as condições para o volume são as condições de corrente livre:

$$\phi_P = \phi_\infty, \quad \phi \in \{\rho, u, v\}, \quad (3.114)$$

que conduz a equação discretizada :

$$A_P^\phi \phi_P = B_P^\phi, \quad \phi \in \{\rho, u\}, \quad (3.115)$$

onde  $A_P^\phi = 1$  e  $B_P^\phi = \phi_\infty$ .

A temperatura tem a seguinte expressão discretizada:

$$A_P^\phi \phi_P + A_S^\phi \phi_S = B_P^\phi \quad (3.116)$$

onde  $A_P^\phi = A_S^\phi = 1$  e  $B_P^\phi = 2T_\infty$ .

A pressão é extrapolada a partir de volumes próximos, dada por:

$$A_P^\phi \phi_P + A_S^\phi \phi_S = B_P^\phi \quad (3.117)$$

onde  $A_P^\phi = A_S^\phi = 1$  e  $B_P^\phi = 2p_S$ , onde  $p_S$  é a pressão no volume S (ao Sul).

O contorno Sul corresponde à superfície do corpo e é fronteira impermeável, o que implica que o fluxo é zero (FERZIGER; PERIC, 2002). Desta forma, o fluxo de massa é descrito por:

$$(\hat{n} \cdot \nabla \rho)_n = 0, \quad (3.118)$$

que deve ser expresso com derivadas em coordenadas generalizadas:

$$\left[ -\beta \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \gamma \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_n = 0 \quad (3.119)$$

onde as derivadas são discretizadas por:

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_n = \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta \eta} + \mathcal{O}(\Delta \eta^2) \quad (3.120)$$

e por

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_n = \begin{cases} \frac{(\phi_{NE} + \phi_E) - (\phi_N + \phi_P)}{2\Delta \xi} + \mathcal{O}(\Delta \xi), & i = 2; \\ \frac{(\phi_E + \phi_{NE}) - (\phi_W + \phi_{NW})}{4\Delta \xi} + \mathcal{O}(\Delta \xi^2), & 3 \leq i \leq n_x - 2; \\ \frac{(\phi_N + \phi_P) - (\phi_{NW} + \phi_W)}{2\Delta \xi} + \mathcal{O}(\Delta \xi), & i = n_x - 1 \end{cases} \quad (3.121)$$

e os fatores  $\beta$  e  $\gamma$  são componentes do tensor métrico

$$\begin{aligned}\beta &= x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta, \\ \gamma &= x_\xi^2 + y_\xi^2.\end{aligned}\tag{3.122}$$

As expressões Eq. (3.119), Eq. (3.120) e Eq. (3.121) conduzem às equações discretizadas da variável  $\rho$  para os volumes fictícios sobre a fronteira Sul. Estas equações dependem da posição  $\xi$  do volume. Então, tem-se as seguintes expressões ( $i$  é um índice para o volume):

- Para o volume  $i = 2$ :

$$A_P^\phi \phi_P + A_n^\phi \phi_N + A_{se}^\phi \phi_{SE} + A_{ne}^\phi \phi_{NE} = B_P^\phi,\tag{3.123}$$

onde os coeficientes são

$$\begin{aligned}A_P^\phi &= \Delta_\xi - \frac{\beta \Delta_\eta}{2\gamma}, \quad A_n^\phi = -\Delta_\xi - \frac{\beta \Delta_\eta}{2\gamma}, \quad A_e^\phi = A_{ne}^\phi = \frac{\beta \Delta_\eta}{2\gamma} \\ B_P^\phi &= 0.\end{aligned}$$

- Para os volumes  $3 < i \leq n_x - 2$ :

$$A_P^\phi \phi_P + A_e^\phi \phi_E + A_w^\phi \phi_W + A_n^\phi \phi_N + A_{nw}^\phi \phi_{NW} + A_{ne}^\phi \phi_{NE} = 0,\tag{3.124}$$

onde os coeficientes são

$$A_P^\phi = \Delta_\xi, \quad A_n^\phi = -\Delta_\xi, \quad A_w^\phi = A_{nw}^\phi = \frac{\beta \Delta_\eta}{4\gamma}, \quad A_e^\phi = A_{ne}^\phi = -\frac{\beta \Delta_\eta}{4\gamma}.$$

- Para os volumes  $i = n_x - 1$ :

$$A_P^\phi \phi_P + A_w^\phi \phi_W + A_n^\phi \phi_N + A_{nw}^\phi \phi_{NW} = B_P^\phi,\tag{3.125}$$

onde os coeficientes são

$$\begin{aligned}A_P^\phi &= \Delta_\xi + \frac{\beta \Delta_\eta}{2\gamma}, \quad A_n^\phi = \frac{\beta \Delta_\eta}{2\gamma} - \Delta_\xi, \quad A_w^\phi = A_{nw}^\phi = -\frac{\beta \Delta_\eta}{2\gamma}, \\ B_P^\phi &= 0.\end{aligned}$$

As componentes do vetor velocidade  $u$  e  $v$  necessitam de tratamento adequado pois esta fronteira não é permeável e a condição é de escorregamento. Conforme explica Ferziger e Peric (2002), a estratégia adotada neste contorno é a de obter o vetor velocidade considerando que a velocidade na face norte do volume fictício é aproximadamente igual à velocidade do volume imediatamente acima deste (ou o volume N). Sendo  $\vec{u}_N$  o vetor velocidade no volume N e  $\vec{X}_\xi$  o vetor tangencial à parede, define-se o módulo do vetor velocidade tangencial  $\lambda$  por

$$\lambda = \frac{\text{sgn}((\vec{X}_\xi)_n \cdot \vec{u}_N) \|\vec{u}_N\|}{\|(\vec{X}_\xi)_n\|}.\tag{3.126}$$

O vetor velocidade é dado pela multiplicação de  $\lambda$  pelas derivadas relativas a  $\xi$ :

$$u_n = \lambda x_\xi \quad e \quad v_n = \lambda y_\xi \quad (3.127)$$

Com as expressões Eq. (3.126) e Eq. (3.127) define-se as equações discretizadas para  $u$  e  $v$  na fronteira Sul:

$$A_P^\phi \phi_P + A_n^\phi \phi_N = B_P^\phi \quad (3.128)$$

onde

$$A_P^\phi = A_n^\phi = 1, \\ B_P^\phi = \begin{cases} 2u_n & \text{para } \phi = u \\ 2v_n & \text{para } \phi = v. \end{cases} \quad \text{ou}$$

O valor da correção de pressão  $p'$  do volume fictício tem o mesmo valor que do volume acima (ao Norte) e é expresso matematicamente por,:

$$p'_P = p'_N \quad (3.129)$$

que conduz a equação discretizada

$$A_P^\phi \phi_P + A_n^\phi \phi_N = 0, \quad (3.130)$$

onde  $A_P^\phi = A_n^\phi = 1$ .

A temperatura  $T$  para a fronteira Sul é obtida pela Eq. (3.19) para cada um dos volumes internos ao domínio. Para os volumes fictícios, utilizam-se extrapolação a partir dos valores de temperatura obtidos nas faces, de modo semelhante ao utilizado para a fronteira Norte.

$$A_P^\phi \phi_P + A_n^\phi \phi_N = B_P^\phi \quad (3.131)$$

onde  $A_P^\phi = A_n^\phi = 1$ ,  $B_P^\phi = 2T_s$ ,  $T_s$  é a temperatura na fronteira Sul.

Para o contorno Leste, a condição aplicada é a de escoamento localmente parabólico (MALISKA, 2004), utilizando a aproximação através do esquema UDS, sobre as variáveis velocidade  $u$  e  $v$ , correção de pressão e massa específica. Deste modo tem-se:

$$\phi_P = \phi_W, \quad (3.132)$$

que conduz a expressão discretizada dada por:

$$A_P^\phi \phi_P + A_W^\phi \phi_W = 0 \quad \phi \in \{u, v, p', \rho\} \quad (3.133)$$

A condição na fronteira Leste é obtida pela conservação de entalpia através de Eq. (3.19) e extrapola-se para o volume fictício com a equação discretizada:

$$A_P^\phi \phi_P + A_W^\phi \phi_W = B_P^\phi \quad (3.134)$$

onde  $A_p^\phi = A_e^\phi = 1$ ,  $B_p^\phi = 2T_w$ ,  $T_w$  é a temperatura na fronteira Leste.

As condições aplicadas ao contorno Oeste são de que o fluxo é nulo e a velocidade  $v$  também é nula, similar ao que ocorre com a fronteira Sul. Assim,

$$(\hat{n} \cdot \nabla \rho)_e = 0, \quad (3.135)$$

que deve ser expresso com derivadas em coordenadas generalizadas:

$$\left[ \alpha \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_e = 0, \quad (3.136)$$

onde as derivadas são discretizadas por:

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta \eta} + \mathcal{O}(\Delta \eta^2) \quad (3.137)$$

e por

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_e = \begin{cases} \frac{(\phi_{NE} + \phi_N) - (\phi_E + \phi_P)}{2\Delta \eta} + \mathcal{O}(\Delta \eta), & j = 2; \\ \frac{(\phi_N + \phi_{NE}) - (\phi_S + \phi_{SE})}{4\Delta \eta} + \mathcal{O}(\Delta \eta^2), & 3 \leq j \leq n_y - 2; \\ \frac{(\phi_E + \phi_P) - (\phi_{SE} + \phi_S)}{2\Delta \eta} + \mathcal{O}(\Delta \eta), & j = n_y - 1 \end{cases} \quad (3.138)$$

e os fatores  $\alpha$  e  $\beta$  são componentes do tensor métrico

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2, \quad (3.139)$$

$$\beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta. \quad (3.140)$$

As expressões dadas pelas Eq. (3.136), Eq. (3.137) e Eq. (3.138) conduzem às equações discretizadas de  $\rho$  para a fronteira Oeste, dadas por ( $j$  é o indicador da linha  $\xi$  constante):

- Para o volume  $j = 2$ :

$$A_p^\phi \phi_P + A_e^\phi \phi_E + A_n^\phi \phi_N + A_{ne}^\phi \phi_{NE} = 0, \quad (3.141)$$

onde os coeficientes são

$$A_p^\phi = \Delta_\eta - \frac{\beta \Delta_\xi}{2\alpha}, \quad A_e^\phi = -\Delta_\eta - \frac{\beta \Delta_\xi}{2\alpha}, \quad A_n^\phi = A_{ne}^\phi = \frac{\beta \Delta_\xi}{2\alpha}.$$

- Para os volumes  $3 < j \leq n_y - 2$ :

$$A_p^\phi \phi_P + A_e^\phi \phi_E + A_n^\phi \phi_N + A_s^\phi \phi_S + A_{se}^\phi \phi_{SE} + A_{ne}^\phi \phi_{NE} = 0, \quad (3.142)$$

onde os coeficientes são

$$A_p^\phi = \Delta_\eta, \quad A_e^\phi = -\Delta_\eta, \quad A_n^\phi = A_{ne}^\phi = \frac{\beta \Delta_\xi}{4\alpha}, \quad A_s^\phi = A_{se}^\phi = -\frac{\beta \Delta_\xi}{4\alpha}.$$

- Para os volumes  $j = n_y - 1$ :

$$A_P^\phi \phi_P + A_E^\phi \phi_E + A_S^\phi \phi_S + A_{SE}^\phi \phi_{SE} = 0, \quad (3.143)$$

onde os coeficientes são

$$A_P^\phi = \Delta_\eta + \frac{\beta \Delta_\xi}{2\alpha}, \quad A_E^\phi = \frac{\beta \Delta_\xi}{2\alpha} - \Delta_\eta, \quad A_S^\phi = A_{SE}^\phi = -\frac{\beta \Delta_\xi}{2\alpha}.$$

Para a condição da velocidade  $v$  nessa fronteira, tem-se:

$$A_P^\phi \phi_P + A_W^\phi \phi_W = 0 \quad (3.144)$$

onde os coeficientes são  $A_P^\phi = A_W^\phi = 1$ .

Para a condição da temperatura nessa fronteira, a temperatura é obtida através da Eq. (3.19), extrapolando-se para o volume fictício pela equação discretizada

$$A_P^\phi \phi_P + A_W^\phi \phi_W = B_P^\phi \quad (3.145)$$

onde os coeficientes são  $A_P^\phi = A_E^\phi = 1$ ,  $B_P^\phi = 2T_W$  e  $T_W$  é a temperatura na fronteira Leste.

Necessita-se das condições de contorno para os cantos do domínio transformado  $(\xi, \eta)$  para complementar os sistemas lineares. Nestes cantos, não há correção de pressão, logo  $p' = 0$ . As variáveis velocidades  $u$  e  $v$  e a massa específica  $\rho$  tem equações discretizadas similares.

Para o canto Noroeste tem-se a seguinte equação discretizada

$$A_P^\phi \phi_P + A_E^\phi \phi_E + A_S^\phi \phi_S + A_{SE}^\phi \phi_{SE} = B_P^\phi, \quad \phi \in \{u, v, \rho\} \quad (3.146)$$

onde  $A_P^\phi = 1$ ,  $A_E^\phi = A_S^\phi = A_{SE}^\phi = -\frac{1}{3}$ ,  $B_P^\phi = 0$ .

Para o canto Sudoeste, tem-se

$$A_P^\phi \phi_P + A_E^\phi \phi_E + A_N^\phi \phi_N + A_{NE}^\phi \phi_{NE} = B_P^\phi, \quad \phi \in \{u, v, \rho\} \quad (3.147)$$

onde  $A_P^\phi = 1$ ,  $A_E^\phi = A_N^\phi = A_{NE}^\phi = -\frac{1}{3}$ ,  $B_P^\phi = 0$ .

Para o canto Nordeste, tem-se

$$A_P^\phi \phi_P + A_W^\phi \phi_W + A_S^\phi \phi_S + A_{SW}^\phi \phi_{SW} = B_P^\phi, \quad \phi \in \{u, v, \rho\} \quad (3.148)$$

onde  $A_P^\phi = 1$ ,  $A_W^\phi = A_S^\phi = A_{SW}^\phi = -\frac{1}{3}$ ,  $B_P^\phi = 0$ .

Para o canto Sudeste, tem-se

$$A_P^\phi \phi_P + A_W^\phi \phi_W + A_N^\phi \phi_N + A_{NW}^\phi \phi_{NW} = B_P^\phi, \quad \phi \in \{u, v, \rho\} \quad (3.149)$$

onde  $A_P^\phi = 1$ ,  $A_W^\phi = A_N^\phi = A_{NW}^\phi = -\frac{1}{3}$ ,  $B_P^\phi = 0$ .

Finalmente, a temperatura é calculada para todos os volumes utilizando a conservação de entalpia Eq. (3.19).



A solução desejada é a de regime permanente e o intervalo de tempo é utilizado apenas como parâmetro de relaxação. Mas o intervalo de tempo  $\Delta t$  tem papel importante no tempo necessário para resolução: se  $\Delta t$  é pequeno, o número de iterações até atingir o regime permanente é grande, enquanto que se  $\Delta t$  for grande, a solução diverge. Para resolver este impasse da escolha do intervalo  $\Delta t$ , a solução adotada é a de iniciar o passo de tempo  $\Delta t$  com um valor relativamente pequeno e ir ajustando-o com incrementos, conforme as iterações vão ocorrendo. O valor inicial para  $\Delta t$  é obtido através de (BERTOLDO, 2014)

$$\Delta t_0 = \frac{1}{4} \min_P \left( \frac{1}{\sqrt{J(u^2 + v^2)}} \right)_P. \quad (3.153)$$

Para obter o ajuste ou incremento, adota-se a seguinte solução: em cada iteração  $i$ , o novo valor de  $\Delta t$  para a iteração  $i$ , denominado  $\Delta t_i$  é dado por

$$\Delta t_i = \Delta t_{i-1} (1 + h(c)), \quad (3.154)$$

onde  $c$  é chamado coeficiente de convergência. Este coeficiente é baseado no critério de convergência denominado Critério de Scarborough (MALISKA, 2004). Neste critério, a condição suficiente para convergência do sistema linear é (MALISKA, 2004; VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007)

$$\frac{\sum \|A_{nb}\|}{\|A_P\|} \begin{cases} \leq 1 & \text{para todas as equações,} \\ < 1 & \text{para pelo menos uma das equações.} \end{cases} \quad (3.155)$$

O coeficiente  $c$  é o valor máximo dos coeficientes de cada sistema linear. Matematicamente é expresso por (BERTOLDO, 2014):

$$c = \max(c_u, c_v, c'_p), \quad (3.156)$$

onde  $c_\phi$  de cada variável é:

$$c_\phi = \frac{1}{n_x n_y} \sum_P \frac{\sum \|A_{nb}\|}{\|A_P\|}, \quad \phi \in u, v, p'. \quad (3.157)$$

A soma deve ser efetuada sobre os volumes reais e seus vizinhos.

A função  $h(c)$  na Eq. (3.154) tem função dupla: acelerar a convergência e também manter a estabilidade (BERTOLDO, 2014). Esta função é dada por:

$$h(c) = \begin{cases} h_0 \sqrt{1 - \frac{c}{c_{\min}}}, & c < c_{\min}, \\ -h_0 \sqrt{\frac{c}{c_{\max}} - 1}, & c > c_{\max}, \\ 0, & c_{\min} < c < c_{\max}, \end{cases} \quad (3.158)$$

onde os termos  $h_0$ ,  $c_{\min}$  e  $c_{\max}$  são parâmetros que podem ser definidos pelo usuário.

Finalmente, adota-se a estratégia de dobrar o número de iterações quando o resíduo do desvio de pressão alcança o valor definido para encerramento. Isto é aplicado para reduzir a influência do erro de máquina no erro de discretização. Assim, se  $n$  é o número de iteração em que se atingiu o critério de parada, as iterações continuam até que o dobro de  $n$  iterações sejam executadas.

### 3.3.8 Grandezas de interesse

O coeficiente de arrasto frontal devido à pressão  $C_{Df}$  é a grandeza de interesse neste trabalho. É dada pela Eq. (3.32), reescrita aqui para facilitar a leitura:

$$C_{Df} = \frac{2\pi}{q_\infty A_b} \int_0^{l_r} (p - p_\infty) y \frac{dy}{dx} dx, \quad y = g(x), \quad (3.32)$$

que em coordenadas generalizadas é expressa por (BERTOLDO, 2014)

$$C_{Df} = \frac{2}{q_\infty r_b^2} \int_{\xi_i}^{\xi_f} (p - p_\infty) y y_\xi d\xi. \quad (3.159)$$

A integral deve ser aproximada por uma soma sobre os volumes. Logo, tem-se:

$$C_{Df} = \frac{2}{q_\infty r_b^2} \sum (p_n - p_\infty) y_n y_\xi \Delta\xi + \mathcal{O}(\Delta\xi^2), \quad (3.160)$$

onde a pressão na face Norte é interpolada por

$$p_n = \frac{p_P + p_N}{2}. \quad (3.161)$$

A soma é efetuada apenas sobre a face Norte dos volumes que estão na superfície do corpo, que corresponde a fronteira Sul do domínio.

Apesar do ajuste via incrementos para o valor do intervalo de tempo  $\Delta t$  seja feito de modo que o critério de Scarborough seja satisfeito, podem ocorrer situações em que não há convergência. Como o processo de cálculo do  $C_{Df}$  estará inserido no procedimento iterativo de otimização, como será explicado em seção própria, para as situações em que não houver convergência, o Coeficiente  $C_{Df}$  recebe o valor 0,999, indicando que não houve convergência no cálculo da simulação.

### 3.3.9 Algoritmo

Para facilitar a explicação para solução do escoamento, apresenta-se o algoritmo a seguir. Este algoritmo permite uma melhor visualização das diversas partes explicadas nas seções anteriores.

A solução do escoamento foi implementada no programa Mach2D, desenvolvida pelo grupo de Pesquisas em Dinâmica dos Fluidos Computacional do Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica (PGMEC) da Universidade Federal do Paraná (UFPR). Esse programa é utilizado neste trabalho para geração dos perfis geométricos e simulações do escoamento nestes perfis.

---

**Algoritmo 1:** Algoritmo de solução do escoamento, com geração da geometria e parâmetros de otimização
 

---

```

1 Ler os parâmetros de entrada;
2 Obter valores de configuração da geometria (conforme a seção 3.1) ;
3 Definir a geometria (spline monotônico) (conforme a seção 3.1);
4 Gerar a malha;
5 Calcular as métricas da transformação e demais variáveis geométricas;
6 Aplicar a condição inicial;
7 Definir primeiro passo de tempo;
8 para ( cada passo de tempo ) faça
9   Incrementar o tempo em  $\Delta t$ ;
10  Atualizar os campos ( $u, v, p^*$ );
11  enquanto ( número de iterações de ciclo de massa < num. máximo ) faça
12    Calcular os coeficientes  $A^\phi$  e fontes  $B^\phi$  dos sistemas lineares para  $u$  e  $v$ ;
13    Calcular os coeficientes do SIMPLEX;
14    Resolver os sistemas lineares para  $u$  e  $v$ ;
15    Calcular os resíduos dos sistemas lineares;
16    Calcular as velocidades nas faces;
17    enquanto (  $R_{p'}$  for maior que o tolerável ) faça
18      Calcular os coeficientes  $A^{p'}$  e fontes  $B^{p'}$ ;
19      Resolver a equação da correção da pressão para se obter  $p'$ ;
20      Corrigir as velocidades nas faces com  $p'$ ;
21      Corrigir a massa específica nos nós e calcular as massa específicas nas
22      faces;
23      Calcular o resíduo do sistema linear para desvio de pressão  $p'$  ( $R_{p'}$ );
24      Se o número de iterações do ciclo de pressão for excedido, sair deste
25      laço de repetição;
26    fim
27    Corrigir  $p^*$  com  $p'$ ;
28    Corrigir as componentes do vetor velocidade nos nós com  $p'$ ;
29  fim
30  Verificar a conservação da massa;
31  Calcular temperatura através da Eq. (3.19);
32  Calcular  $p$  nos nós utilizando os últimos valores de  $\rho$  com Eq. (3.21) ;
33  Calcular o resíduo total  $R_{L_1}$  dos sistemas lineares para  $u, v$  e  $p'$ ;
34  se  $R_{p'}$ , pela primeira vez, for menor que uma tolerância prescrita então
35    continuar o ciclo do passo de tempo, até que o número de iterações seja o
36    dobro do atual;
37  fim
38  senão
39    incrementar número de iterações
40  fim
41  se (a solução convergiu?) então
42    calcular o Coeficiente de Arrasto frontal  $C_{Df}$  ;
43  fim
44  senão
45    o valor de  $C_{Df}$  é definido como 0,999;
46  fim
47  Executar pós-processamento;

```

---

### 3.4 MULTIEXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON

O uso de MER visa aumentar a ordem de acurácia do valor do Coeficiente de Arrasto  $C_{Df}$  obtido pela solução do escoamento conforme descrito na Seq. 3.2 e implementado no programa Mach2D. Esta seção explica como MER é utilizada no processo de otimização desenvolvido neste estudo.

Foi descrito na Seq. 3.3 que o modelo numérico utiliza esquema de discretização UDS, com ordem de acurácia igual a 1. Entretanto, a aplicação de MER com dois níveis de extrapolação aumentaria, teoricamente, a ordem da solução para 3, apenas utilizando 3 malhas. Como MER aumenta a acurácia da solução, o procedimento de aplicar MER está inserido no contexto da otimização, entendendo-se que o resultado final será mais acurado do que com apenas uma malha.

Aplica-se MER, utilizando-se 3 (três) malhas, com razão de refino  $q$  entre cada malha igual a 2 (dois). Para cada solução exigida pelo algoritmo de otimização, tem um ciclo de MER com as 3 (três) malhas. Ou seja, para o algoritmo de otimização, uma solução da função objetivo é o valor obtido com MER. Deste modo, a solução enviada para o algoritmo de otimização terá ordem de acurácia (teórica) igual a 3 (três).

O procedimento é aplicado de forma sistemática: são efetuadas três simulações em sequência. A primeira apresenta um número de volumes na horizontal e na vertical; a segunda tem o dobro de volumes na horizontal e o dobro de volumes na vertical que a primeira e, a terceira simulação tem o dobro de volumes na horizontal e o dobro de volumes na vertical que a segunda. Os valores de  $C_{Df}$  de cada uma das simulações é armazenado e aplica-se o algoritmo descrito a seguir.

#### Algoritmo para MER

O trabalho de Martins (2013) apresenta algoritmo para efetuar a multiextrapolação, que é transcrito a seguir:

---

#### Algoritmo 2: Algoritmo de Multiextrapolação de Richardson

---

```

1 Obter as soluções  $\phi$  em G malhas;
2 Identificar  $\phi_{1,0} = \phi_1, \phi_{2,0} = \phi_2, \phi_{3,0} = \phi_3, \dots, \phi_{G,0} = \phi_G$  ;
3 for ( $m = 1 \dots G - 1$ ) do
4   for ( $g = m + 1 \dots G$ ) do
5     Obter a solução:
6     
$$\phi_{g,m} = \phi_{g,m-1} + \frac{\phi_{g,m-1} - \phi_{g-1,m-1}}{q^{p_{m-1}} - 1}$$

7   end
8 end

```

---

O valor de  $C_{Df}$  obtido com MER é o valor  $\phi_{g,m}$  do algoritmo, denominado valor “multiextrapolado”, e é enviado ao algoritmo de otimização.

## 3.5 OTIMIZAÇÃO

Um problema de otimização consiste em minimizar (ou maximizar) uma grandeza, que precisa ser claramente identificada. Dentro do escopo da otimização, o objeto da minimização (ou maximização) é o *objetivo*, *função objetivo* ou *função custo*. As características desta função objetivo são denominadas *variáveis* do problema. Estas variáveis usualmente, mas não obrigatoriamente, estão sujeitas a *vínculos*<sup>7</sup>, que restringem valores ou algum tipo de estado que as variáveis possam assumir. *Modelagem* é o trabalho de identificar o objetivo corretamente, encontrar as variáveis do problema e seus vínculos. Existem diversos algoritmos agrupados em conjuntos de algoritmos. Para cada problema, há um conjunto de algoritmos que pode ser aplicado (NOCEDAL; WRIGHT, 2006).

Matematicamente, o problema de otimização é expresso por (NOCEDAL; WRIGHT, 2006):

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad \text{sujeito à} \quad \begin{cases} c_i(\mathbf{x}) = 0, \\ c_i(\mathbf{x}) \geq 0 \end{cases} \quad (3.162)$$

onde  $\mathbf{x}$  é o vetor de parâmetros ou variáveis,  $f(\mathbf{x})$  é a função objetivo,  $c_i$  são os vínculos.

### 3.5.1 Método de Otimização de Forma

Segundo (LAPORTE; Le Tallec, 2003), o problema de otimização de forma consiste em minimizar uma função objetivo com restrições, que envolve a solução de um conjunto de equações diferenciais parciais, em um domínio dependente de variáveis geométricas. Ou seja, o problema consiste em encontrar uma forma otimizada dentre as várias formas possíveis, satisfazendo restrições geométricas. Com isto, a função objetivo depende das variáveis geométricas e também da solução das equações diferenciais parciais. As variáveis geométricas definem a forma do corpo ou do objeto da otimização.

Neste trabalho, deseja-se otimizar o coeficiente de arrasto de pressão frontal  $C_{Df}$  de nariz de foguete. Este nariz é representado por um corpo axissimétrico e razão de aspecto conhecida. Assim, o problema de otimização é encontrar a forma geométrica que minimiza este coeficiente, sujeita aos vínculos de raio de base e comprimento prescritos.

Sendo a função objetivo dependente das variáveis geométricas, que definem a forma geométrica, estas variáveis são chamadas “variáveis de projeto” (ou de *design*). Estabelecer a forma geométrica a partir de variáveis é denominado parametrização, e dentre as várias técnicas para parametrização da forma geométrica (SAMAREH, 1999), este trabalho utiliza o polinômio monotônico interpolador (ou spline), conforme descrito na seção 3.1. Assim, denominando a forma geométrica (ou perfil geométrico) pela função  $g(\mathbf{X})$ <sup>8</sup> dada pelo polinômio interpolador e  $\mathbf{X}$  o vetor de variáveis que determinam a forma

<sup>7</sup> tradução da palavra *constraint* e pode significar também restrição

<sup>8</sup> Para evitar possível confusão entre o valor do vetor de variáveis com os valores de  $x$  como abscissas, adota-se a convenção de que  $\mathbf{X}$  é o vetor das variáveis de otimização

$g(\mathbf{X})$ . Deste modo, tem-se que a otimização de forma consiste em determinar  $g(\mathbf{X})$  que optimize  $C_{Df}$ . Os parâmetros da função  $g(\mathbf{X})$  são os valores das coordenadas  $y$  de posições com abcissas  $x$  específicas, que definem o polinômio. Os valores de  $x$  são dados pelas Eqs. (3.13) e (3.14). Então, a otimização é expressa matematicamente por:

$$\min_{\mathbf{X}} f(g(\mathbf{X})) \quad (3.163)$$

onde  $\mathbf{X} = \{y_1, y_2, \dots, y_{n_u}\}$  é o vetor de parâmetros dado pelas coordenadas  $y$ ,  $g(\mathbf{X})$  é o polinômio interpolador,  $f(g(\mathbf{X}))$  é o valor de  $C_{Df}$  a partir do perfil definido por  $g(\mathbf{X})$ , Reescrevendo o modelo de otimização é dado por:

$$\min_{\mathbf{x}} C_{Df}(g(\mathbf{X})) \quad (3.164)$$

### 3.5.2 Algoritmo de Otimização

Este trabalho utiliza o algoritmo TRUST-NCG para obter os valores das variáveis  $y$  que minimizam o valor de  $C_{Df}$ , o qual é um algoritmo de região de confiança utilizando método de Newton com Gradiente Conjugado.

Algoritmos de região de confiança são algoritmos empregados em otimização não-linear. Esta família de algoritmos baseia-se em uma região delimitada por um raio, onde uma função modelo aproxima a função objetivo. Esta função modelo normalmente é uma função quadrática e aproxima-se da função objetivo em um ponto  $x_k$  por dois termos da série de Taylor.

$$m_k(p) = f_k + (\nabla f_k)^T p + \frac{1}{2} p^T B_k p, \quad (3.165)$$

onde

$f_k = f(x_k)$ , função objetivo avaliada no ponto  $x_k$  ( $x$  na na iteração  $k$ ),

$p$  passo para avançar na região de confiança, que corresponde a  $x - x_k$ ,

$\nabla f_k = \nabla f(x_k)$ , gradiente da função objetivo em  $x_k$ ,

$B_k$  é uma matriz simétrica.

Quando a matriz  $B_k$  é a matriz Hessiana  $\nabla^2 f(x_k)$ , a aproximação da função modelo  $m_k$  com a função objetivo é dada por três termos da série de Taylor e o método é denominado método de região de confiança de Newton (*trust-region Newton method*).

Dentro do raio da região de confiança, o algoritmo “tenta” avaliar qual vetor  $p$  minimiza a função modelo (NOCEDAL; WRIGHT, 2006). O vetor  $p$  determina uma direção para onde a função modelo minimiza dentro da região de confiança. Para isto, estabelece-se um sub problema, que é a minimização da função modelo  $m_k$  dentro do raio da região de confiança. Este sub problema é expresso por:

$$\min_{p \in R} m_k(p) = f_k + (\nabla f_k)^T p + \frac{1}{2} p^T B_k p \quad \text{sujeito a } \|p\| \leq \Delta_k, \quad (3.166)$$

onde

$f_k$  função a ser otimizada na iteração  $k$ ,

$p$  Passo para avançar na região de confiança, que corresponde a  $x - x_k$ ,

$\Delta_k$  é o raio da região de confiança,

$B_k$  é uma matriz Hessiana  $\nabla^2 f(x_k)$ .

O algoritmo de região de confiança requer uma estratégia para avaliar se o raio da região  $\Delta_k$  é adequada ou não. Deste modo, dado um passo  $p_k$  da iteração  $k$ , define-se a razão  $\rho_k$  dada pela Eq. (3.167) para avaliar a região de confiança (NOCEDAL; WRIGHT, 2006; RIBEIRO; KARAS, 2013):

$$\rho_k = \frac{f(x_k) - f(x_k + p_k)}{m_k(0) - m_k(p_k)}. \quad (3.167)$$

O numerador é denominado redução real (ou verdadeira) e o denominador de redução predita. Se  $\rho_k$  é negativo, o valor da função objetivo do novo passo,  $f(x_k + p_k)$  é maior que  $f(x_k)$  e o passo  $p_k$  deve ser rejeitado; se  $\rho_k$  é próximo de 1, indica que a função modelo  $m_k$  está próxima da função objetivo e pode-se expandir a região para a próxima iteração; se  $\rho_k$  for positivo, mas menor que 1, a região de confiança não deve ser alterada; se  $\rho_k$  for próxima de zero, a região deve ser reduzida, reduzindo  $\Delta_k$  para a próxima iteração.

Se o passo  $p_k$  obtido através da solução da Eq. (3.166) e a avaliação de  $\rho_k$  é maior que uma tolerância  $\eta$  obtém-se o novo valor para  $x_{k+1}$ , somando-se ao passo. Tem-se então  $x_{k+1} = x_k + p_k$  e, novo valor da função  $f$  e de  $m_k$  são obtidos e avalia-se se o passo é adequado pela Eq. (3.167). Este procedimento é efetuado até que o valor de tolerância entre uma iteração e a anterior seja atingido, encerrando a execução do algoritmo. O algoritmo da região de confiança é apresentado pelo Algoritmo 3 (NOCEDAL; WRIGHT, 2006).

A Fig. 3.12 mostra um esquema do algoritmo *trust region*. Os círculos azuis indicam a região de confiança enquanto as linhas pretas indicam a direção que as variáveis avançaram. As pequenas “cruzes” marcam os pontos  $x_k$  de cada iteração

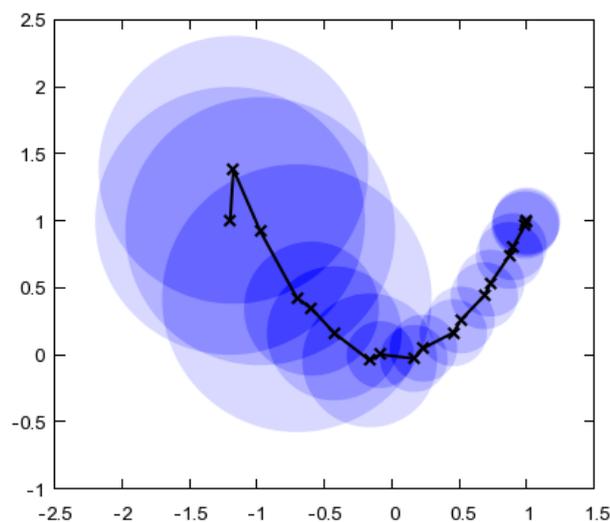
**Algoritmo 3:** Algoritmo do método de região de confiança

```

1  Dados  $\Delta_{max} > 0, \Delta_0 > 0, \eta \in [0, 1/4]$ :
2  para  $k = 0, 1, 2, \dots$  faça
3      obter  $p_k$  resolvendo Eq. (3.166);
4      avaliar  $\rho_k$  empregando Eq. (3.167);
5      se  $(\rho_k < 1/4)$  então
6          |  $\Delta_{k+1} = 1/4||p_k||$ ;
7      fim
8      senão
9          | se  $(\rho_k > 3/4)$  e  $(||p_k|| = \Delta_k)$  então
10             |  $\Delta_{k+1} = \min(2\Delta_k, \Delta_{max})$ ;
11             fim
12             senão
13                 |  $\Delta_{k+1} = \Delta_k$ ;
14             fim
15         fim
16         se  $\rho_k > \eta$  então
17             |  $x_{k+1} = x_k + p_k$ ;
18         fim
19         senão
20             |  $x_{k+1} = x_k$ ;
21         fim
22 fim

```

Figura 3.12 – ESQUEMA DE TRAJETO DE ALGORITMO DE REGIÃO DE CONFIANÇA



Fonte – Adaptado de (MCCORMICK, 2014)

O método de Newton Gradiente Conjugado consiste em empregar a Hessiana  $\nabla^2 f(x_k)$  como matriz  $B_k$  no método de região de confiança, resolvendo o sistema

$$B_k p_k = -\nabla f_k \quad (3.168)$$

pelo Método do Gradiente Conjugado. Os critérios de parada são:

- se o sistema dado pela Eq. (3.168) for resolvido com a acurácia desejada;
- se a solução aproximada obtida excedeu o raio da região de confiança;

O algoritmo de Gradiente Conjugado (CG-Steihaug) é apresentado no Algoritmo 4 (NOCEDAL; WRIGHT, 2006).

---

**Algoritmo 4:** Algoritmo do método Gradiente Conjugado

---

```

1  Dados  $\epsilon > 0$ ;
2  fazer  $p_0 = 0$ ;  $r_0 = \nabla f(x_0)$ ;  $d_0 = -r_0$ ;
3  para  $j = 0, 1, 2, \dots$  faça
4      se  $d_j^T B d_j \leq 0$  então
5          encontrar  $\tau$  que  $p = p_j + \tau d_j$  minimiza  $m(p)$  (Eq. (3.166))
6          e  $\|p\| = \Delta$ 
7          devolve  $p$ 
8      fim
9      fazer  $\alpha_j = r_j^T r_j / d_j^T B d_j$ ;
10     fazer  $p_{j+1} = p_j + \alpha d_j$ ;
11     se  $\|p_{j+1}\| \geq \Delta$  então
12         encontrar  $\tau \geq 0$  tal que  $p = p_j + \tau d_j$  que satisfaz  $\|p\| = \Delta$ ;
13         devolve  $p$ 
14     fim
15     fazer  $r_{j+1} = r_j + \alpha_j B d_j$ ;
16     se  $\|r_{j+1}\| \leq \epsilon \|r_0\|$  então
17         devolve  $p = p_{j+1}$ ;
18     fim
19     fazer  $\beta_{j+1} = \frac{r_{j+1}^T r_{j+1}}{r_j^T r_j}$ 
20     fazer  $d_{j+1} = r_{j+1} + \beta_{j+1} d_j$ 
21 fim
```

---

Segundo explicam Nocedal e Wright (2006), em casos em que é difícil obter a Hessiana, esta pode ser obtida por diferenças finitas através de

$$\nabla^2 f(x_k) p \approx \frac{\nabla f(x_k + hp) - \nabla f(x_k)}{h}. \quad (3.169)$$

Ao aproximar a Hessiana por este método implica que há necessidade de avaliar o valor do gradiente uma vez mais em cada iteração.

Nocedal e Wright (2006) explicam que o método de região de confiança Newton Gradiente Conjugado é interessante dos pontos de vista computacional e teórico. O método é globalmente convergente e não requer fatorização de matrizes, permitindo que a esparsidade da matriz Hessiana seja aproveitada e, se a matriz for positiva definida, a convergência é rapidamente alcançada.

Este trabalho emprega o algoritmo de região de confiança Newton Gradiente Conjugado (TRUST-NCG) implementado na biblioteca Python, denominada Scipy. A vantagem deste método é que a função objetivo não necessita ser avaliada a todo

momento. Esta vantagem possibilitou a otimização com maior número de variáveis de otimização, neste caso, oito variáveis. Este algoritmo necessita receber como parâmetros para execução: o valor inicial do vetor  $x$ , valor inicial do raio da região de confiança  $\Delta_0$ , o valor máximo do raio da região de confiança  $\Delta_{max}$ , o valor de  $\eta$  e a tolerância do gradiente, para indicar o encerramento da execução. A seção 5.1.2 no capítulo 5 contém a parametrização do algoritmo de otimização utilizada neste trabalho.

## 3.6 PROCEDIMENTO GERAL DE OTIMIZAÇÃO

O procedimento geral de otimização definido neste trabalho é para obter perfis geométricos que minimizem o valor do coeficiente de arrasto  $C_{Df}$ .

Em linhas gerais, o procedimento de otimização inicia-se com o algoritmo de otimização fornecendo valores iniciais de coordenadas  $y$  de acordo com as abscissas  $x$  predefinidas (ver Tab. 14). O programa Mach2D recebe estas novas coordenadas  $y$  e define-se uma geometria com o polinômio interpolador cúbico, conforme explicado na seção 3.1, resolvendo o escoamento e calculando  $C_{Df}$  para a geometria especificada. Este cálculo é efetuado para cada uma das 3 (três) malhas. Após calcular  $C_{Df}$  para cada uma das 3 (três) malhas, obtém-se o valor de  $C_{Df}$  utilizando MER (Multiextrapolação de Richardson). Este valor de  $C_{Df}$  obtido é armazenado e avaliado. Se o algoritmo de otimização entender que a tolerância ainda não foi atingida, o algoritmo propõem novos valores de  $y$  e repete-se o processo. Se o algoritmo entender que a tolerância foi atingida, encerra-se o procedimento de otimização, e os valores de  $y$  do perfil otimizado e o valor de  $C_{Df}$  minimizado, são escritos em arquivo de resultados. O fluxograma mostrado na Fig. 3.13 descreve esquematicamente este procedimento.

Neste trabalho são avaliados valores de  $C_{Df}$  para 4 conjuntos de variáveis de otimização, contendo 1 (uma), 2 (duas), 4 (quatro) e 8 (oito) variáveis de otimização. Como explicado anteriormente, estas variáveis são as coordenadas  $y$  que serão obtidas através do polinômio Eq. (3.1) para valores de  $x$  predefinidos através de Eq. (3.13) e (Eq. (3.14). A Tab. 14 apresenta os valores das abscissas  $x$  predefinidas através de Eq. (3.13) e Eq. (3.14) utilizadas neste trabalho.

No início do procedimento (ver fluxograma na Fig. 3.13), apresentam-se dois passos de preparação de dados. O primeiro refere-se a preparar valores iniciais de  $y$ . Este procedimento é necessário para definir os valores iniciais de  $y$  exigidos pelo algoritmo de otimização. Com exceção do procedimento para apenas uma variável, os valores de  $y$  iniciais são definidos a partir dos valores de  $y$  obtidos com o procedimento de otimização com o número menor de variáveis. Assim, para o procedimento com duas variáveis, o valor de  $y$  otimizado para uma variável é aplicado manualmente ao polinômio interpolador, que produzirá um perfil inicial, fornecendo dois valores, que são os valores iniciais de  $y$ . Ao finalizar o procedimento de otimização para duas variáveis, os dois valores de  $y$  obtidos

Tabela 14 – VALORES DE ABCISSAS  $x$  EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE VARIÁVEIS

Número de variáveis	Valor de $x$
1	0,00000
2	0,00000 0,01250
4	0,00000 0,03704 0,29630 0,99000
8	0,00000 0,00292 0,02332 0,05273 0,18659 0,36443 0,62974 0,99000

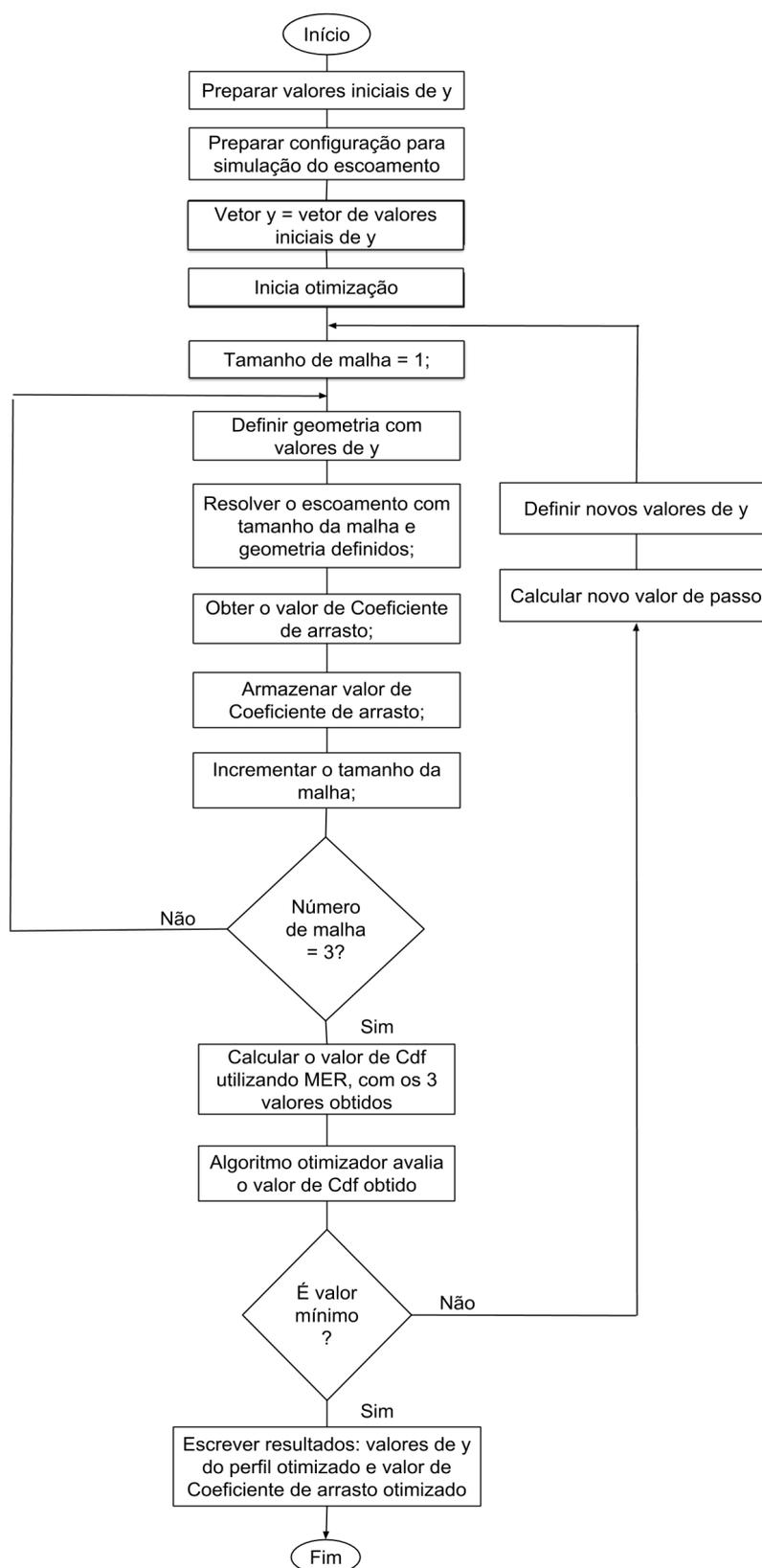
Fonte – O autor(2018)

são aplicados ao polinômio, obtendo-se um perfil geométrico, que se extrai o conjunto com quatro variáveis, que serão os valores iniciais para o procedimento de otimização para quatro variáveis. E o mesmo procedimento é aplicado para oito variáveis. O algoritmo TRUST-NCG exige apenas que seja definido um vetor de variáveis inicial, entretanto a aplicação deste procedimento visa redução das iterações para obter o valor otimizado de  $C_{Df}$  e o perfil geométrico com maior número de variáveis.

O segundo passo de preparação envolve a configuração para a solução do escoamento. Este trabalho consiste em obter os valores otimizados para  $C_{Df}$  para  $M \in \{1,5, 3,0, 6,0\}$  com as razões de aspecto  $f_r \in \{2,3,4\}$ . Os valores de pressão de corrente livre para a temperatura de 200 K para a configuração do programa Mach2d, que resolve o escoamento, estão na Tab. 15, especificados por razão de aspecto  $f_r$  e número de Mach  $M$ .

Os valores otimizados de  $C_{Df}$  bem como os valores de  $y$  das formas otimizadas estão disponíveis no capítulo de Resultados.

Figura 3.13 – FLUXOGRAMA DO PROCESSO GERAL DE OTIMIZAÇÃO



Fonte – O autor(2018)

Tabela 15 – VALORES DE  $M_\infty$  E PRESSÃO PARA TEMPERATURA 200 K EMPREGADOS NESTE TRABALHO, AGRUPADOS POR RAZÃO DE ASPECTO

Razão de aspecto $f_r$	$M_\infty$	Pressão $p_\infty$ (Pa)
2	1,5	8971,10
	3,0	4485,55
	6,0	2242,78
3	1,5	5980,74
	3,0	2990,37
	6,0	1495,18
4	1,5	4485,55
	3,0	2242,78
	6,0	1121,39

Fonte – O autor(2018)

## 4 VERIFICAÇÃO

Modelar escoamentos de fluidos através de programa de computador é inerente à CFD. Entretanto o uso do computador não significa acurácia nas soluções obtidas. Para o pesquisador, engenheiro ou usuário de um programa de CFD, existe a necessidade de avaliação das soluções obtidas para identificar realmente o quanto estas soluções aproximam-se do modelo que o programa propõe-se a resolver. Para isto, o procedimento de verificação é necessário, obtendo a estimativa do erro destas soluções. Neste capítulo são mostrados os procedimentos de verificação para o programa Mach2D.

Ao desenvolver o programa para resolver um escoamento, utilizam-se conceitos físicos e equações para descrevê-lo matematicamente. A verificação avalia se as equações utilizadas para descrever o escoamento são corretamente calculadas pelo programa. Oberkampf e Trucano (2002) apresentam a definição da AIAA<sup>1</sup> para verificação como “processo de determinar que a implementação de um modelo acuradamente representa a descrição conceitual do modelo e a solução deste”. Este conceito é resumido pela compreensão de que a verificação avalia se as equações do modelo estão sendo resolvidas corretamente (ROACHE, 1997).

A rigor, poder-se-ia explicar que o erro de uma solução numérica é dado pela diferença entre a solução numérica e a solução analítica exata (MARCHI; SILVA, 2002; ROACHE, 1994):

$$E = \phi - \Phi \quad (4.1)$$

Entretanto, a solução analítica exata não está disponível ou não existe para a maioria dos problemas reais, mas apenas para problemas simples. Deste modo, é possível apenas estimar que uma solução numérica seja a “solução analítica estimada” e, assim, obtém-se uma estimativa do erro numérico, resultado da subtração da solução estimada da solução numérica calculada (MARCHI; SILVA, 2002):

$$U = \phi - \phi_{\infty} \quad (4.2)$$

onde  $\phi_{\infty}$  é a solução estimada. Cabe à verificação quantificar a estimativa de erro utilizando-se de estimadores de solução e, assim, estimar o erro numérico.

A verificação é composta de duas partes: verificação de código e verificação de solução. A verificação de código trata de avaliar se o programa (ou código) está sem erros de programação (OBERKAMPF; TRUCANO, 2002) e se o algoritmo para obter a solução está adequado. A verificação de solução preocupa-se em estimar o erro numérico (ROACHE, 2009).

<sup>1</sup> American Institute of Aeronautics and Astronautics

## 4.1 VERIFICAÇÃO DE CÓDIGO

A verificação de código utiliza a estratégia denominada Método das Soluções Fabricadas <sup>2</sup>. Com este método, uma solução analítica é fabricada a partir da equação original do problema a ser resolvido. Esta solução é obtida usualmente definindo um termo fonte para a equação diferencial, que passa a ter uma solução analítica. Esta equação não precisa resolver um problema físico real, pois na verificação de código deve-se avaliar se o código está calculando corretamente o que foi proposto (ROACHE, 1997). E também, durante a verificação de código, avalia-se o erro de discretização, que é a diferença entre a solução exata e a solução numérica obtida. Matematicamente, o erro numérico é descrito por

$$E = \phi_i - \Phi \quad , \quad (4.3)$$

onde

$E$  é o erro de discretização;

$\phi_i$  é a solução numérica;

$\Phi$  é a solução exata ou analítica. Esta solução é a solução fabricada.

Para avaliar a ordem de acurácia da solução numérica, avalia-se a ordem observada do erro de discretização. Em geral, é possível determinar a ordem do erro de discretização a partir da ordem do erro de truncamento. O erro de truncamento existe porque o esquema numérico utilizado necessita desprezar termos da série de Taylor, utilizada para discretizar os termos da equação diferencial parcial do modelo. Então supondo que um termo seja descrito pela série de Taylor por (ROACHE, 2009; ROY, 2005)

$$\Lambda = C_1 h_i^1 + C_2 h_i^2 + C_3 h_i^3 + \dots + C_\infty h_i^\infty \quad (4.4)$$

onde

$\Lambda$  é o termo discretizado da equação diferencial;

$h_i$  é o tamanho do elemento de malha  $i$ ;

$C_1, C_2, C_3, \dots, C_\infty$  são coeficientes que não dependem de  $h$ .

Deste modo, uma solução numérica contém erros de truncamento, porque é impossível que um esquema numérico contenha os infinitos termos necessários para descrever cada termo da equação diferencial. Assim, o erro de truncamento é devido aos termos desprezados na solução. Então por exemplo, na Eq. (4.4), se determinado esquema utiliza até o termo de expoente 1 (um) e despreza os termos a partir do expoente 2 (dois), a ordem do esquema é ordem 1 (um) ou esquema de primeira ordem; se outro esquema utiliza-se

<sup>2</sup> do inglês, *Method of Manufactured Solutions*

de termos até os termos com expoente 2 (dois) e despreza os termos com expoente 3 (três) em diante, a ordem do esquema numérico é 2 (dois) ou esquema de segunda ordem. Então, escrevendo o erro de discretização para uma determinada malha como função do tamanho de malha  $h$ , expandido em séries e reescrevendo Eq. (4.3), tem-se (ROACHE, 1997; ROY, 2005):

$$E_i = C_p h_i^p + \text{termos de ordem mais alta ou H.O.T}^3 \quad (4.5)$$

onde:

$i$  é o índice da malha em que o erro é calculado;

$E_i$  é o Erro de Discretização para a malha  $i$ ;

$p$  é a ordem assintótica do erro de discretização;

$h_i$  é o tamanho do elemento de malha  $i$ ;

$C_p$  é o coeficiente que não depende de  $h$ ;

“termos de ordem mais alta”, são os termos desprezados da série de Taylor.

Escrevendo o erro de discretização para duas malhas, sendo a malha  $i = 1$  a malha com tamanho de elementos menores ou malha mais fina, e a malha  $i = 2$  como sendo a malha mais grossa, tem-se, a partir de Eq. (4.3):

$$\begin{aligned} E_1 &= \phi_1 - \Phi = C_p h_1^p \\ E_2 &= \phi_2 - \Phi = C_p h_2^p \end{aligned} \quad (4.6)$$

A partir da razão entre as duas expressões da Eq. (4.6) e definindo a razão de refino entre as malhas com  $r$ , a ordem  $p$  é definida por:

$$p = \frac{\ln\left(\frac{E_2}{E_1}\right)}{\ln(r)} \quad (4.7)$$

O código do Mach2D empregado neste trabalho contém uma parte que é responsável pelo cálculo do escoamento. Esta parte do código emprega o mesmo procedimento descrito no capítulo 3 para efetuar a simulação do escoamento e calcular o modelo numérico. Como este cálculo é efetuado em coordenadas generalizadas, transformadas a partir das coordenadas reais, esta parte do código é única, independente da geometria empregada. Logo, os procedimentos descritos em Bertoldo e Marchi (2017) já verificaram este código, porém para a geometria do cone. Como neste trabalho emprega-se o mesmo código para resolver o escoamento e obter o coeficiente de arrasto  $C_{Dr}$ , e, baseado na explicação de Roy (2005) de que a verificação de código necessita ser

<sup>3</sup> do inglês *High Order Terms*

efetuada apenas uma vez, entende-se que o código de simulação do escoamento já foi verificado. Entretanto, como a geometria é diferente daquela que foi estudada em Bertoldo e Marchi (2017), há necessidade de efetuar a verificação da solução para avaliar a solução obtida na geometria deste corrente trabalho.

## 4.2 VERIFICAÇÃO DE SOLUÇÃO

Conforme explica Roy (2005), são três as principais fontes de erro numérico: erro de arredondamento, erro de iteração e erro de discretização. A verificação de solução visa estimar estes erros.

Os erros de arredondamento ocorrem por conta da representação dos números reais pelos computadores digitais. Os números reais são infinitos, mas os recursos para representá-los não são. Computadores são preparados para representar números reais, convertendo-os para o sistema binário, utilizando um conjunto limitado de bits<sup>4</sup>. Esta limitação implica que os números não são totalmente representados e a diferença entre um número real e a sua representação digital constitui-se no erro de arredondamento. Usualmente, em cálculos numéricos, utilizam-se variáveis com tipos de dados de precisão dupla, que utilizam 64 bits para representar um número real, baseados na norma IEEE754, com no máximo, 16 dígitos de precisão (SMITH, 2003). Utilizando números reais descritos com maior número de bits, reduziria o erro de arredondamento. Alguns compiladores permitem compilar código, tratando os números reais com precisão quádrupla, ou seja, 128 bits para um número real. Isto implica em maior espaço de armazenamento, bem como, exigência de maior poder de processamento. Ou seja, utilizar números reais codificados com precisão quádrupla apresentam custo computacional maior do que números reais codificados em precisão dupla. Neste trabalho, os números reais são representados por variáveis de precisão dupla.

Os erros de iteração (ou erros de convergência de iteração) (ROY, 2005) são erros que ocorrem por conta do método iterativo aplicado para resolver as equações lineares, que comumente surgem durante a fase de discretização do problema. Este tipo de erro constitui-se na diferença entre o resultado obtido na iteração atual e a solução exata do sistema discretizado.

O erro de discretização existe devido a aplicação da discretização no sistema de equações diferenciais (ROY, 2005). Logo, ele é a diferença entre o valor ou resultado da solução da equação diferencial e o valor obtido pela equação discretizada. Como não é possível obter a solução analítica da maioria dos problemas, mas apenas a solução numérica, existe a necessidade de estimar o valor deste erro. Para que o erro numérico seja considerado apenas o erro de discretização, o erro de arredondamento e o erro de iteração devem ser desprezíveis.

<sup>4</sup> bit é abreviação de *binary digit*, que é a menor informação alocada em computadores digitais

Para obter a estimativa do erro de discretização, utiliza-se procedimento *a posteriori*, baseado em extrapolação. Como explica Roy (2005), existem dois tipos de métodos de extrapolação. Em um método, a solução com maior ordem é obtida a partir de soluções em uma mesma malha, porém cada solução obtida com esquema de ordem diferente. O outro método consiste em obter duas ou mais soluções em malhas com diferentes níveis de refinamento. A solução estimada com ordem mais alta é obtida a partir das várias soluções de menor ordem calculadas nas malhas diferentes. Este trabalho estima o erro e a solução extrapolada utilizando o método de extrapolação com soluções obtidas em duas ou mais malhas diferentes, e com esquemas de mesma ordem.

Um dos possíveis estimadores de erro numérico é o estimador de erro baseado na Extrapolação de Richardson (RICHARDSON; GAUNT, 1927). Esta extrapolação já foi explicada na seção de Revisão Bibliográfica e a expressão para a solução extrapolada, calculada a partir de duas soluções numéricas obtidas em malhas diferentes, é dada por:

$$\phi_{\infty} = \phi_1 + \frac{\phi_1 - \phi_2}{q^p - 1} \quad (4.8)$$

onde  $\phi_{\infty}$  é a solução numérica estimada ou extrapolada,  $\phi_1$  solução obtida com malha mais fina,  $\phi_2$  solução obtida com malha mais grossa,  $q$  razão de refino entre as duas malhas e  $p$  é a ordem de acurácia.

A ordem aparente<sup>5</sup> da solução numérica extrapolada, obtida a partir de 3 (três) soluções numéricas calculadas em malhas diferentes, é dada por (ROY, 2005; MARCHI, 2001; ROACHE, 1998):

$$p_U = \frac{\ln\left(\frac{\phi_3 - \phi_2}{\phi_2 - \phi_1}\right)}{\ln(r)} \quad (4.9)$$

onde  $\phi_1$  solução obtida com malha mais fina,  $\phi_2$  solução obtida com malha intermediária,  $\phi_3$  solução obtida com malha mais grossa e  $r$  é a razão de refino tal que  $r = h_2/h_1 = h_3/h_2$ , onde  $h_1, h_2$  e  $h_3$  são os tamanhos dos elementos de malha das três malhas.

Considerando que a solução obtida com Eq. (4.8) é a solução numérica extrapolada, a estimativa do erro, baseado na Extrapolação de Richardson, é dada por:

$$U_{\text{Ri}}(\phi_1) = \frac{\phi_1 - \phi_2}{q^{p_U} - 1} \quad (4.10)$$

Outros estimadores baseados na Extrapolação de Richardson são definidos. O estimador GCI (*Grid Convergence Index*) proposto por Roache (1994) é definido como:

$$U_{\text{GCI}} = F_s \left| \frac{\phi_1 - \phi_2}{r^{p_U} - 1} \right| \quad (4.11)$$

onde  $F_s$  é um fator de segurança,  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são as soluções em malha mais fina e intermediária, respectivamente,  $p_U$  ordem aparente. O fator de segurança  $F_s$  tem valor igual a 1,25 quando são utilizadas três malhas diferentes e quando a ordem aparente

<sup>5</sup> alguns autores utilizam o termo "ordem observada" do inglês *observed order*

tende monotonicamente para a ordem  $p_L$ . Se apenas duas malhas são utilizadas, a recomendação de Roache (2009) é que  $F_s$  seja igual a 3 (três).

Para Marchi e Silva (2002), a solução exata de modelo  $\Phi$  está entre as soluções extrapoladas obtidas com a ordem assintótica  $p_L$  e a solução obtida com a ordem aparente  $p_U$ , desde que a ordem aparente esteja no intervalo convergente, ou seja,  $p_U \rightarrow p_L$  quando  $h \rightarrow 0$ . Assim, a solução denominada convergente esta na metade do intervalo entre as soluções  $\phi_\infty(p_L)$  e  $\phi_\infty(p_U)$ , dada por:

$$\phi_C = \frac{\phi_\infty(p_L) + \phi_\infty(p_U)}{2}. \quad (4.12)$$

A incerteza da solução convergente  $\phi_C$  forma então uma “banda” de erro, expressa por:

$$U_C = \frac{|\phi_\infty(p_L) - \phi_\infty(p_U)|}{2}. \quad (4.13)$$

Então, esta “banda” contém a solução exata e, a solução numérica é expressa por (MARCHI; SILVA, 2002):

$$\phi = \phi_C \pm U_C \quad (4.14)$$

O estimador Multicoeficiente apresentado por Marchi (2001) baseia-se em várias soluções numéricas diferentes, obtidas reduzindo-se o tamanho da malha  $h$ . Tendo que a incerteza obtida por este estimador é dada por (MARCHI, 2001):

$$U_{MC} = \phi_\infty - \phi_i \quad (4.15)$$

onde  $U_{MC}$  é incerteza obtida pelo estimador multicoeficiente,  $\phi_\infty$  estimativa da solução exata,  $\phi_i$  solução para determinada malha com tamanho  $h_i$ . Como explica Marchi (2001), a estimativa para a solução exata é dada pela solução do sistema de  $m$  equações. Entretanto a incerteza  $U_{MC}$  é definida por uma série de Taylor com  $m - 1$  termos, onde as incógnitas são os coeficientes  $C_i$  dos termos desta série (MARCHI, 2001):

$$\begin{aligned} \phi_\infty - \phi_1 &= C_0 h_1^{p_0} + C_1 h_1^{p_1} + \dots + C_{m-1} h_1^{p_{m-1}} \\ \phi_\infty - \phi_2 &= C_0 h_2^{p_0} + C_1 h_2^{p_1} + \dots + C_{m-1} h_2^{p_{m-1}} \\ &\vdots \\ \phi_\infty - \phi_m &= C_0 h_m^{p_0} + C_1 h_m^{p_1} + \dots + C_{m-1} h_m^{p_{m-1}}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Resolvendo-se o sistema 4.16, tem-se a incerteza numérica dada pela Eq. (4.15) (MARCHI, 2001). Mas Martins (2013) propôs uma alternativa para a proposição de Marchi (2001): o termo  $\phi_\infty = \phi_M$ . Com esta consideração, a expressão da Eq. (4.16) fica alterada para

$$\begin{aligned} \phi_{2,1} - \phi_2 &= C_0 h_2^{p_0} \\ \phi_{3,2} - \phi_3 &= C_0 h_3^{p_0} + C_1 h_3^{p_1} \\ \phi_{4,3} - \phi_4 &= C_0 h_4^{p_0} + C_1 h_4^{p_1} + C_2 h_4^{p_2} \\ &\vdots \\ \phi_{g,m} - \phi_m &= C_1 h_m^{p_1} + C_2 h_m^{p_2} + \dots + C_{m-2} h_m^{p_{m-2}}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Com isto, a estimativa multicoeficiente é dada por

$$U_{MC}(\phi_g) = \phi_{g,m} - \phi_g \quad (4.18)$$

onde  $m = g - 1$  e as soluções são obtidas em  $G$  malhas, tal que  $g = 2 \dots G$ .

O estimador proposto por Martins (2013) é um estimador baseado em MER e aplicado a soluções que utilizam MER ou em soluções multiextrapoladas. Este estimador baseia-se em outro proposto por Marchi et al. (2008) e é dado por:

$$U_{\psi^*}(\phi_{g,m}) = \frac{\phi_{g,m} - \phi_{g-1,m-1}}{\psi^* - 1} \quad (4.19)$$

onde  $\phi_{g,m}$  solução obtida por multiextrapolação, com nível de extrapolação  $m$  obtido com  $g$  malhas,  $\phi_{g-1,m-1}$  solução obtida por multiextrapolação, com nível de extrapolação  $m - 1$  obtido com  $g - 1$  malhas e  $\psi^*$  taxa de convergência média dada pela expressão Eq. (4.20), A taxa de convergência média é obtida por

$$\psi^* = \begin{cases} \frac{\phi_{g,m} - \phi_{g-1,m-1}}{\phi_{g+1,m+1} - \phi_{g,m}} & , g = 2, 3, \dots G - 1 \\ \frac{\phi_{g-1,m-1} - \phi_{g-2,m-2}}{(\phi_{g,m} - \phi_{g-1,m-1})(\phi_{g-2,m-2} - \phi_{g-3,m-3})} & , g = G \end{cases} \quad (4.20)$$

onde  $\phi_{g,m}$  solução multiextrapolada com  $g$  malhas e com nível  $m$ ,  $\phi_{g-1,m-1}$  solução multiextrapolada com  $g - 1$  malhas e com nível  $m - 1$ ,  $\phi_{g-2,m-2}$  solução multiextrapolada com  $g - 2$  malhas e com nível  $m - 2$ ,  $\phi_{g-3,m-3}$  solução multiextrapolada com  $g - 3$  malhas e com nível  $m - 3$  e  $G$  é número total de malhas.

Martins (2013) ainda define a expressão da ordem aparente  $p_U$  para solução obtida com MER, dada por (MARTINS, 2013)

$$(p_{UM})_g = \frac{\log|\psi_M|}{\log(r)}, \text{ onde } \psi_M = \frac{\phi_{g-1,m-1} - \phi_{g-2,m-2}}{\phi_{g,m} - \phi_{g-1,m-1}} \quad (4.21)$$

Em termos teóricos, a ordem aumenta a cada nível de acordo com a progressão aritmética das ordens verdadeiras. Neste trabalho, como se trata de esquema UDS (esquema de primeira ordem), a ordem assintótica é 1 e as outras ordens verdadeiras são 2, 3, 4 ... A cada nível de extrapolação do processo de MER, a ordem teórica aumenta em uma ordem verdadeira. Assim, no caso do Mach2D, a cada nível de extrapolação  $m$ , aumenta-se a ordem em uma unidade. Por exemplo, com nível de extrapolação  $m=1$ , tem-se ordem 2; nível de extrapolação  $m=2$ , tem-se ordem 3 e assim sucessivamente.

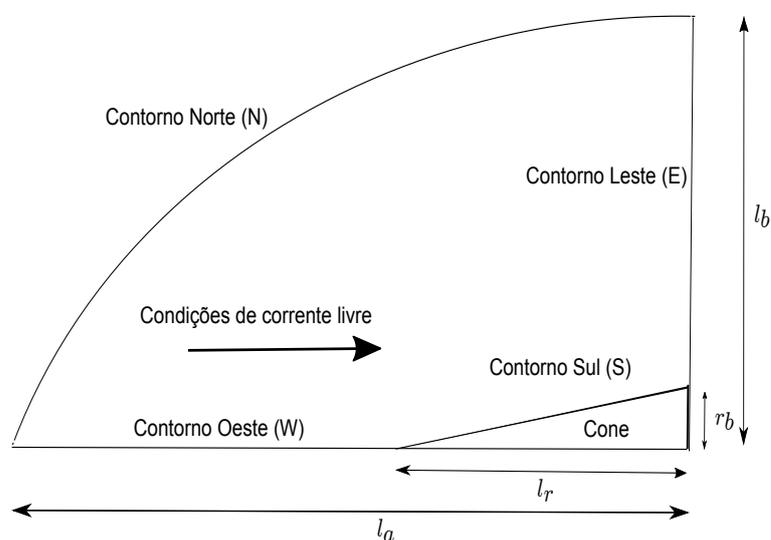
Os vários estimadores de incerteza numérica permitem avaliar que a solução numérica tem algum grau de confiança para ser utilizada. Deve-se atentar ao fato de que os estimadores baseiam-se em que o erro numérico é majoritariamente composto pelo erro de discretização. Deste modo, deve-se efetuar simulações que tendam para pequenos erros de arredondamento e pequenos erros de iteração, para que os estimadores sejam confiáveis.

### 4.2.1 Metodologia

Para fazer a estimativa do erro de discretização neste trabalho, tem-se a necessidade de que os erros de arredondamento e de iteração sejam desprezíveis. Para reduzir os erros de iteração e arredondamento, a solução do ciclo de massa foi efetuada de modo que a menor diferença do resíduo da correção de pressão seja igual a  $1 \cdot 10^{-14}$ . Quando este valor é atingido, o programa continua a execução até o dobro do número de iterações, como explicado na Seq. 3.3.7. Esta prática é adotada para minimizar a influência do erro de iteração e arredondamento no erro numérico. Assim, o erro numérico pode ser considerado apenas o erro de discretização, visto que o erro de arredondamento e o erro de iteração são considerados desprezíveis.

Neste trabalho, o programa Mach2D é responsável por resolver o escoamento. Como já explicado anteriormente, a verificação de código foi efetuada e descrita em Bertoldo e Marchi (2017). A verificação de solução foi executada utilizando uma geometria de cone, com simulação utilizando o modelo de Euler (invíscido) para um único número de Mach, com um total de 6 malhas. A figura 4.1 mostra um esquema da geometria e domínios de cálculo utilizada para verificação. A ordem de acurácia do Mach2D é primeira ordem pois é empregado esquema UDS.

Figura 4.1 – GEOMETRIA E DOMÍNIO UTILIZADOS PARA VERIFICAÇÃO



Os parâmetros físicos para as simulações são mostrados na Tab. 16 enquanto a Tab. 17 apresenta os parâmetros da geometria e numéricos para configuração do programa Mach2D. As simulações foram efetuadas em 6 (seis) malhas,  $60 \times 60$ ,  $120 \times 120$ ,  $240 \times 240$ ,  $480 \times 480$ ,  $960 \times 960$  e  $1920 \times 1920$  volumes, sendo a malha de  $60 \times 60$  volumes denominada  $m_1$ , a malha  $120 \times 120$  volumes denominada  $m_2$  e assim sucessivamente até a malha  $1920 \times 1920$ , denominada  $m_6$ . O computador empregado nas simulações tem processador Intel I5 modelo M430, *clock* de 2,27GHz com 4G de memória RAM.

Tabela 16 – PARÂMETROS FÍSICOS PARA VERIFICAÇÃO

Parâmetro	Símbolo	Valor
Número de Mach de corrente livre	$M_\infty$	6,0
Temperatura de corrente livre	$T_\infty$	200 K
Pressão de corrente livre	$p_\infty$	1495,18 Pa

Fonte – O autor(2018)

Tabela 17 – PARÂMETROS GEOMÉTRICOS E NUMÉRICOS

Parâmetro	Símbolo	Valor
Semieixo da elipse na direção $x$	$l_a$	4,0 m
Semieixo da elipse na direção $y$	$l_b$	2,0 m
Comprimento do cone	$l_r$	3,0 m
Raio da base	$r_b$	0,5 m
Expoente para distribuição de volumes para fronteira Norte	akn	2,0
Expoente para distribuição de volumes para fronteira Sul	aks	2,0
Razão de aspecto	$f_r$	3,0

Fonte – O autor(2018)

## 4.2.2 Resultados e discussões

Executadas as várias simulações, obteve-se o valor do coeficiente de arrasto frontal  $C_{Df}$  com as 6 (seis) malhas definidas. A Tab. 18 contém os valores  $C_{Df}$  para cada uma das malhas.

Tabela 18 – VALORES DE  $C_{Df}$  OBTIDOS COM AS SIMULAÇÕES

Nome da malha	volumes	$C_{Df}$
$m_1$	60×60	5,9397908696692200E-02
$m_2$	120×120	6,1989609720448700E-02
$m_3$	240×240	6,3437822768072000E-02
$m_4$	480×480	6,4226975658371400E-02
$m_5$	960×960	6,4642817761754900E-02
$m_6$	1920×1920	6,4856409666916400E-02

Fonte – O autor(2018)

A Tab. 19 mostra a ordem aparente  $p_U$  obtida pela expressão Eq. (4.9). Verifica-se que o valor da ordem aparente  $p_U$  converge para o valor da ordem assintótica  $p_L$  com o aumento do número de volumes ou seja, diminuição do tamanho  $h$  das malhas. A Tab. 20 apresenta as ordens aparentes obtidas em cada nível  $m$  de extrapolação. Todas as ordens são acima da unidade, como é esperado.

Para obter as estimativas de erro foi utilizado o programa Richardson 4.1, desenvolvido pelo Grupo de Pesquisa em Dinâmica dos Fluidos Computacional da

Universidade Federal do Paraná. Este programa tem como função aplicar os estimadores de erro de Richardson dado pela Eq. (4.10), GCI dado pela Eq. (4.11), Convergente dado pela Eq. (4.13)), Multicoeficiente dado pela Eq. (4.15) e o estimador baseado em MER dado pela Eq. (4.19). Os valores das estimativas são mostrados na Tab. 21. Observar que o estimador GCI utiliza um fator de segurança  $F_s$ . Conforme explica Roache (2009), quando são utilizadas apenas duas malhas,  $F_s = 3$  e para mais do que três malhas,  $F_s = 1,25$ . As posições da tabela contendo “-” referem-se a valores que não podem ser obtidos, pois os estimadores necessitam de mais soluções para estimar o erro.

Tabela 19 – VALORES DE ORDEM APARENTE  $p_U$  OBTIDOS COM A Eq. (4.9)

malhas	Ordem aparente $p_U$
$m_1, m_2, m_3$	0,840
$m_2, m_3, m_4$	0,876
$m_3, m_4, m_5$	0,924
$m_4, m_5, m_6$	0,961

Fonte – O autor(2018)

Tabela 20 – VALORES DE ORDEM APARENTE  $p_U$  PARA SOLUÇÕES OBTIDAS COM EMPREGO DE MER

malhas	Ordem aparente $p_U$
$\phi_M$ com $g = 3, m=2$	7,31
$\phi_M$ com $g = 4, m=3$	2,31
$\phi_M$ com $g = 5, m=4$	3,95
$\phi_M$ com $g = 6, m=5$	2,08

Fonte – O autor(2018)

Tabela 21 – VALORES DAS ESTIMATIVAS DE ERRO OBTIDAS COM OS ESTIMADORES DE RICHARDSON, GCI, CONVERGENTE, MULTICOEFICIENTE E BASEADO EM MER

malhas	$U_{Ri}(p_U)$	$U_{GCI}(p_U)$	$U_C(p_U)$	$U_{MC}$	$U_m$
$m_1, m_2$	-	7,775103E-03	-	2,591701E-03	4,088724E-04
$m_1, m_2, m_3$	1,834143E-03	2,292679E-03	1,929652E-04	1,549788E-03	1,029707E-04
$m_2, m_3, m_4$	9,449248E-04	1,181156E-03	7,788595E-05	8,427860E-04	5,681225E-06
$m_3, m_4, m_5$	4,632190E-04	5,790238E-04	2,368846E-05	4,322576E-04	-1,013548E-06
$m_4, m_5, m_6$	2,255696E-04	2,819620E-04	5,988861E-06	2,174133E-04	-7,621250E-06

Fonte – O autor(2018)

Para comparação de valores, utilizou-se o programa implementado por Bertoldo e Marchi (2017) para calcular o valor do coeficiente de arrasto frontal do cone. O programa foi criado a partir das expressões de Taylor e Maccoll (1933) com método similar ao de

(SIMS, 1964) *apud* (BERTOLDO; MARCHI, 2017). O valor obtido por este programa é apresentado e comparado com os valores das soluções numéricas. Como ele foi compilado com precisão quádrupla (BERTOLDO; MARCHI, 2017), para uso neste trabalho, todos os dígitos são válidos. A Tab. 22 apresenta a comparação entre o valor de  $C_{Df}$  obtido pelo programa com as soluções de Taylor e Maccoll (1933) (BERTOLDO; MARCHI, 2017) com os valores de  $C_{Df}$  obtidos pelo Mach2D (identificados para cada malha,  $m_1$  até  $m_6$ ). A mesma Tab. 22 apresenta ainda os valores obtidos por extrapolação de Richardson  $\phi_{Ri}$ , os valores obtidos para a solução convergente  $\phi_C$  e também os valores obtidos por multiextrapolação de Richardson  $\phi_M(g, m)$ , onde  $g$  indica o número de malhas e  $m$  o nível da extrapolação. A tabela também mostra o erro absoluto e relativo, em porcentagem, em relação ao valor calculado pela solução de Taylor e Maccoll (1933). Percebe-se por esta tabela que as soluções extrapoladas, utilizando a solução extrapolada de Richardson (Eq. (4.8)), fornece uma solução com erro muito menor que a solução numérica sem extrapolação. Entretanto, soluções obtidas com múltipla extrapolação tem erro menor.

A Tab. 23 mostra um resumo com os valores das soluções e estimativas de erro para a malha mais fina ( $m_6$ ) ou com extrapolações obtidas com malhas mais finas (malhas 4, 5 e 6) e também solução Multiextrapolada com  $g=4$  e  $m=3$ . A tabela também mostra a representação dos valores a partir das definições de cada um dos estimadores. Como é possível perceber, o estimador GCI estima uma “banda” de erro ampliada em relação ao estimador de Richardson e também ao Multicoeficiente. Verifica-se também que a solução e o estimador Convergente é muito próximo da solução obtida (e definida como exata) de Taylor-Maccoll. Mas o valor obtido com Multiextrapolação de Richardson (MER) é o que tem menor erro. A escolha da solução obtida com MER com 4 malhas e 3 níveis de extrapolação é devido ao valor obtido apresentar o menor erro. Como este trabalho de verificação busca obter a estimativa do erro, o ideal é selecionar o estimador que apresenta o menor erro. Uma observação importante sobre a importância do uso de MER e do estimador baseado em MER ( $U_m$ ) é que o estimador convergente apresenta estimativa com ordem de grandeza  $10^{-6}$  apenas com o uso de 6 malhas, enquanto o estimador baseado em MER já apresenta esta ordem com o uso de apenas 4 malhas.

Tabela 22 – COMPARAÇÃO DE VALORES OBTIDOS POR TAYLOR-MACCOLL E VALORES DE  $C_{Df}$  OBTIDOS POR EXTRAPOLAÇÃO COM RICHARDSON, CONVERGENTE E MER

	Valor de $C_{Df}$	Erro	Erro relativo (%)
$C_{Df}$ Taylor-Maccoll	6,50702559451313E-02	-	
$m_1$	5,93979086966922E-002	-5,67234724843910E-003	-8,72
$m_2$	6,19896097204487E-002	-3,08064622468260E-003	-4,73
$m_3$	6,34378227680720E-002	-1,63243317705930E-003	-2,51
$m_4$	6,42269756583714E-002	-8,43280286759895E-004	-1,30
$m_5$	6,46428177617549E-002	-4,27438183376400E-004	-0,66
$m_6$	6,48564096669164E-002	-2,13846278214899E-004	-0,33
$\phi_{Ri}(m_1, m_2, m_3)$	6,52719662615599E-002	2,01710316428599E-004	0,310
$\phi_{Ri}(m_2, m_3, m_4)$	6,51719004536991E-002	1,01644508567797E-004	0,156
$\phi_{Ri}(m_3, m_4, m_5)$	6,51060367766005E-002	3,57808314691982E-005	0,055
$\phi_{Ri}(m_4, m_5, m_6)$	6,50819792947911E-002	1,17233496597924E-005	0,018
$\phi_C(m_1, m_2, m_3)$	6,50790010386276E-002	8,74509349629848E-006	0,013
$\phi_C(m_2, m_3, m_4)$	6,50940145011850E-002	2,37585560537018E-005	0,037
$\phi_C(m_3, m_4, m_5)$	6,50823483208694E-002	1,20923757380986E-005	0,019
$\phi_C(m_4, m_5, m_6)$	6,50759904334345E-002	5,73448830319678E-006	0,009
$\phi_M(g = 2, m = 1)$	6,45813107442052E-002	-4,8895E-04	-0,7514
$\phi_M(g = 3, m = 2)$	6,49876108395253E-002	-8,2645E-05	-0,1270
$\phi_M(g = 4, m = 3)$	6,50697616434918E-002	-4,9430E-07	-0,0008
$\phi_M(g = 5, m = 4)$	6,50750753909329E-002	4,8194E-06	0,0074
$\phi_M(g = 6, m = 5)$	6,50738229522760E-002	3,5670E-06	0,0055

Fonte – O autor(2018)

Tabela 23 – RESUMO DE VALORES DE  $C_{Df}$  E OS ESTIMADORES DE ERRO RICHARDSON, GCI, CONVERGENTE, MULTICOEFICIENTE E SOLUÇÃO MULTIEXTRAPOLADA

Descrição	Valor de $C_{Df}$	Estimativa	Representação
Richardson	0,0648	0,0002	0,0648 + 0,0002
GCI	0,0648	0,0003	0,0648 ± 0,0003
Convergente	0,065076	0,000006	0,065076 ± 0,000006
Multicoeficiente	0,0648	0,0002	0,0648 + 0,0002
Multiextrapolada	0,065069	-0,000005	0,065069 - 0,000005

Fonte – O autor(2018)

### 4.3 RESUMO

A verificação aplicada ao Mach2D utilizado neste trabalho mostrou que o programa pode ser utilizado para o processo de otimização. O estimador baseado em MER definido por Martins (2013) estimou adequadamente a ordem de grandeza do erro a partir de 4 malhas. Comparando a solução extrapolada com 4 malhas e 3 níveis de extrapolação apresentou erro relativo de -0,0008%. Para 5 e 6 malhas com 4 e 5 níveis de extrapolação

respectivamente, o erro relativo foi ainda menor que o menor erro obtido com soluções convergente. Entende-se que o uso do programa Mach2D com soluções obtidas com vários níveis de extrapolação (MER) reduz consideravelmente o erro. O estimador baseado em MER proposto por Martins (2013) é adequado para estimar o erro de discretização. Neste trabalho serão obtidas soluções com MER e estimativas de erro com o estimador baseado em MER.

## 5 RESULTADOS e DISCUSSÕES

Nos capítulos anteriores, mostrou-se o procedimento de solução do escoamento e o procedimento de otimização adotado neste trabalho. Também explicou-se sobre procedimento de verificação e a opção pelo estimador baseado em MER. Neste capítulo, apresentam-se os resultados obtidos para cada uma das razões de aspecto  $f_r \in \{2, 3, 4\}$  e para os números de Mach  $M \in \{1,5; 3,0; 6,0\}$ . O capítulo está organizado com uma seção explicativa sobre a parametrização da solução do escoamento e da otimização. Em seguida, são apresentadas seções para cada razão de aspecto, contendo os resultados e discussões para cada número de Mach. Também são mostradas comparações com os resultados obtidos por Kraiko et al. (2003) e com os resultados de Bertoldo (2014).

### 5.1 PARAMETRIZAÇÃO DAS OTIMIZAÇÕES

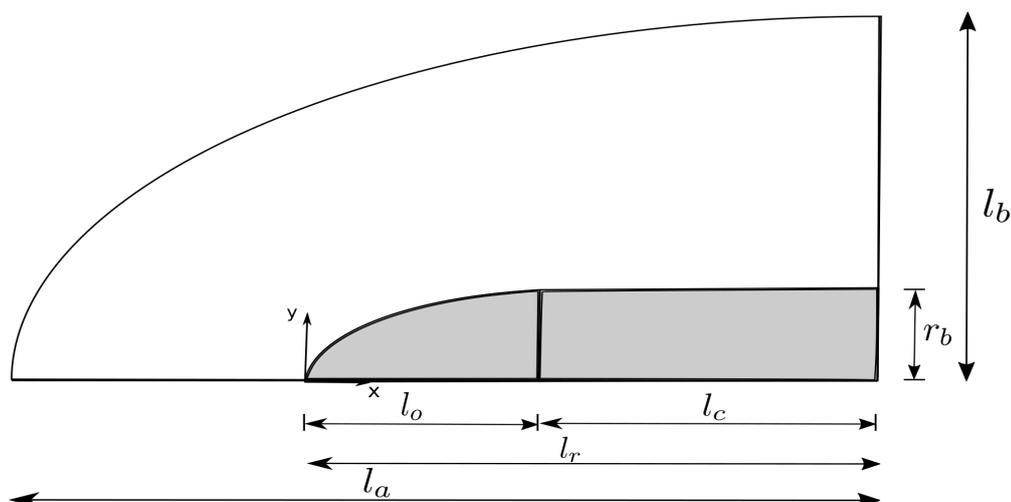
Esta seção descreve as parametrizações comuns a todas as otimizações realizadas, tais como domínio, parâmetros de geração de malha e descrição dos ambientes computacionais utilizados.

#### 5.1.1 Parâmetros do cálculo dos escoamentos

A definição do domínio é um aspecto importante na parametrização das simulações. A Fig. 5.1 mostra os parâmetros geométricos do domínio e do corpo. Dois parâmetros,  $l_a$  e  $l_b$ , definem as dimensões horizontal e vertical, respectivamente. O comprimento  $l_a$  contém o comprimento do corpo  $l_r$ , enquanto que o comprimento vertical  $l_b$  contém o raio da base do corpo  $r_b$ . O valor para cada parâmetro  $l_a$  e  $l_b$  foi determinado especificamente para cada conjunto de otimizações. O valor de  $l_a$  foi estabelecido de modo que houvesse região suficiente para avaliar os efeitos na região frontal do corpo. O valor de  $l_b$  foi obtido de modo que a pressão na fronteira Leste estivesse estável, indicando que as alterações provocadas pelo efeito da onda de choque fossem capturadas dentro do domínio da solução do escoamento.

O corpo é formado por duas partes bem definidas chamadas seção ogiva e seção cilindro. A seção ogiva tem comprimento dado por  $l_o$  e a seção cilindro tem comprimento dado por  $l_c$ . Convencionou-se que em todas as simulações das otimizações, o comprimento  $l_c$  é sempre a metade de  $l_o$ . A ogiva contém uma pequena seção reta na parte frontal, que acaba por formar uma pequena quina com o resto do perfil da ogiva. A conexão entre a ogiva e a seção cilindro forma uma pequena quina.

Figura 5.1 – PARÂMETROS GEOMÉTRICOS DO CORPO E DO DOMÍNIO



Fonte – O autor(2018)

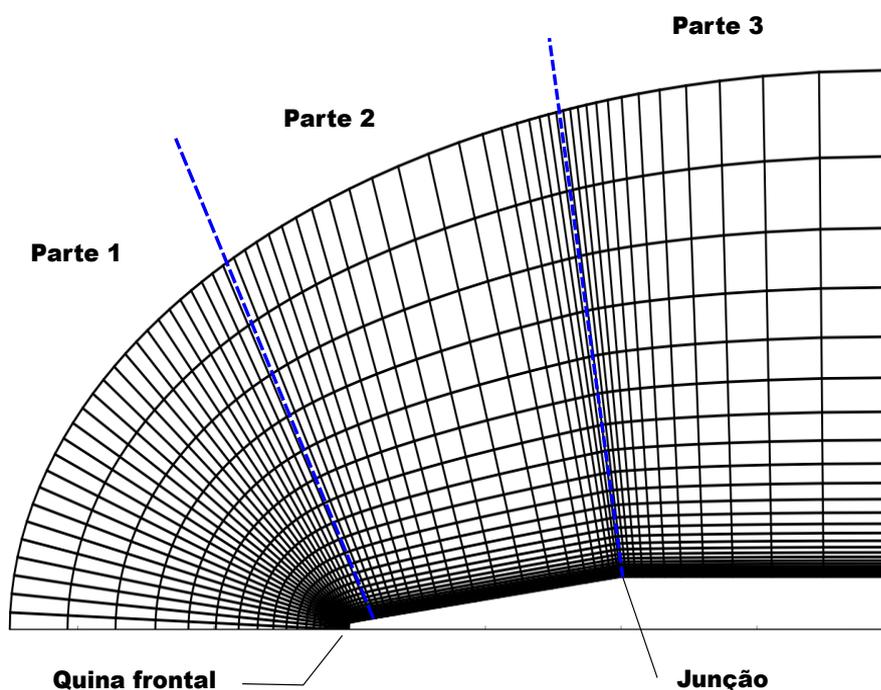
Como explicado no capítulo de Metodologia, gera-se a malha para discretizar o domínio em volumes elementares. Estes volumes constituem-se na base do Método dos Volumes Finitos, que é aplicado para resolver o escoamento. A partir da solução da pressão, obtém-se o valor do coeficiente de arrasto por integração. O processo de otimização definido neste trabalho implica na aplicação de MER e, para cada otimização, são necessárias soluções em 3 malhas distintas. Para cada razão de aspecto  $f_r$ , avaliou-se várias malhas para identificar a que tivesse a melhor formação de volumes, visando a concentração de volumes próximos da quina frontal e sobre a quina da junção ogiva-cilindro. Procurou-se manter a isotropia dos volumes de modo que não tivessem grandes variações entre altura e comprimento. Deste modo, para cada razão de aspecto  $f_r$  definiu-se uma malha básica e, a partir desta, as outras duas correspondem ao dobro e ao quádruplo do número de volumes em cada direção, obtendo-se as três malhas necessárias. Por exemplo, para uma malha básica definida com  $90 \times 60$  volumes, as outras duas são geradas com  $180 \times 120$  e  $360 \times 240$ .

A geração da malha inicia-se pela criação da primeira linha de volumes adjacentes à superfície do corpo, descrita como face Sul do domínio, conforme explicado na Seç. 3.2.1. Os volumes desta primeira linha têm tamanho definido pelo parâmetro  $cbl$  multiplicado pela camada limite teórica. Neste trabalho, apesar de não utilizar-se a camada limite para avaliar efeitos da viscosidade, sua estimativa multiplicada pelo parâmetro  $cbl$  corresponde à altura do primeiro volume. As outras linhas de volumes, ou seja, distância entre os pontos da linha anterior com os pontos da linha superior, são calculadas segundo uma progressão geométrica. O parâmetro para controlar esta progressão é chamado  $aks$ .

Para controlar a distribuição de volumes sobre o corpo existem 3 parâmetros. O parâmetro  $fl_o$  é um fator que define a porcentagem do total de volumes na horizontal que estarão sobre a ogiva. Os outros dois parâmetros definem a concentração de volumes

em regiões específicas: o parâmetro  $fp_1$  define a porcentagem de volumes na primeira parte da ogiva, ou seja, próximo da quina frontal e o parâmetro  $fp_2$  define a porcentagem de volumes próximos da junção da seção ogiva com a seção cilindro. Deste modo, há uma divisão da malha em 3 partes, permitindo concentração de volumes em regiões sobre as quais sabe-se, *a priori*, que conterão variações nas propriedades físicas. A Fig. 5.2 mostra um esquema da malha utilizada neste trabalho enquanto as Figs. 5.3 e 5.4 mostram detalhes de regiões da malha com concentração de volumes. O domínio, definido pelos parâmetros  $l_a$  e  $l_b$ , as malhas básicas e os demais parâmetros para geração de cada malha serão mostrados nas seções a seguir.

Figura 5.2 – ESQUEMA DA MALHA UTILIZADA NESTE TRABALHO

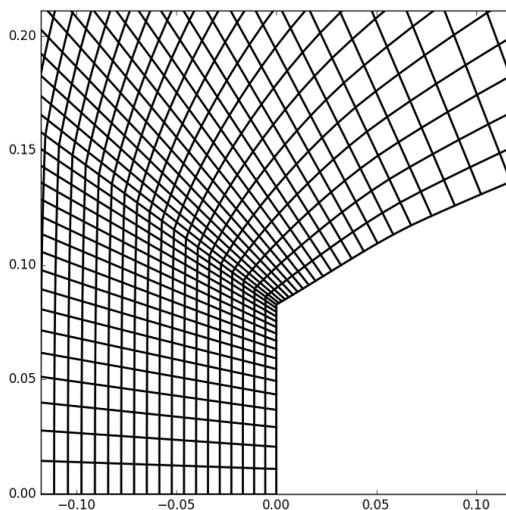


Fonte – O autor(2018)

Os parâmetros físicos foram definidos conforme explicado no capítulo de Metodologia: o fluido é o ar, composto de oxigênio, nitrogênio e argônio e, a temperatura foi definida arbitrariamente para todas as otimizações em 200K. O valor da pressão de corrente livre foi obtido para cada número de Mach e razão de aspecto  $f_r$  conforme explicado no capítulo 3, e a Tab. 15 contém os valores obtidos.

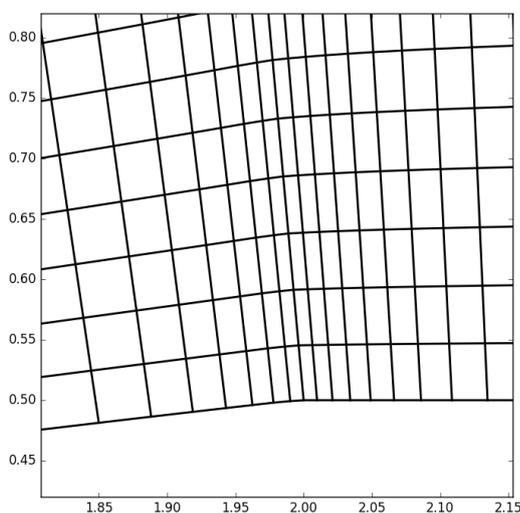
A tolerância para o resíduo do sistema linear foi estabelecida arbitrariamente em  $10^{-10}$ . Se a tolerância fosse menor, aumentaria o tempo de execução de cada simulação (solução do escoamento). Como o processo de otimização é iterativo, convencionou-se este valor de tolerância. Entretanto, quando as otimizações finalizarem e os perfis geométricos que minimizem o coeficiente de arrasto estiverem definidos, serão efetuadas simulações com tolerância menor que  $10^{-10}$ , para cada um dos perfis obtidos. Deste modo, obtém-se o valor de  $C_{Df}$  com menor valor de erro de iteração. Este procedimento será

Figura 5.3 – DETALHE DA MALHA NA REGIÃO FRONTAL, MOSTRANDO OS VOLUMES MAIS CONCENTRADOS PRÓXIMOS À QUINA FRONTAL



Fonte – O autor(2018)

Figura 5.4 – DETALHE DA MALHA NA REGIÃO DA JUNÇÃO OGIVA-CILINDRO MOSTRANDO CONCENTRAÇÃO DE VOLUMES



Fonte – O autor(2018)

explicado posteriormente.

### 5.1.2 Parâmetros de otimização

Para a realização das otimizações como descrito na Seç. 3.5 é utilizado o algoritmo TRUST-NCG. Este algoritmo necessita de alguns parâmetros, comuns a todas

as formas otimizadas.

O algoritmo TRUST-NCG é implementado pela biblioteca SciPy (Scipy, 2015) e invocado através da função *minimize*. Os parâmetros *initial\_trust\_radius* e *max\_trust\_radius* são os tamanhos inicial e máximo do raio de confiança, respectivamente. O parâmetro *eta* é o valor da restrição para passos propostos para a região de confiança. O parâmetro *gtol* é a tolerância para valores da norma do gradiente para encerramento da otimização. Os parâmetros utilizados para otimização neste trabalho estão listados na Tab. 24.

Tabela 24 – PARÂMETROS PARA O ALGORITMO TRUST-NCG

Parâmetro	valor
<i>initial_trust_radius</i>	0,1
<i>max_trust_radius</i>	1
<i>eta</i>	0,15
<i>gtol</i>	$10^{-5}$

Fonte – O autor(2018)

### 5.1.3 Ambientes computacionais

Todas as simulações foram realizadas com o programa denominado Mach2D, desenvolvido pelo Grupo de Pesquisa em CFD do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PGMEC) da Universidade Federal do Paraná (UFPR). Este programa seguiu a metodologia explicada na Seç. 3.2, sendo codificado em linguagem Fortran.

Já as otimizações foram desenvolvidas *scripts* em linguagem Python, utilizando a biblioteca Scipy, que implementa algoritmo de otimização Trust-NCG. Como descrito na seção de Otimização na Seç. 3.5 do capítulo de Metodologia, o procedimento de otimização invoca a simulação para resolver o escoamento. Então, o *script* de otimização invoca o programa Mach2D para obtenção do valor de  $C_{Df}$ , que é a função a ser minimizada.

O programa Mach2D é preparado juntamente com o ambiente, sendo compilado no momento dessa preparação. A versão do compilador depende do ambiente de execução, porque, para permitir a melhor performance segundo o *hardware*<sup>1</sup> utilizado, desenvolveu-se *scripts*<sup>2</sup> para compilação do programa no ambiente de execução.

Os equipamentos utilizados para as otimizações foram os *clusters*<sup>3</sup> do Centro Nacional de Supercomputação (CESUP), integrado ao Sistema Nacional de

<sup>1</sup> *Hardware* é o conjunto de dispositivos físicos de um computador, tais como microprocessador, memórias e sistema de discos

<sup>2</sup> *Script* é um conjunto de instruções *shell*, usualmente escrito para execução sequencial de comandos

<sup>3</sup> *Cluster* é uma arquitetura para conjunto de computadores conectados através de um sistema de rede que permite seu uso colaborativo entre vários usuários, compartilhando armazenamento em disco e memória.

Processamento de Alto Desempenho (SINAPAD), sediado na Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) e também o *cluster* da Universidade Tecnológica do Paraná em Francisco Beltrão (UTFPR). O equipamento do CESUP contém 64 unidades de processamento, cada unidade disponibilizando 64 GB de RAM e 2 processadores dodecacore AMD Opteron (32 unidades com o modelo 6176 SE, de 2.3 GHz e 32 outras com o modelo 6238, de 2.9 GHz de frequência). Um sistema gerenciador de filas disponibilizado é o PBS Pro, versão 11. Este sistema permite que a solicitação de execução de um programa não seja imediata, mas sim controlada por este sistema de filas, que verificará se existem recursos para execução. Deste modo, uma solicitação de execução pode não ser imediatamente atendida como em uma execução em um computador pessoal. O equipamento disponibilizado pela UTFPR, campus de Francisco Beltrão, os computadores tem processadores Intel®Core TM i5-2310 com frequência de 2.90 GHz. O compilador Fortran disponível para compilação do Mach2D era o gfortran versão 6.1.0. Os scripts Python foram escritos em Python 2.7, utilizando a biblioteca Scipy versão 0.16.

Após o ciclo de otimizações, obtém-se valores de  $y$  que produzem um perfil geométrico que minimizam  $C_{Df}$ . Entretanto, as simulações do Mach2D foram configuradas com tolerância do sistema linear igual a  $10^{-10}$ . Elas foram parametrizadas desta forma porque o processo de otimização é iterativo e utilizar uma tolerância menor deixaria o processo custoso e demorado, como explicado anteriormente. Porém, este valor de tolerância permite que o erro de iteração tenha uma parcela maior no erro de discretização. Como descrito no Cap. 4, o erro de iteração é devido a diferença entre o valor da solução exata do sistema linear e a solução em uma iteração.

Para redução do erro numérico dos valores do coeficiente de arrasto dos perfis otimizados, executou-se um conjunto de 4 simulações para cada razão de aspecto e para cada número de Mach. Os objetivos deste conjunto de simulações são obter valores de  $C_{Df}$  para os perfis otimizados com o menor erro numérico possível e também efetuar a verificação das soluções obtidas. Como descrito anteriormente, as otimizações foram realizadas com simulações com tolerância para os sistemas lineares iguais a  $10^{-10}$ . Então, com este conjunto de simulações efetuadas após as otimizações, deseja-se minimizar o erro de iteração, presente no erro numérico. Para isto, as 4 simulações foram efetuadas com a tolerância para comparação com o resíduo dos sistemas lineares igual a  $10^{-14}$ . Além deste procedimento, as simulações foram executadas até que o dobro do número de iterações na qual a tolerância foi alcançada. Por exemplo, se a tolerância do sistema linear igual a  $10^{-14}$  foi atingida em 3500 iterações, a execução da simulação irá até a iteração de número 7000. Deste modo, o valor do erro de iteração é muito pequeno quando comparado com o erro de discretização.

Além de diminuir o erro de iteração, a execução do conjunto de 4 simulações visa fazer o procedimento de verificação e aplicação de MER para o valor de  $C_{Df}$  obtido com as simulações. Para a execução destas simulações, o procedimento utilizado é o mesmo das

simulações do processo de otimização. Cada uma foi parametrizada utilizando os mesmos parâmetros de domínio, definição de malha (a partir da malha básica) e parâmetros físicos. Para a definição do perfil geométrico, utilizou-se o conjunto de variáveis  $y$  dos valores de  $C_{Df}$  obtidos com MER referente ao mesmo número de variáveis de otimização. A simulação com malha mais grossa tem a mesma malha básica e as outras malhas são múltiplos desta. Assim, se a malha básica tem  $90 \times 60$  volumes, as outras malhas são  $180 \times 120$ ,  $360 \times 240$  e  $720 \times 480$  volumes.

Com os resultados das 4 malhas, aplicou-se MER com 3 níveis para obter o valor do coeficiente de arrasto  $C_{Df}$  para cada número de coordenada. Também obteve-se o valor da incerteza numérica com estimador GCI (ROACHE, 2009) e a estimativa do erro com o estimador baseado em MER (MARTINS, 2013).

Em resumo, os procedimentos de otimização foram efetuados para as razões de aspecto  $f_r \in \{2, 3, 4\}$ , para números de Mach  $\in \{1,5; 3,0; 6,0\}$ , obtendo-se os valores de  $y$  para os números de variáveis  $n_u \in \{1, 2, 4, 8\}$ . Após cada otimização, foram executadas 4 simulações com tolerância  $10^{-14}$  para o resíduo do sistema linear do ciclo de massa. Cada simulação foi efetuada para cada razão de aspecto, para cada número de Mach e para cada número de coordenadas  $y$ , perfazendo um total de 16 simulações para cada número de Mach. Como para cada razão de aspecto  $f_r$ , tem-se 3 números de Mach, o total é de 48 simulações executadas após as otimizações.

#### 5.1.4 Organização dos resultados

A continuação deste capítulo está organizada em seções para cada uma das razões de aspecto  $f_r$ . Cada seção está dividida em seções internas para cada um dos números de Mach deste trabalho. Visando evitar repetições desnecessárias, adota-se que para razão de aspecto  $f_r$  e  $M_\infty=1,5$  há um detalhamento dos procedimentos utilizados, com tabelas e figuras. Para o mesmo  $f_r$  e os outros números de Mach  $M_\infty$ , são mostrados apenas as tabelas com resultados e algumas figuras estão disponíveis em apêndices. As tabelas que referem-se aos números de variáveis de otimização (ou de coordenadas  $y$ ) e valores de coeficiente de arrasto  $C_{Df}$  contém valores obtidos com apenas uma malha (sem extrapolação) na coluna  $m_1$ , com um nível de extrapolação, na coluna  $m_{1,2}$ , e com multiextrapolação de Richardson, na coluna  $m_{1,2,3}$ .

Convencionou-se utilizar o termo *coordenada* para os valores de  $y$  obtidos pela otimização, pois, durante o procedimento de otimização, o termo *variável de otimização* refere-se aos valores que sofrem alteração durante este procedimento. Uma vez encerrada a otimização, as variáveis de otimização terão seus valores determinados e, no caso deste trabalho, tais valores correspondem às coordenadas  $y$  que geram o perfil geométrico que minimizaram o coeficiente de arrasto  $C_{Df}$ .

Os valores apresentados nas tabelas estão no formato 0,1234(9), que significa  $0,1234 \pm 0,0009$  (INMETRO, 2012).

## 5.2 FORMAS OTIMIZADA E COEFICIENTE DE ARRASTO PARA $f_r = 2$

Para obter as formas otimizadas com razão de aspecto  $f_r=2$ , executou-se o procedimento de otimizações para cada um dos 3 números de Mach definidos para este trabalho:  $M_\infty \in \{1,5; 3,0; 6,0\}$ .

### 5.2.1 Número de Mach $M_\infty = 1,5$

Para obtenção do perfil geométrico otimizado e valor de  $C_{Df}$  para  $M_\infty = 1,5$ , configurou-se o programa Mach2D, responsável pela solução dos escoamentos, com as informações físicas disponíveis na Tab. 15 e com os parâmetros de domínio, malha básica e parâmetros para geração da malha para  $M_\infty = 1,5$  informados na Tab. 25.

As dimensões do domínio foram determinadas por simulações executadas antes das otimizações. Estas simulações visavam determinar os valores de  $l_a$  e  $l_b$  de modo que a onda de choque estivesse contida no domínio. A malha básica de 90 por 60 volumes foi definida para que os volumes tivessem boa aparência e de modo que o número de volumes finos ou altos fosse mínimo. Por fim, a parametrização do otimizador foi efetuada com os valores disponíveis na Tab. 24.

Após a execução das otimizações, os resultados obtidos são valores da coordenada  $y$  que geraram o perfil geométrico que minimiza o valor do  $C_{Df}$ . Os valores de  $y$  para  $M_\infty=1,5$  estão tabulados na Tab. 26. É importante destacar que os valores das coordenadas foram obtidos pela otimização do coeficiente de arrasto  $C_{Df}$ , mas por 3 tipos de otimizações de valores de soluções numéricas obtidas pelo simulador, conforme explicado na Seç. 5.1.4. Nesta tabela são mostrados os valores obtidos apenas com uma malha ( $m_1$ ) (sem aplicação de extrapolação de Richardson), valores com 1 nível de extrapolação ( $m_{1,2}$ ) e com 2 níveis de extrapolação de Richardson ( $m_{1,2,3}$ ), como explicado anteriormente.

A Tab. 27 apresenta os valores do coeficiente  $C_{Df}$  otimizados para os números de coordenadas de otimização  $n_u \in \{1, 2, 4, 8\}$  e  $M_\infty=1,5$ . Os valores de  $C_{Df}$  estão tabulados nas colunas  $m_1$ ,  $m_{1,2}$  e  $m_{1,2,3}$  da mesma forma que os valores de  $y$ . Porém, nessa tabela está incluso também o tempo, em horas, para otimização de cada número de coordenadas.

Analisando-se os valores dos coeficientes  $C_{Df}$  na Tab. 27 percebe-se que os menores valores de  $C_{Df}$  são os valores obtidos por 2 níveis de extrapolação, ou seja, MER. Os valores de  $C_{Df}$  obtidos com o uso de MER para o mesmo número de coordenadas são menores que os valores obtidos com apenas uma simulação ou com apenas um nível de extrapolação. A única exceção ocorre quando há apenas uma única coordenada, onde o menor valor de  $C_{Df}$  é obtido com apenas uma solução. Também é possível perceber que, com o aumento do número de coordenadas, os valores dos coeficientes  $C_{Df}$  obtidos são menores. Portanto, aumentando-se o número de coordenadas, pode-se definir um perfil

Tabela 25 – PARÂMETROS DE DOMÍNIO E MALHA -  $M_\infty=1,5$ 

Parâmetro	Número de coordenadas $n_u$			
	1	2	4	8
Comprimento horizontal - $l_a$	3,3	3,5	3,5	3,3
Comprimento vertical - $l_b$	5,0	5,0	5,0	5,0
Comprimento da ogiva - $l_o$		2,0		
Comprimento do cilindro - $l_c$		1,0		
Malha básica		90×60		
Expoente para geração da malha - $aks$		1,7		
Fator para criação do primeiro volume - $cbl$	2,0	2,0	2,0	2,0
Fator para conc. de volumes na ogiva - $fl_o$	0,60	0,65	0,65	0,60
Fator para conc. de volumes na região frontal - $fp_1$	0,65	0,65	0,65	0,65
Fator para conc. de volumes entre a ogiva e o cilindro - $fp_2$	0,15	0,15	0,15	0,15

Fonte – O autor(2018)

Tabela 26 – VALORES DE  $y$  PARA  $M_\infty=1,5$ 

$n_u$	$x$	$m_1$	$m_{1,2}$	$m_{1,2,3}$
1	0,00000	0,15831	0,17614	0,17311
2	0,00000	0,14261	0,16673	0,16585
	0,12500	0,33904	0,36027	0,35925
4	0,00000	0,13553	0,16136	0,16550
	0,03704	0,20963	0,23440	0,24008
	0,29630	0,51084	0,52727	0,52999
	0,99000	0,99645	0,99640	0,99649
8	0,00000	0,13852	0,16268	0,17223
	0,00292	0,15218	0,17040	0,18407
	0,02332	0,19624	0,21689	0,22755
	0,05273	0,24206	0,26242	0,27184
	0,18659	0,40272	0,42013	0,42651
	0,36443	0,57316	0,58752	0,59141
	0,62974	0,78177	0,78982	0,79083
	0,99000	0,99525	0,99573	0,99580

Fonte – O autor(2018)

Tabela 27 – VALORES DE  $C_{Df}$  OTIMIZADOS E TEMPO DE OTIMIZAÇÃO PARA  $n_u \in \{1, 2, 4, 8\}$  E  $M_\infty = 1,5$ 

$n_u$	$m_1$		$m_{1,2}$		$m_{1,2,3}$	
	$C_{Df}$	tempo (h)	$C_{Df}$	tempo (h)	$C_{Df}$	tempo (h)
1	1,7852E-01	0,03	1,8071E-01	0,76	1,8173E-01	4,33
2	1,5768E-01	0,81	1,5383E-01	5,76	1,5366E-01	54,50
4	1,5137E-01	2,50	1,4663E-01	7,42	1,4571E-01	92,46
8	1,5033E-01	13,30	1,4578E-01	262,22	1,4448E-01	383,67

Fonte – O autor(2018)

mais ajustado e que minimize o valor de  $C_{Df}$ . Constata-se que o menor valor de coeficientes  $C_{Df}$  é o valor obtido com 2 níveis de extrapolação e 8 coordenadas de otimização.

Os tempos para otimização apresentados na Tab. 27 mostram que, com o aumento de coordenadas, aumenta-se o tempo de execução da otimização. Este aumento é esperado pois, com o aumento de coordenadas, aumentam-se as opções para definição do perfil geométrico e, com a aplicação de MER para um único perfil definido, duas simulações adicionais são efetuadas, como explicado no capítulo de Metodologia. O aumento no tempo para otimização não é linear, como se observa entre os tempos com número de variáveis igual a 2 e igual a 4. O aumento de tempo com uso de MER entre as otimizações para 4 variáveis e 8 variáveis é de pouco mais que 4 vezes, enquanto entre 2 variáveis e 4 variáveis é de, aproximadamente, 1,7 vezes.

Os valores apresentados na Tab. 27 foram obtidos com tolerância do sistema linear para o ciclo de massa igual a  $10^{-10}$ . Como explicado anteriormente, propôs-se que sejam executadas simulações com tolerância do sistema linear menor para diminuir o erro de iteração. Deste modo, foram executadas as 4 simulações com tolerância igual a  $10^{-14}$ . Cada simulação foi parametrizada com os mesmos parâmetros utilizados para o ciclo de otimizações, excetuando-se a tolerância para o ciclo de massa. Como a malha básica é  $90 \times 60$ , as outras simulações utilizaram malhas iguais a  $180 \times 120$ ,  $360 \times 240$  e  $720 \times 480$ . Os valores das coordenadas  $y$  obtidos pelas otimizações apresentados na coluna  $m_{1,2,3}$  da Tab. 26 foram utilizados para configurar o perfil geométrico destas simulações.

Após a execução das 4 simulações, aplicou-se MER com 3 níveis de extrapolação com os valores do coeficiente  $C_{Df}$  obtidos. Para estimativa do erro numérico empregou-se o estimador baseado em MER proposto por Martins (2013), conforme explicado no Cap. 4. Entretanto, os valores obtidos com o estimador GCI foram inseridos neste capítulo pois é um estimador recomendado pelas normas de verificação e validação da ASME (2009) e também para comparação com os valores obtidos com o estimador baseado em MER. O valor da estimativa do erro dado pelo estimador baseado em MER é obtido pela expressão Eq. (4.19), enquanto que o valor da estimativa do erro dado pelo estimador GCI é obtido pela expressão Eq. (4.11), utilizando fator de segurança  $F_s$  igual a 1,25. Os valores do

coeficiente  $C_{Df}$  obtido com MER, o erro de discretização obtido com o estimador baseado em MER (MARTINS, 2013) ( $U_m$ ), a solução obtida com a malha mais fina  $C_{Df1}$  e o estimador GCI (ROACHE, 2009) ( $U_{GCI}$ ) são apresentados na Tab. 28.

Tabela 28 – COEFICIENTE DE ARRASTO DAS FORMAS OTIMIZADAS E ESTIMATIVAS DE ERRO PARA  $M_\infty = 1,5$

$n_u$	$C_{Df}$	$U_m$	$C_{Df1}$	$U_{GCI}$
1	0,1827	0,00097	0,181	0,081
2	0,1535	0,00014	0,154	0,001
4	0,1456	0,00042	0,147	0,003
8	0,1445	0,00023	0,146	0,002

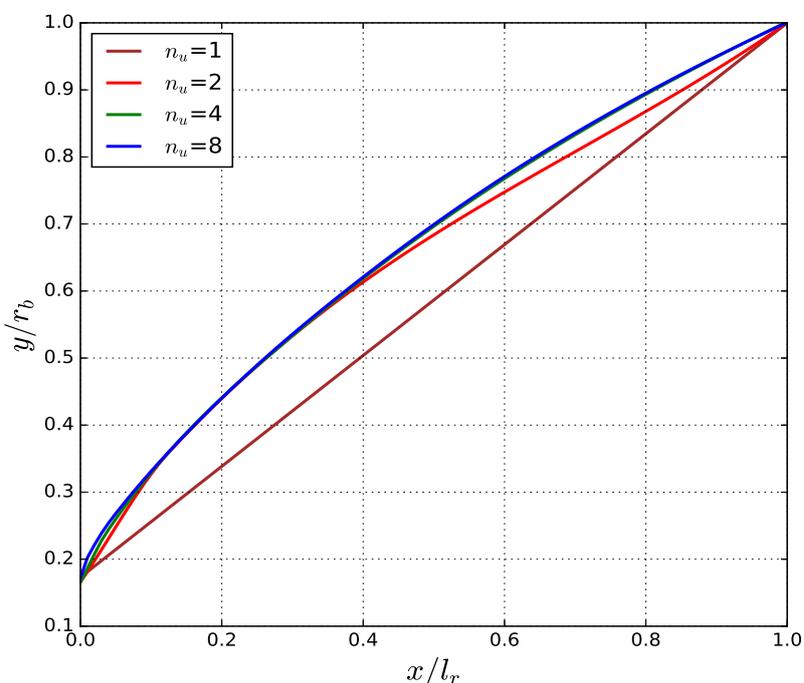
Fonte – O autor(2018)

A Tab. 28 mostra que com  $n_u$  igual a 8 para o número de coordenadas  $y$  utilizadas para formar o perfil geométrico, o valor do coeficiente  $C_{Df}$  é menor. Como mencionando anteriormente, isto é esperado pois com maior número de coordenadas, é possível definir o perfil a partir do polinômio interpolador com mais pontos, e por conta disto, definir um perfil que minimizasse o valor de  $C_{Df}$ .

A Fig. 5.5 mostra os perfis geométricos obtidos para os 4 conjuntos de coordenadas  $y$  ( $n_u \in \{1, 2, 4, 8\}$ ) e MER. Esta figura permite perceber a evolução dos perfis otimizados com o aumento do número de coordenadas.

Para comparação com outros resultados a Tab. 29 mostra os valores de  $C_{Df}$  com o número de coordenadas  $n_u$  com o valor do coeficiente obtido por Kraiko et al. (2003) e com os valores obtidos por Bertoldo (2014) em sua tese. As soluções obtidas pelos primeiros são utilizadas para comparação. Em seus resultados não há informação de erro mas, segundo explica Bertoldo (2014), em informação obtida “em comunicação pessoal com os autores, todos os algarismos apresentados são exatos”. Os valores de  $C_{Df}$  de Bertoldo (2014) são valores para as formas denominadas em seu trabalho como 1C, 2C-S e 2C-NS, e os valores listados na tabela são valores de  $C_{Df}$  obtidos para escoamentos sem viscosidade. No trabalho de Bertoldo (2014), a forma 1C é forma baseada em lei de potência sem um raio frontal, enquanto que as outras formas também são baseadas em lei de potência com o raio frontal. Para apresentar os valores de  $C_{Df}$  na tabela, adota-se a notação com formato 0,1445(2) que significa  $0,1445 \pm 0,0002$ , sendo que o valor entre parênteses é a incerteza obtida pelo estimador baseado em MER apresentado na Tab. 28.

Figura 5.5 – PERFIS GEOMÉTRICOS OBTIDOS COM 1, 2, 4 e 8 COORDENADAS PARA  $f_r=2$  E  $M_\infty=1,5$



Fonte – O autor(2018)

Tabela 29 – COMPARAÇÃO DE  $C_{Df}$  COM VALORES DE Kraiko et al. (2003) E Bertoldo (2014)

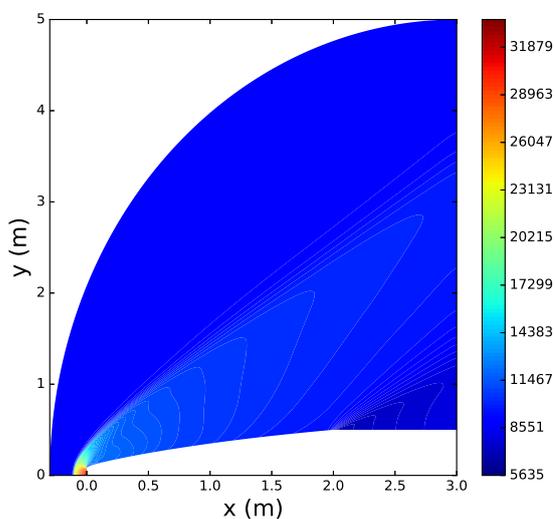
$n_u$	$C_{Df}$	Kraiko et al. (2003)	1C	2C-S	2C-NS
1	0,1827(97)				
2	0,1535(1)				
4	0,1456(4)	0,144	0,1533(10)	0,1467(4)	0,14697(7)
8	0,1445(2)				

Fonte – O autor(2018)

Os valores na Tab. 29 mostram que a medida que o número de variáveis aumenta, o valor de  $C_{Df}$  converge para o valor obtido por Kraiko et al. (2003). Com 8 variáveis, a diferença relativa (em porcentagem) entre o valor de  $C_{Df}$  obtido por otimização com MER e o valor obtido por Kraiko et al. (2003) é de 0,3 %. Os valores obtidos por Bertoldo (2014) com a forma 1C tem diferença relativa de 6% enquanto que para as formas 2C-S e 2C-NS, as diferenças relativas foram de 1,5% e 1,2%, respectivamente.

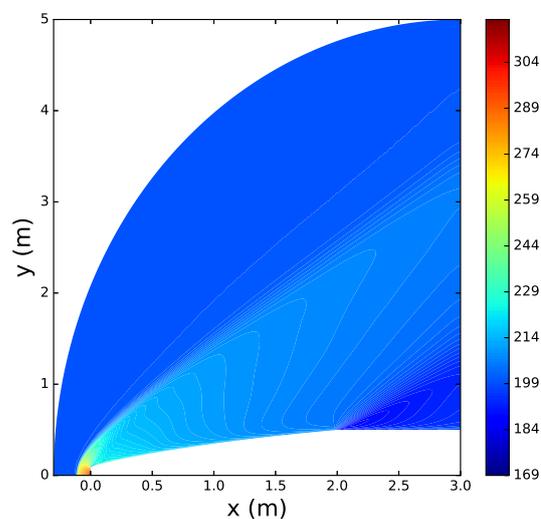
Para o perfil otimizado e formado por 8 coordenadas são apresentadas figuras para os diversos campos das grandezas físicas do escoamento. As Fig. 5.6 e Fig. 5.7 mostram o campo de pressão e o campo de temperatura, respectivamente, enquanto as Figs. 5.8 e 5.9 apresentam os campos de velocidades,  $u$  e  $v$ . Por fim, as Fig. 5.10 e 5.11 mostram os campos de massa específica e de número de Mach.

Figura 5.6 – CAMPO DE PRESSÃO (Pa)  
PARA  $f_r=2$  E  $M_\infty=1,5$



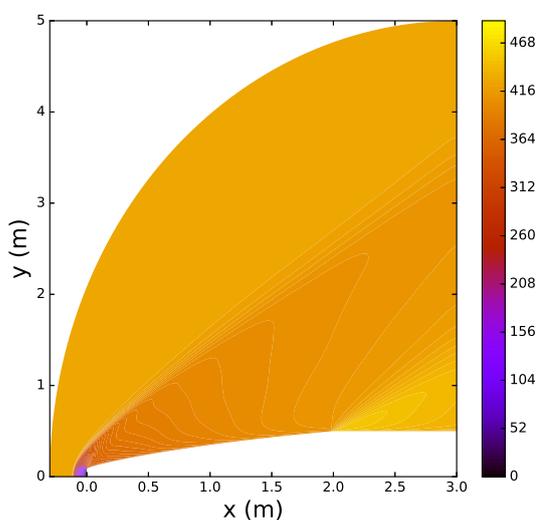
Fonte – O autor(2018)

Figura 5.7 – CAMPO DE TEMPERATURA (K)  
PARA  $f_r=2$  E  $M_\infty=1,5$



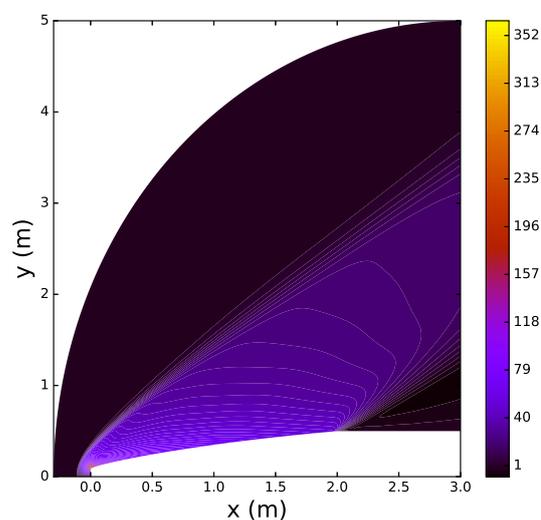
Fonte – O autor(2018)

Figura 5.8 – CAMPO DE VELOCIDADE  $u$   
(m/s) PARA  $f_r=2$  E  $M_\infty=1,5$



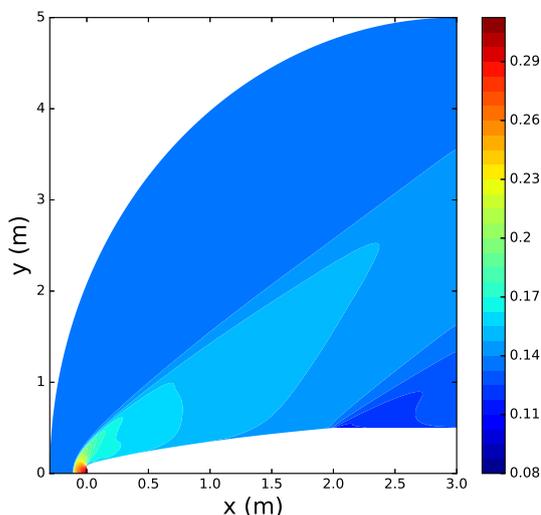
Fonte – O autor(2018)

Figura 5.9 – CAMPO DE VELOCIDADE  $v$   
(m/s) PARA  $f_r=2$  E  $M_\infty=1,5$



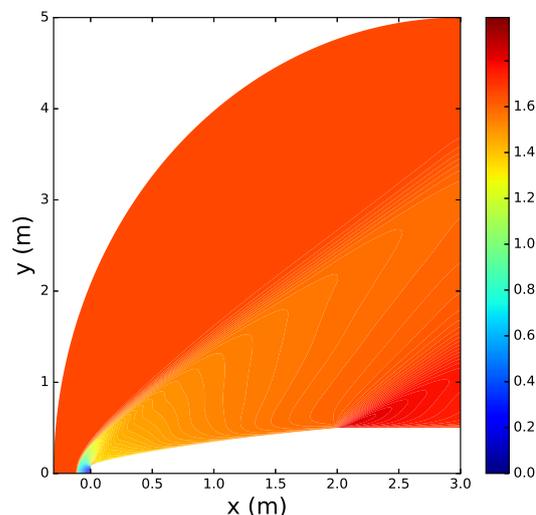
Fonte – O autor(2018)

Figura 5.10 – CAMPO DE MASSA ESPECÍFICA  $\rho$  (kg/m<sup>3</sup>) PARA  $f_r=2$  E  $M_\infty=1,5$



Fonte – O autor(2018)

Figura 5.11 – CAMPO DO NÚMERO DE MACH PARA  $f_r=2$  E  $M_\infty=1,5$



Fonte – O autor(2018)

## 5.2.2 Número de Mach $M_\infty = 3,0$

O procedimento de otimização para razão de aspecto  $f_r=2$  e número de Mach  $M_\infty = 3,0$  é similar ao que foi aplicado para  $M_\infty = 1,5$ , porém utilizando-se os parâmetros de domínio apropriados. A Tab. 15 apresenta os parâmetros físicos e no apêndice B.1 são informados os parâmetros referentes ao domínio e para formação da malha básica de cada otimização. A definição do domínio deu-se por simulações executadas antes dos procedimentos de otimização visando determinar as dimensões a fim de que a onda de choque estivesse contida no domínio. O número de volumes utilizados na malha básica e os parâmetros do otimizador são os mesmos empregados na otimização para  $M_\infty=1,5$ .

Após execução das otimizações, obteve-se os valores das coordenadas  $y$  para o perfil geométrico que minimizasse  $C_{Df}$ . A Tab. 30 mostra estes valores para cada número de coordenadas  $y$ .

Os valores do coeficiente  $C_{Df}$  minimizados com os perfis obtidos com as coordenadas listadas na Tab. 30 são apresentados na Tab. 31. Os valores de  $C_{Df}$  diminuem à medida que aumenta-se o número de coordenadas e também diminuem com a aplicação de extrapolação de Richardson e MER. O valor do coeficiente  $C_{Df}$  é menor para 8 coordenadas  $y$  com aplicação de extrapolação em um nível, porém, sua diferença para o valor de  $C_{Df}$  com aplicação de MER é da ordem de  $2 \cdot 10^{-4}$ . O tempo de otimização também é mostrado na Tab. 31 e é dado em horas, para facilitar a visualização.

De forma semelhante ao que aconteceu com os perfis otimizados para  $M_\infty=1,5$ , ocorreu um aumento no tempo de otimização com o aumento do número de variáveis. Entretanto, ocorreu um aumento mais expressivo para a extrapolação com 4 variáveis e

também para o emprego de MER para 4 e 8 variáveis. Este comportamento é diferente do que ocorreu com as formas otimizadas com  $M_\infty=1,5$ . Entende-se que este aumento no tempo de otimização deve-se ao fato do algoritmo de otimização buscar o menor valor com incrementos pequenos, ou seja, a região apresenta valores de gradiente pequenos, provocando assim o aumento no tempo da otimização.

Tabela 30 – VALORES DE  $y$  PARA  $M_\infty=3,0$

$n_u$	$x$	$m_1$	$m_{1,2}$	$m_{1,2,3}$
1	0	0,10556	0,11426	0,1131
2	0,00000	0,07498	0,08441	0,08453
	0,12500	0,27098	0,27582	0,27556
4	0,00000	0,06918	0,07823	0,07802
	0,03704	0,14458	0,15218	0,15239
	0,29630	0,45043	0,45421	0,45389
	0,99000	0,99415	0,99419	0,9942
8	0,00000	0,06741	0,07774	0,07822
	0,00292	0,07776	0,08763	0,08805
	0,02332	0,12161	0,13007	0,13076
	0,05273	0,17174	0,17915	0,17981
	0,18659	0,3397	0,34442	0,34427
	0,36443	0,51562	0,51883	0,51865
	0,62974	0,73849	0,74002	0,73984
	0,99000	0,99353	0,99364	0,99369

Fonte – O autor(2018)

Tabela 31 – VALORES DE  $C_{Df}$  OTIMIZADOS E TEMPO DE OTIMIZAÇÃO PARA  $n_u \in \{1, 2, 4, 8\}$  E  $M_\infty = 3,0$

$n_u$	$m_1$		$m_{1,2}$		$m_{1,2,3}$	
	$C_{Df}$	tempo (h)	$C_{Df}$	tempo (h)	$C_{Df}$	tempo (h)
1	1,3811E-01	0,04	1,3462E-01	0,71	1,3770E-01	13,25
2	1,2389E-01	0,46	1,2268E-01	2,92	1,2302E-01	16,78
4	1,2163E-01	1,39	1,2095E-01	8,60	1,2113E-01	255,70
8	1,2137E-01	4,07	1,2072E-01	390,91	1,2093E-01	220,00

Fonte – O autor(2018)

A Tab. 32 apresenta os valores de  $C_{Df}$  obtidos com MER, a estimativa de erro calculada com estimador baseado em MER ( $U_m$ ), o valor da solução da malha mais fina  $C_{Df1}$  e a incerteza obtida com o estimador GCI ( $U_{GCI}$ ). Os valores de  $C_{Df}$  indicam que, com o aumento de coordenadas ocorre diminuição do valor de  $C_{Df}$ . As estimativas de erro também reduzem-se, demonstrando que com o aumento de número de coordenadas, melhora-se

o perfil geométrico e reduz-se o arrasto. Porém, diferente do que aconteceu com  $M_\infty=1,5$ , a ordem de grandeza das estimativas dos erros é a mesma, com exceção da estimativa de erro GCI para 2 coordenadas, que é uma ordem de grandeza menor que o estimador baseado em MER.

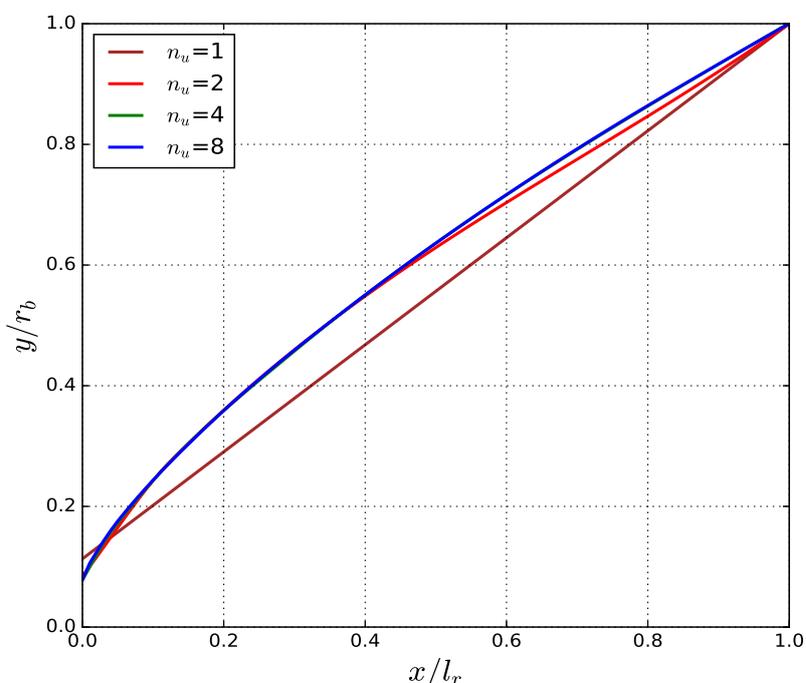
Tabela 32 – COEFICIENTE DE ARRASTO DAS FORMAS OTIMIZADAS E ESTIMATIVAS DE ERRO PARA  $M_\infty = 3,0$

$n_u$	$C_{Df}$	$U_m$	$C_{Df1}$	$U_{GCI}$
1	0,13672	-0,00069	0,13684	0,000350
2	0,123239	-0,00022	0,12314	0,000001
4	0,12114	-0,00005	0,12117	0,000087
8	0,12090	-0,00008	0,12090	0,000059

Fonte – O autor(2018)

A Fig. 5.12 mostra a evolução do perfil geométrico obtidos com 1, 2, 4 e 8 coordenadas  $y$  e uso de MER para cálculo do  $C_{Df}$ . Observa-se a diferença da parte frontal para o perfil geométrico com apenas 1 coordenada e os outros perfis. Também percebe-se que o perfil obtido com apenas 4 coordenadas é semelhante ao obtido com 8 coordenadas.

Figura 5.12 – PERFIS GEOMÉTRICOS OBTIDOS COM 1, 2, 4 E 8 COORDENADAS PARA  $f_r=2$  E  $M_\infty=3,0$



Fonte – O autor(2018)

A Tab. 33 apresenta os valores de  $C_{Df}$  obtidos e, na mesma tabela, apresentam-se os valores do coeficiente obtido por Kraiko et al. (2003) e os valores obtidos por Bertoldo

(2014) para as formas denominadas 1C, 2C-S e 2C-NS. De modo semelhante ao apresentado para os valores para o número de Mach  $M_\infty=1,5$ , os valores de  $C_{Df}$  na tabela estão no formato 0,12090(8), que significa  $0,12090 \pm 0,00008$ , sendo que o valor entre parênteses é a estimativa do erro obtida pelo estimador baseado em MER.

Tabela 33 – COMPARAÇÃO DE  $C_{Df}$  COM VALORES DE Kraiko et al. (2003) E Bertoldo (2014)

$n_u$	$C_{Df}$	Kraiko et al. (2003)	1C	2C-S	2C-NS
1	0,13770(9)				
2	0,12302(3)				
4	0,12113(3)	0,121	0,1239(8)	0,1217(11)	0,1218(12)
8	0,12090(8)				

Fonte – O autor(2018)

Os valores do coeficiente de arrasto  $C_{Df}$  obtidos por otimização e listados na Tab. 33 convergem para o valor de Kraiko et al. (2003) à medida que o número de coordenadas aumenta. Comparando-se com o valor de Kraiko et al. (2003), o valor de  $C_{Df}$  obtido com 4 coordenadas tem diferença relativa de 0,10%, enquanto o valor de  $C_{Df}$  para 8 coordenadas tem diferença de 0,08%. Quando comparado com as formas 1C, 2C-S e 2C-NS, as diferenças relativas são 2%, 0,64% e 0,73%, respectivamente. A diferença entre o valor de  $C_{Df}$  obtido com 8 coordenadas e o valor de Kraiko et al. (2003) é de 0,00007, menor que o erro estimado. Pode-se concluir que os valores obtidos tanto para 4 coordenadas quanto para 8, são praticamente iguais ao valor de Kraiko et al. (2003).

O apêndice C.1.1 contém as figuras dos diversos campos das grandezas físicas para o perfil otimizado com 8 coordenadas.

### 5.2.3 Número de Mach $M_\infty = 6,0$

Para obtenção de formas otimizadas para número de Mach  $M_\infty=6,0$  adotou-se o mesmo procedimento utilizado para  $M_\infty=1,5$  e  $M_\infty=3,0$ . Os parâmetros físicos utilizados nesta otimização estão apresentados na Tab. 15 enquanto as informações referentes ao domínio e geração da malha são mostrados no apêndice B.2. Cabe a observação que para este número de Mach, a onda de choque é mais inclinada e próxima da superfície do corpo. Por conta disto, pode-se definir um comprimento  $l_b$  menor que o valor utilizado nas otimizações para  $M_\infty=1,5$  e 3,0. Os valores utilizados pelo otimizador são os mesmos das otimizações anteriores e estão tabulados na Tab. 24.

Após a execução das otimizações, foram obtidos os valores de coordenadas  $y$  que minimizaram o valor do  $C_{Df}$ . Estes valores encontram-se na Tab. 34. Os valores dos coeficientes  $C_{Df}$  minimizados e o tempo (em horas) para execução das otimizações são apresentados na Tab. 35.

Observa-se a redução dos valores do coeficiente  $C_{Df}$  com o aumento do número de coordenadas para formar o perfil, como ocorreu com os números de Mach 1,5 e 3. Porém, o menor valor de  $C_{Df}$  obtido com MER não é o menor valor de coeficiente  $C_{Df}$ . Isto se observa também quando analisa-se para o mesmo número de coordenadas  $y$ . Por outro lado, o tempo de execução das otimizações aumenta com o número de coordenadas. Também percebe-se o aumento no tempo da otimização ao aplicar extrapolação e multiextrapolação quando compara-se com o mesmo número de coordenadas  $y$ . Para número de coordenadas igual a 8, o tempo de execução com uma extrapolação é da ordem de 9 vezes maior que o tempo para apenas uma malha e da ordem de 38 vezes maior com a utilização de MER.

Tabela 34 – VALORES DE  $y$  PARA  $M_\infty=6,0$ 

$n_u$	$x$	$m_1$	$m_{1,2}$	$m_{1,2,3}$
1	0,00000	0,10398	0,12188	0,12154
2	0,00000 0,12500	0,06755 0,26192	0,07451 0,26609	0,07377 0,26558
4	0,00000 0,03704 0,29630 0,99000	0,05880 0,13774 0,44252 0,99287	0,06564 0,14372 0,44496 0,99275	0,06498 0,14327 0,44481 0,99281
8	0,00000 0,00292 0,02332 0,05273 0,18659 0,36443 0,62974 0,99000	0,05592 0,06600 0,11224 0,16435 0,33447 0,50744 0,72626 0,99254	0,06396 0,07354 0,11822 0,16982 0,33909 0,50870 0,72596 0,99244	0,06374 0,07331 0,11813 0,16957 0,33940 0,50832 0,72585 0,99256

Fonte – O autor(2018)

Tabela 35 – VALORES DE  $C_{Df}$  OTIMIZADOS E TEMPO DE OTIMIZAÇÃO PARA  $n_u \in \{1, 2, 4, 8\}$  E  $M_\infty = 6,0$ 

$n_u$	$m_1$		$m_{1,2}$		$m_{1,2,3}$	
	$C_{Df}$	tempo (h)	$C_{Df}$	tempo (h)	$C_{Df}$	tempo (h)
1	1,1319E-01	0,04	1,1142E-01	0,47	1,1514E-01	1,36
2	1,0143E-01	0,44	1,0179E-01	2,96	1,0209E-01	21,46
4	1,0051E-01	0,97	1,0104E-01	6,79	1,0130E-01	25,25
8	1,0030E-01	2,37	1,0083E-01	21,33	1,0107E-01	91,58

Fonte – O autor(2018)

A Tab. 36 mostra os valores  $C_{Df}$  obtidos com MER, a estimativa de erro obtida com o estimador baseado em MER ( $U_m$ ), o valor da solução numérica para a malha mais  $C_{Df1}$  e o valor da incerteza obtida com estimador GCI ( $U_{GCI}$ ). O valor de  $C_{Df}$  para 8 coordenadas  $y$  é o menor valor de  $C_{Df}$  e o que apresenta menor estimativa de erro, tanto com o estimador baseado em MER como para o estimador GCI. Ocorreu uma exceção com o valor para 1 coordenada, na qual o erro estimado com o estimador GCI foi menor que todos os outros. Entretanto, diferente do que ocorreu com os valores para  $M_\infty=3$ , o erro estimado com o estimador baseado em MER é uma ordem de grandeza menor que a estimativa obtida com o estimador GCI.

A Fig. 5.13 mostra os perfis geométricos para cada número de coordenadas  $y$  que apresenta o menor valor de  $C_{Df}$ . O perfil formado por 4 coordenadas e o perfil formado por 8 coordenadas são muito semelhantes, bem como os valores de  $C_{Df}$  para esses números de coordenadas (conforme Tab. 36).

Tabela 36 – COEFICIENTE DE ARRASTO DAS FORMAS OTIMIZADAS E ESTIMATIVAS DE ERRO PARA  $M_\infty = 6,0$

$n_u$	$C_{Df}$	$U_m$	$C_{Df1}$	$U_{GCI}$
1	0,1128	0,0014	0,1132	0,0001
2	0,10216	-0,00007	0,1020	0,0006
4	0,10138	-0,00008	0,1012	0,0006
8	0,10109	-0,00003	0,1009	0,0003

Fonte – O autor(2018)

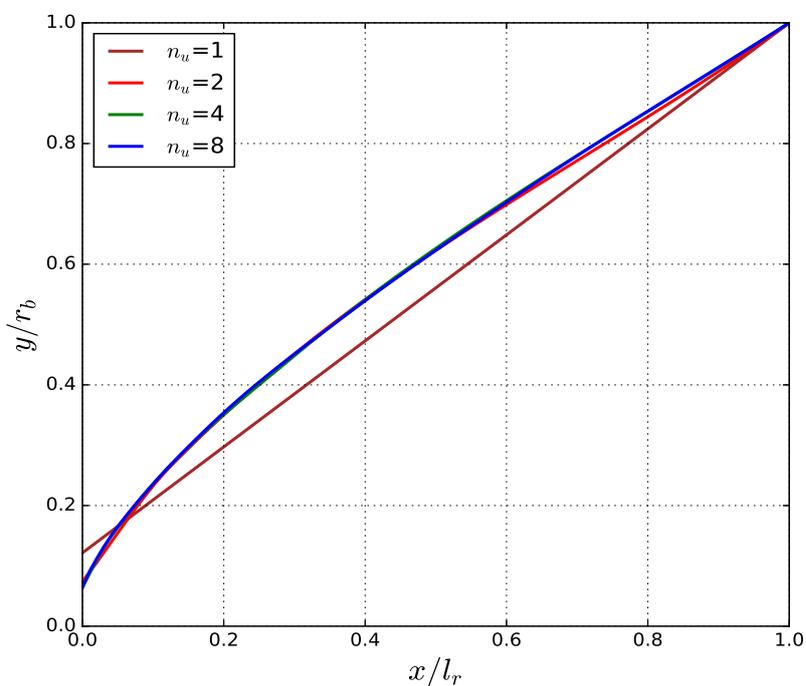
A Tab. 37 mostra os valores de  $C_{Df}$  obtidos neste trabalho, os valores de  $C_{Df}$  de Kraiko et al. (2003) e os valores de  $C_{Df}$  obtidos no trabalho de Bertoldo (2014) para as formas 1C, 2C-S e 2C-NS. Comparando o valor de  $C_{Df}$  para 8 coordenadas apresentado nessa tabela (Tab. 37) com o valor de Kraiko et al. (2003), nota-se uma diferença relativa de 0,09%, enquanto a diferença relativa entre as formas de Bertoldo (2014) e o valor de Kraiko et al. (2003) são iguais a 1,68% para a forma 1C e 0,39% para as formas 2C-S e 2C-NS.

Tabela 37 – COMPARAÇÃO DE  $C_{Df}$  COM VALORES DE Kraiko et al. (2003) E Bertoldo (2014)

$n_u$	$C_{Df}$	Kraiko et al. (2003)	1C	2C-S	2C-NS
1	0,1128(14)				
2	0,10216(7)				
4	0,10138(8)	0,101	0,1027(6)	0,1014(8)	0,1014(7)
8	0,10109(3)				

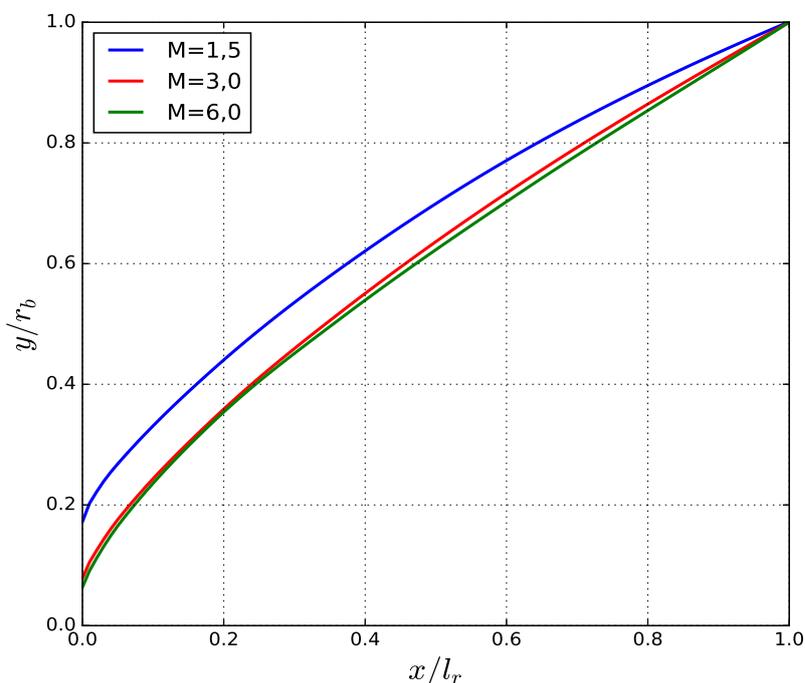
Fonte – O autor(2018)

Como complemento, o apêndice C.1.2 contém as figuras dos diversos campos das grandezas físicas para o perfil otimizado com 8 coordenadas.

Figura 5.13 – PERFIS GEOMÉTRICOS OBTIDOS COM 1, 2, 4 e 8 COORDENADAS PARA  $f_r=2$  e  $M_\infty=6,0$ 

Fonte – O autor(2018)

A Fig. 5.14 apresenta as 3 formas otimizadas obtidas com 8 coordenadas e com o emprego de MER para  $f_r=2$  e os 3 números de Mach avaliados neste trabalho. Os perfis para  $M_\infty = 3,0$  e  $6,0$  são mais finos que o perfil para  $M_\infty=1,5$ . Também observa-se que entre os perfis para  $M_\infty=3,0$  e  $M_\infty=6,0$  há pouca variação enquanto que entre  $M_\infty=1,5$  e  $M_\infty=3,0$ , a diferença é mais expressiva. Esta característica se deve ao princípio de independência de número de Mach (ANDERSON, 2000), que explica que algumas propriedades físicas sofrem pouco alteração com o aumento do número de Mach.

Figura 5.14 – PERFIS OTIMIZADOS PARA  $f_r=2$  e  $M_\infty \in \{1,5; 3,0; 6,0\}$ 

Fonte – O autor(2018)

### 5.3 FORMA OTIMIZADA E COEFICIENTE DE ARRASTO PARA $f_r=4$

Para a razão de aspecto  $f_r=4$ , executou-se os procedimentos de otimizações de modo similar ao procedimento efetuado para razão de aspecto  $f_r=2$ . Conforme a proposta deste trabalho, obteve-se as formas otimizadas para os 3 números de Mach definidos:  $M_\infty \in \{1,5, 3, 6\}$ . As seções a seguir explicitam os procedimentos para otimização e obtenção dos valores dos coeficientes de arrasto  $C_{Df}$  para cada número de Mach.

#### 5.3.1 Número de Mach $M_\infty = 1,5$

Para as otimizações com número de Mach  $M_\infty=1,5$ , as simulações foram configuradas segundo os parâmetros físicos listados na Tab. 15. Os parâmetros de domínio, malha básica e parâmetros para geração da malha para  $M_\infty = 1,5$  são informados na Tab. 38.

Os comprimentos  $l_a$  e  $l_b$  foram obtidos em simulações antes da otimização. Em relação a razão de aspecto  $f_r=2$ , o comprimento da ogiva  $l_o$  dobrou. Logo, para manter uma relação com a seção cilindro, o comprimento do cilindro  $l_c$  também foi multiplicado por 2, em relação ao  $l_c$  das otimizações realizadas para  $f_r=2$ . Apesar desta alteração,

Tabela 38 – PARÂMETROS DE DOMÍNIO E MALHA -  $M_\infty=1,5$ 

Parâmetro	Número de variáveis $n_u$			
	1	2	4	8
Comprimento horizontal - $l_a$	6,3	6,3	6,3	6,3
Comprimento vertical - $l_b$	10,0	10,0	10,0	10,0
Comprimento da ogiva - $l_o$		4,0		
Comprimento do cilindro - $l_c$		2,0		
Malha básica		180×30		
Expoente para geração da malha - $aks$		1,7		
Fator para criação do primeiro volume - $cbl$	4,0	4,0	4,0	4,0
Fator para conc. de volumes na ogiva - $fl_o$	0,65	0,65	0,65	0,65
Fator para conc. de volumes na região frontal - $fp_1$	0,65	0,65	0,65	0,65
Fator para conc. de volumes entre a ogiva e o cilindro - $fp_2$	0,15	0,15	0,15	0,15

Fonte – O autor(2018)

durante as simulações executadas antes dos procedimentos de otimização, constatou-se que o comprimento da seção cilindro não tem influência no cálculo do coeficiente  $C_{Df}$ . Entretanto, auxilia na estabilização do escoamento de modo a manter as características físicas na saída do domínio de cálculo.

De forma similar à razão de aspecto  $f_r=2$ , as simulações de otimização tiveram a tolerância de sistema linear para o ciclo de massa igual a  $10^{-10}$ . Os parâmetros para cada número de variáveis de otimização  $n_u \in \{1, 2, 4, 8\}$  estão disponíveis na Tab. 24.

As coordenadas  $y$  obtidas com otimização são mostradas na Tab. 39. Estas coordenadas definiram o perfil geométrico que obteve o menor valor do coeficiente  $C_{Df}$ . Os valores estão organizados em valores obtidos com uma malha ( $m_1$ ), ou seja, sem aplicação de extrapolação de Richardson, valores obtidos com 1 nível de extrapolação ( $m_{1,2}$ ) e com 2 níveis de extrapolação de Richardson ( $m_{1,2,3}$ ), como explicado anteriormente.

Os valores dos coeficientes  $C_{Df}$  otimizados são mostrados na Tab. 40, seguindo a mesma descrição empregada nas colunas dos valores das coordenadas para as otimizações da razão de aspecto  $f_r=2$ . Também são apresentados na mesma tabela, os tempos para cada otimização em horas.

Os valores de  $C_{Df}$  otimizados apresentam o mesmo comportamento observado em outras otimizações de que, com o aumento do número de coordenadas, o valor de  $C_{Df}$  diminui. Entretanto, os valores obtidos com apenas um nível de extrapolação, dispostos na coluna  $m_{1,2}$ , para 4 e 8 coordenadas, apresentam valores menores que os valores obtidos com MER. Percebe-se também que o tempo para a execução de otimização aumenta com o número de coordenadas  $y$ , como já visto em outras otimizações. Porém, para a otimização sem extrapolação para 8 coordenadas, ocorre um aumento de, aproximadamente, 267 vezes em relação a otimização com 4 coordenadas, também sem extrapolação. O entendimento é que o aumento no tempo de otimização está relacionado

Tabela 39 – VALORES DE  $y$  PARA  $M_\infty=1,5$ 

$n_u$	$x$	$m_1$	$m_{1,2}$	$m_{1,2,3}$
1	0	0,05331	0,05485	0,05598
2	0,00000	0,03072	0,05485	0,03803
	0,12500	0,26640	0,17299	0,27580
4	0,00000	0,02603	0,03460	0,03272
	0,03704	0,11258	0,12323	0,12061
	0,29630	0,46782	0,47772	0,47677
	0,99000	0,99727	0,99841	0,99729
8	0,00000	0,02460	0,03654	0,03645
	0,00292	0,03672	0,05005	0,04885
	0,02332	0,08864	0,10162	0,10008
	0,05273	0,14593	0,15852	0,15698
	0,18659	0,33936	0,35146	0,35004
	0,36443	0,53866	0,54910	0,54837
	0,62974	0,77366	0,77927	0,77901
	0,99000	0,99572	0,99665	0,99628

Fonte – O autor(2018)

com o algoritmo de otimização, ou seja, na busca pelo menor valor de  $C_{Df}$ , e não no uso de extrapolação. A otimização com MER para 8 ordenadas  $y$  demorou 4 vezes mais que a otimização com MER para 4 coordenadas. Em geral, o tempo de otimização aumenta com o uso de extrapolação ou MER, mas o aumento não é linear, como já mostrado na otimizações realizadas para  $f_r=2$ .

Tabela 40 – VALORES DE  $C_{Df}$  OTIMIZADOS E TEMPO DE OTIMIZAÇÃO PARA  $n_u \in \{1, 2, 4, 8\}$  PARA  $M_\infty = 1,5$ 

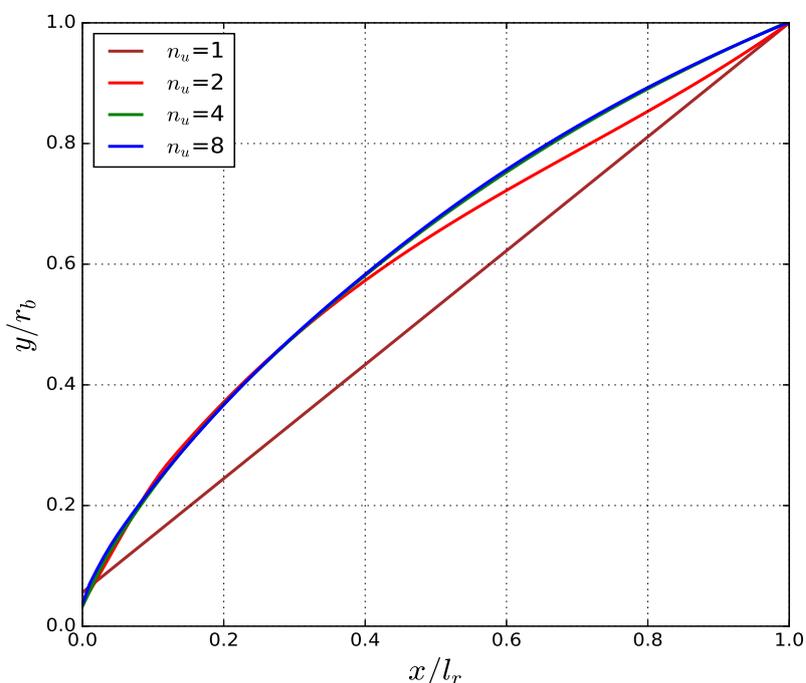
$n_u$	$m_1$		$m_{1,2}$		$m_{1,2,3}$	
	$C_{Df}$	tempo (h)	$C_{Df}$	tempo (h)	$C_{Df}$	tempo (h)
1	7,0086E-02	0,20	6,7815E-02	2,75	6,7903E-02	3,70
2	5,7483E-02	0,73	6,7815E-02	2,14	5,4082E-02	17,25
4	5,2962E-02	0,71	4,8826E-02	29,51	4,8847E-02	31,59
8	5,2598E-02	190,66	4,8201E-02	16,41	4,8414E-02	129,08

Fonte – O autor(2018)

Na Fig. 5.15 são apresentados os perfis obtidos com os 4 conjuntos de coordenadas. Com esta figura pode-se verificar a evolução dos perfis geométricos com o aumento do número de coordenadas. É possível perceber que em algumas regiões os perfis obtidos com 2, 4 e 8 coordenadas são semelhantes.

Entende-se que as otimizações efetuadas com MER são mais acuradas. Logo, selecionou-se as coordenadas  $y$  das otimizações efetuadas com MER para executar as

Figura 5.15 – PERFIS GEOMÉTRICOS OBTIDOS COM 1, 2, 4 e 8 COORDENADAS PARA  $f_r=4$  e  $M_\infty=1,5$



Fonte – O autor(2018)

simulações com tolerância de  $10^{-14}$ . Esta opção é a mesma adotada para razão de aspecto  $f_r=2$ . Os resultados destas simulações são mostrados na Tab. 41. Esta tabela contém os valores de coeficiente de arrasto extrapolados com MER, mostrados na coluna  $C_{Df}$  e, os valores das estimativas de erro numérico obtidas com estimador baseado em MER, mostrados na coluna  $U_m$ . Na coluna  $C_{Df1}$ , estão os valores da solução da malha mais fina e a coluna  $U_{GCI}$  apresenta os valores da estimativa de erro, obtidas com estimador GCI.

Tabela 41 – COEFICIENTE DE ARRASTO DAS FORMAS OTIMIZADAS E ESTIMATIVAS DE ERRO PARA  $M_\infty = 1,5$

$n_u$	$C_{Df}$	$U_m$	$C_{Df1}$	$U_{GCI}$
1	0,06788	0,00002	0,0682	0,0003
2	0,05409	0,00001	0,0545	0,0005
4	0,0487	-	0,0493	0,0008
8	0,0483	0,0001	0,0489	0,0008

Fonte – O autor(2018)

A Tab. 42 apresenta os resultados da tabela anterior para cada coordenada  $n_u$  e contém valores dos coeficientes obtidos por Kraiko et al. (2003) e também os valores obtidos por Bertoldo (2014) em sua tese. Kraiko et al. (2003) obtiveram valores de  $C_{Df}$  que são considerados benchmarks. Os valores de  $C_{Df}$  de Bertoldo (2014) são valores para as

formas 1C, 2C-S e 2C-NS, e os valores listados na tabela são valores de  $C_{Df}$  obtidos para escoamentos sem viscosidade. Para apresentar os valores de  $C_{Df}$  na tabela, adota-se a notação com formato  $0,06788(2) = 0,06788 \pm 0,00002$ , sendo que o valor entre parênteses é a estimativa do erro obtido pelo estimador baseado em MER, conforme apresentado na Tab. 41. Não foi possível obter o valor da estimativa de erro com o estimador baseado em MER para o número de coordenadas igual a 4. Em seu lugar, é mostrada a solução para a malha mais fina e incerteza obtida com o estimador GCI.

Tabela 42 – COMPARAÇÃO DE  $C_{Df}$  COM VALORES DE Kraiko et al. (2003) E Bertoldo (2014)

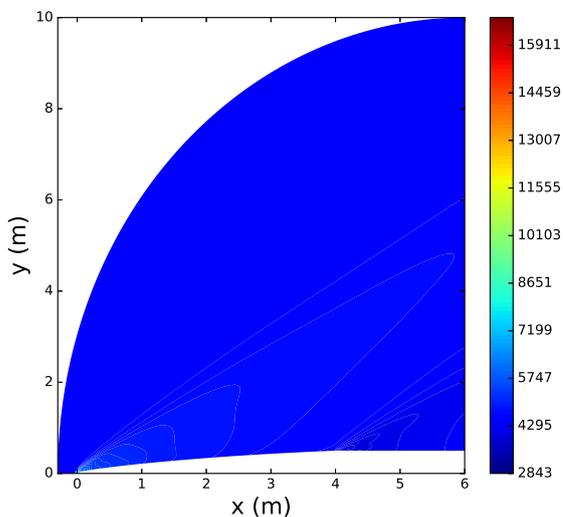
$n_u$	$C_{Df}$	Kraiko et al. (2003)	1C	2C-S	2C-NS
1	0,06788(2)				
2	0,05409(-2)				
4	0,0493(8)	0,0482	0,0504(6)	0,0504(9)	0,0501(6)
8	0,04828(13)				

Fonte – O autor(2018)

Os valores na Tab. 42 mostram que a medida que o número de variáveis aumenta, o valor de  $C_{Df}$  converge para o valor obtido por Kraiko et al. (2003). A diferença relativa entre o valor de coeficiente  $C_{Df}$  obtido por otimização com MER e o valor obtido por Kraiko et al. (2003) é de 1,1% para 4 coordenadas e de 0,16 % para 8 variáveis. Para esta última, a diferença absoluta é de  $8 \cdot 10^{-5}$ , que é menor do que a estimativa de erro numérico. A diferença relativa com os valores obtidos por Bertoldo (2014) foi de 4,39% para as formas 1C e 2C-S e de 3,76% para a forma 2C-NS. Os valores das diferenças relativas mostram que as otimizações obtidas com MER são iguais aos valores de Kraiko et al. (2003).

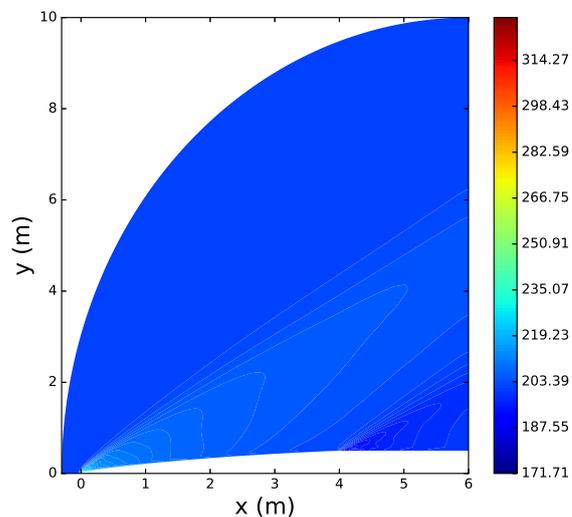
A seguir, são apresentadas figuras para o perfil otimizado com 8 coordenadas mostrando os campos de pressão (Fig. 5.16), temperatura (Fig. 5.17) e velocidades  $u$  (Fig. 5.18) e  $v$  (Fig. 5.19). Para o mesmo perfil, também são apresentados campos da massa específica (Fig. 5.20) e do Número de Mach (Fig. 5.21).

Figura 5.16 – CAMPO DE PRESSÃO (Pa) PARA  $f_r=4$  E  $M_\infty=1,5$



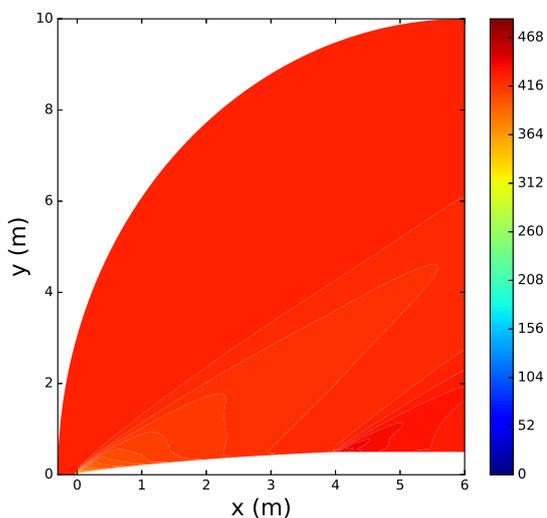
Fonte – O autor(2018)

Figura 5.17 – CAMPO DE TEMPERATURAS (K) PARA  $f_r=4$  E  $M_\infty=1,5$



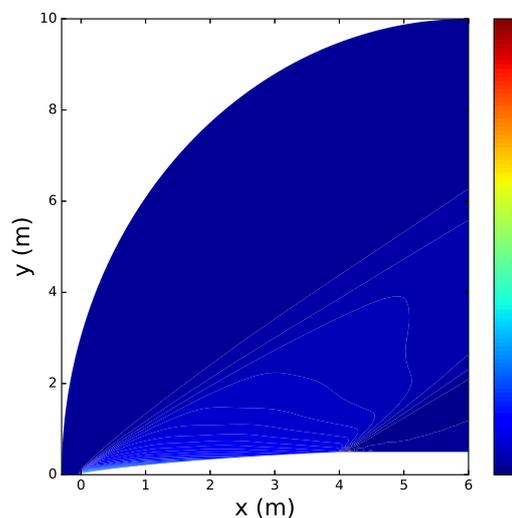
Fonte – O autor(2018)

Figura 5.18 – CAMPO DE VELOCIDADE u (m/s) PARA  $f_r=4$  E  $M_\infty=1,5$



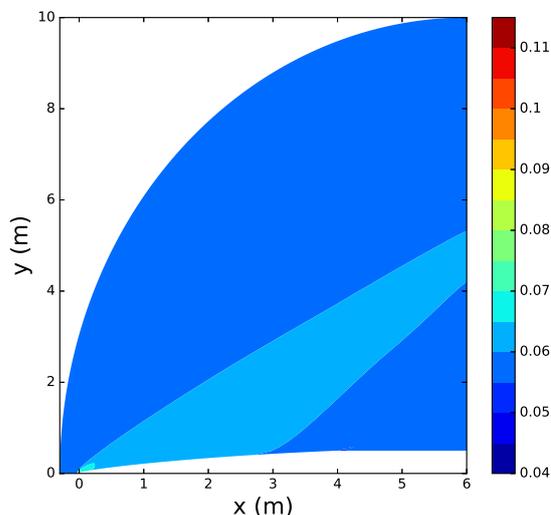
Fonte – O autor(2018)

Figura 5.19 – CAMPO DE VELOCIDADE v (m/s) PARA  $f_r=4$  E  $M_\infty=1,5$



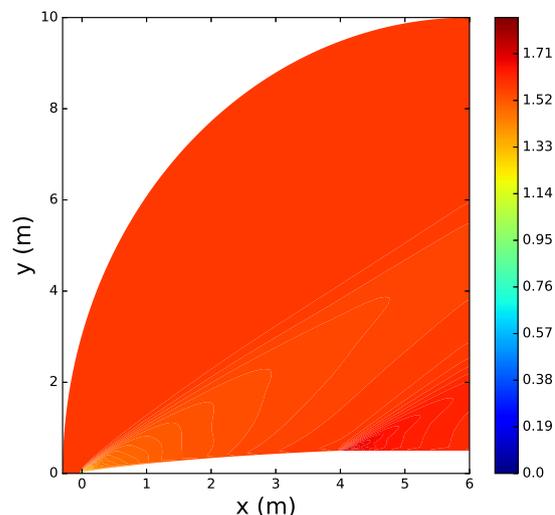
Fonte – O autor(2018)

Figura 5.20 – CAMPO DE MASSA ESPECÍFICA  $\rho$  ( $\text{kg/m}^3$ ) PARA  $f_r=4$  E  $M_\infty=1,5$



Fonte – O autor(2018)

Figura 5.21 – CAMPO DO NÚMERO DE MACH PARA  $f_r=4$  E  $M_\infty=1,5$



Fonte – O autor(2018)

### 5.3.2 Número de Mach $M_\infty = 3,0$

De modo similar ao que foi feito para o número de Mach  $M_\infty=1,5$ , a parametrização para as otimizações com  $M_\infty=3,0$  utilizou-se dos valores disponíveis na Tab. 15. Para definição do domínio, os valores  $l_a$  e  $l_b$  foram obtidos através de estudos efetuados antes das otimizações, de modo que a onda de choque estivesse dentro do domínio. A malha básica contém o mesmo número de volumes que a malha básica para  $M_\infty=1,5$ . O apêndice B.3 contém as informações de domínio e malha básica empregados em cada otimização desta seção. As simulações de otimização tiveram a tolerância do sistema linear para o ciclo de massa igual a  $10^{-10}$  e, os parâmetros para a otimização estão listados na Tab. 24.

A Tab. 43 lista os valores das coordenadas  $y$  obtidas com otimização, separados em valores obtidos com apenas uma malha (coluna  $m_1$ ), com 1 nível de extrapolação (coluna  $m_{1,2}$ ) e com 2 níveis de extrapolação (coluna  $m_{1,2,3}$ ). Os valores dos coeficientes  $C_{Df}$  otimizados são mostrados na Tab. 44; esta tabela também mostra o tempo de execução, em horas, de cada otimização.

Tabela 43 – VALORES DE  $y$  PARA  $M_\infty=3,0$ 

$n_u$	$x$	$m_1$	$m_{1,2}$	$m_{1,2,3}$
1	0	0,03354	0,03594	0,03354
2	0,00000	0,01890	0,02652	0,02300
	0,12500	0,24097	0,24526	0,24197
4	0,00000	0,01591	0,01849	0,01973
	0,03704	0,10225	0,10437	0,10397
	0,29630	0,44027	0,43981	0,43978
	0,99000	0,99522	0,99520	0,99522
8	0,00000	0,01138	0,02019	0,01973
	0,00292	0,02528	0,03385	0,02648
	0,02332	0,07817	0,08587	0,07543
	0,05273	0,13459	0,14018	0,13129
	0,18659	0,31942	0,32222	0,31981
	0,36443	0,51052	0,51270	0,50901
	0,62974	0,74485	0,74578	0,74244
	0,99000	0,99427	0,99442	0,99522

Fonte – O autor(2018)

Tabela 44 – VALORES DE  $C_{Df}$  OTIMIZADOS E TEMPO DE OTIMIZAÇÃO PARA  $n_u \in \{1, 2, 4, 8\}$  PARA  $M_\infty = 3,0$ 

$n_u$	$m_1$		$m_{1,2}$		$m_{1,2,3}$	
	$C_{Df}$	tempo (h)	$C_{Df}$	tempo (h)	$C_{Df}$	tempo (h)
1	4,9233E-02	0,77	4,8601E-02	0,96	4,8665E-02	35,42
2	4,1926E-02	0,49	4,1102E-02	3,34	4,1326E-02	31,70
4	4,0441E-02	0,93	3,9554E-02	96,24	3,9692E-02	232,25
8	4,0237E-02	3,15	3,9310E-02	28,45	3,9675E-02	62,12

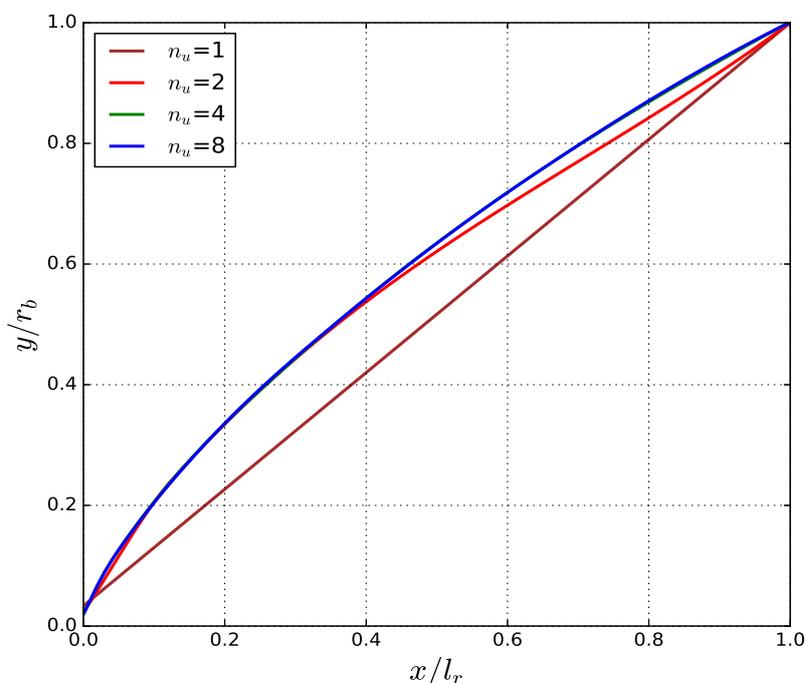
Fonte – O autor(2018)

Os valores de  $C_{Df}$  otimizados listados na Tab. 44 apresentam o mesmo comportamento observados nas otimizações anteriores para  $f_r=4$  e  $M_\infty=1,5$ : com o aumento do número de coordenadas, o valor de  $C_{Df}$  diminui. Este comportamento também foi observado nas otimizações com razão de aspecto  $f_r=2$ . Entretanto, os valores obtidos com apenas um nível de extrapolação, dispostos na coluna  $m_{1,2}$  para 4 e 8 coordenadas, apresentam valores menores que os valores obtidos com MER. As diferenças entre os valores obtidos com apenas uma extrapolação e os valores obtidos com MER para 4 e 8 coordenadas são da ordem de  $1,38 \cdot 10^{-4}$  e  $3,65 \cdot 10^{-4}$ , respectivamente. Percebe-se também que o tempo para execução de otimização aumenta com o número de coordenadas  $y$ , como já visto em outras otimizações. Para as otimizações com 4 coordenadas, tanto para a otimização com extrapolação quanto para a otimização com emprego de MER,

o tempo de execução foi consideravelmente maior que o tempo de execução para 8 coordenadas. O tempo para execução com um nível de extrapolação para 4 coordenadas foi, aproximadamente, 3,4 vezes maior que o tempo de execução para 8 coordenadas e, com o emprego de MER foi, aproximadamente, 3,7 vezes maior. Usualmente esperava-se o contrário, ou seja, que com mais coordenadas, o tempo de execução fosse maior. Entretanto, este comportamento também foi observado nas otimizações anteriores. A otimização para 8 coordenadas  $y$  e emprego de MER demorou, aproximadamente, 2,2 vezes mais que a otimização para 4 coordenadas sem o emprego de MER. Este aumento no tempo de execução é esperado pelo fato de que o emprego de MER com 2 níveis de extrapolação necessita da execução em 3 malhas distintas para obtenção de cada valor da função objetivo, enquanto que para apenas um nível de extrapolação, necessita-se obter o valor de apenas 2 malhas. Em geral, o tempo de otimização aumenta com o uso de extrapolação ou MER, mas o aumento não é linear, como já mostrado em otimizações anteriores.

Para mostrar a evolução dos perfis geométricos com o aumento do número de coordenadas, apresenta-se a Fig. 5.22. Estes perfis foram obtidos a partir das coordenadas das colunas  $x$  e  $m_{1,2,3}$  da Tab. 43.

Figura 5.22 – PERFIS GEOMÉTRICOS OBTIDOS COM 1, 2, 4 e 8 COORDENADAS PARA  $f_r=4$  e  $M_\infty=3,0$



Fonte – O autor(2018)

Com os valores das coordenadas  $y$  das otimizações efetuadas com MER, executou-se as simulações com tolerância de  $10^{-14}$ , visando obter a estimativa de erro

numérico. Esta opção foi adotada também para razão de aspecto  $f_r=2$ . Os resultados destas simulações são valores de coeficiente de arrasto  $C_{Df}$ , os valores das estimativas de erro numérico obtidas com estimador baseado em MER ( $U_m$ ), o valor da malha mais fina  $C_{Df1}$  e a estimativa obtida com o estimador GCI ( $U_{GCI}$ ) são mostrados na Tab. 45. Como os valores obtidos para 4 e 8 coordenadas são muito próximos, optou-se por apresentá-los com um número maior de casas decimais e, da mesma forma, as estimativas de erros correspondentes também foram apresentadas com 2 algarismos significativos. Observa-se que as estimativas de erro obtidas com o estimador MER e GCI tem mesma ordem de grandeza.

Tabela 45 – COEFICIENTES DE ARRASTO DAS FORMAS OTIMIZADAS E ESTIMATIVAS DE ERRO PARA  $M_\infty = 3,0$

$n_u$	$C_{Df}$	$U_m$	$C_{Df1}$	$U_{GCI}$
1	0,04868	-0,00005	0,04873	0,00007
2	0,041380	0,000004	0,04138	0,00003
4	0,039714	-0,000024	0,03977	0,00009
8	0,039710	-0,000038	0,03975	0,00007

Fonte – O autor(2018)

A Tab. 46 apresenta os resultados da tabela anterior para cada número de coordenada  $y$  e também apresenta os valores dos coeficientes obtidos por Kraiko et al. (2003) e os valores obtidos por Bertoldo (2014) em sua tese. Os valores de  $C_{Df}$  de Bertoldo (2014) são valores para as formas 1C, 2C-S e 2C-NS, e os valores listados na tabela são valores de  $C_{Df}$  obtidos para escoamentos sem viscosidade, pelo modelo de Euler.

Tabela 46 – COMPARAÇÃO DE  $C_{Df}$  COM VALORES DE Kraiko et al. (2003) E Bertoldo (2014)

$n_u$	$C_{Df}$	Kraiko et al. (2003)	1C	2C-S	2C-NS
1	0,04868(5)				
2	0,041380(4)				
4	0,039714(24)	0,0396	0,0400(4)	0,0400(5)	0,0399(3)
8	0,039710(38)				

Fonte – O autor(2018)

Os valores da Tab. 46 mostram que os resultados obtidos convergem para o valor de Kraiko et al. (2003) com o aumento de número de coordenadas. A diferença relativa entre o valor obtido para 4 coordenadas para o valor de Kraiko et al. (2003) é 0,28% e para 8 coordenadas, é 0,27%. A diferença relativa entre o valor obtido para 8 coordenadas e os valores obtidos para as formas 1C e 2C-S, do trabalho de Bertoldo (2014) é 0,72%, enquanto para a forma 2C-NS do mesmo trabalho, foi de 0,47%. Estes valores mostram que a diferença relativa entre o valor do coeficiente de arrasto  $C_{Df}$  obtido pelo método

baseado em MER explicado neste trabalho para os valores de Kraiko et al. (2003) é menor que 1 por cento

O apêndice C.2 contém figuras dos campos de pressão, temperatura, velocidades  $u$  e  $v$ , massa específica e número de Mach.

### 5.3.3 Número de Mach $M_\infty = 6,0$

Para parametrizar as simulações empregadas nas otimizações com número de Mach  $M_\infty=6,0$  utilizou-se os parâmetros físicos listados na Tab. 15. De forma semelhante ao efetuado nas otimizações anteriores, obteve-se as informações de domínio para que este contivesse a onda de choque. Os valores dos parâmetros de domínio e geração da malha encontram-se no apêndice B.2. Assim como nas otimizações anteriores para esta razão de aspecto, as simulações de otimização foram configuradas para utilizar tolerância do sistema linear para o ciclo de massa igual a  $10^{-10}$ . Os parâmetros para configuração da otimização são os mesmos utilizados pelas outras otimizações e estão disponíveis na Tab. 24.

Os valores das coordenadas  $y$  obtidas após a otimização estão listadas na Tab. 47, organizadas por número de coordenadas para formar o perfil geométrico otimizado. Os valores dos coeficientes  $C_{Df}$  otimizados são mostrados na Tab. 48, juntamente com o tempo de execução (em horas) de cada otimização.

Tabela 47 – VALORES  $y$  PARA  $M_\infty=6,0$

$n_u$	$x$	$m_1$	$m_{1,2}$	$m_{1,2,3}$
1	0	0,03324	0,03680	0,03706
2	0,00000 0,12500	0,02160 0,23302	0,02415 0,23265	0,02390 0,23217
4	0,00000 0,03704 0,29630 0,99000	0,01722 0,10363 0,42742 0,99380	0,01878 0,10483 0,42547 0,99376	0,01845 0,10471 0,42485 0,99375
8	0,00000 0,00292 0,02332 0,05273 0,18659 0,36443 0,62974 0,99000	0,01207 0,02606 0,07957 0,13481 0,31332 0,49645 0,72702 0,99333	0,01405 0,02740 0,08051 0,13556 0,31240 0,49398 0,72516 0,99336	0,01430 0,02748 0,08048 0,13563 0,31212 0,49338 0,72495 0,99329

Fonte – O autor(2018)

Os valores de  $C_{Df}$  otimizados listados na Tab. 48 apresentaram o mesmo comportamento observado para razão de aspecto  $f_r=2$ : incremento no tempo de execução

Tabela 48 – VALORES DE  $C_{Df}$  OTIMIZADOS E TEMPO DE OTMIZAÇÃO PARA  $n_u \in \{1, 2, 4, 8\}$  para  $M_\infty = 6,0$ 

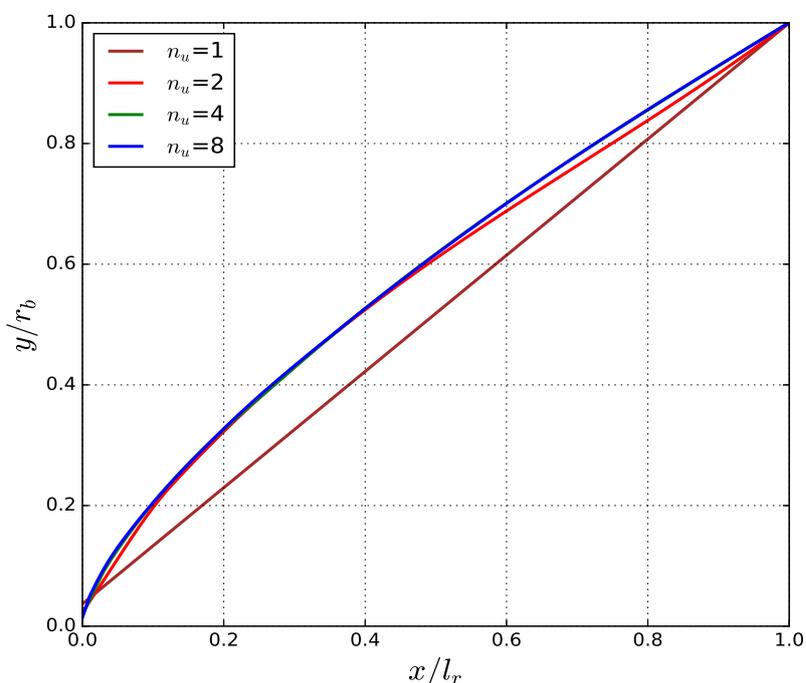
$n_u$	$m_1$		$m_{1,2}$		$m_{1,2,3}$	
	$C_{Df}$	tempo (h)	$C_{Df}$	tempo (h)	$C_{Df}$	tempo (h)
1	3,7856E-02	0,17	3,7854E-02	1,39	3,7991E-02	17,03
2	3,2609E-02	0,64	3,2711E-02	4,10	3,2899E-02	35,32
4	3,1905E-02	1,51	3,1992E-02	8,78	3,2179E-02	76,58
8	3,1777E-02	2,68	3,1887E-02	33,71	3,2071E-02	852,00

Fonte – O autor(2018)

com o aumento do número de coordenadas  $y$  para formação do perfil geométrico otimizado. Houve também um aumento no tempo de execução com o uso de um nível de extrapolação em relação ao tempo de execução para a otimização com apenas uma malha. O tempo de execução para otimização com emprego de MER é maior com relação à otimização apenas com o emprego de um nível de extrapolação. Este comportamento é esperado, pois, como já explicado anteriormente, o emprego de MER implica em 3 execuções em malhas diferentes para obtenção de apenas um valor a ser fornecido ao algoritmo de otimização. Entretanto, percebeu-se um aumento substancial no tempo para 8 coordenadas com o emprego de MER em relação aos outros números de coordenadas. Este tempo de execução foi, aproximadamente, 25 vezes maior que o tempo de execução para otimização com apenas um nível de extrapolação. Para apenas uma coordenada, o tempo de execução com MER foi, aproximadamente 13 vezes maior que o tempo de execução com o emprego de um nível de extrapolação. Como já explicado anteriormente, este aumento de tempo de execução entre as otimizações não é linear e, entende-se também, que o aumento de tempo também está relacionado com o algoritmo de otimização, no sentido de que a busca pelo valor otimizado implica em maior tempo na execução da otimização. Como o emprego de extrapolação ou de MER resultam em valores mais acurados que os valores obtidos apenas com uma malha, entende-se que devido a isto, o processo de otimização tende a demorar mais. A Fig. 5.23 mostra a evolução dos perfis com 1, 2, 4 e 8 coordenadas obtidas com MER, listados na Tab. 47.

Com os 8 valores das coordenadas  $y$  obtidas por otimização com emprego de MER foram executadas as 4 simulações para cada número de coordenadas  $y$  com valor de tolerância para sistema linear de  $10^{-14}$ . Este procedimento é o mesmo explicado anteriormente e aplicado em outros números de Mach. Com os valores obtidos para o coeficiente de arrasto por estas simulações, aplicou-se MER com 3 níveis de extrapolação para obter os valores de coeficiente de arrasto  $C_{Df}$ . Também obteve-se as estimativas de erro com o estimador baseado em MER e a incerteza com o estimador GCI. Os valores dos coeficientes de arrasto  $C_{Df}$  obtidos com emprego de MER, os valores da estimativa do erro obtido com MER (coluna  $U_m$ ), o valor da solução para a malha mais fina (coluna  $C_{Df1}$ )

Figura 5.23 – PERFIS GEOMÉTRICOS OBTIDOS COM 1, 2, 4 e 8 COORDENADAS PARA  $f_r=4$  e  $M_\infty=6,0$



Fonte – O autor(2018)

e a incerteza (coluna  $U_{GCI}$ ) estão dispostos na Tab. 49

Tabela 49 – COEFICIENTE DE ARRASTO DAS FORMAS OTIMIZADAS E ESTIMATIVAS DE ERRO PARA  $M_\infty = 6,0$

$n_u$	$C_{Df}$	$U_m$	$C_{Df1}$	$U_{GCI}$
1	0,0380	-0,0003	0,03796	0,0003
2	0,0329	-0,0004	0,03284	0,0005
4	0,0322	-0,0006	0,03212	0,0008
8	0,0321	0,0001	0,03201	0,0008

Fonte – O autor(2018)

Percebe-se pelos valores da Tab. 49 que com o aumento do número de coordenadas  $y$ , o valor de  $C_{Df}$  converge para 0,0321. Os valores do erro, obtido com o estimador baseado em MER e da incerteza calculada com estimador GCI tem a mesma ordem de grandeza, mas a estimativa do erro é menor que a incerteza.

A Tab. 50 mostra os resultados dos coeficientes  $C_{Df}$  otimizados para cada número de coordenada  $y$  e também contém os valores dos coeficientes de arrasto  $C_{Df}$  obtidos por Kraiko et al. (2003) e os valores disponíveis na tese de Bertoldo (2014).

Os valores da Tab. 46 mostram que os valores de  $C_{Df}$  obtidos convergem para os valores de Kraiko et al. (2003) e também para os valores de Bertoldo (2014). A

Tabela 50 – COMPARAÇÃO DE  $C_{Df}$  COM VALORES DE Kraiko et al. (2003) E Bertoldo (2014)

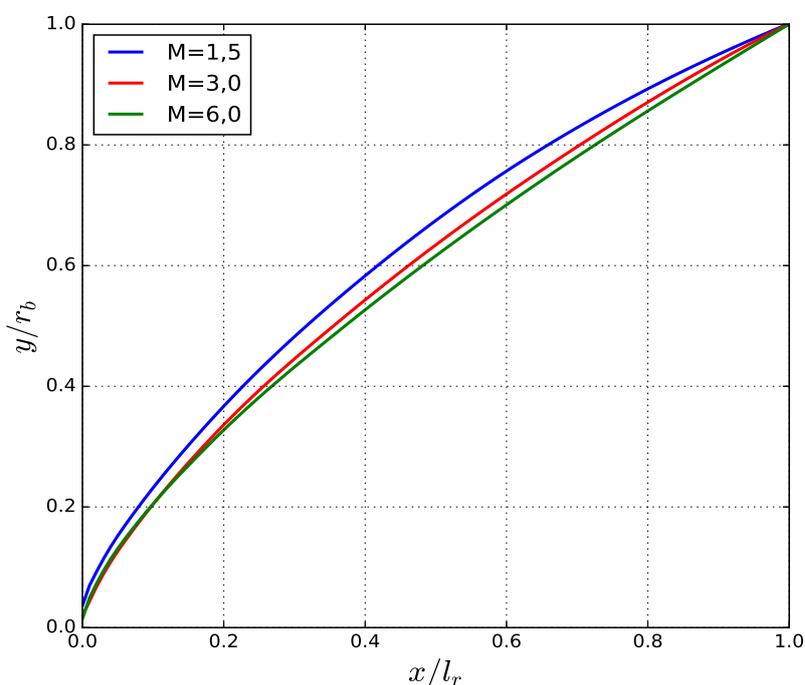
$n_u$	$C_{Df}$	Kraiko et al. (2003)	1C	2C-S	2C-NS
1	0,0380(3)				
2	0,0329(4)				
4	0,0322(6)	0,0322	0,0322(3)	0,0322(4)	0,0321(4)
8	0,0321(1)				

Fonte – O autor(2018)

convergência é maior com o aumento do número de coordenadas  $y$  que formam o perfil geométrico otimizado. O diferença relativa entre o valor de  $C_{Df}$  obtido pelo método descrito neste trabalho com 8 coordenadas  $y$  e o valor de Kraiko et al. (2003) é de 0,31%. Este valor é o mesmo para os valores obtidos para todas as formas de Bertoldo (2014). Este resultado mostra que com o aumento do número de coordenadas  $y$ , o perfil geométrico obtido é otimizado e o valor do coeficiente de arrasto aproxima-se ao valor obtido por Kraiko et al. (2003). Percebe-se também que para este número de Mach,  $M_\infty=6,0$ , o valor obtido com 4 coordenadas já é igual ao valor obtido por Kraiko et al. (2003) e Bertoldo (2014).

O apêndice C.2.2 contém figuras dos campos de pressão, temperatura, velocidades  $u$  e  $v$ , massa específica e número de Mach.

A Fig. 5.24 apresenta as 3 formas otimizadas obtidas com 8 coordenadas e com o emprego de MER para  $f_r=4$  e os 3 números de Mach apresentados nesta seção. De forma semelhante ao que aconteceu para  $f_r=2$ , o perfil geométrico para  $M_\infty=6$  é mais fino que os outros dois.

Figura 5.24 – PERFIS OTIMIZADOS PARA  $f_r=4$  e  $M_\infty \in \{1,5; 3,0; 6,0\}$ 

Fonte – O autor(2018)

## 5.4 FORMAS OTIMIZADAS E COEFICIENTE DE ARRASTO PARA $f_r = 3$

Para a razão de aspecto  $f_r=3$ , executou-se o procedimento de otimizações similar ao procedimento efetuado para as razões de aspecto  $f_r=2$  e  $f_r=4$ , obtendo-se as formas otimizadas para os 3 números de Mach definidos para este trabalho,  $M_\infty \in \{1,5, 3, 6\}$ . As seções a seguir explicitam os procedimentos para otimização e obtenção dos valores dos coeficientes de arrasto  $C_{Df}$  para cada número de Mach. Entretanto, os valores obtidos não são comparados com os trabalhos de Kraiko et al. (2003) e Bertoldo (2014) pois estes dois trabalhos não forneceram valores para esta razão de aspecto.

### 5.4.1 Número de Mach $M_\infty = 1,5$

As simulações foram configuradas segundo os parâmetros físicos listados na Tab. 15. Os parâmetros de domínio, malha básica e parâmetros para geração da malha para  $M_\infty = 1,5$  são informados na Tab. 51. Durante a otimização empregou-se a tolerância de sistema linear para o ciclo de massa igual a  $10^{-10}$  para as simulações. Para configuração da otimização, os parâmetros para cada número de coordenadas  $n_u \in \{1, 2, 4, 8\}$  estão disponíveis na Tab. 24.

Tabela 51 – PARÂMETROS DE DOMÍNIO E MALHA -  $M_\infty=1,5$ 

Parâmetro	Número de variáveis $n_u$			
	1	2	4	8
Comprimento horizontal - $l_a$	4,8	4,8	4,8	4,8
Comprimento vertical - $l_b$	10	10	10	10
Comprimento da ogiva - $l_o$		3,0		
Comprimento do cilindro - $l_c$		1,5		
Malha básica		90×30		
Expoente para geração da malha - $aks$		1,7		
Fator para criação do primeiro volume - $cbf$	2,0	2,0	1,0	2,0
Fator para conc. de volumes na ogiva - $fl_o$	0,65	0,65	0,65	0,65
Fator para conc. de volumes na região frontal - $fp_1$	0,65	0,65	0,65	0,65
Fator para conc. de volumes entre a ogiva e o cilindro - $fp_2$	0,15	0,15	0,15	0,15

Fonte – O autor(2018)

Através da otimização, obteve-se os valores das coordenadas  $y$  que definiram o perfil geométrico que minimizam os valores dos coeficientes  $C_{Df}$ . A Tab. 52 mostra os valores das coordenadas  $y$  obtidas.

Tabela 52 – VALORES DE  $y$  PARA  $M_\infty=1,5$ 

$n_u$	$x$	$m_1$	$m_{1,2}$	$m_{1,2,3}$
1	0	0,08464	0,09241	0,09315
2	0,00000	0,05505	0,07415	0,07653
	0,12500	0,27976	0,29661	0,22518
4	0,00000	0,04945	0,06848	0,05046
	0,03704	0,13314	0,15087	0,12463
	0,29630	0,47368	0,48749	0,44919
	0,99000	0,99667	0,99699	0,99713
8	0,00000	0,05048	0,07310	0,07743
	0,00292	0,06419	0,08647	0,08986
	0,02332	0,11367	0,13377	0,13650
	0,05273	0,16781	0,18633	0,18828
	0,18659	0,35221	0,36803	0,36876
	0,36443	0,54319	0,55665	0,55699
	0,62974	0,77160	0,77949	0,77897
	0,99000	0,99545	0,99599	0,99601

Fonte – O autor(2018)

Os valores do coeficiente de arrasto  $C_{Df}$  minimizados pela otimização são apresentados na Tab. 53, bem como o tempo, em horas, para cada otimização, dispostos por número de coordenadas. Estes valores de  $C_{Df}$  mostram que, com o aumento de coordenadas  $y$ , o valor de  $C_{Df}$  diminui, similar ao que ocorre nas outras otimizações deste

trabalho. Com a aplicação de MER, o valor do coeficiente é ainda menor que o valor de  $C_{Df}$  sem emprego de extrapolação. Entretanto, o tempo para execução aumenta efusivamente para o mesmo número de coordenadas quando emprega-se MER. Para 8 coordenadas, o tempo aumenta em 11 vezes com relação a otimização com apenas extrapolação e, com um aumento de 138 vezes para 4 coordenadas. Não foi possível determinar com precisão a causa deste incremento, mas entende-se que deve-se à busca pelo valor minimizado com pequenas alterações na região de busca.

Tabela 53 – VALORES DE  $C_{Df}$  OTIMIZADOS E TEMPO DE OTIMIZAÇÃO PARA  $n_u \in \{1, 2, 4, 8\}$  para  $M_\infty = 1,5$

$n_u$	$m_1$		$m_{1,2}$		$m_{1,2,3}$	
	$C_{Df}$	tempo (h)	$C_{Df}$	tempo (h)	$C_{Df}$	tempo (h)
1	1,0851E-01	0,10	1,0513E-01	0,66	1,0411E-01	4,17
2	8,8349E-02	0,31	8,5399E-02	2,11	9,5112E-02	288,41
4	8,3316E-02	1,74	7,9145E-02	3,69	8,0298E-02	512,17
8	8,2744E-02	3,45	7,8402E-02	39,76	7,8369E-02	451,35

Fonte – O autor(2018)

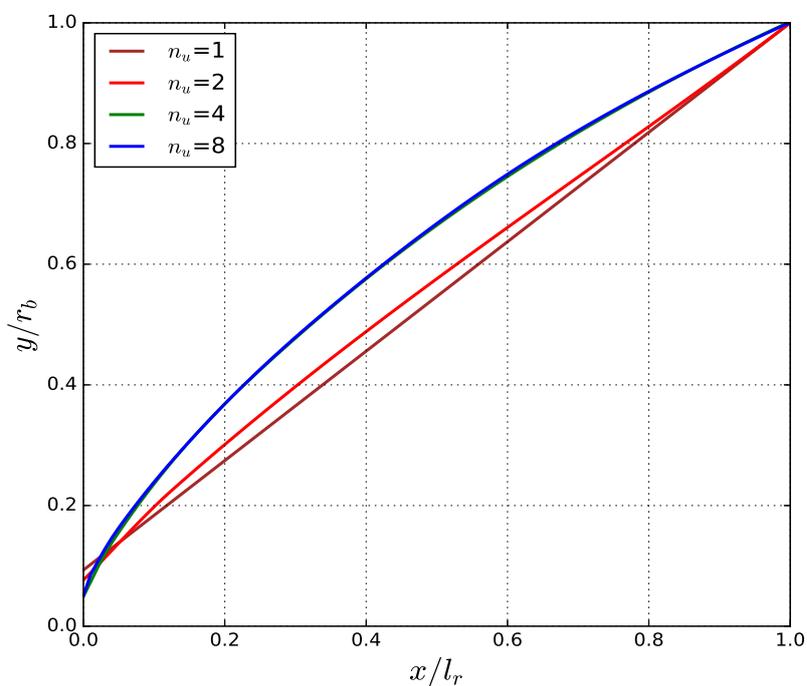
Os valores de  $C_{Df}$  foram obtidos com simulações com tolerância de sistema linear para o ciclo de massa igual a  $10^{-14}$ , conforme efetuado para as otimizações com razão de aspecto  $f_r=2$ . A Tab. 54 mostra esses valores, bem como as estimativas de erro numérico obtidas com estimador baseado em MER ( $U_m$ ) e com o estimador GCI ( $U_{GCI}$ ).

Tabela 54 – COEFICIENTE DE ARRASTO DAS FORMAS OTIMIZADAS E ESTIMATIVAS DE ERRO PARA  $M_\infty = 1,5$

$n_u$	$C_{Df}$	$U_m$	$C_{Df1}$	$U_{GCI}$
1	0,1047	0,00000	0,10451	0,00009
2	0,09525	0,00000	0,09528	0,00008
4	0,07934	0,00001	0,07978	0,00059
8	0,07876	0,00002	0,07926	0,00062

Fonte – O autor(2018)

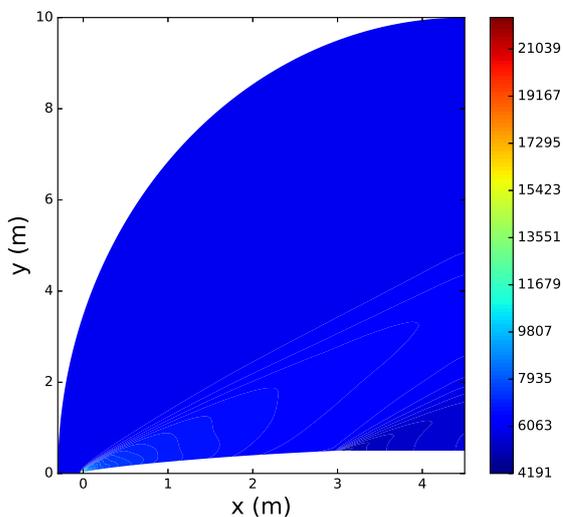
A Fig. 5.25 mostra os 4 perfis geométricos obtidos com 1, 2, 4 e 8 coordenadas e com o emprego de MER na otimização. Observa-se que os perfis obtidos com 4 e 8 coordenadas são bem semelhantes.

Figura 5.25 – PERFIS GEOMÉTRICOS OBTIDOS COM 1, 2, 4 e 8 COORDENADAS PARA  $f_r=3$  e  $M_\infty=1,5$ 

Fonte – O autor(2018)

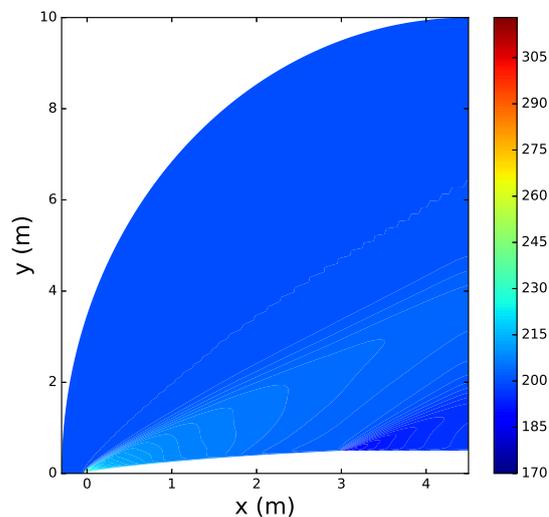
As figuras a seguir mostram os campos de pressão (Fig. 5.26), temperatura (Fig. 5.27) e velocidades  $u$  (Fig. 5.28) e  $v$  (Fig. 5.29). Para o mesmo perfil, também são apresentados campos da massa específica (Fig. 5.30) e do Número de Mach (Fig. 5.31).

Figura 5.26 – CAMPO DE PRESSÃO (Pa) PARA  $f_r=3$  E  $M_\infty=1,5$



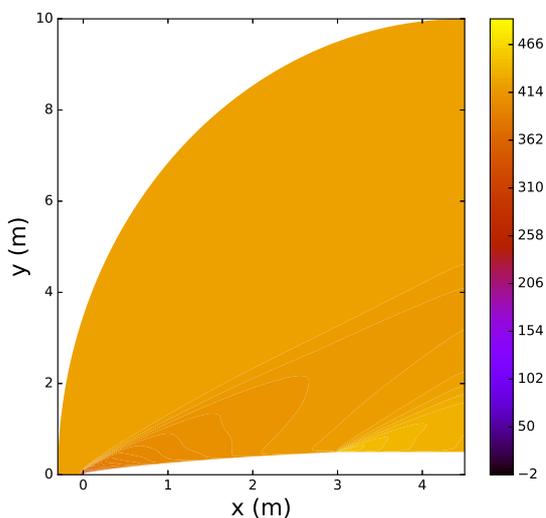
Fonte – O autor(2018)

Figura 5.27 – CAMPO DE TEMPERATURAS (K) PARA  $f_r=3$  E  $M_\infty=1,5$



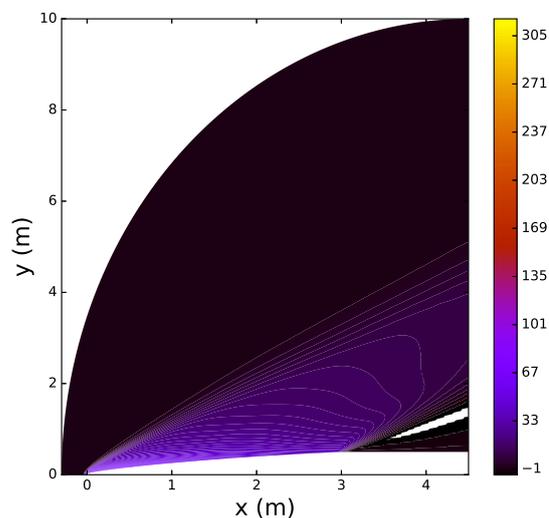
Fonte – O autor(2018)

Figura 5.28 – CAMPO DE VELOCIDADE u (m/s) PARA  $f_r=3$  E  $M_\infty=1,5$



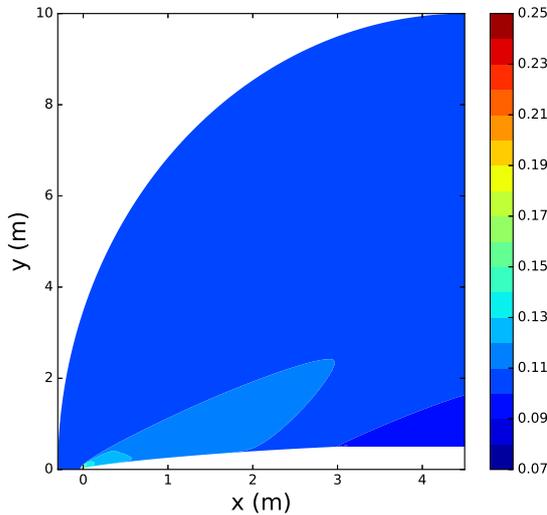
Fonte – O autor(2018)

Figura 5.29 – CAMPO DE VELOCIDADE v (m/s) PARA  $f_r=3$  E  $M_\infty=1,5$



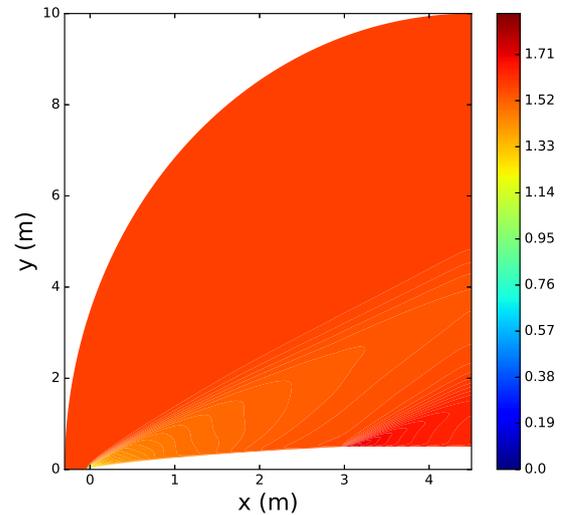
Fonte – O autor(2018)

Figura 5.30 – CAMPO DE MASSA ESPECÍFICA  $\rho$  (kg/m<sup>3</sup>) PARA  $f_r=3$  E  $M_\infty=1,5$



Fonte – O autor(2018)

Figura 5.31 – CAMPO DO NÚMERO DE MACH PARA  $f_r=3$  E  $M_\infty=1,5$



Fonte – O autor(2018)

#### 5.4.2 Número de Mach $M_\infty = 3,0$

Para parametrização das otimizações para  $M_\infty=3,0$ , adotou-se procedimento semelhante ao empregado para  $M_\infty=1,5$ . Estes parâmetros de domínio, os valores para configuração da malha básica e os parâmetros para geração da malha para  $M_\infty = 3,0$  encontram-se no apêndice B.5. Os parâmetros de domínio foram modificados com relação aos utilizados nas otimizações de  $M_\infty=1,5$  para que a onda de choque estive dentro do domínio. Os parâmetros físicos, da mesma forma que em outras otimizações, encontram-se na Tab. 15. As simulações das otimizações foram configuradas para executar com tolerância de sistema linear para o ciclo de massa igual a  $10^{-10}$ . Para configuração do otimizador, empregou-se os parâmetros disponíveis na Tab. 24 para cada número de coordenadas  $n_u \in \{1, 2, 4, 8\}$ .

Após o procedimento de otimização, obteve-se os valores dos coeficiente  $C_{Df}$  otimizados e as coordenadas  $y$  que produziram os perfis geométricos que minimizam  $C_{Df}$ . Estes valores de coordenadas  $y$  estão dispostos na Tab. 55. Os valores dos coeficientes  $C_{Df}$  obtidos estão na Tab. 56, bem como o tempo, em horas, das otimizações.

Os valores de  $C_{Df}$  otimizados listados na Tab. 56 apresentam o mesmo comportamento observados nas otimizações anteriores, que com o aumento do número de coordenadas, o valor de  $C_{Df}$  diminui. Entretanto, os valores obtidos com apenas um nível de extrapolação, dispostos na coluna  $m_{1,2}$  para 4 e 8 coordenadas, apresentam valores menores que os valores obtidos com MER. Porém, entendendo-se que os valores obtidos com MER são mais acurados, adotou-se a mesma escolha das outras otimizações e selecionou-se o conjunto de coordenadas  $y$  obtidas com MER, para efetuar as simulações

com tolerância de sistema linear para o ciclo de massa igual a  $10^{-14}$ . Os perfis geométricos otimizados com 1, 2, 4 e 8 coordenadas são mostrados na Fig. 5.32.

Tabela 55 – VALORES DE  $y$  PARA  $M_\infty=3,0$

$n_u$	$x$	$m_1$	$m_{1,2}$	$m_{1,2,3}$
1	0	0,04589	0,06651	0,05487
2	0,00000	0,02886	0,05247	0,03819
	0,12500	0,24586	0,25750	0,24943
4	0,00000	0,03215	0,03396	0,03584
	0,03704	0,11508	0,11752	0,11730
	0,29630	0,44244	0,44167	0,44120
	0,99000	0,99453	0,99479	0,99469
8	0,00000	0,03109	0,02884	0,03472
	0,00292	0,04170	0,04170	0,04542
	0,02332	0,09184	0,09299	0,09431
	0,05273	0,14592	0,14713	0,14760
	0,18659	0,32507	0,32458	0,32403
	0,36443	0,51052	0,50999	0,50955
	0,62974	0,74197	0,73915	0,74040
	0,99000	0,99298	0,99443	0,99391

Fonte – O autor(2018)

Os valores de  $C_{Df}$  obtidos com simulações com tolerância de sistema linear para o ciclo de massa igual a  $10^{-14}$ , de modo similar ao que é feito para outras otimizações, estão listados na Tab. 57, bem como as estimativas de erro numérico obtidas com estimador baseado em MER ( $U_m$ ) e com o estimador GCI ( $U_{GCI}$ ). O valor de coeficiente  $C_{Df}$  com 8 coordenadas tem diferença da ordem de  $1,4 \cdot 10^{-4}$  com o valor obtido diretamente pela otimização. As estimativas de erro obtidas com estimador GCI são usualmente maiores do que as obtidas com o estimador baseado em MER. Porém, a estimativa  $U_m$  obtida para 8 coordenadas é cerca de 2 vezes maior que o estimador GCI.

Tabela 56 – VALORES DE  $C_{Df}$  OTIMIZADOS E TEMPO DE OTIMIZAÇÃO PARA  $n_u \in \{1, 2, 4, 8\}$  PARA  $M_\infty = 3,0$

$n_u$	$m_1$		$m_{1,2}$		$m_{1,2,3}$	
	$C_{Df}$	tempo (h)	$C_{Df}$	tempo (h)	$C_{Df}$	tempo (h)
1	7,8971E-02	0,06	7,4679E-02	0,42	7,5538E-02	2,98
2	6,6695E-02	0,23	6,5931E-02	34,87	6,4942E-02	6,17
4	6,5162E-02	0,88	6,3355E-02	2,34	6,3822E-02	13,85
8	6,4888E-02	1,22	6,3049E-02	3,45	6,3633E-02	13,31

Fonte – O autor(2018)

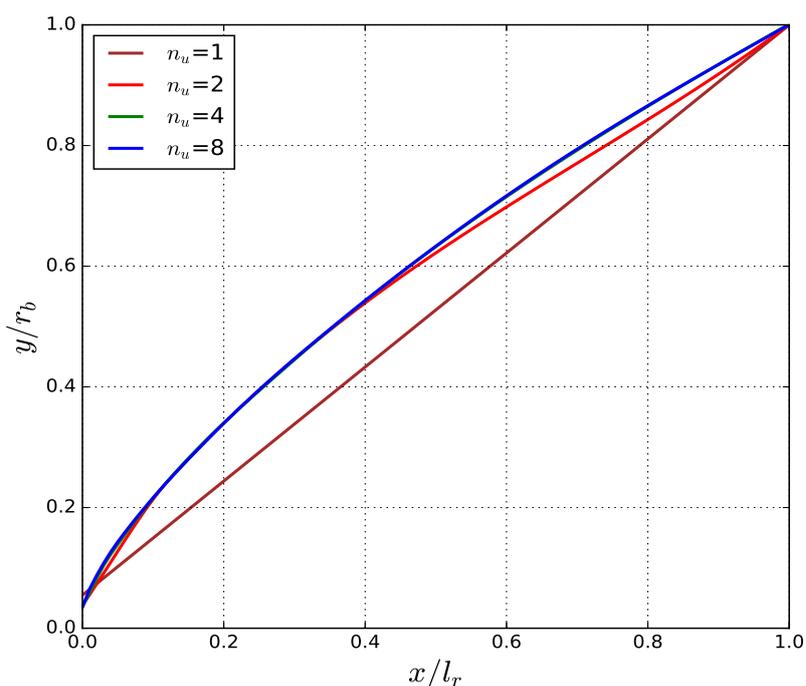
Tabela 57 – COEFICIENTE DE ARRASTO DAS FORMAS OTIMIZADAS E ESTIMATIVAS DE ERRO PARA  $M_\infty = 3,0$

$n_u$	$C_{Df}$	$U_m$	$C_{Df1}$	$U_{GCI}$
1	0,07558	-0,00009	0,07567	0,00013
2	0,06574	0,00003	0,06571	0,00004
4	0,06392	0,00003	0,06390	0,00011
8	0,06377	-0,00014	0,06371	0,00008

Fonte – O autor(2018)

A Fig. 5.32 mostra os perfis obtidos com 1, 2, 4 e 8 coordenadas e com a aplicação de MER. As figuras dos campos de pressão, temperatura, velocidades  $u$  e  $v$ , massa específica e número de Mach encontram-se no apêndice C.3.1.

Figura 5.32 – PERFIS GEOMÉTRICOS OBTIDOS COM 1, 2, 4 e 8 COORDENADAS PARA  $f_r=3$  e  $M_\infty=3,0$



Fonte – O autor(2018)

### 5.4.3 Número de Mach $M_\infty = 6,0$

A parametrização das otimizações para  $M_\infty=6,0$  seguiu os mesmos procedimentos adotados para outros números de Mach. As simulações foram configuradas segundo os parâmetros físicos listados na Tab. 15 e, utilizou-se os parâmetros de domínio, malha básica e parâmetros para geração de malha para  $M_\infty = 6,0$  informados no apêndice B.6. As simulações foram configuradas para executar com tolerância de sistema

linear para o ciclo de massa igual a  $10^{-10}$ . Para a otimização, utilizou-se os parâmetros disponíveis na Tab. 24 para cada número de coordenadas  $n_u \in \{1, 2, 4, 8\}$ .

Efetuada-se a otimização, obteve-se as coordenadas  $y$  e os coeficientes de arrasto  $C_{Df}$  otimizados. A Tab. 58 apresenta os valores das coordenadas  $y$  que definiram os perfis geométricos que minimizaram o valor do coeficiente  $C_{Df}$  para cada número de coordenadas  $y$ . A Tab. 59 mostra os valores dos coeficientes  $C_{Df}$  otimizados, bem como o tempo em horas para as otimizações.

Tabela 58 – VALORES DE  $y$  PARA  $M_\infty=6,0$ 

$n_u$	$x$	$m_1$	$m_{1,2}$	$m_{1,2,3}$
1	0	0,05516	0,06406	0,06577
2	0,00000	0,03327	0,03798	0,03941
	0,12500	0,24024	0,24237	0,24194
4	0,00000	0,02834	0,02973	0,03156
	0,03704	0,11171	0,11615	0,11576
	0,29630	0,43189	0,43011	0,42983
	0,99000	0,99332	0,99324	0,99329
8	0,00000	0,02997	0,02225	0,03022
	0,00292	0,03977	0,03555	0,04099
	0,02332	0,08992	0,08968	0,09122
	0,05273	0,14346	0,14524	0,14528
	0,18659	0,31968	0,31989	0,32004
	0,36443	0,50040	0,49697	0,49673
	0,62974	0,72768	0,72275	0,72379
	0,99000	0,99225	0,99314	0,99282

Fonte – O autor(2018)

Os valores de  $C_{Df}$  otimizados listados na tabela Tab. 59 apresentam o mesmo comportamento observados em outras otimizações de que, com o aumento do número de coordenadas, o valor de  $C_{Df}$  diminui. Entretanto, os valores obtidos com apenas um nível de extrapolação, dispostos na coluna  $m_{1,2}$  para 4 e 8 coordenadas, apresentam valores menores que os valores obtidos com MER. Seguindo a mesma opção efetuada para o número de Mach  $M_\infty=3$ , selecionou-se os valores de coordenadas  $y$  obtidos com MER porque entende-se que esses valores são mais acurados. Com a seleção das coordenadas  $y$ , efetuou-se as simulações com tolerância de sistema linear para o ciclo de massa igual a  $10^{-14}$ . Observa-se que o tempo de execução da otimização aumenta com o incremento do número de coordenadas e com a aplicação de MER. Como também identificado em outras otimizações, quando o número de coordenadas  $y$  aumenta, o tempo das otimizações também aumenta. Com o emprego de extrapolação e de MER, este tempo incrementa consideravelmente. Entretanto, este aumento no tempo de otimização não é linear, inclusive para o mesmo número de coordenadas. Observa-se, por exemplo,

que o emprego de MER para 8 coordenadas  $y$  incrementou o tempo de otimização aproximadamente em 2,2 vezes. Entretanto para o mesmo número de coordenadas, o incremento de tempo entre a otimização sem aplicação de extrapolação e com emprego de extrapolação, foi de 8,2 vezes, aproximadamente.

Tabela 59 – VALORES DE  $C_{Df}$  OTIMIZADOS E TEMPO DE OTIMIZAÇÃO PARA  $n_u \in \{1, 2, 4, 8\}$  PARA  $M_\infty = 6,0$

$n_u$	$m_1$		$m_{1,2}$		$m_{1,2,3}$	
	$C_{Df}$	tempo (h)	$C_{Df}$	tempo (h)	$C_{Df}$	tempo (h)
1	6,0124E-02	0,19	5,9967E-02	0,66	6,0392E-02	3,86
2	5,2247E-02	0,32	5,2187E-02	1,60	5,2783E-02	8,83
4	5,1389E-02	0,48	5,1380E-02	3,01	5,1952E-02	15,24
8	5,1193E-02	2,10	5,1128E-02	17,19	5,1810E-02	37,54

Fonte – O autor(2018)

Os valores de  $C_{Df}$  obtidos com simulações com tolerância de sistema linear para o ciclo de massa igual a  $10^{-14}$ , de modo similar ao que é feito para outras otimizações são listados na Tab. 60, a incerteza obtida com estimador baseado em MER ( $U_m$ ), o valor de  $C_{Df}$  obtido para a malha mais fina (coluna  $C_{Df1}$ ) e a incerteza obtida com o estimador GCI ( $U_{GCI}$ ).

Tabela 60 – COEFICIENTES DE ARRASTO DAS FORMAS OTIMIZADAS E ESTIMATIVAS DE ERRO PARA  $M_\infty = 6,0$

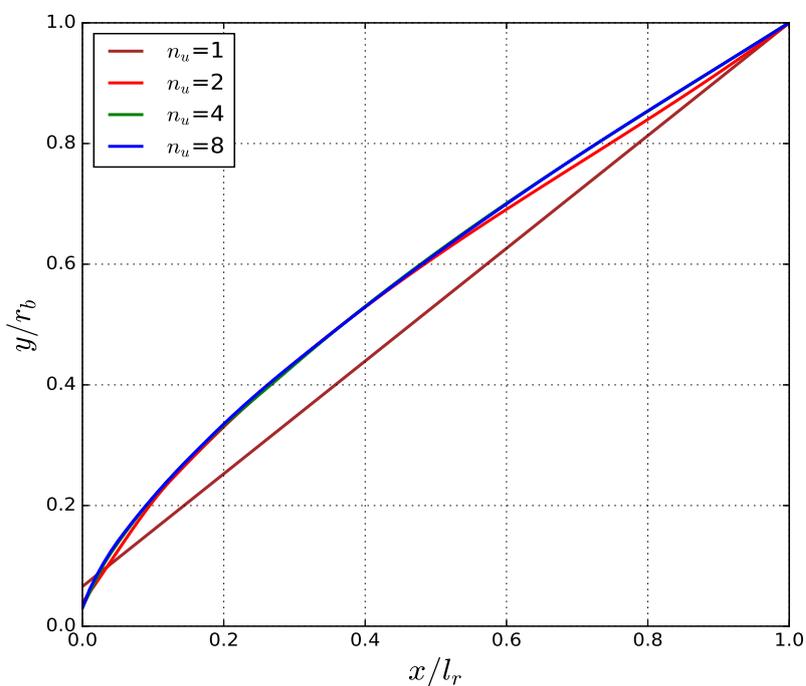
$n_u$	$C_{Df}$	$U_m$	$C_{Df1}$	$U_{GCI}$
1	0,0605	0,00015	0,06031	0,00014
2	0,05285	-0,00003	0,05262	0,00008
4	0,05198	0,00001	0,0518	0,0006
8	0,05187	0,00002	0,0516	0,0006

Fonte – O autor(2018)

As formas otimizadas e o valor de coeficiente de arrasto para o fator de aspecto  $f_r=3$  apresentados nesta seção não foram comparados com os trabalhos de Kraiko et al. (2003) e Bertoldo (2014) porque não foram listados valores para essa razão de aspecto.

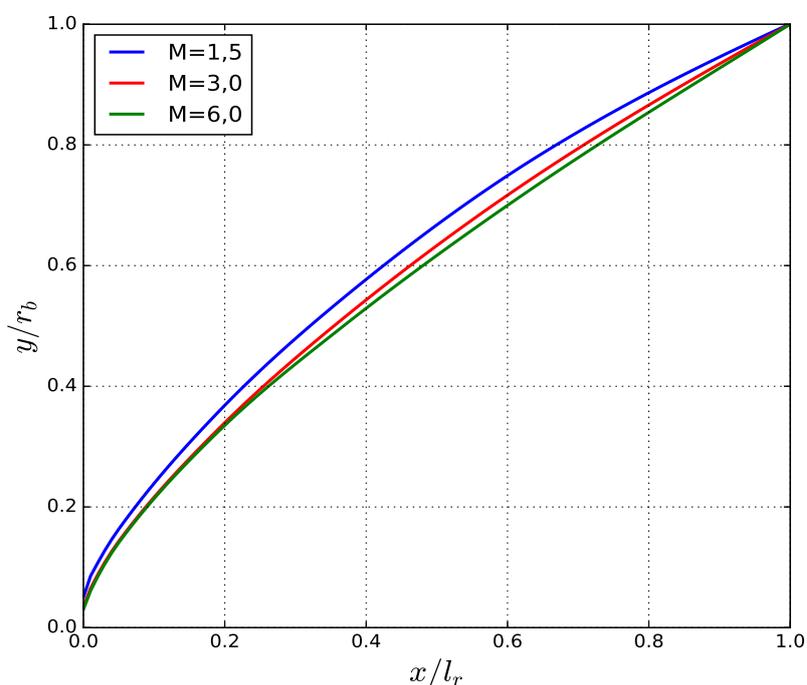
A Fig. 5.33 mostra os perfis obtidos com 1, 2, 4 e 8 coordenadas e com a aplicação de MER e, os campos de pressão, temperatura, velocidades  $u$  e  $v$ , massa específica e número de Mach encontram-se no apêndice C.3.2.

Figura 5.33 – PERFIS GEOMÉTRICOS OBTIDOS COM 1, 2, 4 e 8 COORDENADAS E MER PARA  $f_r=3$  e  $M_\infty=6,0$



Fonte – O autor(2018)

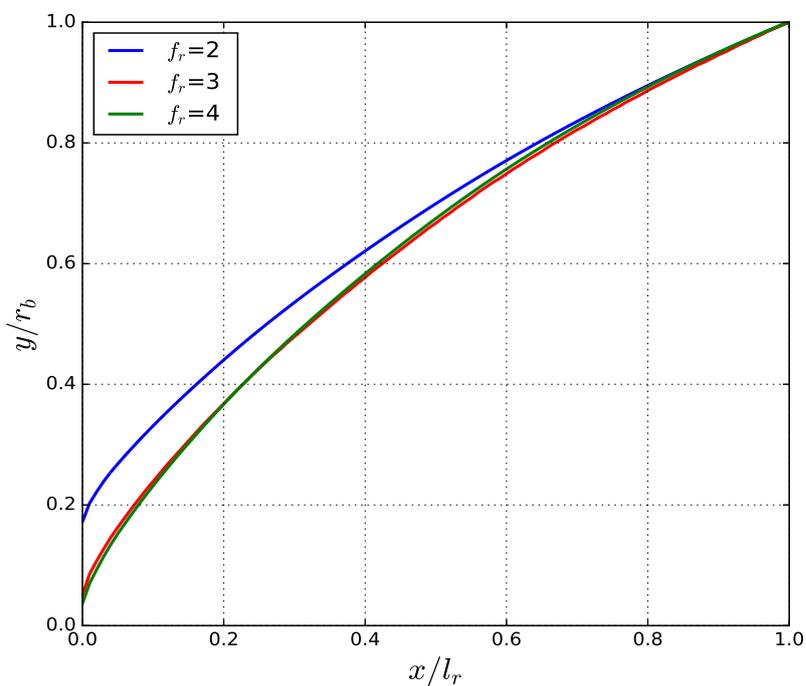
Do mesmo modo que o apresentado para as outras razões de aspecto, a Fig. 5.34 mostra as 3 formas otimizadas obtidas com 8 coordenadas e com o emprego de MER para  $f_r=3$  e os 3 números de Mach apresentados nesta seção. De forma semelhante ao que aconteceu para as razões de aspecto  $f_r=2$  e  $f_r=4$ , o perfil geométrico para  $M_\infty=6$  é mais fino que os perfis de  $M_\infty=1,5$  e  $M_\infty=3,0$ .

Figura 5.34 – PERFIS OTIMIZADOS PARA  $f_r=3$  e  $M_\infty \in \{1,5; 3,0; 6,0\}$ 

Fonte – O autor(2018)

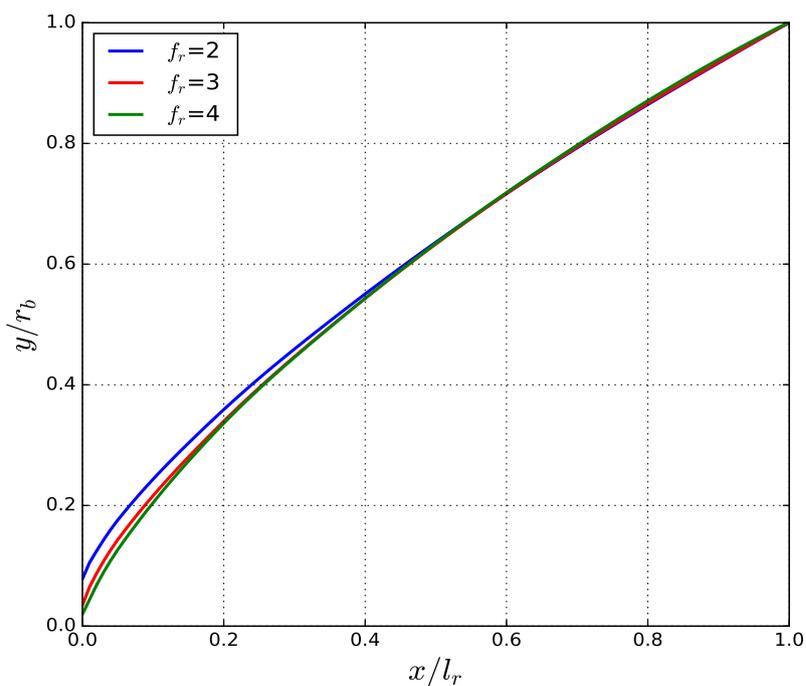
A seguir, apresentam-se as figuras para cada número de Mach contendo as 3 razões de aspecto ( $f_r \in \{2,3,4\}$ ). A Fig. 5.35 mostra os perfis otimizados para  $M_\infty=1,5$  com as 3 razões de aspecto, enquanto as Fig. 5.36 e Fig. 5.37 apresentam os perfis otimizados para  $M_\infty=3$  e 6, respectivamente. Estas figuras permitem observar o efeito do número de Mach nos perfis para as 3 razões de aspecto: conforme o número de Mach aumenta, diminui-se o raio frontal. Também observa-se que as diferenças entre os perfis com razões de aspecto diferentes reduzem-se com o aumento do número de Mach. Esta característica é explicada pelo princípio de independência do número de Mach, já mencionado anteriormente neste capítulo.

Figura 5.35 – PERFIS OTIMIZADOS PARA  $M_\infty=1,5$  e  $f_r \in \{2,3,4\}$

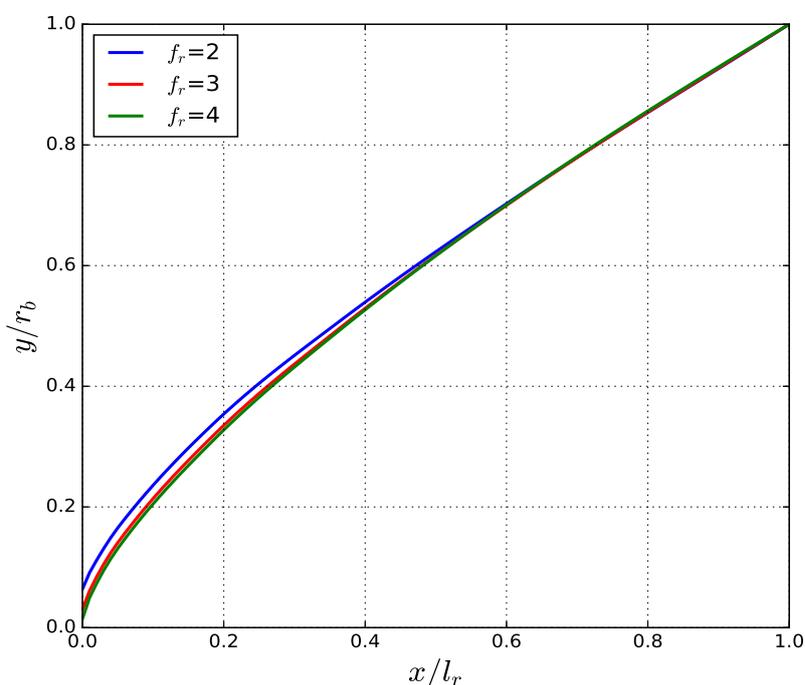


Fonte – O autor(2018)

Figura 5.36 – PERFIS OTIMIZADOS PARA  $M_\infty=3,0$  e  $f_r \in \{2,3,4\}$



Fonte – O autor(2018)

Figura 5.37 – PERFIS OTIMIZADOS PARA  $M_\infty=6,0$  e  $f_r \in \{2,3,4\}$ 

Fonte – O autor(2018)

## 5.5 RAIOS FRONTAIS

A Tab. 61 lista valores das razões de raios  $r_f/r_b$  dos perfis geométricos otimizados para os 3 números de Mach  $M_\infty \in \{1,5,3,0, 6,0\}$  para a razão de aspecto  $f_r=2$ . O raio frontal é o valor da coordenada  $y$  para  $x=0$ , sendo um dos elementos na formação do perfil geométrico. Além dos valores de  $r_f/r_b$  dos perfis otimizados, a tabela ainda mostra os valores de raios frontais obtidos em Kraiko et al. (2003), para comparação. A última coluna apresenta a diferença relativa em valores percentuais dos valores de raios frontais obtidos neste trabalho com os valores de Kraiko et al. (2003).

Os valores listados na Tab. 61 permitem observar o efeito do número de coordenadas  $y$  no perfil geométrico. Observa-se que os raios frontais obtidos com apenas 1 coordenada  $y$  apresentam diferença em relação aos valores de Kraiko et al. (2003). Para  $M_\infty=1,5$ , a diferença entre os valores de Kraiko et al. (2003) com os valores deste trabalho apresentam diferenças menores que 10 %. Para  $M_\infty=3,0$  e para  $M_\infty=6,0$ , os raios frontais tem diferença de 30,15% e 46,52%, respectivamente. A diferença diminui com o aumento do número de coordenadas e, pode-se observar que os valores do raio frontal para os perfis geométricos, otimizados com número de coordenadas  $y$  iguais a 8, apresentam valores muito próximos aos valores obtidos disponíveis em Kraiko et al. (2003). Para os três números de Mach, as diferenças relativas estão abaixo de 2% para esse número de

coordenadas.

Tabela 61 – RAIOS FRONTAIS PARA VÁRIOS NÚMEROS DE COORDENADAS E Kraiko et al. (2003) PARA  $f_r=2$

M	$n_u$	$r_f/r_b$	$r_f/r_b$ - Kraiko	Dif. rel. %
1,5	1	0,173	0,175	-1,09
	2	0,166	0,175	-5,52
	4	0,165	0,175	-5,74
	8	0,172	0,175	-1,61
3,0	1	0,113	0,079	30,15
	2	0,085	0,079	6,54
	4	0,078	0,079	-1,26
	8	0,078	0,079	-0,99
6,0	1	0,122	0,065	46,52
	2	0,074	0,065	11,89
	4	0,065	0,065	-0,03
	8	0,064	0,065	-1,97

Fonte – O autor(2018)

Os valores da Tab. 62 também mostram que há convergência dos valores de raios frontais para os valores de Kraiko et al. (2003), porém mesmo para 8 coordenadas, a diferença é grande, chegando a 15,22 % para número de Mach  $M_\infty=1,5$  e tendo o menor valor para  $M_\infty=6,0$ , Mesmo com esta aparente estranheza, quando comparado com os valores para a razão de aspecto  $f_r=2$  da Tab. 61, ocorre a convergência para os valores a medida que aumenta-se o número de coordenadas.

Tabela 62 – RAIOS FRONTAIS PARA VÁRIOS NÚMEROS DE COORDENADAS E Kraiko et al. (2003) PARA  $f_r=4$ 

M	$n_u$	$r_f/r_b$	$r_f/r_b$ - Kraiko	Dif. rel. %
1,5	1	0,056	0,042	24,98
	2	0,038	0,042	-10,43
	4	0,033	0,042	-28,37
	8	0,036	0,042	-15,22
3,0	1	0,034	0,018	46,32
	2	0,023	0,018	21,74
	4	0,020	0,018	8,79
	8	0,020	0,018	8,79
6,0	1	0,037	0,015	59,52
	2	0,024	0,015	37,23
	4	0,018	0,015	18,72
	8	0,014	0,015	-4,93

Fonte – O autor(2018)

## 5.6 RESUMO

Os resultados para  $f_r=2$  e  $M_\infty=3$  apresentaram um aumento no tempo para obtenção do valor otimizado. O entendimento do autor é que o algoritmo de otimização permaneceu buscando por soluções otimizadas, o que implicou em aumento no tempo de otimização. Os resultados para  $f_r=2$  para os números de Mach avaliados mostram que com o aumento de coordenadas, os valores do coeficiente de arrasto  $C_{Df}$  aproxima-se dos valores de coeficiente de arrasto informados por Kraiko et al. (2003), que são considerados benchmark.

Os resultados para razão de aspecto  $f_r=4$  demonstram que as otimizações com o emprego de MER convergem para os valores de coeficiente de arrasto  $C_{Df}$  obtidos por Kraiko et al. (2003). A diferença relativa entre o valor de  $C_{Df}$  obtido com número de Mach  $M_\infty=1,5$  e 8 coordenadas foi de 0,16%. O valor absoluto desta diferença é de  $8 \cdot 10^{-5}$ , que é menor que a estimativa de erro. As diferenças relativas com os valores obtidos nas três formas do trabalho de Bertoldo (2014) são maiores que 3%.

Para  $f_r=3$  os tempos de otimização tiveram comportamento semelhante ao das outras razões de aspecto: para número de Mach  $M_\infty=1,5$ , o aumento no tempo de otimização foi diversas vezes maior com o emprego de MER do que as otimizações sem o emprego de extrapolação e com o emprego de um nível de extrapolação. Este comportamento ficou evidente com o aumento em 138 (centro e trinta e oito) vezes no tempo para otimização com o emprego de MER em relação ao emprego de um nível de extrapolação observado na otimização para 4 variáveis de otimização.

De modo geral, o emprego de um nível de extrapolação ou emprego de MER

aumentou o tempo de execução das otimizações. Para otimizações para número de Mach  $M_\infty=1,5$  este aumento foi dezenas de vezes maior, tanto para extrapolação quanto para MER. Entretanto, este tempo de otimização elevado não pode ser considerado apenas devido ao emprego de MER, pois houve soluções, como por exemplo na Tab. 40, em que a otimização para 8 variáveis sem extrapolação (apenas uma malha), o tempo de otimização foi maior que o tempo para as otimizações com soluções extrapoladas. Ou seja, não se pode atribuir o aumento no tempo das otimizações unicamente ao emprego de MER. Portanto, apesar do aumento do tempo computacional com o emprego de MER ser esperado, pois são efetuadas simulações adicionais, o emprego de MER mostrou-se bastante eficiente, pois todas as otimizações comparadas com os valores de Kraiko et al. (2003) apresentaram diferenças relativas menores que 1%. Além disso, para duas soluções houve redução do valor do coeficiente de arrasto.

Quanto aos perfis geométricos obtidos, percebeu-se que, para todas as 3 razões de aspecto (2,3 e 4), com o aumento do número de Mach, os perfis ficaram mais finos. Também pode-se observar que, para a mesma razão de aspecto, os perfis obtidos para  $M_\infty=3$  e  $M_\infty=6$  apresentaram pouca variação entre si, quando comparados com o perfil obtido para  $M_\infty=1,5$ . Isto se deve ao princípio da independência do número de Mach (ANDERSON, 2000), que explica que algumas propriedades físicas apresentam pouca variação com o aumento do número de Mach.

## 6 CONCLUSÃO

Entendendo que os procedimentos de otimização analisados na literatura apresentavam algum tipo de aproximação para o modelo físico do escoamento, o objetivo central deste trabalho foi o de obter um perfil axissimétrico, a partir de um procedimento de otimização que utilizasse um modelo físico mais próximo da realidade. O trabalho de Bertoldo (2014) mostrou uma diferença relativa máxima de 2% entre o coeficiente de arrasto obtido para as formas otimizadas com modelo de Euler e as formas otimizadas obtidas com o modelo de Navier-Stokes para  $Re^{-1} \geq 10^{-5}$ . Este valor pode ser considerado como tolerância e, empregando-se  $Re = 10^7$ , entende-se que esta diferença é ainda menor. Pautado nestas considerações, optou-se por empregar as Equações de Euler como modelo matemático, resolvidas numericamente pelo Método dos Volumes Finitos.

O problema foi estabelecido dentro de um conjunto de números de Mach  $M_\infty$ , razões de aspecto  $f_r$  e número de variáveis de otimização  $n_u$ . Para isto, definiu-se os números de Mach  $M_\infty$  como 1,5, 3,0 e 6,0, de modo que se tivesse um número de Mach na região inferior do regime supersônico e outro número de Mach dentro da região inferior do regime hipersônico. Definiu-se que os perfis deveriam ter 3 valores para razões de aspecto  $f_r$  iguais a 2, 3, 4. Para descrição matemática da geometria do perfil foi utilizado um polinômio monotônico cúbico, que promoveu a interpolação das coordenadas  $y$ , que serviram como variáveis de otimização. Os perfis foram obtidos para 4 conjuntos de coordenadas  $y$ , onde o número de coordenadas fosse igual a 1, 2, 4 e 8. O algoritmo de otimização escolhido foi o TRUST-NCG (NOCEDAL; WRIGHT, 2006). Para esta combinação de  $M_\infty$ ,  $f_r$  e conjunto de variáveis de otimização, realizou-se 36 otimizações.

Para aumentar a acurácia do valor entregue ao algoritmo de otimização, as soluções obtidas através da simulação realizada com o programa que resolvia o escoamento, sofreram um pós processamento com a aplicação de Multiextrapolação de Richardson (MER).

Para que os valores do coeficientes de arrasto obtidos pelos perfis otimizados tivessem um valor com menor erro de discretização, após encerrarem-se as otimizações, foram efetuadas 108 simulações com tolerância de  $10^{-14}$  para o resíduo do ciclo de massa. Estas simulações visavam obter valores de coeficiente de arrasto obtido com MER. Assim, executou-se três simulações para cada perfil otimizado, efetuando o procedimento de MER com 2 níveis de extrapolação. Além do valor de  $C_{Df}$  multiextrapolado obteve-se também a estimativa do erro numérico. Apesar deste aparente aumento no tempo de execução com o uso de MER, seu emprego ainda é melhor do que utilizar apenas o valor de uma única simulação. Conforme explicam Marchi et al. (2013), para se obter um erro numérico de mesma ordem de acurácia, necessita-se de maior processamento pelo emprego de

malhas mais refinadas.

De modo geral, houve um aumento no tempo de execução das otimizações com o emprego de extrapolação, quando comparadas apenas com a otimização de uma única malha. E este tempo aumentou ainda mais com o emprego de MER. Esse comportamento é esperado, visto que, o emprego de MER necessita de pelo menos, mais duas simulações para obtenção do valor do coeficiente de arrasto  $C_{Df}$ . Não foi possível perceber como ocorre este aumento no tempo de otimização. Ou seja, não se pode afirmar que para um determinado número de variáveis, aumentará o tempo de otimização baseado em algum fator ou valor de proporção. Cita-se como exemplo a otimização para razão de aspecto  $f_r=3$  e número de Mach  $M_\infty=3$  para duas variáveis: o tempo de otimização com o emprego de apenas um nível de extrapolação foi 5,6 vezes maior do que o tempo de otimização com o emprego de MER (dois níveis de extrapolação). Este exemplo mostra que o aumento no tempo não está relacionado com o emprego de apenas um nível de extrapolação ou de multiextrapolação, mas está relacionado com o algoritmo de otimização. Para corroborar esse entendimento, tem-se o exemplo da otimização para  $f_r=4$ ,  $M_\infty=1,5$ , sem extrapolação: a otimização com 8 variáveis demorou 190 horas, enquanto que a otimização para 4 variáveis demorou 42 minutos. A primeira foi 267 vezes mais demorada que a última. Como não utilizou extrapolação, o tempo de otimização longo é atribuído apenas ao algoritmo de otimização.

De um modo geral, não é possível determinar com precisão qual será o tempo das otimizações. Sabe-se apenas que com o aumento de número de variáveis de otimização, o tempo aumentará. Porém, mesmo para um número maior de variáveis, o tempo de execução, em alguns casos, foi menor que uma otimização com número menor de variáveis.

Sobre o tempo de execução das otimizações no âmbito do procedimento de otimização apresentado neste trabalho, o entendimento do autor é que ele está relacionado com as seguintes informações:

- O número de variáveis de otimização: quanto maior o número de variáveis de otimização (coordenadas), melhor será a definição do perfil geométrico. A melhor definição do perfil permite que sejam obtidos valor do coeficiente de arrasto  $C_{Df}$  com menor diferença entre uma iteração e outra. Isto implica em número maior de iterações no algoritmo de otimização para determinação do valor minimizado.
- O nível de tolerância do algoritmo de otimização: o algoritmo de otimização pode ser utilizado com nível de tolerância definido de acordo com o desejo do usuário do algoritmo (projetista). Se o valor de tolerância for muito pequeno, implicará em aumento no tempo de execução da otimização.
- Algoritmo: dependendo de como o algoritmo busca um novo valor da função objetivo, ou seja, sugere novos valores para as variáveis de otimização, pode-se

obter pequenas variações entre os valores da função objetivo. Se estas variações estiverem dentro do intervalo de tolerância do algoritmo, o tempo de execução aumentará de modo inversamente proporcional com estas variações. Como usualmente não se conhece ou não é possível prever como os valores para as variáveis de otimização serão sugeridos, não é possível estimar o tempo de execução antecipadamente.

Por conta disto, não se pode concluir que o emprego de MER simplesmente aumenta o tempo da otimização, pois este tempo depende de outras informações tais como tipo de algoritmo e do nível de tolerância do algoritmo.

Foi efetuada comparação dos valores de coeficiente de arrasto frontal  $C_{Df}$  dos perfis otimizados com os valores obtidos por Kraiko et al. (2003). A concordância dos valores dependeu do número de variáveis de otimização, indicando que quanto maior o número de variáveis de otimização, o perfil é melhor descrito (via polinômio interpolador) e, por conta disto, o perfil pôde ser melhor avaliado durante a otimização. Em resumo, quanto maior o número de variáveis de otimização, melhor é a concordância com os valores do coeficiente de arrasto obtidos por Kraiko et al. (2003), porém mesmo com apenas 4 variáveis de otimização foi possível perceber uma boa concordância com os valores de Kraiko et al. (2003), onde a maior diferença foi de 2,3% para apenas um único caso.

Considerando apenas os valores do coeficiente de arrasto frontal  $C_{Df}$  dos perfis otimizados com 8 variáveis de otimização, percebeu-se que estes valores concordaram com os obtidos por Kraiko et al. (2003). Destaca-se aqui apenas 3 casos das maiores diferenças relativas encontradas para melhor esclarecimento desta concordância. O perfil otimizado para número de Mach  $M_\infty=1,5$  e  $f_r=2$ , o valor do  $C_{Df}$  obtido pelo presente estudo foi 0,35% maior que o valor obtido por Kraiko et al. (2003). Para  $M_\infty=3,0$  e  $f_r=4$ , o valor do  $C_{Df}$  obtido foi 0,28% maior que o valor obtido por Kraiko et al. (2003). Entretanto, para número de Mach  $M_\infty=6,0$  e  $f_r=4$ , o valor do  $C_{Df}$  foi 0,31% menor que o valor obtido por Kraiko et al. (2003).

Também foi efetuada comparação com os valores de Bertoldo (2014) e percebeu-se que de modo geral, todos os perfis otimizados com 8 variáveis tiveram valor de  $C_{Df}$  menores que os valores das formas geométricas de Bertoldo (2014). Esta conclusão era esperada visto que as formas otimizadas de Bertoldo (2014) são formas baseadas em lei de potência. Ou seja, os perfis com 8 variáveis são melhor representados e isto permitiu obter valores de  $C_{Df}$  menores.

Com o emprego de MER, entende-se que se reduz o custo computacional, pois permite obter soluções acuradas em malhas mais grossas (MARCHI et al., 2013). Mesmo com a disposição dos recursos computacionais atuais, ainda há limitação quanto ao processamento, pois os recursos (tais como processadores, hardware, memória RAM são finitos. E o emprego de MER é uma alternativa para situações em que não há grande disponibilidade de recursos computacionais para obter soluções numéricas com

boa acurácia, dentro de uma tolerância prescrita. E também é importante observar que o custo computacional pode não estar apenas vinculado ao tempo de processamento, mas também com outras questões de ordem de eficiência energética e ambiental. Portanto, com a redução de custo computacional, auxilia-se de maneira indireta, na redução do custo energético e do custo de resfriamento dos equipamentos. Por conta disto, o emprego de MER constitui-se em um aliado na redução do tempo de otimização, mas também na redução de custos em outras áreas, que aproveitam-se desta redução do tempo computacional para obter a solução da otimização.

## 6.1 CONTRIBUIÇÕES

As principais contribuições deste trabalho estão enumeradas abaixo:

1. Mostra que o emprego de Multiextrapolação de Richardson (MER) apresenta-se como ferramenta viável para aumentar a acurácia de soluções e pode ser empregado em procedimentos de otimização.
2. Demonstra que um polinômio cúbico interpolador pode ser utilizado para descrever um perfil geométrico. Deste modo, um número relativamente pequeno de variáveis de otimização pode ser empregado para obtenção de perfis otimizados. O emprego do polinômio também permite uma análise direta dos pontos que estão sendo utilizados como variáveis de otimização<sup>1</sup>, permitindo a reconstrução do perfil geométrico (desenho da forma) ou mesmo o uso dos valores das coordenadas obtidas para reprodução do experimento. Isto é um contraste com o trabalho de Kraiko et al. (2003) onde a reconstrução da forma geométrica não é mostrada de modo claro e simples.
3. Apresenta modelagem do escoamento com um modelo matemático diferente dos modelos apresentados na literatura, que têm algum grau de aproximação ou linearização das equações. Diante desta perspectiva, o emprego das Equações de Euler provou-se viável dentro do âmbito das técnicas de CFD. Este modelo pode ser empregado para otimizações de narizes de foguete, pois estes veículos são submetidos a escoamentos em regime supersônico e hipersônico e que apresentam número de Reynolds elevado.
4. Mostra que um algoritmo de otimização baseado em gradiente pode ser empregado em conjunto com simulações de CFD e concomitante ao emprego de MER.
5. Apresenta perfis otimizados para razões de aspecto igual a 2 e igual 4, para números de Mach 1,5, 3,0 e 6,0. Para cada perfil obteve-se o valor do Coeficiente de Arrasto e comparou-se este valor com os valores obtidos por Kraiko et al. (2003).

<sup>1</sup> ou como coordenadas, após o encerramento do procedimento de otimização

6. Apresenta valor de coeficiente de arrasto otimizado do perfil para razão de aspecto igual a 3 para os números de Mach igual a 1,5, 3,0 e 6,0. Também apresenta as coordenadas deste perfil para reconstrução com o Polinômio Monotônico Cúbico Interpolador.

## 6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

As sugestões de trabalhos futuros baseados neste estudo são mencionadas a seguir.

Entende-se que sobre a modelagem matemática do problema pode-se aplicar Equações de Navier-Stokes para solução do escoamento, e assim, avaliar os valores do coeficiente de arrasto para números de Reynolds menores. O emprego destas equações também permitiriam uma melhor avaliação dos perfis quando são acrescentadas as tensões viscosas.

Sugere-se o estudo de otimização em regime transônico, onde o escoamento tem características singulares.

Como foi observada uma variação no tempo de otimização para casos com ou sem o emprego de MER, sugere-se que seja feito um estudo para investigar o efeito do emprego de MER no tempo de otimização. Uma análise mais aprofundada do algoritmo de otimização em conjunto com o emprego de MER, pode conduzir a conclusões mais claras sobre se MER tem realmente um impacto no tempo de otimização ou se o algoritmo é responsável pelo aumento no tempo da otimização.

Quanto ao número de coordenadas do perfil geométrico, sugere-se uma avaliação com um número maior do que foi utilizado neste trabalho, principalmente de pontos próximos à região frontal. O detalhamento da inclinação logo após o raio frontal é algo que carece de melhor investigação quanto ao efeito desta inclinação sobre o valor do coeficiente de arrasto.

O perfil geométrico também pode ser gerado por outras representações matemáticas como as BSplines ou NURBS<sup>2</sup> (FARIN, 1990), que necessitem de um número menor de variáveis de otimização, para descrever o perfil geométrico, em relação ao polinômio que foi utilizado neste trabalho.

Quanto a solução numérica do escoamento, sugere-se a implementação de código que utilize paralelização. Outra sugestão é o emprego de GPUs (*Graphics Processing Unit* Unidade de Processamento Gráfico) (CECILIA et al., 2010; LUEBKE, 2008), para acelerar a solução do escoamento com a implementação paralela neste tipo de plataforma computacional. Pode-se ainda aumentar o desempenho do simulador com a implementação de um método multigrid (BRIGGS et al., 2000) para solução das equações discretizadas. Ainda no âmbito do simulador, sugere-se a implementação de métodos de

<sup>2</sup> acrônimo de *Non-uniform rational B-spline* O texto não foi traduzido porque o acrônimo é utilizado corriqueiramente na literatura

ordem mais alta, que, juntamente com o emprego de MER, trariam melhoria na ordem de acurácia das soluções.

## Referências

- ANDERSON, J. D. *Hypersonic and high temperature gas dynamics*. Reston, VA: AIAA, 2000. 690 p. Citado 4 vezes nas páginas 24, 37, 119 e 150.
- ANDERSON, J. D. *Modern Compressible Flow:with historical perspective*. 3rd. ed. New York, New York, USA: McGraw-Hill, 2003. 760 p. ISBN 0071121617. Citado na página 46.
- ASME. *Standard for Verification and Validation in Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer*. [S.l.], 2009. Citado na página 109.
- BERTOLDO, G. *Otimização Aerodinâmica de Newton com Base nas Equações de Navier-Stokes*. 229 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2014. Citado 36 vezes nas páginas 18, 19, 20, 27, 28, 32, 33, 36, 37, 42, 46, 47, 48, 56, 57, 64, 66, 67, 74, 75, 100, 110, 111, 116, 118, 123, 124, 129, 132, 133, 134, 143, 149, 151, 153 e 166.
- BERTOLDO, G.; MARCHI, C. H. Verification and validation of the foredrag coefficient for supersonic and hypersonic flow of air over a cone of fineness ratio 3. *Applied Mathematical Modelling*, v. 44, p. 409–424, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.01.090>>. Citado 5 vezes nas páginas 89, 90, 94, 96 e 97.
- BREZINSKI, C.; ZAGLIA, M. R. *Extrapolation Methods theory and practice*. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier New Holland, 1991. 464 p. ISBN 0444888144. Citado na página 38.
- BRIGGS, W. L.; HENSON, V. E.; MCCORMICK, S. F. *A Multigrid Tutorial*. SIAM, 2000. 199 p. ISBN 978-0-89871-462-3. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/1.9780898719505>>. Citado na página 155.
- BUTTAZZO, G.; KAWOHL, B. On Newton's Problem of Minimal Resistance. In: *Mathematical Conversations*. New York, New York, USA: Springer, 2001. Citado na página 17.
- CECILIA, J. M.; GARCIA, J. M.; UJALDÓN, M. The GPU on the matrix-matrix multiply: Performance study and contributions. *Advances in Parallel Computing*, v. 19, p. 331–340, 2010. ISSN 09275452. Citado na página 155.
- DOORMAAL, J. V.; RATHBY, G. Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows. *Numerical Heat Transfer*, v. 7, p. 147–163, 1984. ISSN 0149-5720. Disponível em: <<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01495728408961817>>. Citado 2 vezes nas páginas 61 e 64.
- EGGERS, A. J. Nonslender bodies of revolution having minimum pressure drag. In: MIELE, A. (Ed.). *Theory Of Optimum Aerodynamics Shapes*. New York: Academic Press, 1965. cap. 16, p. 251–264. Citado 4 vezes nas páginas 24, 25, 27 e 42.
- EGGERS, A. J.; RESNIKOFF, M. M.; DENNIS, D. H. *Bodies of revolution having minimum drag at high supersonic airspeeds*. s.l., 1958. Disponível em: <<https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19930092299.pdf>>. Citado 9 vezes nas páginas 17, 18, 26, 27, 28, 29, 31, 35 e 42.

- ERTURK, E.; CORKE, T. C.; GOKCOL, C. Numerical Solutions of 2-D Steady Incompressible Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 48, n. October 2003, p. 747–774, 2004. ISSN 02712091. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/fld.953>>. Citado na página 22.
- FARIN, G. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. 2nd ed. ed. San Diego: Academic Press, 1990. 444 p. Citado 3 vezes nas páginas 18, 45 e 155.
- FARRASHKHALVAT, M.; MILES, J. *Basic structured grid generation*. Burlington MA: Butterworth-Heinemann, 2003. 231 p. Citado na página 53.
- FEOKTISTOV, V. *Diferential evolution: in search of solutions*. New York: Springer US, 2006. ISBN 978-0-387-36896-2. Citado na página 36.
- FERZIGER, J.; PERIC, M. *Computacional Methods for Fluid Dynamics*. 2nd. ed. Berlin: [s.n.], 1999. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 67.
- FERZIGER, J.; PERIC, M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 3rd. ed. New York: Springer Verlag, 2002. Citado 7 vezes nas páginas 52, 54, 59, 61, 62, 68 e 69.
- FLETCHER, C. A. J. *Computational Techniques for Fluid Dynamics*. 2nd editio. ed. Berlin: Springer-Verlag, 1991. v. 2. 488 p. ISBN 3540536019. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 59.
- FORTUNA, A. O. *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos*. São Paulo: Edusp, 2000. Citado na página 51.
- FRITSCHT, F. N.; CARLSON, R. E. Monotone piecewise cubic interpolation. *Journal on Numerical Analysis*, SIAM, v. 17, n. 2, p. 238–246, 1980. Disponível em: <<http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/0717021>>. Citado 4 vezes nas páginas 21, 43, 44 e 45.
- GREENBERG, M. D. *Advanced Engineering Mathematics*. 2nd. ed. India: Pearson South Asia, 1998. 1346 p. ISBN 9788177585469. Citado na página 51.
- HAN, X.; ZINGG, D. W. An adaptive geometry parametrization for aerodynamic shape optimization. *Optimization and Engineering*, Springer US, v. 15, n. 1, p. 69–91, mar 2014. ISSN 1389-4420. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s11081-013-9213-y>>. Citado na página 20.
- HAYES, W. D. The Newtonian pressure law. In: MIELE, A. (Ed.). *Theory of optimum aerodynamics shapes*. New York, New York, USA: Academic Press, 1965. cap. 12, p. 454. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- HAYES, W. D.; PROBSTEIN, R. F. *Hypersonic flow theory*. New York, New York, USA: Academic Press, 1959. Citado 3 vezes nas páginas 17, 24 e 26.
- HIRSCH, C. *Numerical Computation of internal and external flows*. West Sussex England: John Wiley, 1988. v. 2. 691 p. ISBN 0471923516. Citado na página 59.
- HOUGHTON, E. et al. *Aerodynamics for Engineering students*. 6th. ed. Oxford, UK: Elsevier, 2013. ISBN 978-0-08-096632-8. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 50.
- INMETRO. *Avaliação de dados de medição: Guia para a Expressão da Incerteza de Medição*. Rio de Janeiro: INMETRO, 2012. Citado na página 106.

- KOCIC, L. M.; MILOVANOVIC, G. V. Shape Preserving Approximations by Polynomials and Splines. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 33, n. 11, p. 59–97, 1997. Disponível em: <[https://ac.els-cdn.com/S0898122197000874/1-s2.0-S0898122197000874-main.pdf?{\\\_}tid=5d6db8ba-047e-11e8-a384-00000aacb35f{\&}acdnat=1517180321{\\\\_}e37daa74ec8cfbd0bcab543](https://ac.els-cdn.com/S0898122197000874/1-s2.0-S0898122197000874-main.pdf?{\_}tid=5d6db8ba-047e-11e8-a384-00000aacb35f{\&}acdnat=1517180321{\\_}e37daa74ec8cfbd0bcab543)>. Citado 3 vezes nas páginas 43, 44 e 45.
- KRAIKO, A. et al. Axisymmetric nose shapes of specified aspect ratio, optimum or close to optimum with respect to wave drag. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, v. 67, n. 5, p. 703–730, jan 2003. ISSN 00218928. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021892803900438>>. Citado 27 vezes nas páginas 7, 8, 18, 19, 32, 37, 42, 100, 110, 111, 115, 116, 118, 123, 124, 129, 130, 132, 133, 134, 143, 147, 148, 149, 150, 153 e 154.
- KRASNOV, N. F.; MORRIS, D. N. *Aerodynamics of bodies of revolution*. New York: Elsevier, 1970. Citado na página 51.
- KREYSZIG, E. *Advanced Engineering Mathematics*. 9th. ed. s.l.: John Wiley & Sons Inc, 2008. Citado na página 51.
- KUETHE, A. M.; CHOW, C. Y. *Foundations of Aerodynamics*. 4th. ed. s.l.: John Wiley & Sons Inc, 1986. 555 p. Citado na página 50.
- LAPORTE, E.; Le Tallec, P. *Numerical Methods in Sensitivity Analysis and Shape Optimization*. Birkhäuser, 2003. ISBN 0-8176-4322-2. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=ovAICAAAQBAJ>>. Citado na página 78.
- LUEBKE, D. CUDA: Scalable parallel programming for high-performance scientific computing. In: *2008 5th IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: From Nano to Macro*. Paris, France: [s.n.], 2008. Citado na página 155.
- MALISKA, C. R. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional*. 2<sup>a</sup>. ed. [S.l.]: LTC, 2004. 453 p. Citado 17 vezes nas páginas 21, 45, 48, 49, 53, 55, 57, 58, 61, 62, 63, 64, 66, 67, 70, 73 e 74.
- MARCHI, C.; MALISKA, C. A nonorthogonal finite-volume method for the solution of all speed flows using co-located variables. *Numerical Heat Transfer Part B-Fundamentals*, v. 26, n. 3, p. 293–311, 1994. Disponível em: <<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10407799408914931>>. Citado na página 65.
- MARCHI, C.; MALISKA, C. R.; SOUZA, S. Avaliação de Algumas Funções de Interpolação para Escoamentos de Fluidos Usando Volumes Finitos. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, n. 3, p. 340–352, 1998. ISSN 0110-7386. Citado na página 21.
- MARCHI, C. H. *Verificação de Soluções Numéricas Unidimensionais em Dinâmica dos Fluidos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 39, 91 e 92.
- MARCHI, C. H. et al. Repeated Richardson extrapolation applied to the two-dimensional Laplace equation using triangular and square grids. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier Inc., v. 37, n. 7, p. 4661–4675, 2013. ISSN 0307904X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2012.09.071>>. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.

- MARCHI, C. H.; GERMER, E. M. Effect of Ten CFD Numerical Schemes on Repeated Richardson Extrapolation (RRE). *Journal of Applied & Computational Mathematics*, v. 02, n. 02, p. 2–9, 2013. ISSN 21689679. Disponível em: <<http://www.omicsgroup.org/journals/effect-of-ten-cfd-numerical-schemes-on-repeated-richardson-extrapolation-rre-2168-9679-1000128.php?aid=16230>>. Citado na página 40.
- MARCHI, C. H.; NOVAK, L. A.; SANTIAGO, C. D. Múltiplas extrapolações de Richardson para reduzir e estimar o erro de discretização da equação de Laplace 2D. In: *XXIX CILAMCE*. Maceió RN Brasil: [s.n.], 2008. Citado na página 93.
- MARCHI, C. H. et al. Highly accurate numerical solutions with repeated Richardson extrapolation for 2D laplace equation. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier Inc, v. 37, n. 12-13, p. 7386–7397, 2013. ISSN 0307904X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2013.02.043>>. Citado 3 vezes nas páginas 40, 151 e 153.
- MARCHI, C. H.; SILVA, A. F. C. da. Unidimensional Numerical Solution Error Estimation for Convergent Apparent order. *Numerical Heat Transfer Part B Fundamentals*, Taylor & Francis, v. 42, n. 2, p. 167–188, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 87 e 92.
- MARTINELLI, M.; BEUX, F. Multi-level gradient-based methods and parametrization in aerodynamic shape design. *European Journal of Computational Mechanics*, Taylor & Francis, v. 17, n. 1-2, p. 169–197, 2008. Disponível em: <<https://www.sop.inria.fr/tropics/papers/MartinelliBeux08.pdf>>. Citado na página 20.
- MARTINS, M. A. *Multiextrapolação de Richardson com Interpolação para reduzir e estimar o Erro de Discretização em CFD*. 198 p. Tese (Thesis) — Universidade Federal do Paraná, 2013. Citado 10 vezes nas páginas 38, 39, 77, 92, 93, 98, 99, 106, 109 e 110.
- MARTINS, M. A. et al. Multiextrapolação de Richardson com interpolação para reduzir o erro de discretização em CFD. In: SBMAC. *Congresso de Matemática Aplicada e Computacional Sudeste*. Bauru SP, 2013. p. 104–108. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 40.
- MASON, W. H.; LEE, J. Minimum-Drag Axisymmetric Bodies in the Supersonic/Hypersonic Flow Regimes. *JOURNAL OF SPACECRAFT AND ROCKETS*, v. 31, n. 3, p. 406–413, 1994. Citado 7 vezes nas páginas 18, 19, 30, 31, 32, 35 e 42.
- MCBRIDE, B.; GORDON, S.; RENO, M. A. *Coefficients Thermodynamic Properties for Calculating and Transport of Individual Species*. 1993. 98 p. Disponível em: <<http://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19940013151>>. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 48.
- MCCORMICK. *Trust-region methods*. 2014. Disponível em: <[https://optimization.mccormick.northwestern.edu/index.php/Trust-region{\\\_}meth](https://optimization.mccormick.northwestern.edu/index.php/Trust-region{\_}meth)>. Citado na página 81.
- MIELE, A. Slender shapes of minimum pressure drag. In: MIELE, A. (Ed.). *Theory Of Optimum Aerodynamics Shapes*. New York, New York, USA: Academic Press, 1965. cap. 13, p. 454. Citado 5 vezes nas páginas 17, 18, 27, 28 e 42.
- MORAN, M. J. et al. *Princípios de Termodinâmica para Engenharia*. 8a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018. 947 p. ISBN 978852163489-8. Citado na página 47.
- NEWTON, I. *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*. New York: Daniel Adee, 1846. Disponível em: <[https://en.wikisource.org/wiki/The{\\\_}Mathematical{\\\_}Principles{\\\_}of{\\\_}Natural{\\\_}Ph](https://en.wikisource.org/wiki/The{\_}Mathematical{\_}Principles{\_}of{\_}Natural{\_}Ph)>. Citado 4 vezes nas páginas 16, 23, 26 e 42.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. *Numerical optimization*. New York, New York, USA: Springer Science+business media, 2006. 664 p. ISBN 9780387303031. Citado 6 vezes nas páginas 34, 78, 79, 80, 82 e 151.

OBERKAMPF, W. L.; TRUCANO, T. G. Verification and validation in computational fluid dynamics. *Progress in Aerospace Sciences*, Pergamon, v. 38, n. 3, p. 209–272, apr 2002. ISSN 0376-0421. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0376042102000052>>. Citado na página 87.

PATANKAR, S. V. *Numerical heat transfer and fluid flow*. s.l.: Hemisphere Publishing Corporation, 1980. Citado na página 61.

PATANKAR, S. V.; SPALDING, D. B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 15, n. 10, p. 1787–1806, 1972. ISSN 00179310. Citado na página 61.

PERIC, M.; KESSLER, R.; SCHEUERER, G. Comparison of the Finite-Volume numerical methods with staggered and colocated grids. *Computers & Fluids*, v. 16, n. 4, p. 389–403, 1988. Disponível em: <[https://ac.els-cdn.com/0045793088900242/1-s2.0-0045793088900242-main.pdf?tid=6a146432-fbf6-48ac-9dc6-b569ff9f8715&acdnat=1525536731\\_bf6d95c40c7081f0172aab3](https://ac.els-cdn.com/0045793088900242/1-s2.0-0045793088900242-main.pdf?tid=6a146432-fbf6-48ac-9dc6-b569ff9f8715&acdnat=1525536731_bf6d95c40c7081f0172aab3)>. Citado na página 64.

PERKINS, E. W.; JORGENSEN, L. H. *Investigation on the drag of various axially symmetric nose shapes of fineness ratio 3 for mach numbers from 1.24 to 3.67*. s.l., 1952. 18 p. Disponível em: <<papers://0be24a46-325a-4116-a3c6-fd8a3b614472/Paper/p3400http://naca.central.cranfield.ac.uk/reports/1952/naca-rm-a52h28.pdf>>. Citado na página 42.

PERKINS, E. W.; JORGENSEN, L. H.; SOMMER, S. C. *Investigation of the drag of various axially symmetric nose shapes of fineness ratio 3 for Mach numbers from 1.24 to 7.4*. 1958. 1231–1247 p. Citado 3 vezes nas páginas 17, 29 e 30.

POMERANZ, S. Richardson extrapolation applied to boundary element method results in a Dirichlet problem for the Laplace equation. *International Journal of Computer Mathematics*, Taylor & Francis, v. 88, n. 11, p. 2306–2330, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00207160.2010.537327>>. Citado na página 39.

POWERS, S. A. Drag Minimization using exact methods. *AIAA Journal*, v. 2, n. 5, p. 941–943, 1964. Citado 4 vezes nas páginas 18, 29, 30 e 42.

RAO, S. S. *Engineering Optimization*. 3rd. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons Inc, 1996. 903 p. ISBN 0471550345. Citado na página 17.

RIBEIRO, A. A.; KARAS, E. W. *Otimizacao continua : aspectos teoricos e computacionais*. São Paulo: Cengage Learning, 2013. ISBN 978-85-221-2002-4. Citado na página 80.

RICHARDSON, L. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems including differential equations, with an application to the stress in a masonry dam. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series, A*, n. 210, p. 307–357, 1910. Disponível em: <<http://rsta.royalsocietypublishing.org/content/210/459-470/307>>. Citado na página 38.

- RICHARDSON, L.; GAUNT, J. The deferred approach to the limit - Single lattice. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, v. 226, n. 636-646, p. 299–361, 1927. Disponível em: <[http://rsta.royalsocietypublishing.org/content/226/636-646/299file:///dados/Comum/Papers/MER/Richardson{\\\_}Gaunt{\\\_}19](http://rsta.royalsocietypublishing.org/content/226/636-646/299file:///dados/Comum/Papers/MER/Richardson{\_}Gaunt{\_}19)>. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 91.
- ROACHE, P. J. *Computational Fluid Dynamics*. Albuquerque, USA: Hermosa Publishers, 1972. Citado na página 38.
- ROACHE, P. J. Perspective: A Method for Uniform Reporting of Grid Refinement Studies. *Journal of Fluids Engineering*, v. 116, n. 3, p. 405, 1994. Disponível em: <<http://fluidsengineering.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1427780>>. Citado 2 vezes nas páginas 87 e 91.
- ROACHE, P. J. Quantification of Uncertainty in Computational Fluid Dynamics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 29, n. 1, p. 123–160, 1997. ISSN 0066-4189. Citado 3 vezes nas páginas 87, 88 e 89.
- ROACHE, P. J. *Verification and Validation in Computational Science and Engineering*. Albuquerque, USA: Hermosa Publishers, 1998. 446 p. ISBN 0913478083. Citado 3 vezes nas páginas 38, 39 e 91.
- ROACHE, P. J. *Fundamentals of Verification and Validation*. Socorro, New Mexico: Hermosa Publishers, 2009. 476 p. Citado 7 vezes nas páginas 39, 87, 88, 92, 96, 106 e 110.
- ROHATGI, A. *WebPlotDigitizer*. 2017. Disponível em: <<https://apps.automeris.io/wpd/>>. Citado na página 29.
- ROY, C. J. Review of code and solution verification procedures for computational simulation. *Journal of Computational Physics*, v. 205, n. 1, p. 131–156, 2005. Disponível em: <[https://ac.els-cdn.com/S0021999104004619/1-s2.0-S0021999104004619-main.pdf?{\\\_}tid=6ce68843-3982-43c9-8070-a467af7540b6{\&}acdnat=1522069248{\\\_}638c8ca0b259205e4da9a9c](https://ac.els-cdn.com/S0021999104004619/1-s2.0-S0021999104004619-main.pdf?{\_}tid=6ce68843-3982-43c9-8070-a467af7540b6{\&}acdnat=1522069248{\_}638c8ca0b259205e4da9a9c)>. Citado 5 vezes nas páginas 39, 88, 89, 90 e 91.
- ROY, C. J. et al. Verification of Euler / Navier-Stokes Codes using the Method of Manufactured Solutions. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 44, n. 6, p. 599–620, 2004. Disponível em: <<https://pdfs.semanticscholar.org/282d/619101b7448838c029f3b3605c076808551a.pdfhttps://doi.org/10.1002/flid.660>>. Citado na página 21.
- SAHAI, A.; JOHN, B.; NATARAJAN, G. Effect of Fineness Ratio on Minimum-Drag Shapes in Hypersonic Flows. *Journal of Spacecraft and Rockets*, AIAA, v. 51, n. 3, p. 900–907, 2014. ISSN 0022-4650. Disponível em: <<http://arc.aiaa.org/doi/10.2514/1.A32583>>. Citado 7 vezes nas páginas 18, 19, 20, 21, 32, 35 e 42.
- SAMAREH, J. A. *A SURVEY OF SHAPE PARAMETERIZATION TECHNIQUES*. Hampton, VA 23681, 1999. Disponível em: <<https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19990050940.pdf>>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 78.
- SCHNEIDER, G.; ZEDAN, M. A modified strongly implicit procedure for the numerical solution of field problems. *Numerical Heat Transfer*, v. 4, n. 1, p. 1–19, 1981. Disponível em: <<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01495728108961775>>. Citado na página 73.

- Scipy. 2015. Disponível em: <<https://www.scipy.org/>>. Citado na página 104.
- SI. *International System of Units*. 2008. Disponível em: <<http://physics.nist.gov/Pubs/SP330/sp330.pdf>>. Nenhuma citação no texto.
- SIDI, A. *Practical Extrapolation Methods Theory and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 542 p. ISBN 978-0521661591. Citado na página 38.
- SIMS, J. L. *Tables for Supersonic Flow around Right Circular Cones*. Curitiba, 1964. Citado na página 97.
- SMITH, D. M. Using multiple-precision arithmetic. *Computing in Science & Engineering*, v. 5, n. 4, p. 88–93, 2003. Citado na página 90.
- TANNEHILL, J.; ANDERSON, D. A.; PLETCHER, R. *Computational fluid mechanics and heat transfer*. 2nd. ed. S.I: Taylor & Francis, 1997. Citado na página 57.
- TAYLOR, G. I.; MACCOLL, J. W. The Air Pressure on a Cone Moving at High Speeds. I. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, v. 139, n. 838, p. 278–297, 1933. ISSN 1098-6596. Citado 2 vezes nas páginas 96 e 97.
- VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics - The Finite Volume Method*. 2nd. ed. England: Pearson Education, 2007. 503 p. ISBN 9780131274983. Citado 9 vezes nas páginas 21, 51, 52, 53, 58, 59, 61, 67 e 74.
- Von Kármán, T. The problem of resistance in compressible fluids. In: REALE ACCADEMIA D'ITALIA. *Convegno di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali sul tema: Le Alte Velocità in Aviazione*. Rome, 1935. p. 255–264. Citado 4 vezes nas páginas 17, 25, 26 e 42.
- WHITE, F. M. *Mecânica dos fluidos*. 6. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 47.
- ZHANG, C.; ZHANG, J. Interpolation strategies in repeated Richardson extrapolation. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, v. 31, n. 6, p. 2935–2939, 2016. ISSN 10641246. Disponível em: <<http://www.medra.org/servlet/aliasResolver?alias=iospress&doi=10.3233/JIFS-169>>. Citado na página 40.

# **Apêndices**

# APÊNDICE A – MODELAGEM DO ESCOAMENTO

## A.1 COEFICIENTES E TERMO FONTE DA EQUAÇÃO DISCRETIZADA

Os coeficientes da Eq. (3.55) para as velocidades  $u$  e  $v$  são apresentados a seguir. A expressão 3.55 é reescrita aqui para facilidade de leitura .

$$A_P^\phi \phi_P + A_e^\phi \phi_E + A_w^\phi \phi_W + A_n^\phi \phi_N + A_s^\phi \phi_S + A_{sw}^\phi \phi_{SW} + A_{se}^\phi \phi_{SE} + A_{nw}^\phi \phi_{NW} + A_{ne}^\phi \phi_{NE} = B_P^\phi \quad (3.55)$$

onde  $\phi \in \{u, v\}$ . Os coeficientes  $A^\phi$  e o termo fonte  $B^\phi$  são dados a seguir:

$$A_s^\phi = -\frac{\dot{M}_s}{\Delta\eta} \left( \frac{1}{2} + \hat{\alpha}_s \right), \quad (A.1)$$

$$A_w^\phi = -\frac{\dot{M}_w}{\Delta\xi} \left( \frac{1}{2} + \hat{\alpha}_w \right), \quad (A.2)$$

$$A_e^\phi = \frac{\dot{M}_e}{\Delta\xi} \left( \frac{1}{2} - \hat{\alpha}_e \right), \quad (A.3)$$

$$A_n^\phi = \frac{\dot{M}_n}{\Delta\eta} \left( \frac{1}{2} - \hat{\alpha}_s \right), \quad (A.4)$$

$$A_{sw}^\phi = A_{se}^\phi = A_{nw}^\phi = A_{ne}^\phi = 0, \quad (A.5)$$

$$A_P^\phi = \frac{\mathcal{M}_P^\circ}{\Delta t} - \sum_{nb} A_{nb}^\phi, \quad (A.6)$$

$$B_P^\phi = \frac{\mathcal{M}_P^\circ \phi_P^\circ}{\Delta t} + y_P P_P^\phi. \quad (A.7)$$

Os termos de pressão  $P_P^\phi$  do termo fonte  $B_P^\phi$  são dados por:

$$P_P^u = \frac{(y_\xi)_n (p_N + p_P) - (y_\xi)_s (p_P + p_S)}{2\Delta\eta} - \frac{(y_\eta)_e (p_E + p_P) - (y_\eta)_w (p_P + p_W)}{2\Delta\xi}, \quad (A.8)$$

$$P_P^v = \frac{(x_\eta)_e (p_E + p_P) - (x_\eta)_w (p_P + p_W)}{2\Delta\xi} - \frac{(x_\xi)_n (p_N + p_P) - (x_\xi)_s (p_P + p_S)}{2\Delta\eta}, \quad (A.9)$$

## A.2 COEFICIENTES E TERMO FONTE DA EQUAÇÃO DE CORREÇÃO DE PRESSÃO

A expressão para correção de pressão, reescrita aqui para facilitar a leitura,

$$A_P^{p'} p'_P + A_W^{p'} p'_W + A_E^{p'} p'_E + A_S^{p'} p'_S + A_N^{p'} p'_N = B_P^{p'}, \quad (3.113)$$

tem os seguintes coeficientes e termo fonte  $B_P^{p'}$ , transcritos de (BERTOLDO, 2014):

$$\begin{aligned} A_P^{p'} &= \frac{\hat{g}_P y_P}{J_P \Delta t} \\ &+ \hat{g}_P \frac{\left(\frac{1}{2} + \hat{\alpha}_e\right) y_e U_e^* - \left(\frac{1}{2} - \hat{\alpha}_w\right) y_w U_w^*}{\Delta \xi} \\ &+ \hat{g}_P \frac{\left(\frac{1}{2} + \hat{\alpha}_n\right) y_n V_n^* - \left(\frac{1}{2} - \hat{\alpha}_s\right) y_s V_s^*}{\Delta \eta} \\ &+ \frac{\rho_e^* y_e d_e^U + \rho_w^* y_w d_w^U}{\Delta \xi} + \frac{\rho_n^* y_n d_n^V + \rho_s^* y_s d_s^V}{\Delta \eta}, \end{aligned} \quad (A.10)$$

$$A_W^{p'} = \frac{-\rho_w^* y_w d_w^U - \left(\frac{1}{2} + \hat{\alpha}_w\right) y_w U_w^* \hat{g}_W}{\Delta \xi}, \quad (A.11)$$

$$A_E^{p'} = \frac{-\rho_e^* y_e d_e^U + \left(\frac{1}{2} - \hat{\alpha}_e\right) y_e U_e^* \hat{g}_E}{\Delta \xi}, \quad (A.12)$$

$$A_S^{p'} = \frac{-\rho_s^* y_s d_s^V - \left(\frac{1}{2} + \hat{\alpha}_s\right) y_s V_s^* \hat{g}_S}{\Delta \eta}, \quad (A.13)$$

$$A_N^{p'} = \frac{-\rho_n^* y_n d_n^V + \left(\frac{1}{2} - \hat{\alpha}_n\right) y_n V_n^* \hat{g}_N}{\Delta \eta}, \quad (A.14)$$

$$\begin{aligned} B_P^{p'} &= - \left[ \frac{\mathcal{M}_P^* - \mathcal{M}_P^o}{\Delta t} + \frac{\dot{\mathcal{M}}_e^* - \dot{\mathcal{M}}_w^*}{\Delta \xi} + \frac{\dot{\mathcal{M}}_n^* - \dot{\mathcal{M}}_s^*}{\Delta \eta} \right] \\ &- \left[ \frac{\dot{\mathcal{M}}_e' - \dot{\mathcal{M}}_w'}{\Delta \xi} + \frac{\dot{\mathcal{M}}_n' - \dot{\mathcal{M}}_s'}{\Delta \eta} \right]. \end{aligned} \quad (A.15)$$

onde  $\hat{g}_P = \frac{1}{R_g T_P}$ , os fluxos  $\mathcal{M}_P^*$ ,  $\dot{\mathcal{M}}^*$  e  $\dot{\mathcal{M}}'$  são calculados com  $\rho$ ,  $U$  e  $V$  para nas faces especificadas.

# APÊNDICE B – PARÂMETROS DAS OTIMIZAÇÕES

## B.1 PARÂMETROS DA OTIMIZAÇÃO PARA $f_r=2$ E $M_\infty=3,0$

A Tab. 63 contém os parâmetros de domínio e malha básica para cada otimização.

Tabela 63 – PARÂMETROS DE DOMÍNIO E MALHA -  $M_\infty=3,0$

Parâmetro	Número de variáveis $n_u$			
	1	2	4	8
Comprimento horizontal - $l_a$	3,1	3,1	3,1	3,1
Comprimento vertical - $l_b$	3,0	3,0	3,0	3,0
Comprimento da ogiva - $l_o$		2,0		
Comprimento do cilindro - $l_c$		1,0		
Malha básica		90×60		
Expoente para geração da malha - $aks$		1,7		
Fator para criação do primeiro volume - $cbl$	2,0	2,0	2,0	2,0
Fator para conc. de volumes na ogiva - $fl_o$	0,60	0,65	0,65	0,65
Fator para conc. de volumes na região frontal - $fp_1$	0,65	0,65	0,65	0,65
Fator para conc. de volumes entre a ogiva e o cilindro - $fp_2$	0,15	0,15	0,15	0,15

## B.2 PARÂMETROS DA OTIMIZAÇÃO PARA $f_r=2$ E $M_\infty=6,0$

A Tab. 64 contém os parâmetros de domínio e malha básica para cada otimização.

Tabela 64 – PARÂMETROS DE DOMÍNIO E MALHA -  $M_\infty=6,0$

Parâmetro	Número de variáveis $n_u$			
	1	2	4	8
Comprimento horizontal - $l_a$	3,1	3,1	3,1	3,1
Comprimento vertical - $l_b$	2,5	2,5	2,5	2,5
Comprimento da ogiva - $l_o$		2,0		
Comprimento do cilindro - $l_c$		1,0		
Malha básica		90×60		
Expoente para geração da malha - $aks$		1,7		
Fator para criação do primeiro volume - $cbl$	2,0	2,0	2,0	2,0
Fator para conc. de volumes na ogiva - $fl_o$	0,60	0,65	0,65	0,65
Fator para conc. de volumes na região frontal - $fp_1$	0,65	0,65	0,65	0,65
Fator para conc. de volumes entre a ogiva e o cilindro - $fp_2$	0,15	0,15	0,15	0,15

### B.3 PARÂMETROS DA OTIMIZAÇÃO PARA $f_r=4$ E $M_\infty=3,0$

A Tab. 65 contém os parâmetros de domínio e malha básica para cada otimização com  $M_\infty=3,0$ .

Tabela 65 – PARÂMETROS DE DOMÍNIO E MALHA -  $M_\infty=3,0$

Parâmetro	Número de variáveis $n_u$			
	1	2	4	8
Comprimento horizontal - $l_a$	6,3	6,3	6,3	6,3
Comprimento vertical - $l_b$	4,5	4,5	4,5	4,5
Comprimento da ogiva - $l_o$		4,0		
Comprimento do cilindro - $l_c$		2,0		
Malha básica		180×30		
Expoente para geração da malha - $aks$		1,7		
Fator para criação do primeiro volume - $cbl$	1,0	1,0	1,0	1,0
Fator para conc. de volumes na ogiva - $fl_o$	0,65	0,65	0,65	0,65
Fator para conc. de volumes na região frontal - $fp_1$	0,65	0,65	0,65	0,65
Fator para conc, de volumes entre a ogiva e o cilindro - $fp_2$	0,15	0,15	0,15	0,15

### B.4 PARÂMETROS DA OTIMIZAÇÃO PARA $f_r=4$ E $M_\infty=6,0$

A Tab. 66 contém os parâmetros de domínio e malha básica para cada otimização.

Tabela 66 – PARÂMETROS DE DOMÍNIO E MALHA -  $M_\infty=6,0$

Parâmetro	Número de variáveis $n_u$			
	1	2	4	8
Comprimento horizontal - $l_a$	6,3	6,3	6,3	6,3
Comprimento vertical - $l_b$	3,0	3,0	3,0	3,0
Comprimento da ogiva - $l_o$		4,0		
Comprimento do cilindro - $l_c$		2,0		
Malha básica		180×30		
Expoente para geração da malha - $aks$		1,7		
Fator para criação do primeiro volume - $cbl$	0,125	0,125	0,125	0,125
Fator para conc. de volumes na ogiva - $fl_o$	0,65	0,65	0,65	0,65
Fator para conc. de volumes na região frontal - $fp_1$	0,65	0,65	0,65	0,65
Fator para conc, de volumes entre a ogiva e o cilindro - $fp_2$	0,15	0,15	0,15	0,15

### B.5 PARÂMETROS DA OTIMIZAÇÃO PARA $f_r=3$ E $M_\infty=3,0$

A Tab. 67 contém os parâmetros de domínio e malha básica para cada otimização com  $M_\infty=3,0$ .

Tabela 67 – PARÂMETROS DE DOMÍNIO E MALHA -  $M_\infty=3,0$ 

Parâmetro	Número de variáveis $n_u$			
	1	2	4	8
Comprimento horizontal - $l_a$	6,0	6,0	6,0	6,0
Comprimento vertical - $l_b$	3,0	3,0	3,0	3,0
Comprimento da ogiva - $l_o$		3,0		
Comprimento do cilindro - $l_c$		1,5		
Malha básica		90×30		
Expoente para geração da malha - $aks$		1,7		
Fator para criação do primeiro volume - $cbl$	2,0	2,0	2,0	2,0
Fator para conc. de volumes na ogiva - $fl_o$	0,65	0,65	0,65	0,65
Fator para conc. de volumes na região frontal - $fp_1$	0,65	0,65	0,65	0,65
Fator para conc. de volumes entre a ogiva e o cilindro - $fp_2$	0,15	0,15	0,15	0,15

## B.6 PARÂMETROS DA OTIMIZAÇÃO PARA $f_r=3$ E $M_\infty=6,0$

A Tab. 68 contém os parâmetros de domínio e malha básica para cada otimização.

Tabela 68 – PARÂMETROS DE DOMÍNIO E MALHA -  $M_\infty=6,0$ 

Parâmetro	Número de variáveis $n_u$			
	1	2	4	8
Comprimento horizontal - $l_a$	4,8	4,8	4,8	4,8
Comprimento vertical - $l_b$	4,0	4,0	4,0	4,0
Comprimento da ogiva - $l_o$		3,0		
Comprimento do cilindro - $l_c$		1,5		
Malha básica		90×30		
Expoente para geração da malha - $aks$		1,7		
Fator para criação do primeiro volume - $cbl$	1,0	1,0	1,0	1,0
Fator para conc. de volumes na ogiva - $fl_o$	0,65	0,65	0,65	0,65
Fator para conc. de volumes na região frontal - $fp_1$	0,65	0,65	0,65	0,65
Fator para conc. de volumes entre a ogiva e o cilindro - $fp_2$	0,15	0,15	0,15	0,15

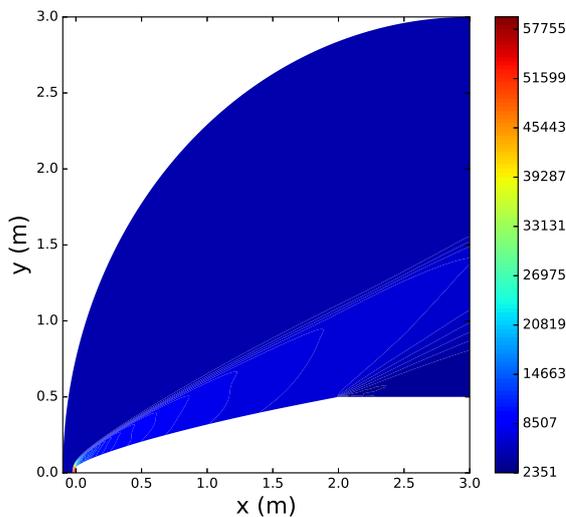
# APÊNDICE C – FIGURAS

## C.1 FIGURAS DE CAMPOS PARA $f_r=2$

Nesta seção são apresentadas figuras para os campos das diversas grandezas físicas para o perfil otimizado com razão de aspecto  $f_r=2$  e formado por 8 coordenadas. São mostradas as figuras do campo de pressão, campo de temperatura, campos de velocidades,  $u$  e  $v$ . Também são mostrados os campos de massa específica  $\rho$  e número de Mach. Cada seção contém as figuras para o número de Mach  $M_\infty$  específico.

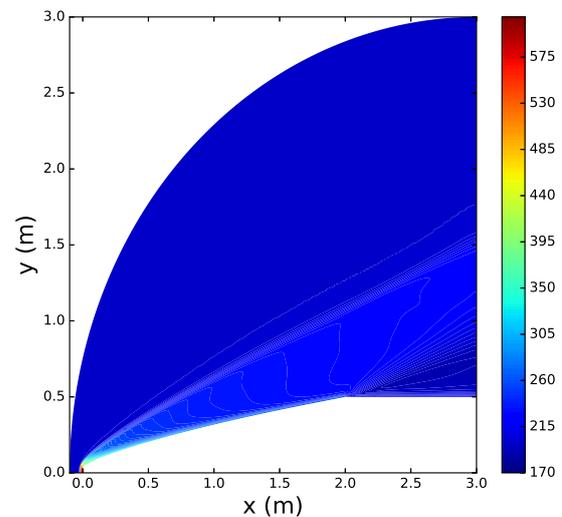
### C.1.1 Figuras de campos para $M_\infty=3,0$

Figura C.1 – CAMPO DE PRESSÃO (Pa)  
PARA  $f_r=2$  E  $M_\infty=3,0$



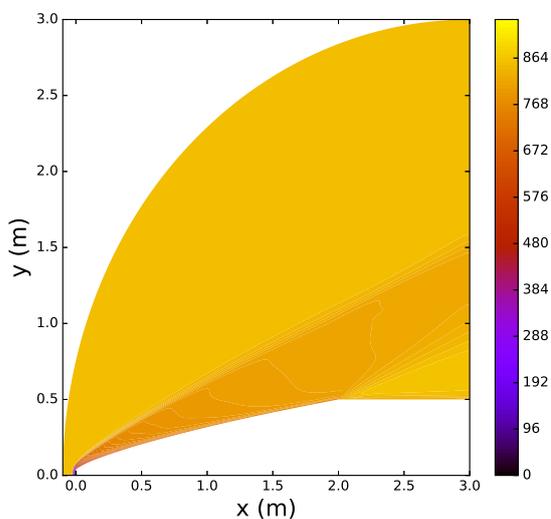
Fonte – O autor(2018)

Figura C.2 – CAMPO DE TEMPERATURA (K)  
PARA  $f_r=2$  E  $M_\infty=3,0$



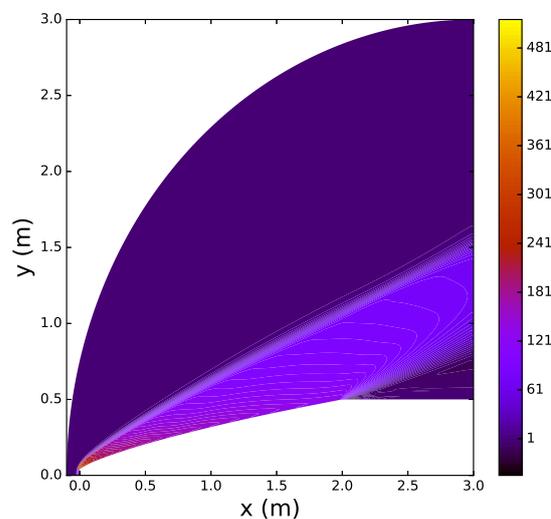
Fonte – O autor(2018)

Figura C.3 – CAMPO DE VELOCIDADE  $u$  (m/s) PARA  $f_r=2$  E  $M_\infty=3,0$



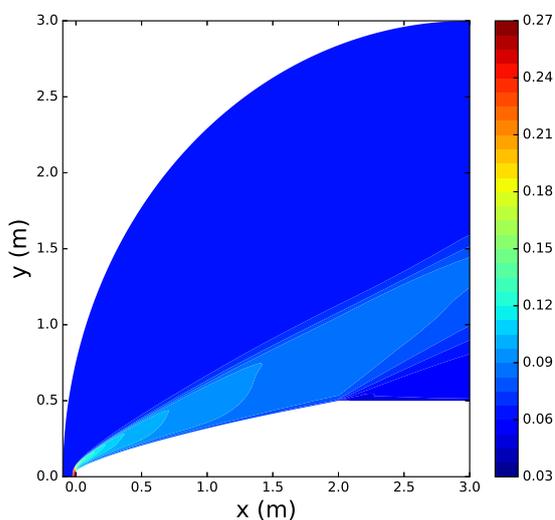
Fonte – O autor(2018)

Figura C.4 – CAMPO DE VELOCIDADE  $v$  (m/s) PARA  $f_r=2$  E  $M_\infty=3,0$



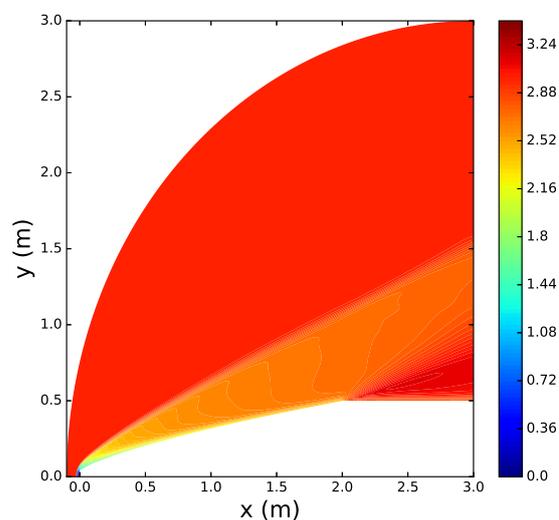
Fonte – O autor(2018)

Figura C.5 – CAMPO DE MASSA ESPECÍFICA  $\rho$  (kg/m<sup>3</sup>) PARA  $f_r=2$  E  $M_\infty=3,0$



Fonte – O autor(2018)

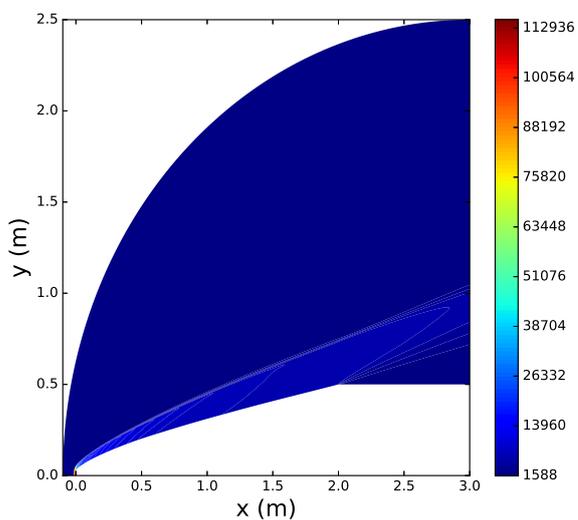
Figura C.6 – CAMPO DO NÚMERO DE MACH PARA  $f_r=2$  E  $M_\infty=3,0$



Fonte – O autor(2018)

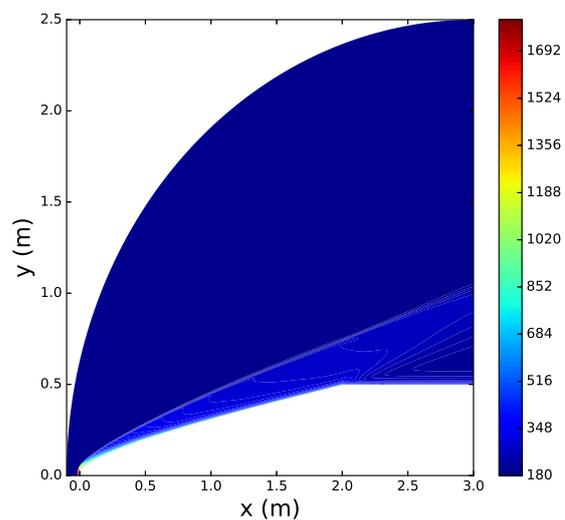
### C.1.2 Figuras de campos para $M_\infty=6,0$

Figura C.7 – CAMPO DE PRESSÃO (Pa)  
PARA  $f_r=2$  E  $M_\infty=6,0$



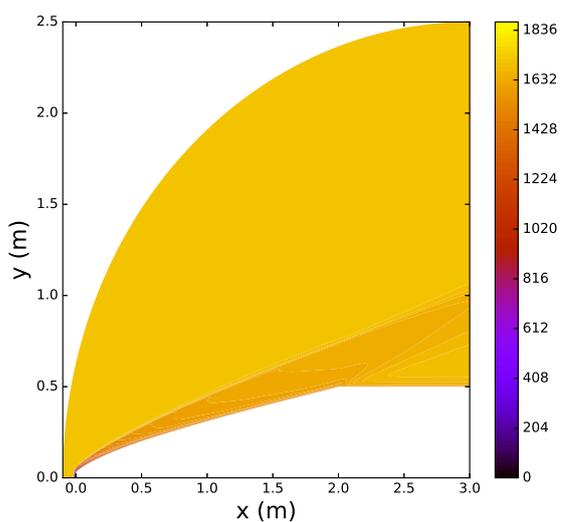
Fonte – O autor(2018)

Figura C.8 – CAMPO DE TEMPERATURA (K)  
PARA  $f_r=2$  E  $M_\infty=6,0$



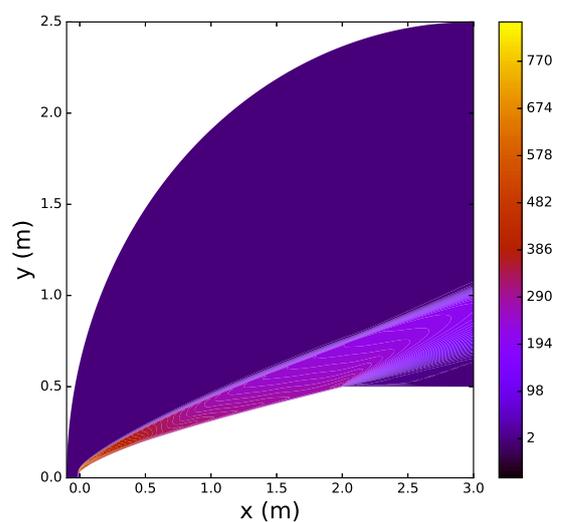
Fonte – O autor(2018)

Figura C.9 – CAMPO DE VELOCIDADE  $u$  (m/s)  
PARA  $f_r=2$  E  $M_\infty=6,0$



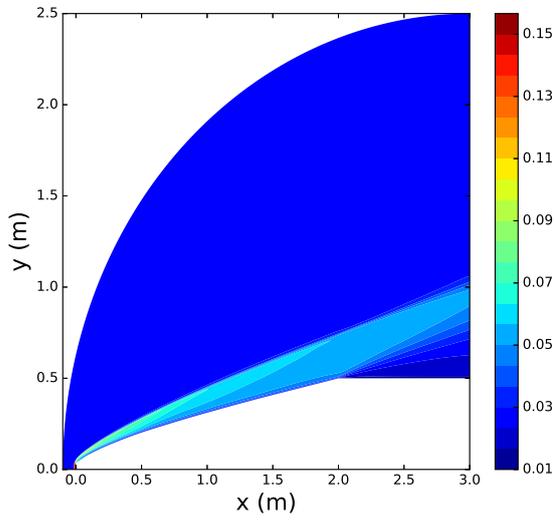
Fonte – O autor(2018)

Figura C.10 – CAMPO DE VELOCIDADE  $v$  (m/s)  
PARA  $f_r=2$  E  $M_\infty=6,0$



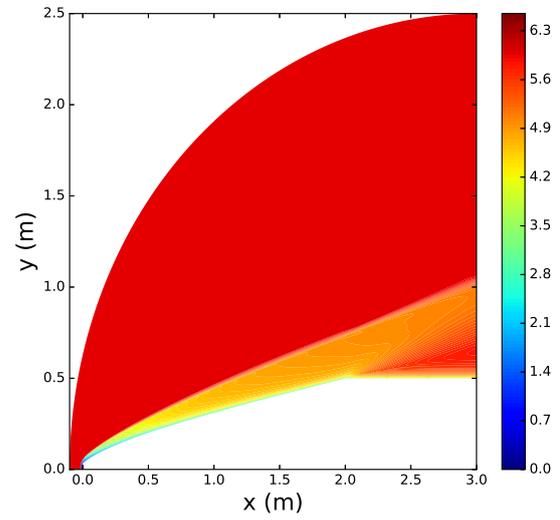
Fonte – O autor(2018)

Figura C.11 – CAMPO DE MASSA ESPECÍFICA  $\rho$  (kg/m<sup>3</sup>) PARA  $f_r=2$  E  $M_\infty=6,0$



Fonte – O autor(2018)

Figura C.12 – CAMPO DO NÚMERO DE MACH PARA  $f_r=2$  E  $M_\infty=6,0$



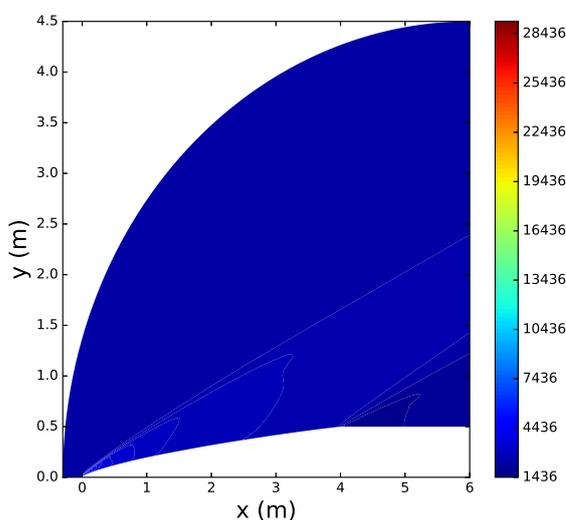
Fonte – O autor(2018)

## C.2 FIGURAS DE CAMPOS PARA $f_r=4$

Nesta seção são apresentadas figuras para os campos das diversas grandezas físicas para o perfil otimizado com razão de aspecto  $f_r=4$  e formado por 8 coordenadas. São mostradas as figuras do campo de pressão, campo de temperatura, campos de velocidades,  $u$  e  $v$ . Também são mostrados os campos de massa específica  $\rho$  e número de Mach. Cada seção contém as figuras para o número de Mach  $M_\infty$  específico.

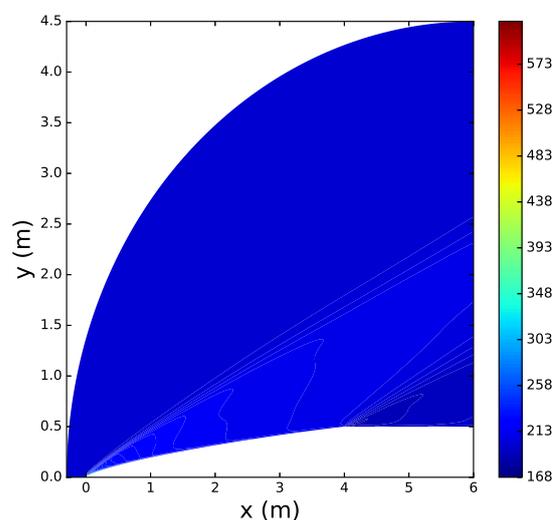
### C.2.1 Figuras de campos para $M_\infty=3,0$

Figura C.13 – CAMPO DE PRESSÃO (Pa)  
PARA  $f_r=4$  E  $M_\infty=3,0$



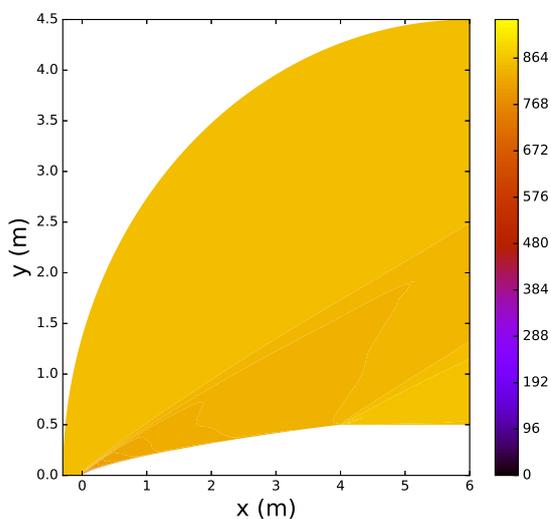
Fonte – O autor(2018)

Figura C.14 – CAMPO DE TEMPERATURA (K)  
PARA  $f_r=4$  E  $M_\infty=3,0$



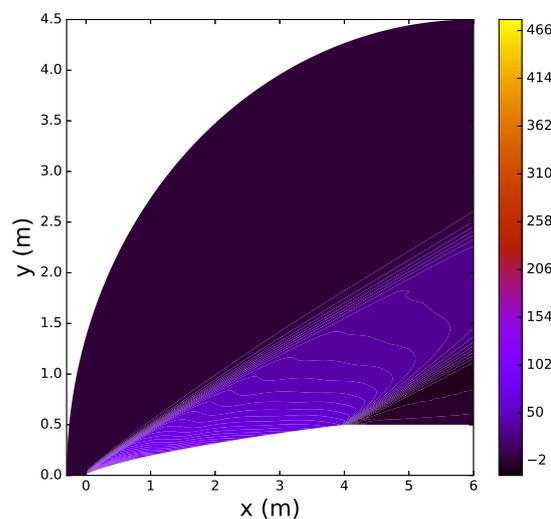
Fonte – O autor(2018)

Figura C.15 – CAMPO DE VELOCIDADE  $u$  (m/s) PARA  $f_r=4$  E  $M_\infty=3,0$



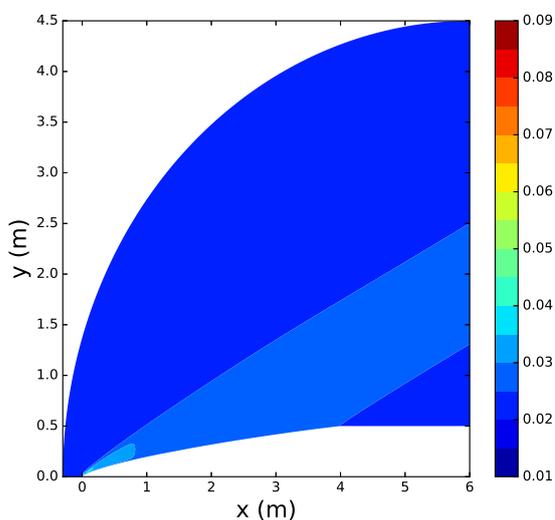
Fonte – O autor(2018)

Figura C.16 – CAMPO DE VELOCIDADE  $v$  (m/s) PARA  $f_r=4$  E  $M_\infty=3,0$



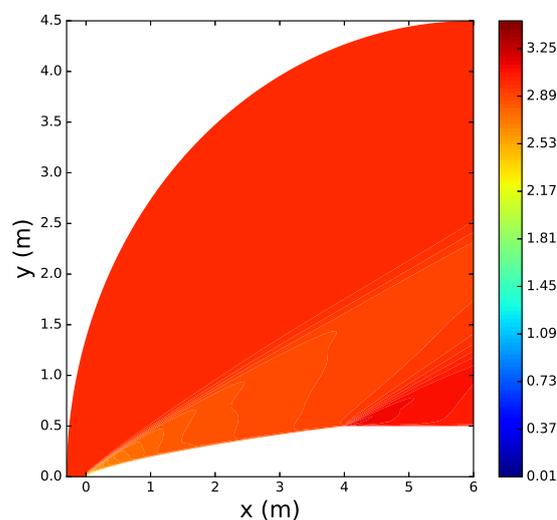
Fonte – O autor(2018)

Figura C.17 – CAMPO DE MASSA ESPECÍFICA  $\rho$  ( $\text{kg/m}^3$ ) PARA  $f_r=4$  E  $M_\infty=3,0$



Fonte – O autor(2018)

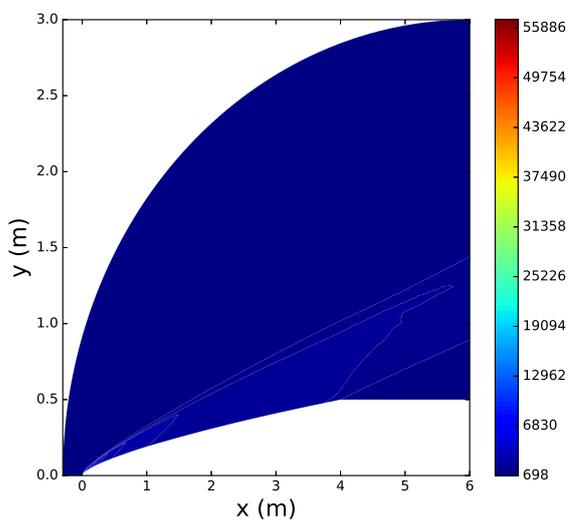
Figura C.18 – CAMPO DO NÚMERO DE MACH PARA  $f_r=4$  E  $M_\infty=3,0$



Fonte – O autor(2018)

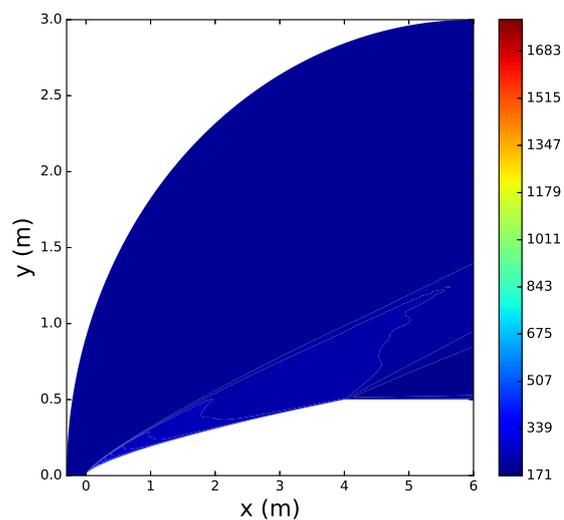
### C.2.2 Figuras de campos para $M_\infty=6,0$

Figura C.19 – CAMPO DE PRESSÃO (Pa)  
PARA  $f_r=4$  E  $M_\infty=6,0$



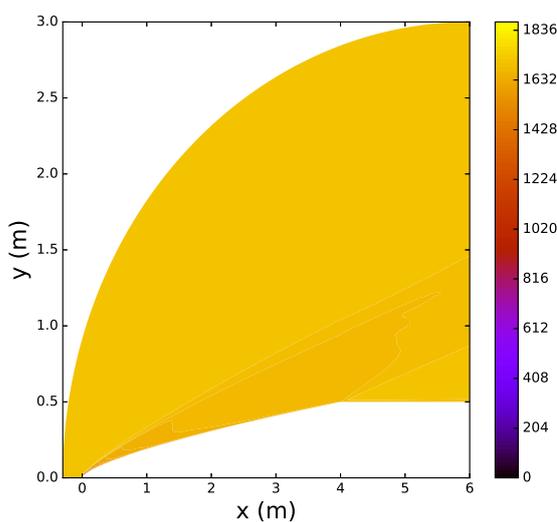
Fonte – O autor(2018)

Figura C.20 – CAMPO DE TEMPERATURA (K)  
PARA  $f_r=4$  E  $M_\infty=6,0$



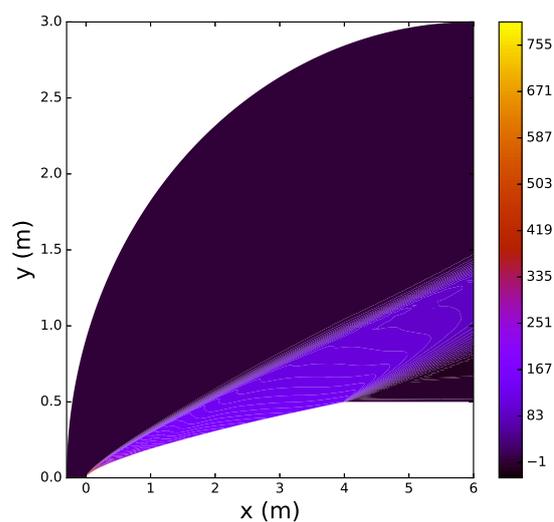
Fonte – O autor(2018)

Figura C.21 – CAMPO DE VELOCIDADE u (m/s)  
PARA  $f_r=4$  E  $M_\infty=6,0$



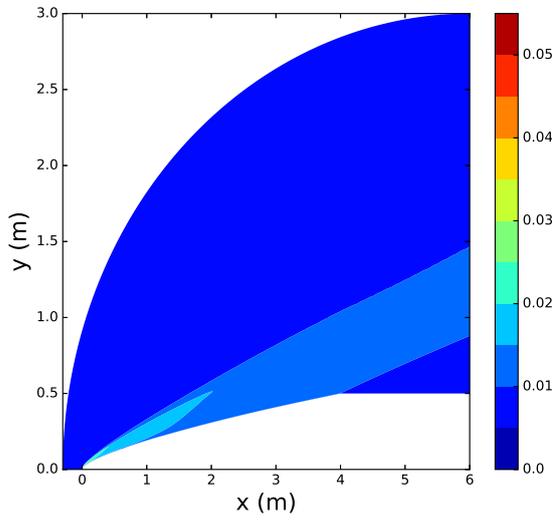
Fonte – O autor(2018)

Figura C.22 – CAMPO DE VELOCIDADE v (m/s)  
PARA  $f_r=4$  E  $M_\infty=6,0$



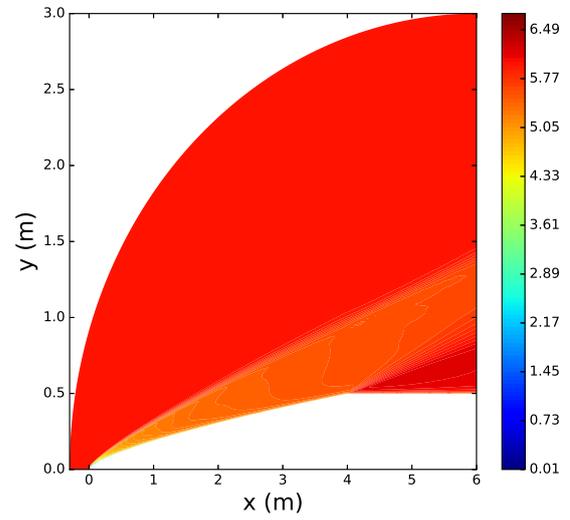
Fonte – O autor(2018)

Figura C.23 – CAMPO DE MASSA ESPECÍFICA  $\rho$  (kg/m<sup>3</sup>) PARA  $f_r=4$  E  $M_\infty=6,0$



Fonte – O autor(2018)

Figura C.24 – CAMPO DO NÚMERO DE MACH PARA  $f_r=4$  E  $M_\infty=6,0$



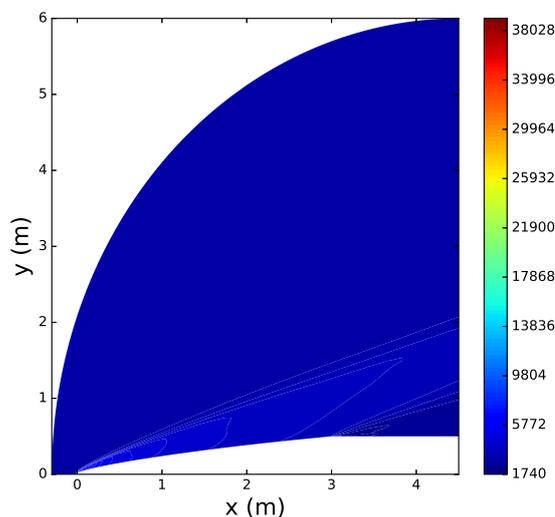
Fonte – O autor(2018)

### C.3 FIGURAS DE CAMPOS PARA $f_r=3$

Nesta seção são apresentadas figuras para os campos das diversas grandezas físicas para o perfil otimizado com razão de aspecto  $f_r=3$  e formado por 8 coordenadas. São mostradas as figuras do campo de pressão, campo de temperatura, campos de velocidades,  $u$  e  $v$ . Também são mostrados os campos de massa específica  $\rho$  e número de Mach. Cada seção contém as figuras para o número de Mach  $M_\infty$  específico.

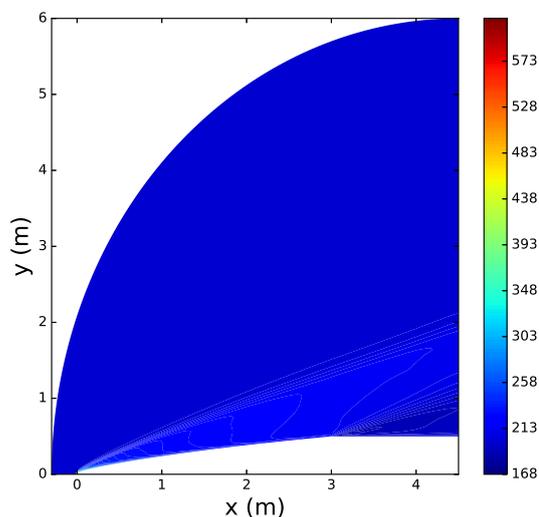
#### C.3.1 Figuras de campos para $M_\infty=3,0$

Figura C.25 – CAMPO DE PRESSÃO (Pa)  
PARA  $f_r=3$  E  $M_\infty=3,0$



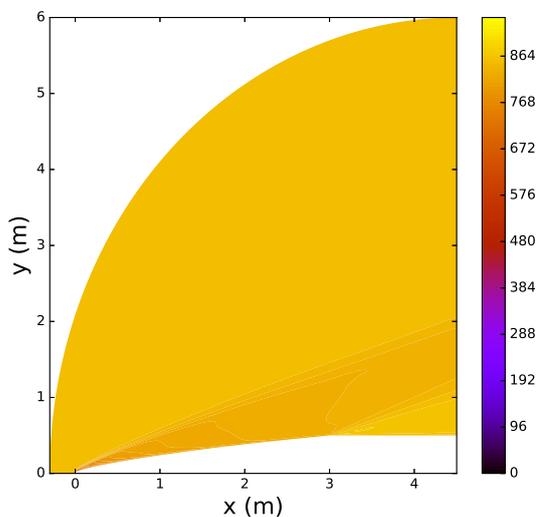
Fonte – O autor(2018)

Figura C.26 – CAMPO DE TEMPERATURA (K)  
PARA  $f_r=3$  E  $M_\infty=3,0$



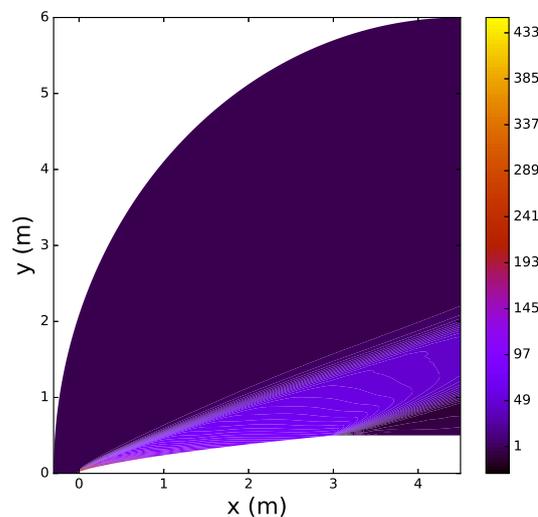
Fonte – O autor(2018)

Figura C.27 – CAMPO DE VELOCIDADE  $u$  (m/s) PARA  $f_r=3$  E  $M_\infty=3,0$



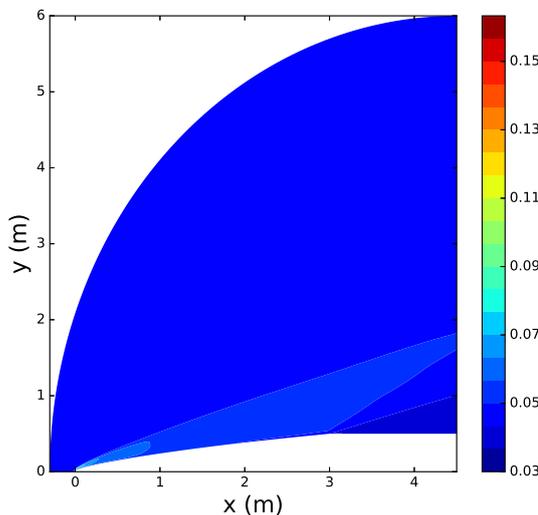
Fonte – O autor(2018)

Figura C.28 – CAMPO DE VELOCIDADE  $v$  (m/s) PARA  $f_r=3$  E  $M_\infty=3,0$



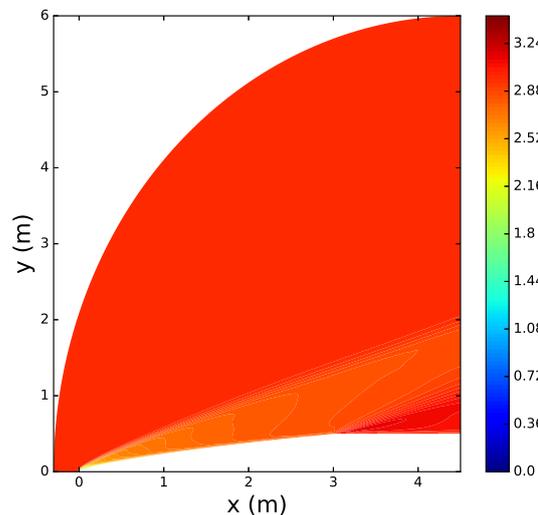
Fonte – O autor(2018)

Figura C.29 – CAMPO DE MASSA ESPECÍFICA  $\rho$  (kg/m<sup>3</sup>) PARA  $f_r=3$  E  $M_\infty=3,0$



Fonte – O autor(2018)

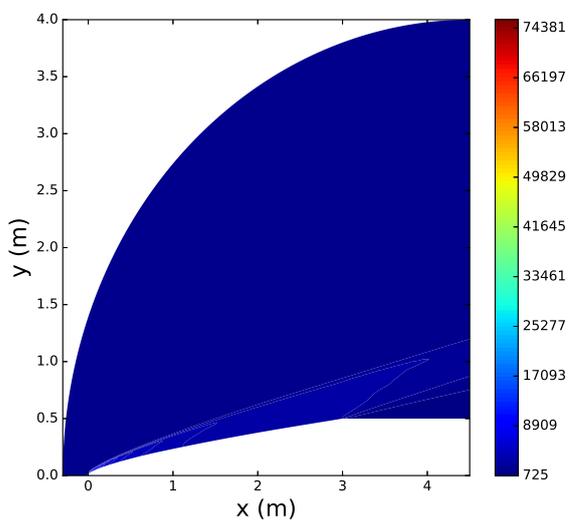
Figura C.30 – CAMPO DO NÚMERO DE MACH PARA  $f_r=3$  E  $M_\infty=3,0$



Fonte – O autor(2018)

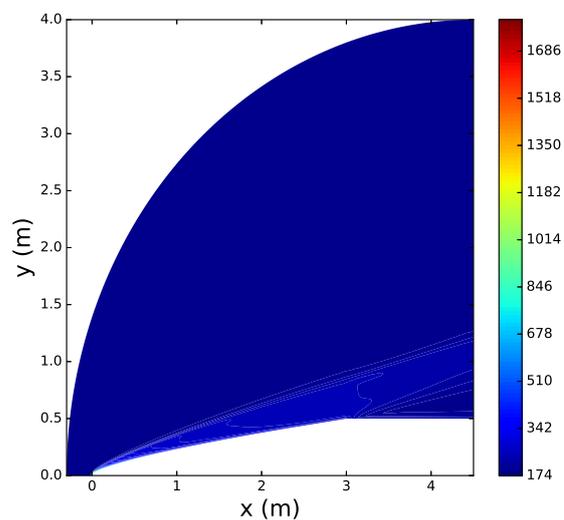
### C.3.2 Figuras de campos para $M_\infty=6,0$

Figura C.31 – CAMPO DE PRESSÃO (Pa)  
PARA  $f_r=3$  E  $M_\infty=6,0$



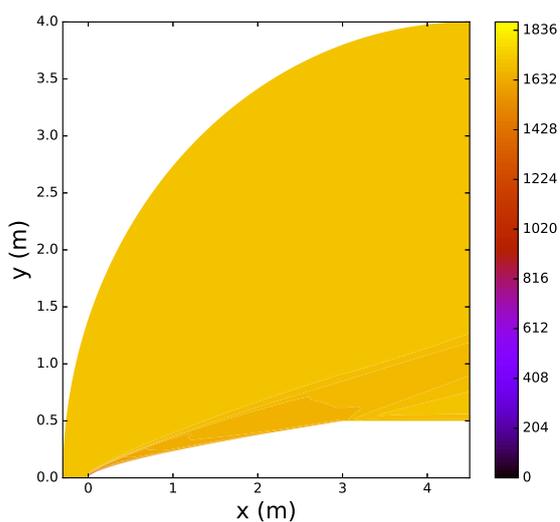
Fonte – O autor(2018)

Figura C.32 – CAMPO DE TEMPERATURA (K)  
(K) PARA  $f_r=3$  E  $M_\infty=6,0$



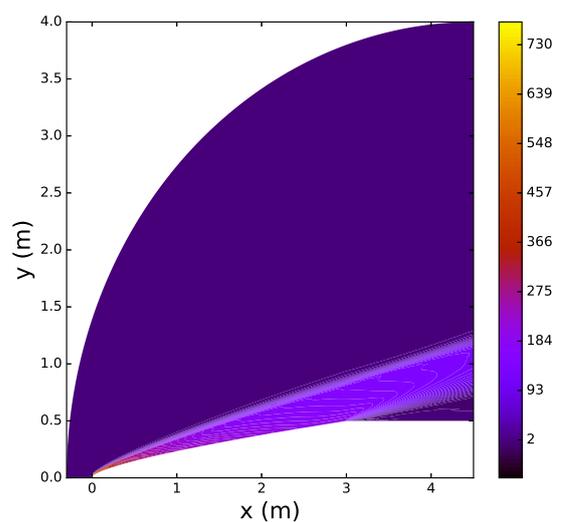
Fonte – O autor(2018)

Figura C.33 – CAMPO DE VELOCIDADE u (m/s)  
(m/s) PARA  $f_r=3$  E  $M_\infty=6,0$



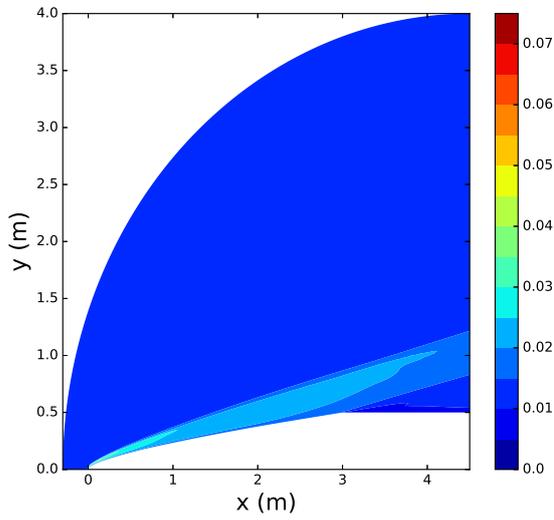
Fonte – O autor(2018)

Figura C.34 – CAMPO DE VELOCIDADE v (m/s)  
(m/s) PARA  $f_r=3$  E  $M_\infty=6,0$



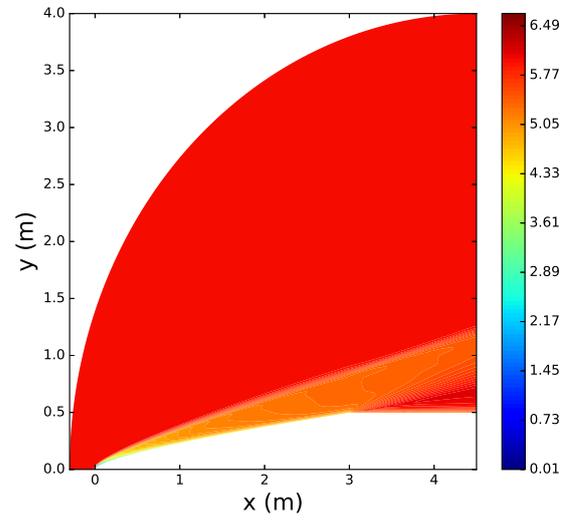
Fonte – O autor(2018)

Figura C.35 – CAMPO DE MASSA ESPECÍFICA  $\rho$  (kg/m<sup>3</sup>) PARA  $f_r=3$  E  $M_\infty=6,0$



Fonte – O autor(2018)

Figura C.36 – CAMPO DO NÚMERO DE MACH PARA  $f_r=3$  E  $M_\infty=6,0$



Fonte – O autor(2018)