

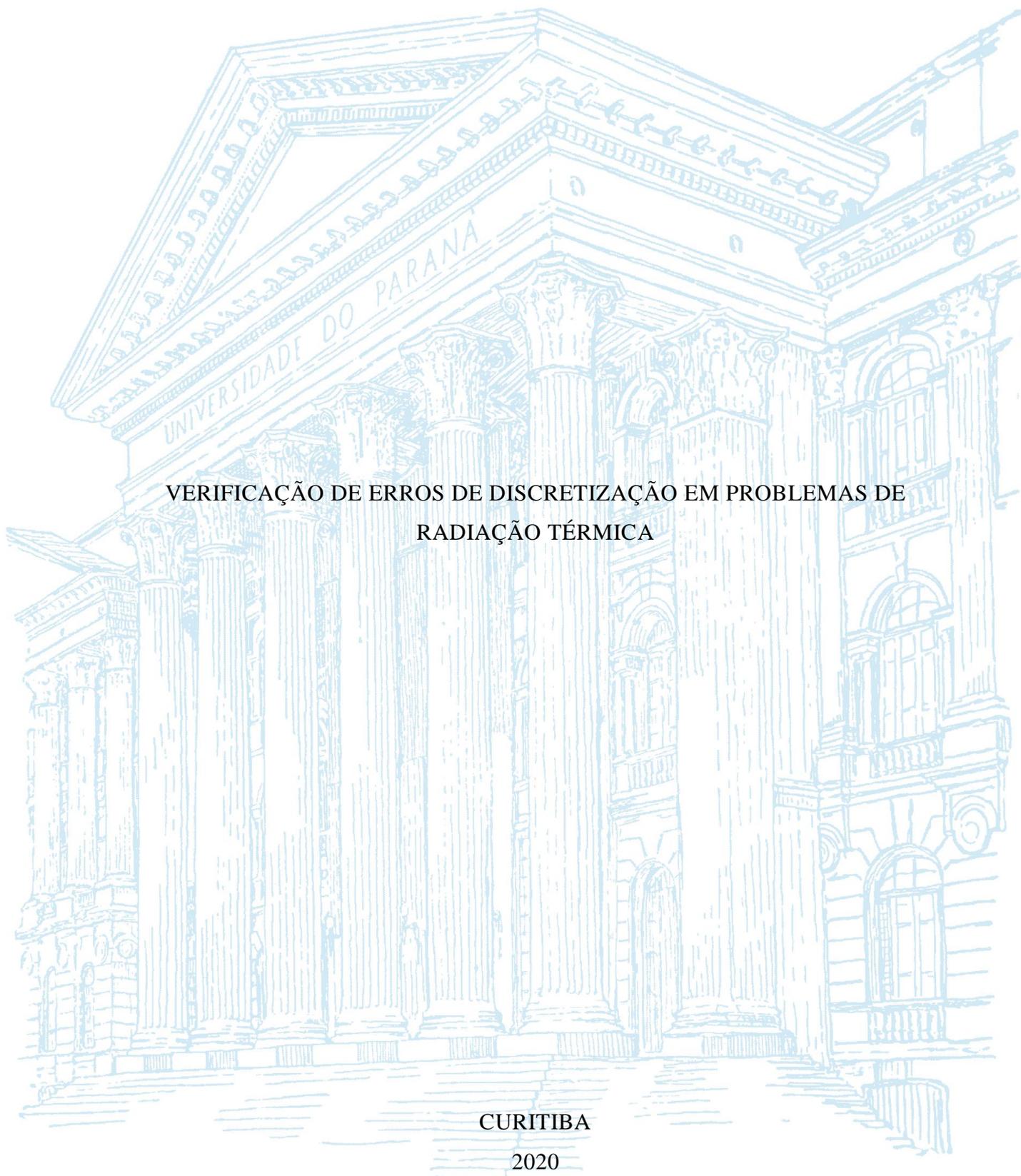
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ANTONIO CARLOS FOLTRAN

VERIFICAÇÃO DE ERROS DE DISCRETIZAÇÃO EM PROBLEMAS DE
RADIÇÃO TÉRMICA

CURITIBA

2020



ANTONIO CARLOS FOLTRAN

VERIFICAÇÃO DE ERROS DE DISCRETIZAÇÃO EM PROBLEMAS DE
RADIAÇÃO TÉRMICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Doutor em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Henrique Marchi

Coorientador: Prof. Dr. Luís Mauro Moura

CURITIBA

2020

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

F671v

Foltran, Antonio Carlos

Verificação de erros de discretização em problemas de radiação térmica [recurso eletrônico] / Antonio Carlos Foltran. – Curitiba, 2020.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Mecânica, 2020.

Orientador: Carlos Henrique Marchi – Coorientador: Luís Mauro Moura

1. Radiação. 2. Calor - Radiação e absorção. 3. Calor – Transmissão. 4. Diferenças finitas. I. Universidade Federal do Paraná. II. Marchi, Carlos Henrique. III. Moura, Luís Mauro. IV. Título.

CDD: 536.3

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO ENGENHARIA
MECÂNICA - 40001016040P5

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA MECÂNICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **ANTONIO CARLOS FOLTRAN** intitulada: **VERIFICAÇÃO DE ERROS DE DISCRETIZAÇÃO EM PROBLEMAS DE RADIAÇÃO TÉRMICA**, sob orientação do Prof. Dr. CARLOS HENRIQUE MARCHI, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 05 de Agosto de 2020.

CARLOS HENRIQUE MARCHI
Presidente da Banca Examinadora

LILIANE BASSO BARICHELO
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO
SUL)



Documento assinado digitalmente
Vicente de Paulo Nicolau
Data: 07/08/2020 13:51:05-0300
CPF: 252.055.529-72

VICENTE DE PAULO NICOLAU

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA)

ADMILSON TEIXEIRA FRANCO

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO
PARANÁ)

AGRADECIMENTOS

Aos meus familiares pelo costumeiro apoio e dedicação. Obrigado Carlos Alberto e Neuza por serem pais tão zelosos, pela educação fortemente baseada em princípios éticos, pelo incentivo ao estudo e a ter gosto pelo trabalho. À minha irmã Ângela, pelas longas conversas sobre todos os temas possíveis. À minha esposa Leila Cristiane, pelo carinho e dedicação, que muito me auxiliaram durante a fase de incerteza quanto aos rumos que esse doutorado tomaria.

Ao Prof. Dr. Carlos Henrique Marchi por ter aceito me orientar no doutorado, pelos conhecimentos transmitidos e pela oportunidade de participar do Grupo de Foguetes Carl Sagan, seja em partes específicas do projeto, assim como nos infundáveis testes de resistência, em banco estático e de voo.

Ao Prof. Dr. Luís Mauro Moura pelos conhecimentos transmitidos, pelas muitas conversas sobre os mais diversos (e interessantes) temas dentro da engenharia, pelas boas dicas e sugestões que certamente enriqueceram este documento.

Aos membros da banca, Prof. Dr. Admilson Teixeira Franco, Profa. Dra. Liliane Basso Barichello e Prof. Dr. Vicente de Paulo Nicolau, pela dedicação e pelas contribuições a esta tese.

Aos queridíssimos colegas do Laboratório de Experimentação Numérica - LENA. Seja pelas boas discussões, momentos de descontração, sugestões e ajudas, fazendo com que a qualidade da produção de todos fosse melhorada.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – PGMEC da UFPR, em especial aos seus professores e funcionários dedicados.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – PPGEM da PUCPR pela oportunidade de cursar a disciplina de Radiação em Meios Semitransparentes.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia e Ciência dos Materiais – PIPE da UFPR e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – PPGEM da PUC/PR, pela oportunidade de cursar disciplinas relevantes, tanto para o tema de pesquisa desta tese, como de interesse profissional.

À CAPES pelo auxílio financeiro, que me permitiu dedicar integralmente à pesquisa durante três quartos do doutorado.

Em algum lugar algo incrível está esperando para ser descoberto.

Carl Sagan

RESUMO

Neste trabalho é estimado o erro de discretização espacial na solução numérica de problemas de radiação térmica em meios participantes e meios não participantes. Isso é feito por meio de uma análise *a posteriori*, empregando os estimadores de Richardson e *Grid Convergence Index*. Os problemas escolhidos possuem solução analítica para a maioria das variáveis analisadas, portanto é possível mostrar que as estimativas de erro são acuradas e confiáveis. Paralelamente é conduzida uma análise *a priori*, deduzindo equações do erro de discretização dos problemas mais simples. Estas equações permitem prever as ordens verdadeiras dos respectivos problemas e são úteis na análise dos problemas mais complexos. Usando a técnica de Múltiplas Extrapolações de Richardson são obtidas (*a posteriori*) soluções numéricas mais acuradas, assim como as ordens verdadeiras dos esquemas numéricos empregados. As ordens verdadeiras observadas *a posteriori* tendem àquelas deduzidas *a priori* à medida que o tamanho do elemento de malha tende a zero. Nos problemas de meios não participantes são usadas malhas entre 2 e 4.096 elementos de malha, já nos problemas em meios participantes são usadas malhas entre 2 e 262.144 elementos. Os problemas em meios não participantes são: a) radiação trocada entre placas paralelas (equação algébrica contendo termo integral); b) tubo com extremidades abertas e fluxo prescrito na área lateral (equação integral de Fredholm) e; c) cavidade esférica dividida em duas calotas e duas zonas esféricas (sistema de equações integrais de Fredholm). Estes problemas são resolvidos numericamente usando a Regra do Trapézio e a Regra 1/3 de Simpson. As variáveis analisadas são o poder emissivo e temperatura das superfícies. As variáveis apresentam ordens verdadeiras *a posteriori* condizentes com a análise *a priori*, exceto no problema do tubo usando a Regra 1/3 de Simpson. Isto ocorre porque o fator de forma infinitesimal (no núcleo da integral) possui derivadas descontínuas. Já os problemas em meios participantes são: a) meio absorvedor-emissor com temperatura constante; b) problema similar, porém a temperatura do meio apresenta perfil parabólico; c) problema similar ao item a, porém em meio que também apresenta espalhamento isotrópico; e d) problema em equilíbrio radiativo. Estes quatro problemas são resolvidos com o Método das Ordenadas Discretas usando os esquemas Degrau e Diamante. São identificadas três fontes de erro de truncamento na equação do erro de discretização: a) devido a Ponderação Variável, da qual os esquemas Degrau e Diamante são os exemplos clássicos; b) da aplicação da Regra do Retângulo; e c) devida ao processo de marcha no espaço, uma combinação de ambas as fontes que é passada ao elemento seguinte na direção ordenada. Em geral, as ordens verdadeiras observadas *a posteriori* tendem às respectivas ordens verdadeiras calculadas *a priori* à medida que o tamanho do elemento de malha tende a zero. São analisadas a intensidade e irradiação sobre uma superfície e a temperatura, radiação incidente e fluxo de calor no meio do domínio. As exceções observadas são a radiação incidente e a temperatura de equilíbrio radiativo, ambas nos últimos dois problemas.

Palavras-Chave: Transferência de calor por radiação. Cavidades preenchidas por meios não participantes. Problemas em Meios Participantes. Erro de discretização espacial. Equação do Erro de Truncamento. Soluções numéricas acuradas. Método das Diferenças Finitas. Regra do Trapézio. Regra 1/3 de Simpson. Método das Ordenadas Discretas. Esquema Degrau. Esquema Diamante.

ABSTRACT

In this work, the spatial discretization error in the numerical solution of thermal radiation problems in participating and non-participating media is estimated. This is done through *a posteriori* analysis, using the Richardson and Grid Convergence Index estimators. The chosen problems have an analytical solution for most of the variables analyzed, therefore it is possible to show that the error estimates are accurate and reliable. In parallel, an *a priori* analysis is conducted, deducing equations of the discretization error of some simplest problems. These equations make it possible to predict the true orders and are also useful in the analysis of the most complex problems. Using the technique called Repeated Richardson Extrapolations, more accurate numerical solutions are obtained (*a posteriori*), as well as the true orders of the numerical schemes employed. The true orders observed *a posteriori* tend to those deduced *a priori* as the mesh size tends to zero. In the problems of non-participating media, meshes between 2 and 4,096 elements are used, while in the problems in participating media, meshes between 2 and 262,144 elements are used. The problems in non-participating media are: a) radiation exchanged between parallel plates (algebraic equation containing an integral term); b) tube with open ends and heat flux prescribed in the lateral area (Fredholm integral equation) and; c) spherical cavity divided into two caps and two spherical segments (system of Fredholm integral equations). These problems are solved numerically using the Trapezoid Rule and Simpson's 1/3 Rule. The variables analyzed are the emissive power and surface temperature. The variables present *a posteriori* true orders consistent with the *a priori* analysis, except for the tube problem using Simpson's 1/3 Rule. This is because the infinitesimal configuration factor (in the integrand) has discontinuous derivatives. The problems in participating media are: a) absorbing-emitting medium with constant temperature; b) similar problem, but the medium temperature has a parabolic profile; c) a problem similar to item a, but in a medium that also presents isotropic scattering; and d) problem in radiative equilibrium. These four problems are solved with the Discrete Ordinate Method using the Step and Diamond schemes. Three sources of truncation error are identified in the discretization error equation: a) due to Variable Weighting, of which the Step and Diamond schemes are the classic examples; b) the application of the Rectangle Rule; and c) due to the process of marching in space, a combination of both previous sources that is passed to the next element in the ordinate direction. In general, the true orders observed *a posteriori* tend to the respective true orders calculated *a priori* as the mesh size tends to zero. The intensity and irradiation on a surface and the temperature, incident radiation and heat flux in the middle of the domain are analyzed. The exceptions observed are the incident radiation and radiative equilibrium temperature, both in the last two problems.

Keywords: Radiation heat transfer. Enclosures filled with non-participating media. Problems in participating media. Spatial discretization errors. Truncation Error Equation. Accurate numerical solutions. Finite Difference Method. Trapezoidal Rule. Simpson's 1/3 Rule. Discrete Ordinates Method. Step Scheme. Diamond Scheme.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1.1 - GEOMETRIA E CONDIÇÕES DE CONTORNO EM UMA BARRAGEM	21
FIGURA 1.2 - DUAS CLASSES DE PROBLEMAS DE RADIAÇÃO TÉRMICA EM CAVIDADES. (A) MEIO NÃO PARTICIPANTE E (B) EM MEIO PARTICIPANTE.....	28
FIGURA 2.1 - CAVIDADE HIPOTÉTICA CONTENDO N SUPERFÍCIES.....	46
FIGURA 2.2 - REFERENCIAL ARBITRÁRIO PARA SUPERFÍCIES NÃO ISOTÉRMICAS	51
FIGURA 2.3 - RELAÇÃO ENTRE ÂNGULO SÓLIDO E ÂNGULO PLANO.....	58
FIGURA 2.4 - PRINCÍPIO DE CONSERVAÇÃO DA ENERGIA EM MEIO PARTICIPANTE.....	60
FIGURA 2.5 - CAMADA ABSORVEDORA-EMISSORA ENTRE FRONTEIRAS PARALELAS, NEGRAS E INFINITAS	63
FIGURA 2.6 - SEIS PRIMEIRAS FUNÇÕES INTEGRAIS EXPONENCIAIS.....	66
FIGURA 2.7 – REPRESENTAÇÃO DE UM RAIOS PERCORRENDO O DOMÍNIO.....	69
FIGURA 2.8 – TRAÇAGEM DE RAIOS NO INTERIOR DA CÂMARA DE EMPUXO DE UM MOTOR-FOGUETE HIPOTÉTICO	72
FIGURA 2.9 – FLUXO ADIMENSIONAL OBTIDO COM O SHM EM FUNÇÃO DA ESPESSURA ÓPTICA	78
FIGURA 2.10 - COSSENOS DIRETORES DAS DIREÇÕES DISCRETAS, APROXIMAÇÕES s_2, s_4, s_6 E s_8	81
FIGURA 2.11 - DIVISÃO DE UM OCTANTE DA SUPERFÍCIE DA ESFERA EM ÁREAS QUE REPRESENTAM O PESO DA SUA RESPECTIVA DIREÇÃO PARA A APROXIMAÇÃO s_8	82
FIGURA 3.1 – NOMENCLATURA DOS PONTOS NODAIS NA MALHA 1D UNIFORME.....	94
FIGURA 3.2 – INTEGRAÇÃO DA FUNÇÃO F DO NÓ $j-1$ ATÉ O NÓ j	96
FIGURA 3.3 - INTEGRAÇÃO DA FUNÇÃO F DO NÓ j ATÉ O NÓ $j + 1$	100
FIGURA 3.4 – INTEGRAL NO DOMÍNIO COMPLETO CONTENDO 6 INTERVALOS DISCRETOS	110
FIGURA 3.5 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO DO POLINÔMIO x^4 COMO FUNÇÃO DO TAMANHO DO ELEMENTO DE MALHA.....	114
FIGURA 3.6 - ORDENS EFETIVA E APARENTE DA INTEGRAÇÃO DO POLINÔMIO x^4 COMO FUNÇÃO DO TAMANHO DO TAMANHO DE MALHA.	115
FIGURA 3.7 – MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA O POLINÔMIO x^9 EM FUNÇÃO DO TAMANHO DO ELEMENTO DE MALHA	119
FIGURA 3.8 – ORDENS EFETIVA E APARENTE PARA A INTEGRAÇÃO DO POLINÔMIO x^9 EM FUNÇÃO DO TAMANHO DO ELEMENTO DE MALHA.....	119
FIGURA 3.9 – MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO DA INTEGRAL DE $\text{sen}x$ COMO FUNÇÃO DO TAMANHO DO ELEMENTO DE MALHA.....	120
FIGURA 3.10 – ORDENS EFETIVA E APARENTE PARA A INTEGRAL DA FUNÇÃO $\text{sen}x$ COMO FUNÇÃO DO TAMANHO DO ELEMENTO DE MALHA.....	121
FIGURA 3.11 – DIFERENÇA ENTRE O ERRO NUMÉRICO CALCULADO E MEDIDO PARA TODAS AS FUNÇÕES ANALISADAS	122
FIGURA 4.1 – MALHA DE VOLUMES FINITOS 1D MOSTRANDO O VOLUME P.....	123

FIGURA 4.2 –DIFERENÇA ENTRE O ERRO CALCULADO E O MEDIDO PARA IPP = 1	138
FIGURA 4.3 – ORDEM APARENTE DA DIFERENÇA ENTRE OS ERROS CALCULADO E MEDIDO...	138
FIGURA 4.4 – DIFERENÇA ENTRE OS ERROS CALCULADO E O MEDIDO PARA IPP = N	139
FIGURA 4.5 - DIFERENÇA ENTRE OS ERROS CALCULADO E O MEDIDO PARA IeP = N	140
FIGURA 4.6 – INTENSIDADE DIRECIONAL PARA AS 3 DIREÇÕES POSITIVAS DE S6.....	141
FIGURA 4.7 – COMPARAÇÃO DE IeP = N CONSIDERANDO MEIO ESPESSO, $\tau = 5$	142
FIGURA 4.8 – COMPARAÇÃO DE IeP = N CONSIDERANDO MEIO FINO, $\tau = 0,2$	142
FIGURA 5.1 - PLACAS PARALELAS NEGRAS DO PRIMEIRO PROBLEMA.	145
FIGURA 5.2 - TUBO FINITO COM FLUXO DE CALOR PRESCRITO NA ÁREA LATERAL E RADIAÇÃO AMBIENTE NAS EXTREMIDADES.	148
FIGURA 5.3 - CAVIDADE ESFÉRICA NEGRA DIVIDIDA EM QUATRO SEÇÕES COM DIFERENTES CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	152
FIGURA 5.4 – MEIO ABSORVEDOR EMISSOR SEPARADO POR PLACAS NEGRAS, PARALELAS E INFINITAS	158
FIGURA 6.1 - ERRO E ESTIMATIVAS DO ERRO PARA E2 EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 1 USANDO A REGRA DO TRAPÉZIO.	164
FIGURA 6.2 - ORDENS EFETIVA E APARENTE DE E2 EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 1 USANDO A REGRA DO TRAPÉZIO.	165
FIGURA 6.3 - ERRO E ESTIMATIVAS DO ERRO PARA E2 EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 1 USANDO A REGRA DE SIMPSON.	166
FIGURA 6.4 - ORDENS EFETIVA E APARENTE DE E2 EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 1 USANDO A REGRA DE SIMPSON.	166
FIGURA 6.5 - ERRO E ESTIMATIVAS DO ERRO PARA T2x = 0 EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 1 USANDO A REGRA DO TRAPÉZIO.	167
FIGURA 6.6 - ORDEM EFETIVA DE T2x = 0 EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 1 USANDO A REGRA DO TRAPÉZIO.	168
FIGURA 6.7 - ERRO E ESTIMATIVAS DO ERRO PARA T2(X2 = 0) EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 2 USANDO A REGRA DO TRAPÉZIO.	170
FIGURA 6.8 - ERRO E ESTIMATIVAS DO ERRO PARA T2(X2 = 0) EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 2 USANDO A REGRA DE SIMPSON.....	170
FIGURA 6.9 - ORDENS EFETIVA E APARENTE DE T2(X2 = 0) EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 2 USANDO A REGRA DO TRAPÉZIO	171
FIGURA 6.10 - ORDENS EFETIVA E APARENTE DE T2(X2 = 0) EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 2 USANDO A REGRA DE SIMPSON	172
FIGURA 6.11 - ALTERAÇÃO DA DEFINIÇÃO DE K COMO TESTE DA HIPÓTESE DA DERIVADA DESCONTÍNUA.....	174
FIGURA 6.12 - MALHA EMPREGADA NO PROGRAMA DTM_3D_AXISYMMETRIC 1.1	175
FIGURA 6.13 - COMPARAÇÃO DO PERFIL DE TEMPERATURA OBTIDO COM O DTM.....	175
FIGURA 6.14 - ERRO E ESTIMATIVAS DO ERRO PARA E2 EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 3 USANDO A REGRA DO TRAPÉZIO	178

FIGURA 6.15 - ORDENS EFETIVA E APARENTE DE E2 EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 3 USANDO A REGRA DO TRAPÉZIO	178
FIGURA 6.16 - ERRO E ESTIMATIVAS DO ERRO PARA E2 EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 3 USANDO A REGRA DE SIMPSON	179
FIGURA 6.17 - ORDENS EFETIVA E APARENTE DE E2 EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 3 USANDO A REGRA DE SIMPSON	179
FIGURA 6.18 - ERRO E ESTIMATIVAS DO ERRO PARA T3 EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 3 USANDO A REGRA DO TRAPÉZIO	180
FIGURA 6.19 - ORDENS EFETIVA E APARENTE DE T3 EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 3 USANDO A REGRA DO TRAPÉZIO	180
FIGURA 6.20 - ERRO E ESTIMATIVAS DO ERRO PARA T3 EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 3 USANDO A REGRA DE SIMPSON	181
FIGURA 6.21 - ORDENS EFETIVA E APARENTE DE T3 EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 3 USANDO A REGRA DE SIMPSON	181
FIGURA 6.22 – COMPARAÇÃO DOS VALORES NUMÉRICOS (4 MALHAS) DA INTENSIDADE IP NAS DIREÇÕES MAIS E MENOS INCLINADAS PARA $\gamma = 1/2$	185
FIGURA 6.23 – MÓDULO DO ERRO E ESTIMATIVAS DO ERRO NA APLICAÇÃO DE MER PARA $I_e(\mu \cong 0,142)$ NO PROBLEMA 4	186
FIGURA 6.24 – ORDENS EFETIVA E APARENTE PARA GL/2 NO PROBLEMA 4.....	188
FIGURA 6.25 – ERRO, ESTIMATIVAS DE ERRO E ORDENS PARA $I_e(\mu = 0,5)$ E $\gamma = 1$ NO PROBLEMA 5.....	191
FIGURA 6.26 – ERROS, ESTIMATIVAS DE ERROS E ORDENS PARA $I_e(\mu = 0,5)$ E $\gamma = 1/2$ NO PROBLEMA 5	192
FIGURA 6.27 – ESTIMATIVAS DO ERRO E ORDENS PARA GL/2 COM $\gamma = 1$ NO PROBLEMA 5	193
FIGURA 6.28 – ESTIMATIVAS DO ERRO E ORDENS PARA GL/2 COM $\gamma = 1/2$ NO PROBLEMA 5... ..	194
FIGURA 6.29 – ESTIMATIVA DO ERRO E ORDENS DE $I_e(\mu \approx 0,97)$ COM $\gamma = 1$ NO 1° CASO DO PROBLEMA 6	196
FIGURA 6.30 – ESTIMATIVA DO ERRO E ORDENS DE $I_e(\mu \approx 0,97)$ COM $\gamma = 1/2$ NO 1° CASO DO PROBLEMA 6	197
FIGURA 6.31 – ESTIMATIVAS DE ERRO E ORDENS DE GL/2 COM $\gamma = 1$ NO 1° CASO DO PROBLEMA 6.....	198
FIGURA 6.32 – ESTIMATIVA DE ERRO E ORDENS DE GL/2 COM $\gamma = 1/2$ NO 1° CASO DO PROBLEMA 6.....	199
FIGURA 6.33 – ESTIMATIVA DO ERRO E ORDENS DE He COM $\gamma = 1$ NO 2° CASO DO PROBLEMA 6	201
FIGURA 6.34 – ESTIMATIVA DO ERRO E ORDENS DE He COM $\gamma = 1/2$ NO 2° CASO DO PROBLEMA 6.....	202
FIGURA 6.35 – ESTIMATIVA DO ERRO E ORDENS DE GL/2 COM $\gamma = 1$ NO 2° CASO DO PROBLEMA 6.....	203

FIGURA 6.36 – ESTIMATIVA DO ERRO E ORDENS DE $GL/2$ COM $\gamma = 1/2$ NO 2º CASO DO PROBLEMA 6.....	204
FIGURA 6.37 – PERFIL DE TEMPERATURAS ANALÍTICA E NUMÉRICA DO PROBLEMA 7.....	206
FIGURA 6.38 – ERROS, ESTIMATIVA DO ERRO, ORDENS EFETIVA E APARENTE PARA $TL/2$ E $\gamma = 1$ NO PROBLEMA 7	207
FIGURA 6.39 - ERROS, ESTIMATIVA DO ERRO, ORDENS EFETIVA E APARENTE PARA $TL/2$ COM $\gamma = 1/2$ NO PROBLEMA 7	208
FIGURA 6.40 – ESTIMATIVA DO ERRO E ORDENS APARENTES PARA $GL/2$ COM $\gamma = 1$ NO PROBLEMA 7	210
FIGURA 6.41 – ESTIMATIVA DO ERRO E ORDENS APARENTES PARA $GL/2$ COM $\gamma = 1/2$ NO PROBLEMA 7	211

LISTA DE TABELAS

TABELA 2.1 – PRIMEIROS CINCO POLINÔMIOS ASSOCIADOS DE LEGENDRE	74
TABELA 2.2 – PRIMEIROS TRÊS HARMÔNICOS ESFÉRICOS.....	74
TABELA 2.3 – PESOS E DIREÇÕES ORDENADAS PARA VERSÃO UNIDIMENSIONAL DO DOM	81
TABELA 3.1 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS $\theta(g, m)$ DA EQ. (3.89) PARA $n = 4$	114
TABELA 3.2 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS $\theta(g, m)$ DA EQ. (3.89) PARA $n = 6$ BASEADAS EM pE	116
TABELA 3.3 – ORDEM EFETIVA pE PARA O CASO $n = 6$	117
TABELA 3.4 – COMPORTAMENTO ANÔMALO DA ORDEM APARENTE pU PARA O CASO $n = 6$.	118
TABELA 6.1 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS DAS VARIÁVEIS DE INTERESSE	163
TABELA 6.2 – RESULTADOS NUMÉRICOS COM MER ($g = 10, m = 4$).....	165
TABELA 6.3 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS APROXIMADAS DAS VARIÁVEIS	169
TABELA 6.4 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS DAS VARIÁVEIS DE INTERESSE	177
TABELA 6.5 – RESULTADOS NUMÉRICOS COM MER ($g = 8, m = 4$).....	182
TABELA 6.6 – RESUMO DAS ORDENS DAS VARIÁVEIS NOS 3 PROBLEMAS DE MEIOS NÃO PARTICIPANTES ESTUDADOS.....	182
TABELA 6.7 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS DAS VARIÁVEIS ANALISADAS	184
TABELA 6.8 – RESULTADOS NUMÉRICOS DO PROBLEMA 4 COM MER ($\gamma = 1, g = 18, m = 5$).....	187
TABELA 6.9 – RESULTADOS NUMÉRICOS DO PROBLEMA 4 COM MER ($\gamma = 1/2, g = 12, m = 4$)..	187
TABELA 6.10 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS DAS VARIÁVEIS ANALISADAS NO PROBLEMA 5	189
TABELA 6.11 – RESULTADOS NUMÉRICOS DO PROBLEMA 5 ($\gamma = 1, g = 4, m = 0$).....	190
TABELA 6.12 – RESULTADOS NUMÉRICOS DO PROBLEMA 5 ($\gamma = 1/2, g = 4, m = 0$).....	190
TABELA 6.13 – RESULTADOS NUMÉRICOS DO PROBLEMA 6 PARA O 1° CASO COM $\gamma = 1, g = 14, m = 9$	195
TABELA 6.14 – RESULTADOS NUMÉRICOS DO PROBLEMA 6 PARA O 1° CASO COM $\gamma = 1/2, g = 14, m = 3$	195
TABELA 6.15 – RESULTADOS NUMÉRICOS DO PROBLEMA 6 PARA O 2° CASO COM $\gamma = 1, g = 14, m = 5$	199
TABELA 6.16 – RESULTADOS NUMÉRICOS DO PROBLEMA 6 PARA O 2° CASO COM $\gamma = 1/2, g = 12, m = 2$	200
TABELA 6.17 – SOLUÇÃO ANALÍTICA DA TEMPERATURA EM $L/2$ PARA O PROBLEMA 7.....	205
TABELA 6.18 – RESULTADOS NUMÉRICOS DO PROBLEMA 7 PARA $TL/2$ EM $g = 9, m = 0$	209
TABELA 6.19 – RESUMO DAS ORDENS DAS VARIÁVEIS NOS 4 PROBLEMAS DE MEIOS PARTICIPANTES ESTUDADOS.....	212

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Siglas

AIAA	<i>The American Institute of Aeronautics and Astronautics</i>
ASME	<i>American Society of Mechanical Engineers</i>
CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i>
CHT	<i>Computational Heat Transfer</i>
CH ₄	Metano
CO	Monóxido de carbono
CO ₂	Dióxido de carbono
DEF	<i>Discrete Exchange Factor</i>
DoD	<i>The US Department of Defense</i>
DOM	<i>Discrete Ordinates Method</i>
DTM	<i>Discrete Transfer Method</i>
EDO	Equações Diferenciais Ordinárias
EMBRAER	Empresa Brasileira de Aeronáutica
GCI	<i>Grid Convergence Index</i>
H ₂ O	Água (na fase gasosa)
IEEE	<i>The Institute of Electrical and Electronics Engineers</i>
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEF	Método dos Elementos Finitos
MER	Múltiplas Extrapolações de Richardson
MVF	Método dos Volumes Finitos
NASA	<i>National Aeronautics and Space Administration</i>
RAM	<i>Random Access Memory</i>
RTE	<i>Radiative Transfer Equation</i>
SHM	<i>Spherical Harmonics Method</i>
TCR	Transferência de calor por radiação
UDS	<i>Upwind Differencing Scheme</i>
RAM	<i>Random-Access Memory</i>
WSGG	<i>Weighted Sum of Gray Gases</i>

Lista de Símbolos

A	Área [m^2]. Coeficiente de forma da função de fase do espalhamento [-]
B	Radiosidade [Wm^{-2}]
D	Matriz diagonal
$dF_{dAi-dAj}$	Fator de forma infinitesimal [-]
E	Erro de discretização ou de truncamento (conforme o contexto). Poder emissivo de uma superfície [Wm^{-2}]
E_n	Integral exponencial de ordem n [-]
$F_{(v)}^n$	Função F de ordem n
f	Função qualquer [-]. Valor discreto da variável dependente, [-]
F_{Ai-Aj}	Fator de forma entre superfícies finitas [-]
G	Radiação incidente [Wm^{-2}]
g	Número da malha
H	Irradiação [Wm^{-2}]
h	Distância entre duas placas paralelas [m]. Tamanho do elemento de malha [m]
I	Intensidade espectral ou total [$Wm^{-2}sr^{-1}\mu m^{-1}$ ou $Wm^{-2}sr^{-1}$]
\hat{I}	Termo fonte radiativo espectral ou total [$Wm^{-2}sr^{-1}\mu m^{-1}$ ou $Wm^{-2}sr^{-1}$]
\bar{I}	Média ponderada da intensidade no volume P [$Wm^{-2}sr^{-1}$]
i, j, k	Contadores inteiros usados para nomear superfícies. Índices de somatórios
$it, itmax$	Número da iteração atual e Número máximo de iterações
K	Núcleo da integral do fator de forma [-]
\mathbf{K}	Matriz núcleo da integral do fator de forma [-]
m	Nível da extrapolação
L	Comprimento do domínio [m]
p_0	Ordem assintótica [-]
p_0, p_1, \dots	Ordens verdadeiras [-]
p_E	Ordem Efetiva [-]
p_U	Ordem Aparente [-]
q	Taxa de transferência de calor [W]
q''	Fluxo de calor [Wm^{-2}]
R	Raio da cavidade esférica [m]
r	Raio [m]

\mathbf{r}	Vetor posição em coordenadas esféricas: $[(m, rad, rad)]$
S	Termo fonte da Equação da Transferência Radiativa $[Wm^{-2}]$
$\hat{\mathbf{s}}$	Direção de propagação da radiação em coordenadas esféricas $[(m, rad, rad)]$
T	Temperatura absoluta $[K]$
tol	Tolerância para parada de processo iterativo [de acordo com a variável representada]
U	Erro estimado [de acordo com a variável representada]
X	Variável dependente adimensional $[-]$
x	Variável dependente de uma equação, tipicamente a coordenada espacial $[m]$
W	Coefficiente de ponderação da equação integral aproximada
w	Peso da direção ordenada $[-]$
y	Variável independente de uma equação $[-]$
Z	Argumento do fator de forma $[-]$

Letras gregas

α	Absortividade de uma superfície $[-]$
β	Coefficiente de extinção, $\beta = \kappa + \sigma_s$, $[m^{-1}]$
γ	Fator de ponderação do Esquema de Ponderação Variável $[0 < \gamma \leq 1]$
ΔV	Volume de um elemento $[m^3]$
δ	Matriz identidade
ε	Emissividade de uma superfície $[-]$
η	Cosseno diretor na direção z , ou seja, $\eta = \sin \theta \sin \varphi$
θ	Ângulo polar segundo o sistema de coordenadas esféricas $[rad]$
κ	Coefficiente de absorção $[m^{-1}]$
Λ	Valor característico da equação integral de Fredholm
λ	Comprimento de onda da radiação $[\mu m]$
Φ	Variável analítica qualquer $[-]$. Função de fase do espalhamento $[-]$
ϕ	Variável numérica qualquer $[-]$
φ	Ângulo azimutal segundo o sistema de coordenadas esféricas $[rad]$
μ	Cosseno diretor na direção x , ou seja, $\mu = \cos \theta$
ξ	Cosseno diretor na direção y , ou seja, $\xi = \sin \theta \cos \varphi$
σ	Constante de Stefan-Boltzmann $[5,670374419 \times 10^{-8} Wm^{-2}K^{-4}]$

σ_s	Coeficiente de espalhamento [m^{-1}]
τ	Coordenada óptica [-]
τ_L	Espessura óptica [-]
ω	Albedo de espalhamento $\omega = \sigma_s/\beta$ [-]
Ω	Ângulo sólido [sr]

Sobrescritos

<i>exata</i>	Indica valor analítico, exato
<i>num</i>	Indica valor numérico, ou seja, truncado
+	Indica que a direção da intensidade é a mesma do eixo coordenado
-	Indica que a direção da intensidade é contrária à orientação do eixo coordenado
'	Indica direção de incidência
"	Indica que a propriedade é adimensionalizada por unidade de área
^	Indica valor representativo do elemento de volume como um todo. Indica vetor normal

Subscritos

$dA_i - dA_j$	Indica que a radiação difusa viaja do elemento infinitesimal de área dA_i para dA_j
<i>e</i>	Face leste do elemento de volume P
<i>g</i>	Indica propriedade de meio participante, em geral um gás
<i>i</i>	Direção da radiação incidente
<i>L</i>	Indica propriedade representativa de todo o comprimento do domínio ou na extremidade direita do domínio
<i>n</i>	Direção normal
<i>P</i>	Ponto central do elemento de volume
<i>r</i>	Radiação
<i>w</i>	Propriedade na parede
λ	Propriedade espectral

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	ERROS DE DISCRETIZAÇÃO EM SOLUÇÕES NUMÉRICAS	19
1.2	A RADIAÇÃO TÉRMICA.....	27
1.3	JUSTIFICATIVA.....	29
1.4	OBJETIVOS	32
1.4.1	Objetivo Geral	32
1.4.2	Objetivos Específicos.....	32
1.5	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	33
1.5.1	Erros de Discretização.....	34
1.5.2	Problemas de Radiação em Meios Não Participantes	34
1.5.3	Problemas de Radiação em Meios Participantes.....	37
1.6	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	45
2	FUNDAMENTAÇÃO	46
2.1	TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR RADIAÇÃO EM CAVIDADES PREENCHIDAS POR MEIOS NÃO PARTICIPANTES.....	46
2.1.1	TRANSFERÊNCIA RADIATIVA ENTRE SUPERFÍCIES NEGRAS	49
2.1.2	TRANSFERÊNCIA RADIATIVA ENTRE SUPERFÍCIES CINZA-DIFUSAS	54
2.2	TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR RADIAÇÃO EM MEIOS PARTICIPANTES	57
2.2.1	Métodos Numéricos Empregados na Solução de Problemas de Radiação em Meios Participantes	68
2.3	ERROS NUMÉRICOS	85
3	ERROS DE DISCRETIZAÇÃO NA SOLUÇÃO NUMÉRICA DE INTEGRAIS .	91
3.1	REGRA DO TRAPÉZIO	92
3.2	REGRA DE SIMPSON	93
4	ERRO DE DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL NO DOM PARA PROBLEMAS DE SIMETRIA AZIMUTAL EM MEIO PARTICIPANTE HOMOGÊNEO SEM ESPALHAMENTO	123
4.1	DEDUÇÃO DO ERRO DE TRUNCAMENTO DA RTE DISCRETIZADA	123

4.2	APROXIMAÇÃO NUMÉRICA E ERRO DE TRUNCAMENTO DO ESQUEMA DE PONDERAÇÃO VARIÁVEL	128
4.3	APROXIMAÇÃO NUMÉRICA E ERRO DE TRUNCAMENTO DA REGRA DO RETÂNGULO	135
4.4	COMPARAÇÃO ENTRE O ERRO CALCULADO E ERRO MEDIDO PARA A APLICAÇÃO DO DOM EM PROBLEMA DE RADIAÇÃO EM MEIO PARTICIPANTE 1D, HOMOGENEO E SEM ESPALHAMENTO.....	136
5	PROBLEMAS ESTUDADOS	144
5.1	PROBLEMAS DE RADIAÇÃO TÉRMICA EM MEIOS NÃO PARTICIPANTES .	145
5.1.1	EQUAÇÃO ALGÉBRICA CONTENDO TERMO INTEGRAL	145
5.1.2	EQUAÇÃO DE FREDHOLM DO SEGUNDO TIPO	147
5.1.3	SISTEMA DE EQUAÇÕES INTEGRAIS DE FREDHOLM DO SEGUNDO TIPO	152
5.2	PROBLEMAS DE RADIAÇÃO TÉRMICA EM MEIOS PARTICIPANTES	158
5.2.1	MEIO ABSORVEDOR E EMISSOR ENTRE DUAS PLACAS NEGRAS, PLANAS E PARALELAS DE COMPRIMENTO INFINITO	158
5.2.2	RADIAÇÃO EM MEIO PARTICIPANTE COM TEMPERATURA VARIÁVEL...	160
5.2.3	MEIO PARTICIPANTE COM ESPALHAMENTO ISOTRÓPICO	160
5.2.4	MEIO PARTICIPANTE COM ESPALHAMENTO ISOTRÓPICO EM EQUILÍBRIO RADIATIVO	161
6	RESULTADOS.....	163
6.1	PROBLEMAS DE RADIAÇÃO TÉRMICA EM MEIOS NÃO PARTICIPANTES .	163
6.1.1	PROBLEMA 1: EQUAÇÃO ALGÉBRICA CONTENDO TERMO INTEGRAL	163
6.1.2	PROBLEMA 2: EQUAÇÃO DE FREDHOLM DO SEGUNDO TIPO	168
6.1.3	PROBLEMA 3: SISTEMA DE EQUAÇÕES INTEGRAIS DE FREDHOLM DO SEGUNDO TIPO.....	177
6.1.4	RESUMO DE RESULTADOS DOS PROBLEMAS DE RADIAÇÃO EM MEIOS NÃO PARTICIPANTES	182
6.2	PROBLEMAS DE RADIAÇÃO EM MEIOS PARTICIPANTES	183
6.2.1	PROBLEMA 4: RADIAÇÃO EM MEIO EMISSOR E ABSORVEDOR COM TEMPERATURA CONSTANTE	183
6.2.2	PROBLEMA 5: RADIAÇÃO EM MEIO PARTICIPANTE COM TEMPERATURA VARIÁVEL	189
6.2.3	PROBLEMA 6: RADIAÇÃO EM MEIO COM ESPALHAMENTO ISOTRÓPICO	195

6.2.4 PROBLEMA 7: RADIAÇÃO EM MEIO EM EQUILÍBRIO RADIATIVO	205
6.2.5 RESUMO DE RESULTADOS DOS PROBLEMAS EM MEIOS PARTICIPANTES	211
7 CONCLUSÃO	213
7.1 CONCLUSÕES ACERCA DA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS E SISTEMAS DE EQUAÇÕES INTEGRAIS.....	213
7.2 CONCLUSÕES ACERCA DA SOLUÇÃO DA RTE	214
7.3 CONTRIBUIÇÕES.....	216
7.4 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS	217
REFERÊNCIAS	219
APÊNDICE A – CÁLCULO DA FUNÇÃO INTEGRAL EXPONENCIAL COM 32 ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS.....	231
APÊNDICE B – SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA DA CAVIDADE ESFÉRICA DIVIDIDA EM DUAS CALOTAS E DUAS ZONAS ESFÉRICAS.	238
ANEXO A – ERRO DE TRUNCAMENTO DA REGRA DO TRAPÉZIO E SUAS ORDENS VERDADEIRAS USANDO O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	242
ANEXO B – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DO ERRO DE TRUNCAMENTO PARA A APLICAÇÃO DA REGRA DO RETÂNGULO USANDO O MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS.....	254
ANEXO C – SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA DA RADIAÇÃO NO INTERIOR DE UM TUBO DE SEÇÃO TRANSVERSAL CIRCULAR E COMPRIMENTO FINITO.....	258

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho trata de erros numéricos em problemas de radiação térmica, mais especificamente erros de discretização. Frequentemente presentes em problemas de computação científica, estes erros decorrem da necessidade de se fazer aproximações para as derivadas da variável dependente em posições específicas dentro do domínio de cálculo. À medida que a quantidade de pontos (ou volumes ou elementos, dependendo do método numérico empregado) é aumentada, é esperado que solução numérica tenda à solução analítica.

O estudo dos erros de discretização em problemas de transferência de calor é razoavelmente bem estabelecido para dois dos mecanismos de transferência de calor: a condução térmica e a convecção. Já o terceiro mecanismo, a radiação térmica, recebe reduzida atenção da comunidade científica no sentido de se embasar uma teoria de estudos de erros de discretização.

Nesta tese não é abordado um problema único, mas sim um conjunto de problemas envolvendo apenas a transferência de calor por radiação. Em alguns destes, apenas a radiação trocada entre superfícies é importante. Em outros, o meio que separa as superfícies também influencia a quantidade de energia trocada, seja absorvendo, emitindo ou espalhando-a.

Como o objeto de estudo desta tese reúne dois temas relativamente distintos, neste primeiro capítulo será feita a introdução aos erros de discretização e da importância da verificação de soluções numéricas. Em seguida é feita uma breve explanação sobre a radiação térmica.

1.1 ERROS DE DISCRETIZAÇÃO EM SOLUÇÕES NUMÉRICAS

Nas ciências naturais e tecnológicas, frequentemente se deseja conhecer como um fenômeno físico, um sistema ou um equipamento se comporta à medida que certas variáveis se modificam. Para estudar fenômenos físicos, uma alternativa à abordagem experimental é a modelagem matemática, meio pelo qual alguns princípios físicos são representados por meio de equações. Se o fenômeno for adequadamente modelado e descrito em termos matemáticos, então os resultados obtidos serão similares àqueles medidos experimentalmente.

Muitos fenômenos físicos de interesse podem ser descritos pela aplicação de um ou mais princípios fundamentais da física, como o princípio da conservação da massa, da quantidade de movimento linear e angular e o princípio da conservação da energia. Muitas vezes tais

princípios são formulados sob a forma de equações diferenciais, equações integrais ou ainda equações íntegro-diferenciais.

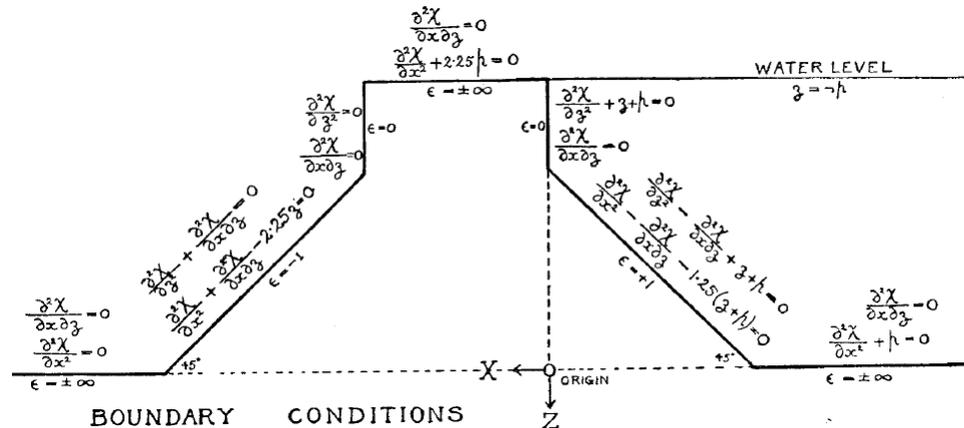
Em algumas aplicações da engenharia, por exemplo, para a concepção de um equipamento cuja operação envolve o escoamento de um fluido ou a troca de calor, pode ser necessária a solução de uma ou mais equações supracitadas a fim de representar matematicamente como o equipamento se comportará. Não é incomum que tais soluções analíticas sejam desconhecidas. Os métodos numéricos podem, assim como a abordagem por meio de experimentos, permitir a solução do problema. Desta forma, podem ser conduzidos estudos que produzirão bases tecnológicas para o projeto de meios de transporte, equipamentos usados em diversos segmentos da indústria, instrumentos de medição, etc.

Obviamente a teoria das equações diferenciais e integrais só foi possível após o desenvolvimento do Cálculo Integral e Diferencial, por volta de 1700. Entretanto, mesmo após aproximadamente trezentos anos, muitos problemas de interesse prático são por demais complexos para permitir uma solução analítica em forma fechada, ou seja, uma solução matemática que satisfaça a equação e suas condições de contorno. Assim, por aproximadamente dois séculos, apenas problemas onde a geometria era simples e as condições de contorno eram simples puderam ser abordados analiticamente. Estudar problemas mais complexos demandava (e ainda demanda) muito esforço e investimento de recursos em experimentos.

Knupp e Salari (2003, p. 1) apontam que uma significativa melhoria em termos da capacidade de resolver problemas sem solução analítica conhecida só foi possível após o aparecimento do computador e de métodos matemáticos que equivalem, aproximadamente, a resolver uma equação diferencial com suas condições de contorno e iniciais. Tais métodos vieram a ser criados e aplicados na forma de programas de computador, combinando a criatividade e experiência dos cientistas e a capacidade de processamento e memória cada vez maior dos computadores.

Entre os mais antigos trabalhos científicos referentes ao uso de métodos numéricos na solução de problemas de engenharia, talvez o trabalho mais inovador, considerando a proposta do presente trabalho, seja o de Richardson (1910). Neste artigo o autor emprega o Método das Diferenças Finitas para estudar quatro problemas de interesse prático da engenharia, um dos quais o cálculo da distribuição de tensões em uma barragem com geometria bidimensional relativamente complexa, reproduzida na FIGURA 1.1. O autor reconheceu a importância de se usar uma discretização refinada (malha formada por muitos nós) a fim de minimizar o erro das aproximações abaixo de um valor considerado aceitável para sua aplicação na engenharia.

FIGURA 1.1 - GEOMETRIA E CONDIÇÕES DE CONTORNO EM UMA BARRAGEM



FONTE: Richardson (1910, p. 332)

Entretanto, os “métodos numéricos” para a solução de equações diferenciais ordinárias foram concebidos muito antes da era dos computadores. Considera-se que o Método das Diferenças Finitas foi desenvolvido por Euler em 1768 (GALLAGHER et al., 2009, p. 16). Porém, apenas na segunda metade do século XX que o uso de tais métodos começou a ser mais amplamente utilizado. Segundo Knupp e Salari (2003, p. 2), durante a II Grande Guerra Mundial a solução de equações diferenciais para prever o movimento de projéteis era feito usando um método numérico, porém calculado manualmente, e um grupo de pessoas se reunia para efetuar os cálculos manualmente ou com régua de cálculo. Após a II Grande Guerra Mundial os métodos numéricos gradativamente começaram a ser mais frequentemente empregados e seu uso se consolidou, em grande parte, nas tecnologias desenvolvidas no contexto da Guerra Fria.

Segundo Oberkampf e Roy (2010, p. 2), a década de 1960 pode ser considerada como o período no qual o aumento da capacidade dos computadores, assim como sua dispersão na academia, na indústria e nas organizações governamentais, promoveu um aumento significativo na modelagem e simulação científicas. Estes autores consideram que na referida década a simulação por computador começou a ser utilizada para projeto e tomada de decisões, principalmente nas indústrias aeroespacial e militar. Foi nesta época que ficou evidente uma questão relevante, principalmente quando o projeto ou equipamento é de custo elevado ou quando a sua falha produz consequências graves: até que ponto uma solução numérica pode ser levada em conta no estudo de um fenômeno físico ou ainda como ferramenta de projeto ou de tomada de decisões?

O estudo da barragem, abordado por Richardson (1910) é um bom exemplo, pois uma falha na barragem põe em risco tudo o que estiver à sua jusante: comunidades, indústrias,

sistemas de transporte e infraestrutura além do próprio meio ambiente. Richardson (1910) reconheceu e mostrou a importância da qualidade da discretização espacial do domínio e das aproximações empregadas para discretizar as equações.

Atualmente, alguns exemplos relevantes são citados em Oberkampf e Roy (2010): a simulação de sistemas de segurança de reatores nucleares e de depósitos de lixo radioativo, estudos de segurança de edificações e previsão do tempo e do clima. Valendo ressaltar que o efeito da radiação térmica é importante no projeto de edificações, mais especificamente na avaliação de evacuação em caso de incêndio.

AIAA (1998) resalta a importância das simulações numéricas na meteorologia, na oceanografia e na engenharia, por exemplo, no estudo de fenômenos complexos como a turbulência e a combustão. Roache (2009, p. 25) cita também a modelagem do transporte de águas subterrâneas, aeroacústica, transporte de nêutrons, magneto-hidrodinâmica, eletrodinâmica, dinâmica do plasma, química e extração de petróleo.

Os parágrafos acima podem induzir no leitor uma confiança demasiada nos resultados obtidos com a computação científica, especialmente quando se leva em conta os avançados pacotes de ferramentas computacionais, como o FLUENT (ANSYS Inc., 2020a), CFX (ANSYS Inc., 2020b) e o STAR-CCM+ (SIEMENS PLM SOFTWARE, 2020). Roache (2009, p. 26-27) critica uma postura recorrente dos usuários de programas de computação científica. Segundo o autor, é comum que uma credibilidade exagerada seja dada aos resultados numéricos.

Um exemplo disso é a conclusão apontada em Chapman, Mark e Pirtle (1975 apud ROACHE, 2009, p. 27), a qual previa que a solução numérica das equações diferenciais governantes dos fenômenos de aerodinâmica tornariam os experimentos em túnel de vento desnecessários em um futuro próximo. A previsão foi contestada logo após a publicação do artigo e mesmo atualmente tal alegação não é válida. Sorbilli¹ (2019) menciona que na fabricante de aeronaves EMBRAER a quantidade de horas demandadas para estudos de aerodinâmica computacional tem crescido ao longo dos últimos anos, mas a quantidade de ensaios em túnel de vento também tem crescido na mesma proporção.

Assim chega-se a duas questões relevantes sobre o uso de métodos numéricos. A primeira questão é: qual a confiança de que uma solução numérica representa corretamente a solução do modelo matemático escolhido para descrever o processo físico ou fenômeno de interesse? Tal questão é feita pela pessoa envolvida no processo de transformar o modelo matemático em um código computacional e de resolvê-lo.

¹ Fala do Eng. Rodrigo Sorbilli no curso de Aerodinâmica Aplicada na Aviação, ministrada no Portal Engenharia Aeronáutica, 2019.

Já a segunda questão é: qual a confiança de que a solução numérica obtida (e consequentemente o modelo matemático) representa adequadamente o fenômeno físico a ponto de a solução numérica poder ser utilizada como ferramenta de projeto, de tomada de decisões ou mesmo da predição do comportamento de algum sistema? Esta é uma questão que o usuário da simulação numérica fará, por exemplo, um órgão de execução de políticas públicas ou um gerente de projeto de uma empresa. A Validação avalia quão bem as equações do modelo matemático representam o fenômeno do mundo real que se procura modelar.

Segundo Oberkampf e Roy (2010, p. 22), a fim de tratar tais questões, as comunidades que se utilizam da computação científica formularam comitês para avaliar e padronizar a terminologia e metodologia para formular, testar e reportar resultados de estudos numéricos. Exemplos são: a comunidade de pesquisa operacional, *The Institute of Electrical and Electronics Engineers* (IEEE), *The US Department of Defense* (DoD), *The American Institute of Aeronautics and Astronautics* (AIAA), a *American Society of Mechanical Engineers* (ASME), e a comunidade científica de hidrologia.

O objetivo deste esforço organizado dentro da engenharia mecânica é atribuir credibilidade à modelagem e à simulação numérica de problemas, por exemplo, de Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD, da terminologia em língua inglesa *Computational Fluid Dynamics*) e de Transferência de Calor Computacional (CHT, da terminologia em língua inglesa *Computational Heat Transfer*). Dentre a terminologia definida pelas entidades supracitadas, no presente trabalho serão adotadas as definições recomendadas na norma técnica ASME (2009), exceto quando outras fontes são explicitamente citadas.

Incerteza: é uma potencial deficiência em qualquer fase ou atividade do processo de modelagem que é devida à falta de conhecimento. Exemplos são as estimativas de propriedades físicas e simplificações do modelo matemático.

Erro: essencialmente a mesma definição de incerteza, porém não ocorre devido à falta de conhecimento. Alguns exemplos são os erros de arredondamento na representação de números em um computador (devido às operações de ponto flutuante), erros de truncamento, erros de iteração e erros de programação. Neste trabalho o erro numérico E será dado por²

$$E(\phi) = \Phi - \phi, \quad (1.1)$$

² Nesta tese é usada a definição apresentada em Knupp e Salari (2003, p.10), entretanto pode-se usar $E(\phi) = \phi - \Phi$, que é usada por Roache (2009) e em ASME (2009, p.10). Basta trocar o sinal para converter o resultado entre uma e a outra definição.

em que Φ é a solução analítica exata de uma variável qualquer e ϕ é a sua solução numérica.

Verificação: o processo de determinar se a implementação de um modelo acuradamente representa a descrição conceitual do desenvolvedor do modelo e a correspondente solução.

Segundo Knupp e Salari (2003, p. 20), a verificação de código pode ser feita constatando se as soluções numéricas nas diversas malhas convergem para a solução exata na taxa de convergência esperada. Segundo os autores, se a ordem de acurácia formal é observada em um senso assintótico, então o código é considerado verificado para as opções de codificação exercitadas. A falha em atingir a ordem formal de acurácia indica a presença de enganos no código ou um problema com o algoritmo numérico.

A Verificação provê evidência convincente de que o modelo conceitual (matemática contínua) é resolvido corretamente pela matemática discreta incorporada na forma do código de computador (OBERKAMPF; TRUCANO, 2002, p. 18). Há dois processos a citar: a Verificação de Código e a Verificação da Solução.

Segundo a norma da ASME, a verificação de código estabelece se o código está correto por meio de testes sistemáticos envolvendo discretizações progressivamente mais refinadas e monitorando a convergência da solução numérica com alguma solução modelo, ou como muitas vezes aparece na literatura “*benchmarking*”, preferivelmente uma solução analítica suficientemente acurada que envolva funções simples. A norma ASME ainda aponta que não é suficiente que a solução analítica seja acurada, é necessário que sua estrutura seja suficientemente complexa a ponto de testar todos os termos presentes na(s) equação(ões) governante(s). No caso de o problema não possuir solução analítica conhecida, se recomenda o Método das Soluções Fabricadas, muito bem explicado em Knupp e Salari (2003), por exemplo.

Segundo Knupp e Salari (2003) verificação de código é a verificação da ordem de acurácia do código numérico, na qual se mostra que a ordem assintótica de acurácia exibida pelo código concorda com a ordem de acurácia teórica prevista de acordo com o método numérico.

Já a verificação da solução numérica assume que o código foi apropriadamente verificado e que produz soluções numéricas corretas. Segundo ASME (2009), verificação da solução numérica é feita por meio de refinamento sucessivo da malha e quantificação do erro numérico. O meio mais empregado para tal é a Extrapolação de Richardson (ASME, 2009) e às vezes é empregada a generalização desta técnica, denominada Múltiplas Extrapolações de Richardson, para aumentar a acurácia das soluções numéricas (ROACHE; KNUPP, 1993; MARCHI; SUERO; ARAKI, 2009).

Validação: o processo de determinar o grau em que um modelo representa acuradamente o mundo real da perspectiva de intenção de uso do modelo.

A Validação identifica e quantifica o erro e a incerteza nos modelos conceitual e computacional. Segundo AIAA (1998, p. 1-2) a principal estratégia da Verificação e Validação é a avaliação do erro e da incerteza em simulações computacionais. O grau de acurácia requerido dependerá do problema em análise e de questões como custo, cronograma e segurança de um projeto. Portanto, o usuário do programa deve estabelecer o nível de acurácia desejado e executar as simulações a fim de estimar não apenas os resultados da simulação, mas também sua acurácia.

Os procedimentos de Verificação e Validação são importantes para assegurar que as conclusões de estudos que dependam da análise de soluções numéricas se traduzam em tomadas de decisão assertivas. Tanto que nas décadas de 80 e 90 os meios de divulgação científica como *journals* e revistas especializadas passaram a não aceitar artigos contendo soluções numéricas que não tenham sido verificadas. Exemplos são Freitas (1993), Roache, Ghia e White (1986, 2008), Gresho e Taylor (1994), AIAA (1994) e ASME (1994).

Algumas organizações dentro da engenharia publicaram guias e relatórios técnicos recomendando procedimentos de Verificação e Validação (AIAA, 1998; GALLAGHER et al., 2009; ASME, 2006). Alguns anos mais tarde, com a consolidação dos procedimentos e readequação de definições, foi publicada a norma ASME V&V 20-2009, que padroniza os procedimentos de verificação e validação de simulações numéricas (ASME, 2009).

Entretanto, é incomum encontrar artigos científicos sobre radiação térmica publicados recentemente que apresentam estimativas de erros numéricos. Talvez isso ocorra porque o foco atual das pesquisas em radiação térmica numérica é a solução de problemas de elevada complexidade, tanto em termos de geometria como em termos da quantidade de fenômenos físicos modelados simultaneamente (LECOQC et al., 2014; ROGER; SILVA; COELHO, 2009; SANTOS et al., 2008; FRAGA; CENTENO; FRANÇA, 2017). Neste sentido, a verificação, conforme a ASME (2009) pode se tornar muito demandante, já que os problemas de CFD e CHT são de convergência lenta e requerem malhas muito refinadas para que os fenômenos sejam todos adequadamente representados. Como os métodos numéricos tipicamente empregados em CFD e CHT estimam erros por meio de resultados obtidos em malhas sucessivamente mais refinadas, então o esforço computacional se torna elevado. Isto explica, em parte, porque se aceita comparar os resultados numéricos a resultados considerados de referência.

Aparentemente um estudo metódico e aprofundado de erros numéricos, analisando problemas simples e gradativamente aumentando a complexidade do modelo matemático, é um tema que aparentemente ainda não foi abordado, representando uma lacuna importante a ser preenchida antes de partir para problemas cuja descrição matemática é complexa e depende fundamentalmente de boa descrição da radiação, por exemplo, em problemas envolvendo combustão.

Por exemplo, Göebel et al. (2013) apresentam um modelo sofisticado para calcular o fluxo de calor devido à radiação sobre as paredes internas de motores-foguete de propelente líquido. Os autores utilizaram o Método de Harmônicos Esféricos (no caso foi aplicada a Aproximação P_1) juntamente com o Modelo Soma Ponderada de Gases Cinza (WSGG, da sigla em língua inglesa *Weighted Sum of Gray Gases*) para contabilizar a variação do coeficiente de absorção dos produtos de combustão no interior do motor. Como a complexidade dos fenômenos físicos simulados é elevada, o que os autores denominam “validação” é comparar os resultados da parte do programa dedicada ao cálculo da radiação com problemas modelo (*benchmarking*) e depois acoplá-la ao programa preexistente que resolve o escoamento reativo e turbulento dos produtos de combustão.

Por esse motivo, nesta tese são estudados problemas teóricos e suficientemente simples que permitem a análise sistemática dos erros de discretização espacial. São eles:

Problemas de Meios Não Participantes:

- a) Radiação trocada entre placas planas, negras, não isotérmicas e paralelas entre si, uma tendo fluxo de calor prescrito e a outra tendo sua temperatura prescrita (cujo modelo matemático é uma equação algébrica contendo termo integral);
- b) Cálculo da temperatura da área lateral de um tubo de comprimento finitos submetido à fluxo de calor constante, cujas extremidades são frias (cujo modelo matemático é uma equação integral de Fredholm do segundo tipo);
- c) Cavidade esférica contendo duas calotas com temperatura prescrita e duas zonas esféricas com fluxo de calor prescrito (cujo modelo matemático é um sistema de equações de Fredholm do segundo tipo);

Problemas de Meios Participantes:

- d) Meio absorvedor-emissor com temperatura constante confinado entre duas paredes negras, isotérmicas, planas e paralelas entre si (cujo modelo matemático é uma equação diferencial ordinária homogênea);

- e) Meio absorvedor-emissor com temperatura variável entre duas paredes negras, isotérmicas, planas e paralelas entre si (cujo modelo matemático é uma equação diferencial ordinária não homogênea);
- f) Meio absorvedor-emissor, com espalhamento e temperatura constante confinado entre duas paredes negras, isotérmicas, planas e paralelas entre si (cujo modelo matemático é uma equação integro-diferencial não homogênea);
- g) Meio absorvedor-emissor, com espalhamento em equilíbrio radiativo (cujo modelo matemático é uma equação integro-diferencial não homogênea).

1.2 A RADIAÇÃO TÉRMICA

Segundo Bergman et al. (2011, p. 768) radiação térmica é a energia emitida pela matéria em função da sua temperatura absoluta e é modelada como sendo transportada ou por meio de ondas eletromagnéticas ou por fótons. O mecanismo de emissão da radiação térmica está relacionado à energia liberada como o resultado da oscilação ou transição dos muitos elétrons que compõem a estrutura atômica da matéria. Tais oscilações são mantidas pela energia interna da matéria, portanto função da sua temperatura absoluta.

Ainda segundo estes autores, a liberação da energia térmica se concentra em comprimentos de onda na faixa de 0,1 a 100 μm . Tal faixa abrange toda a região denominada infravermelho, a região do espectro visível e uma parcela da região do ultravioleta. Por ter origem eletromagnética, a radiação térmica não necessita de um meio material para se propagar, sendo esta uma marcante diferença em relação aos dois outros mecanismos de transferência de calor: a condução e a convecção.

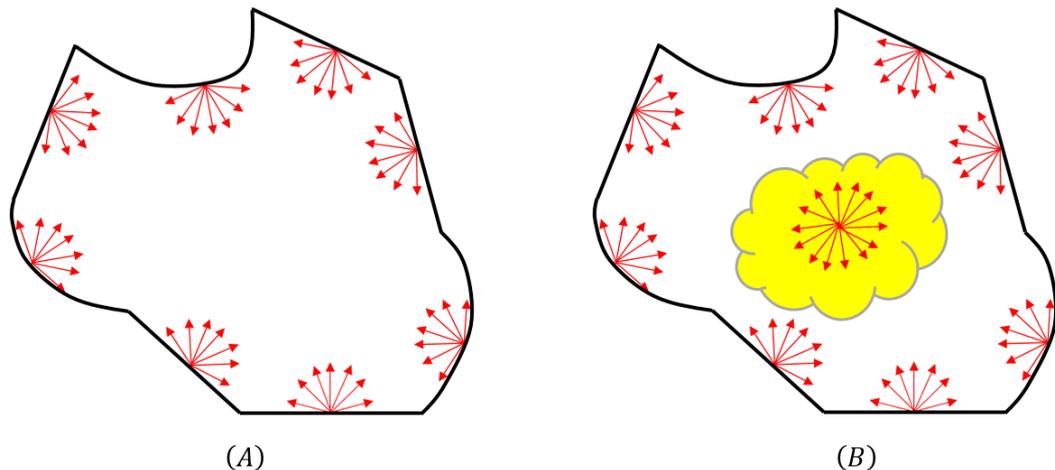
Segundo Bergman et al. (2011, p. 769), toda matéria com temperatura absoluta não nula emite radiação. A superfície de um sólido opaco emite e absorve radiação como um fenômeno de superfície, ou seja, apenas uma camada superficial com poucos átomos de espessura consegue absorver radiação, transformando-a em energia interna ou o contrário, transformando a energia interna em radiação que é emitida a partir da superfície.

Quando apenas superfícies opacas trocam radiação entre si, sem influência do meio que as separa, então se diz que este meio é não participante, ou seja, não interfere na intensidade da radiação, na sua direção ou nos comprimentos de onda em que ocorre. O único meio efetivamente não participante é o vácuo, mas gases com moléculas diatômicas e sólidos e líquidos transparentes aos comprimentos de onda típicos da radiação térmica também podem ser considerados como meios não participantes (FIGURA 1.2 A).

Vários gases, como o vapor de água e o dióxido de carbono e alguns sólidos e líquidos semitransparentes emitem e absorvem radiação como sendo um fenômeno volumétrico. Assim, a emissão e absorção podem ocorrer em todo o interior do corpo e não apenas na superfície, como mostrado na FIGURA 1.2 B.

Se o tamanho de um corpo emissor de radiação térmica for da ordem do tamanho das moléculas e átomos que o constitui, então a termodinâmica estatística é a ferramenta mais adequada para descrever matematicamente a emissão e a absorção da radiação. Entretanto, nas aplicações clássicas de engenharia o tamanho dos sistemas estudados é muitas vezes maior que o tamanho dos átomos e moléculas que os compõe.

FIGURA 1.2 - DUAS CLASSES DE PROBLEMAS DE RADIAÇÃO TÉRMICA EM CAVIDADES. (A) MEIO NÃO PARTICIPANTE E (B) EM MEIO PARTICIPANTE.



FONTE: O AUTOR (2020)

Para esses grandes sistemas, onde os efeitos de interferência e polarização da radiação não são importantes, em vez de descrever a radiação por meio da teoria eletromagnética, costuma-se utilizar o modelo de fótons ou modelo quântico. Assim, o problema das trocas de calor por radiação pode ser simplificado pela utilização de uma abordagem baseada em conceitos de óptica geométrica para descrever a variação direcional da intensidade da radiação e modelos como o corpo negro e corpo cinza para descrever a distribuição espectral da radiação (HOWELL; SIEGEL; MENGÜÇ, 2011, p. 2).

1.3 JUSTIFICATIVA

Segundo Howel, Siegel e Mengüç (2011, p. 441) a importância da radiação térmica em aplicações industriais é conhecida desde a década de 1920. Quando os primeiros fornos de vidro de grande porte foram concebidos, notou-se que a distribuição de temperatura nos tanques de vidro fundido profundos era mais uniforme que a prevista em projeto (sem considerar a radiação térmica). Mesmo levando em conta a convecção no interior do tanque, a distribuição de temperaturas não era explicada satisfatoriamente quando desconsiderados os efeitos de troca de calor por radiação. Gardon (1958a, 1958b, 1961) foram alguns dos primeiros estudos a reconhecer a importância da radiação térmica neste tipo de equipamento.

Ainda em Howell, Siegel e Mengüç (2011, p. 400) os autores reconhecem a necessidade de pesquisar sobre a quantificação do erro numérico em problemas de radiação térmica e citam os erros de discretização espacial e angular, além de erros de modelagem e aqueles devidos ao uso de dados de entrada inadequados. Entretanto nenhuma metodologia de estudo de erros numéricos é apresentada.

No prefácio do livro que trata da radiação térmica de gases de combustão, Ludwig et al. (1973) comentam que durante a década de 1950 houve vários percalços no desenvolvimento dos foguetes da *National Aeronautics and Space Administration* (NASA) devido ao superaquecimento da base onde os motores eram instalados. Isso ocorria devido à radiação proveniente da pluma dos gases de exaustão. Os problemas de superaquecimento evidenciaram a importância e a necessidade da pesquisa da emissão e absorção da radiação por gases a elevadas temperaturas. Os estudos conduzidos facilitaram, mais tarde, durante o Programa Apollo, o desenvolvimento dos grandes motores utilizados na família de foguetes lançadores *Saturn*.

Dada a importância da radiação térmica em diversos problemas de engenharia e a aparente lacuna de estudos sistemáticos de erros numéricos, o problema abordado na presente tese de doutorado é estimar os erros de discretização em problemas de radiação térmica no interior de cavidades preenchidas por meios não participantes e em problemas onde o meio é participante.

Como a solução analítica dos problemas práticos que envolvem a radiação térmica em geral não é possível, então o uso dos métodos numéricos assume um papel importante na engenharia. Problemas de CFD e CHT (especificamente os de condução e convecção) possuem estratégias já consolidadas de estimativa e de redução dos erros de discretização (ASME, 2009; AIAA, 1998; FERZIGER; PERIĆ, 2002, p. 58-60; VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007, p.

285-303) e de iteração (FERZIGER; PERIĆ, 2002, p. 124-134; ROACHE, 1998, p. 527). Também se observa atualmente a continuidade nas pesquisas sobre erros numéricos em geral, sejam erros de discretização (MARCHI, 2001; MARCHI; SILVA, 2002; VARGAS, 2013; MARTINS, 2013) ou de iteração e arredondamento.

O estudo dos erros numéricos em problemas de radiação térmica, por outro lado, possui quantidade reduzida de trabalhos científicos (CHAI; LEE; PATANKAR, 1993, 1994; CHEONG; SONG, 1995; JESSEE; FIVELAND, 1996; LARSEN; WOLLABER, 2007; RAITHBY, 1999). Parte desta escassez pode ser explicada pelo número relativamente pequeno de pesquisadores dedicados ao tema em contrapartida com a comunidade de CFD, mas também pode ser devida à complexidade adicional da natureza direcional e espectral da radiação.

A intensidade direcional, também chamada apenas intensidade neste trabalho, é a grandeza básica para se estudar a radiação térmica em sistemas macroscópicos. Esta grandeza é função não apenas das coordenadas espaciais, mas também da direção de propagação e do comprimento de onda. Desta forma, os métodos numéricos dedicados aos cálculos de transferência de calor por radiação podem apresentar erros devido às discretizações espacial, angular e espectral.

Mesmo que as superfícies (e o meio, no caso dele ser participante) sejam homogêneas(os) a intensidade varia de acordo com a posição no interior do domínio e com a direção. Assim, a discretização espacial ocorre porque em geral é necessário subdividir o domínio em entidades discretas, que podem ser elementos, nós ou volumes, nos quais as propriedades e valores das grandezas físicas são calculados. Dependendo do método numérico escolhido para a formulação espacial do problema se tem um tipo de ente numérico diferente, que pode ser elementos (Método dos Elementos Finitos), nós (Método das Diferenças Finitas) ou volumes (Método dos Volumes Finitos) (FERZIGER; PERIĆ 2002, p. 25).

Os erros de discretização espacial ocorrem devido a dois processos de discretização: a) do domínio, o que permite uma representação pormenorizada da variação das grandezas e propriedades no espaço e b) do modelo matemático, pois as derivadas espaciais presentes nos termos da equação são representadas por aproximações numéricas (LEONARD, 1988, 1994, 1995). No presente trabalho se pretende estudar os erros de discretização espacial apenas.

Segundo Chai, Lee e Patankar (1993), a discretização angular ocorre nos métodos que descrevem a radiação em termos da intensidade direcional (*e.g.* Método das Ordenadas Discretas, Método da Transferência Discreta). Decorre da necessidade de discretizar a intensidade da radiação em uma quantidade finita de direções a fim de representar aproximadamente sua distribuição direcional. As direções estão posicionadas no interior de

elementos de ângulo sólido e se assume que a intensidade direcional é constante no interior de cada ângulo sólido discreto. Quanto mais direções forem empregadas, mais bem representado se torna o campo de intensidade direcional e menor o erro de discretização angular associado. No limite, quando um número infinito de direções é considerado, o campo de intensidade se torna contínuo e é esperado que esta fonte de erro numérico tenda a zero.

A discretização espectral é importante em problemas nos quais a hipótese de superfície negra ou cinza não pode ser feita ou caso haja gases participantes que não possam ser modelados como gases cinza. Por último, há a situação na qual os gases participantes são cinza assim como as superfícies, porém com emissividades diferentes em duas ou mais faixas de comprimentos de onda. No caso em que as propriedades das superfícies ou do meio apresentam variações significativas em diferentes comprimentos de onda os efeitos espectrais não podem ser desconsiderados, especialmente se as temperaturas das superfícies ou meio são consideravelmente diferentes entre si (*e.g.* a superfície de aquecedores solares utilizados para aquecer água em edificações possui superfície com absorvidade seletiva em relação ao comprimento de onda, aproveitando-se da significativa diferença entre a distribuição espectral da radiação solar e a da superfície do próprio aparelho). Entretanto, não se pretende estudar o impacto desta fonte de erro de discretização neste trabalho.

É importante ressaltar que há diversos métodos numéricos dedicados à modelagem da radiação térmica, sendo que podem apresentar algumas fontes de erros de discretização e não apresentar outras. Por exemplo: o Método Monte Carlo pode apresentar nenhum dos tipos de erros de discretização citados, pois se trata de um método probabilístico e seu princípio básico é usar números aleatórios na escolha da posição de emissão de “pacotes” de radiação, na escolha da direção de emissão e também após o raio incidir sobre uma superfície qualquer, decidir se este será absorvido ou refletido.

Caso haja meio participante entre as superfícies, o método também usa números aleatórios para avaliar a probabilidade de o pacote ser absorvido ou então espalhado em uma nova direção, caso em que é requerido outro número aleatório para selecionar a nova direção da radiação. Sua fonte de erro numérico é proveniente do fato que na prática, o programa que implementa o método utiliza um número finito de pacotes, o gera um erro numérico em função da perda de representatividade estatística.

Também vale citar que o Método dos Harmônicos Esféricos não apresenta discretização angular. Trata-se de um método analítico que, em vez de operar com a intensidade direcional, produz uma equação aproximada para variáveis secundárias, como a radiação incidente e o fluxo de calor (no caso da Aproximação P_N), ou seja, grandezas derivadas da intensidade. Estas

duas grandezas não são dependentes da distribuição direcional da intensidade. A equação resultante, assim como as condições de contorno são, então, discretizadas por um método numérico, tipicamente o Método das Diferenças Finitas, e as equações discretizadas resolvidas numericamente.

Uma abordagem interessante para o estudo sistemático de erros numéricos em problemas de radiação térmica é classificar os fenômenos físicos e abordar sistematicamente cada classe, da mais simples para a mais complexa. É importante lembrar que mesmo os problemas mais simples podem ser úteis na pesquisa dos métodos numéricos de radiação e na compreensão de fenômenos físicos, por exemplo, embora os problemas desta tese sejam resolvidos em malhas estruturadas e uniformes, a metodologia é válida para malhas não estruturadas também (ASME, 2009, p. 7, 13). Além disso, atualmente já estão disponíveis computadores com capacidade de processamento e memória para simular problemas em malhas suficientemente refinadas, mesmo no caso em que a radiação térmica é um dos fenômenos envolvidos (*e.g.* combustão turbulenta, que requer a simulação conjunta da turbulência, reações químicas e radiação).

1.4 OBJETIVOS

A fim de organizar o presente trabalho, escolheu-se definir os seguintes objetivos geral e específicos descritos a seguir.

1.4.1 Objetivo Geral

Medir e estimar erros de discretização espacial em soluções numéricas de problemas de radiação térmica em cavidades preenchidas por meios não participantes e em problemas de radiação em meios participantes.

1.4.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos do presente trabalho são:

- a) Realizar estimativas de erro *a priori*, encontrando a equação geral do erro de truncamento para as aproximações numéricas empregadas nos problemas;

- b) Programar modelos numéricos para a solução das equações integrais e dos sistemas de equações integrais que modelam os problemas de radiação em meios não participantes. Em seguida realizar a verificação de cada código;
- c) Programar o Método das Ordenadas Discretas (aproximações S_2 , S_4 , S_6 e S_8) na versão unidimensional com simetria azimutal. Em seguida, realizar a verificação do código;
- d) Incorporar em cada modelo numérico a técnica das Múltiplas Extrapolações de Richardson, o que possibilita a análise *a posteriori* dos erros, estimativas do erro e suas ordens verdadeiras, em função do tamanho do elemento de malha, a fim de confirmar ou refutar os resultados da análise *a priori*;
- e) Avaliar se as soluções analíticas estão contidas dentro da faixa de estimativa de erro obtida nas simulações numéricas. As estimativas do erro numéricas são calculadas com o Estimador de Richardson e com o Estimador *GCI* (da terminologia em língua inglesa *Grid Convergence Index*);

Não será objeto de estudo desta tese os erros numéricos em função da discretização angular e espectral. O presente trabalho se concentrará em analisar processos de transferência de calor em termos totais, ou seja, considerando todo o espectro da radiação térmica. Assim, as superfícies que formam as fronteiras dos problemas estudados serão negras ou cinza.

No caso de problemas envolvendo meios participantes, serão estudados apenas problemas onde o meio participante é considerado cinza e seus coeficientes de absorção e espalhamento constantes e especificados.

Por último, apenas superfícies difusas serão estudadas e quanto aos meios participantes que apresentam espalhamento, apenas o caso do espalhamento isotrópico é estudado. O objetivo de limitar os problemas é permitir o estudo sistemático de casos mais simples, uma vez que, como é visto na revisão bibliográfica a seguir, os estudos de erros numéricos em problemas de radiação térmica não são bem desenvolvidos.

1.5 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Esta seção está dividida em 3 partes. Na primeira é feito um apanhado do desenvolvimento e estado atual do estudo de erros de discretização e nas duas seguintes o mesmo é feito para os desenvolvimentos numéricos dos problemas de transferência de calor por radiação em meios não participantes e em meios participantes.

1.5.1 Erros de Discretização

Como um apanhado sobre erros de discretização é apresentado na Seção 1.1, portanto aqui apenas trabalhos que reportam desenvolvimentos diretamente relacionados ao tema da presente tese são apresentados. O primeiro artigo a mencionar é Leonard (1994), onde é mostrado como é obtida a equação do erro de truncamento na equação da convecção pura, tanto com o Método das Diferenças Finitas quanto ao Método dos Volumes Finitos. O autor mostra que embora com mesma ordem, os coeficientes do termo assintótico da equação são diferentes. Leonard (1995) é outro artigo que também mostra como obter a equação do erro de truncamento, desta vez para o esquema QUICK, usado como aproximação do termo convectivo da equação da advecção-difusão.

Koshev e Beilina (2013) resolvem com o Método dos Elementos Finitos um problema mal posto modelado por uma equação integral de Fredholm do primeiro tipo. Os autores minimizam o funcional de Tikhonov para encontrar uma solução regularizada e estimam o erro *a posteriori* tanto da solução como também do funcional. Os autores comparam as soluções numéricas com resultados experimentais de microtomografias, entretanto não é conduzido um processo de validação segundo os moldes da ASME (2009).

Rider et al. (2016) propõem uma metodologia baseada em critérios estatísticos para calcular o fator de segurança do estimador *GCI*. A metodologia, denominada como *robust verification*, inclui também o julgamento de um especialista na avaliação do fator de segurança.

1.5.2 Problemas de Radiação em Meios Não Participantes

Os problemas de radiação em meios não participantes estão presentes em aplicações de engenharia tais como em aquecedores solares (VARGAS et al., 2009), iluminação de ambientes (CASSOL et al., 2011) e em fornos de recozimento, estufas e muflas (LEMOS; BRITTES; FRANÇA, 2014). Também são importantes na análise de meios participantes não cinza, ou seja, daqueles meios participantes onde ocorre uma ou mais faixas de comprimentos de onda nas quais o meio não interage com a radiação térmica significativamente (CHAI; LEE; PATANKAR, 1993). Muitos gases presentes em aplicações de interesse na engenharia se comportam desta forma.

Dependendo de como são formulados quando descritos em forma matemática, os problemas de radiação em meios não participantes constituem desde uma única equação integral de Fredholm até conjuntos ou mesmo sistemas de equações integrais de Fredholm.

Frequentemente as pesquisas sobre esta classe de problemas não têm como único foco o fenômeno de radiação térmica em si. Muitos artigos abordam técnicas de otimização que buscam a melhor disposição entre superfícies que trocam radiação térmica entre si ou então minimizar a quantidade de energia consumida por equipamentos (OBA; POSSAMAI; NICOLAU, 2014; CARVALHO; NOGUEIRA, 1997).

Algumas das técnicas de otimização são os Métodos Inversos, o Método dos Gradientes Conjugados (BAYAT; MEHRABAN; SARVARI, 2010) e o Método da Otimização Extrema Generalizada (LEMO; BRITTES; FRANÇA, 2014). Em geral o foco da pesquisa destes trabalhos está na aplicação dos métodos de otimização nos problemas de radiação térmica e não nas questões relativas à solução numérica das equações, que em geral constituem equações integrais de Fredholm do segundo tipo.

Uma última área de pesquisa atualmente em desenvolvimento, porém não necessariamente relacionada ao tema da presente tese é a caracterização das propriedades radiativas de superfícies, particularmente de materiais em elevadas temperaturas, como cerâmicos (FU et al., 2015) e de meios dispersos como leitos granulares, fuligem, fibras e espumas (LOPES et al., 2001; MOURA, 1998).

Grande parte dos problemas de radiação em meios não participantes são resolvidos usando o modelo da cavidade (*enclosure* da terminologia em língua inglesa). Tais problemas tipicamente recaem em modelos matemáticos constituídos de uma equação integral de Fredholm do segundo tipo ou mesmo em um sistema de tais equações.

Usando a notação comumente empregada na literatura (POLYANIN; MANZHIROV, 2008, p. 301; HILDEBRAND, 1965, p. 281), uma equação linear de Fredholm do segundo tipo é escrita como

$$y(x) - \Lambda \int_a^b K(x, t)y(t)dt = f(x), \quad (1.2)$$

onde x e y são as variáveis independente e dependente, respectivamente, Λ é denominado valor característico (*i.e.* inverso de um autovalor da equação integral), a função K é denominada núcleo da integral definida entre os limites $a \leq x \leq b$ e f é um termo independente de y . Quando $f = 0$, a equação integral é dita homogênea, do contrário ela é dita não homogênea.

Segundo Hildebrand (1965, p. 279) a integral na equação de Fredholm pode ser considerada como caso limite de um somatório de N termos, onde $N \rightarrow \infty$. No caso de N finito, então a solução é obtida de forma aproximada

$$y(x) - \Lambda \sum_{k=1}^N W_k K(x, x_k) y(x_k) \approx f(x), \quad (1.3)$$

onde W_k são coeficientes de ponderação, típicos do método numérico empregado para conduzir a integração.

Como a Eq. (1.3) precisa ser satisfeita em todos os N pontos escolhidos, então tem-se um sistema linear de equações algébricas

$$y(x_i) - \Lambda \sum_{k=1}^N W_k K(x_i, x_k) y(x_k) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.4)$$

Embora na Eq. (1.4) ambos os membros estão escritos como iguais, deve-se ter em mente que já existe uma aproximação em função da transformação da integral em um somatório.

Analisando a Eq. (1.4), vê-se que em cada ponto discreto x_i é considerado o efeito dele mesmo e de todos os demais pontos x_k , de acordo com a função núcleo K . Desta forma, no caso mais geral, é esperado que o sistema linear representado pela Eq. (1.4), apresente matriz cheia quando escrito na forma matricial.

Em termos de métodos numéricos, matrizes esparsas (*e.g.* matrizes diagonais, tridiagonais) são preferíveis às matrizes cheias, pois há técnicas numéricas que resolvem sistemas lineares com tais matrizes de forma eficiente, ou seja, com pouco custo computacional e poucos requisitos de memória. É claro que em geral a matriz $\mathbf{K} = K(x_i, x_k)$ é diagonalizável, caso em que existe uma matriz $\mathbf{D} = [D_i \delta_{i,j}]$ que permita a solução numérica eficiente do problema, que escrito em forma vetorial fica

$$\mathbf{y} - \Lambda \mathbf{K} \mathbf{D} \mathbf{y} = \mathbf{f}. \quad (1.5)$$

Em Atkinson (1967) é desenvolvida a técnica de solução de equações integrais por meio de regras de quadratura generalizadas. O autor realiza uma análise *a priori* que permite calcular

um limite máximo para o erro de discretização. O autor deduz a Regra do Trapézio Generalizada, que possui ordem dois, $\sigma(h^2)$, enquanto que a Regra de Simpson Generalizada é de ordem três, $\sigma(h^3)$, ou seja, uma ordem menor que a Regra de Simpson regular ($\sigma(h^4)$). A implementação numérica é feita na forma de sistema linear, algo que também é usado nesta tese (Seção 5.1.2), apesar que nesta tese são usadas apenas as versões regulares das Regras do Trapézio e 1/3 de Simpson e sem o mesmo formalismo matemático. Em princípio, a vantagem de ambos os trabalhos é resolver um problema linear usando um *solver* direto (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007, p. 3-4, 212), a desvantagem é que a matriz de coeficientes deste sistema é cheia. Outro trabalho interessante é Knirk (1976), no qual é empregada a técnica de Múltiplas Extrapolações de Richardson para aumentar a acurácia das soluções numéricas. Tal estratégia também é empregada nesta tese.

Um exemplo de trabalho relativamente recente sobre a solução de equações integrais é Ogunlaran e Akinlotan (2013). Neste trabalho, os autores descrevem um método computacional para resolver estes sistemas aproximando a função incógnita que aparece no integrando da equação integral por uma *spline* cúbica. O integrando é particionado em subintervalos de integração que são transformados em integrais no intervalo $[0,1]$. Em seguida, condições de consistência são impostas, além de condições nas extremidades. Os autores reportam resultados mais acurados que os obtidos por um método similar. Como o problema possui solução analítica, o erro pôde ser medido diretamente. Em Ogunlaran e Akinlotan (2013) o erro numérico é calculado com base na Eq. (1.1), mas não é informado se foi conduzido algum processo de verificação de código (KNUPP; SALARI, 2003) ou das soluções (OBERKAMPF; ROY, 2010; ROACHE, 2009).

Embora menos estudados atualmente, os problemas de radiação em meios não participantes são importantes. Mesmo para a análise de problemas de radiação em meios participantes o seu estudo é relevante. Especialmente na modelagem de gases não cinza é comum ocorrerem faixas de comprimentos de onda nas quais o meio se comporta essencialmente como não participante (CHAI; LEE; PATANKAR, 1993).

1.5.3 Problemas de Radiação em Meios Participantes

Os problemas de transferência de calor por radiação em meios participantes são consideravelmente importantes em algumas áreas da engenharia e provavelmente constituem a maior parte das pesquisas sobre radiação conduzidas atualmente. Há basicamente duas grandes

áreas de pesquisa nesta classe de problema: a emissão e absorção em meios participantes, especialmente em gases (HOWELL; SIEGEL; MENGÜÇ, 2011, p. 401-490; MAURENTE et al., 2017; BRITTES et al., 2017) e o desenvolvimento e aplicação de modelos numéricos aplicados em problemas diversos. Esta última frente de pesquisa é a que será detalhada nesta revisão bibliográfica.

Trabalhos envolvendo o estudo da radiação de misturas gasosas começaram a ser empregados logo que o desenvolvimento dos computadores permitiu capacidade de processamento e de memória relativamente grandes. Três das primeiras aplicações de engenharia a empregar modelagem numérica para resolver problemas de radiação térmica foram o estudo de câmaras de combustão e o projeto de reatores nucleares e de motores de foguetes.

Um dos primeiros trabalhos sobre reatores nucleares é o de Kaplan (1958) e Fleck Jr e Cummings (1971), que utilizaram o Método de Monte Carlo na pesquisa de reatores de fissão. O método é capaz de calcular o caminho dos nêutrons irradiados dos elementos de combustível através do moderador (água) e sua absorção e emissão.

Já Robbins (1961) e Howell, Strite e Renkel (1965a, 1965b) aplicaram o Método de Monte Carlo para estimar os fluxos de calor radiativo sobre as paredes internas de motores-foguete de propulsão nuclear, antes que estes tipos de motores fossem efetivamente projetados, fabricados e testados durante a Guerra Fria.

O programa consiste na solução do escoamento compressível pelo modelo de Escoamento Quase-Unidimensional (BORGNAKKE; SONNTAG 2009, p. 725; ANDERSON Jr. 2001, p. 567). Usando a hipótese de reservatório térmico, os autores usam o campo de temperatura e pressão para calcular o coeficiente de absorção do meio participante. Dadas as temperaturas e emissividades das paredes internas do motor, o Monte Carlo calcula o fluxo de calor em cada elemento discreto de área nas fronteiras e o termo fonte devido à radiação em cada elemento de volume do interior do domínio. Apesar de o modelo ser essencialmente unidimensional, a geometria tridimensional do motor é levada em conta no cálculo das trocas de radiação.

Os autores resolvem o problema em malhas progressivamente mais refinadas até que o resultado das variáveis de interesse não se altere dentro de um número preestabelecido de algarismos significativos. Embora sem solução analítica para o problema, uma avaliação da acurácia das soluções numéricas é feita por meio de comparação com os seguintes casos limites: convecção pura; radiação pura; convecção e radiação combinados (*i.e.* condição de operação prevista do motor). Outra análise que foi conduzida é a comparação da solução numérica com

uma solução de segunda ordem, obtida com a Aproximação por Difusão (HOWELL; SIEGEL; MENGÜÇ, 2011, p. 573). Esta foi a mais antiga referência encontrada pelo autor durante esta pesquisa bibliográfica onde são discutidas as possíveis fontes de erro numérico em simulações de radiação térmica e se busca minimizá-las.

No final da década de 1980, pesquisadores do Instituto Técnico de Lisboa consolidaram um grupo de pesquisas bastante ativo no estudo de métodos numéricos aplicados a problemas de radiação térmica. São reportadas aplicações de modelos de radiação em meios participantes para modelar equipamentos industriais como fornos de vidro (CARVALHO; DURÃO; PEREIRA, 1987; CARVALHO; OLIVEIRA; SEMIÃO, 1988), combustores de turbinas a gás (CARVALHO; COELHO, 1989) e caldeiras (CARVALHO; COELHO 1990).

Tanto os fornos de vidro como os combustores de turbinas a gás possuem geometrias relativamente complexas, que não permitem simplificações de geometria e precisam ser representados tridimensionalmente. Nos quatro trabalhos supracitados são descritos detalhadamente os modelos de turbulência, combustão e de radiação empregados. Também é descrito o algoritmo do modelo numérico: como é feito o acoplamento pressão-velocidade, como são aplicadas as condições de contorno, valores de constantes, etc. Também são descritas as características da malha, procedimento de convergência, *solver* e *hardware* utilizados.

Outros grupos de pesquisa em radiação em meios participantes estão na Inglaterra (LOCKWOOD; SHAH, 1981; HENSON, 1998; MALALASEKERA et al. 1999), na Coreia do Sul (KIM; BAEK, 1998, 2005; BYUN; BAEK, 2007; KIM, 2008; LEE; BAEK, 2012), na China (CAI; ZHU; ZHANG, 2007; ZHANG; CAI, 2009) e na Alemanha (GÖEBEL et al, 2013; SVENTITSKIY, 2017). No Brasil, dentre outros, pode ser citado o grupo de estudos da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, que trabalha com combustão turbulenta, métodos inversos e trabalhos relacionados a espectroscopia (LE MOS; BRITTES; FRANÇA, 2014; BRITTES, 2015; FRAGA et al., 2020a, 2020b; BRITTES; FRANÇA; BARICHELLO, 2011; BARICHELLO, 2011).

Já na comunidade de transporte de nêutrons há o artigo de Martin e Duderstadt (1977) que recomenda o uso do que em Knupp e Salari (2003) é chamado de Método das Soluções Fabricadas para construir soluções analíticas capazes de efetivamente testar se o programa de computador resolve corretamente o modelo matemático dentro da respectiva precisão usada pelo computador para representar as variáveis de tipo real.

É curioso notar que apesar de as comunidades de CFD e CHT possuírem atualmente mais publicações acerca de Verificação e Validação, a mais antiga encontrada pelo autor que

efetivamente aplica uma técnica de Verificação de Código é o artigo supracitado, proveniente da Comunidade de Transporte (de nêutrons).

O Método das Soluções Fabricadas consiste em propor soluções contínuas suficientemente diferenciáveis e não triviais capazes de “exercitar” todos os termos da equação governante. Estas soluções fabricadas são então substituídas na equação governante, resultando em um resíduo, chamado aqui de termo fonte fabricado. Este termo é então adicionado ao termo fonte original da equação governante apenas quando o problema fabricado está sendo resolvido. Neste caso a solução numérica tenderá à solução proposta à medida que malhas mais refinadas são simuladas. As condições iniciais e de contorno do problema fabricado também são dados de entrada da simulação e são obtidas a partir da solução proposta.

Quando descrevem o Método das Soluções Fabricadas, Martin e Duderstad (1977) citam um artigo de 1971 do Laboratório Los Alamos que o descreve como método para verificar códigos computacionais, porém este artigo não foi encontrado durante a pesquisa bibliográfica. Entretanto, encontrou-se o relatório LA-UR-01-1487 do Laboratório Los Alamos (PAUTZ, 2001), que embora publicado antes de Knupp e Salari (2003), baseia-se em Salari e Knupp (2000). Em Pautz (2001) são reportadas soluções fabricadas para alguns tipos de problemas de transporte de nêutrons. Consequentemente estas soluções podem ser aplicadas em problemas equivalentes de radiação térmica em meios participantes, embora tais soluções são relativamente complexas.

Nos trabalhos mais recentes era esperado que uma maior atenção fosse dada à confiabilidade das simulações numéricas, porém nem sempre isso é observado. Em Abbassi e Khoshmanesh (2008) reporta-se resultados da simulação de um tanque de vidro industrial, semelhante ao apresentado em Carvalho, Durão e Pereira (1987) e Carvalho, Oliveira e Semião, (1988). Mais uma vez, o que os autores chamam “validação” é a comparação com dados experimentais da temperatura da parede interna em algumas posições específicas. A solução numérica aparentemente foi obtida em malha única, portanto a verificação do código, seguindo metodologias recomendadas, por exemplo em Knupp e Salari (2003), não foi feita.

Outra aplicação de modelos numéricos de radiação é na modelagem de motores de combustão interna, particularmente em motores de ignição por compressão, onde a pressão e temperatura durante a combustão são relativamente elevadas (HEYWOOD, 1988, p. 671, 683-688) e a formação de fuligem impacta significativamente no espalhamento da radiação. Yan et al. (2000) implementaram o Método de Monte Carlo para contabilizar o fluxo de calor devido à radiação na parede do pistão e no cabeçote de um motor Diesel de injeção direta. Neste trabalho também não é feita uma análise de erros numéricos, embora o Método de Monte Carlo

permita, por meio de inferência estatística, estimar o erro da solução numérica (HOWELL; SIEGEL; MENGÜÇ, 2011, p. 384).

Henson (1998) é um trabalho bastante completo em termos de abrangência dos fenômenos físicos empregados. Neste trabalho o autor utiliza o modelo soma ponderada de gases cinza WSGG para descrever o coeficiente de absorção dos produtos de combustão de um motor de combustão por ignição à centelha. O autor testa o Monte Carlo, o Método da Transferência Discreta e o Método YIX. O modelo de radiação é resolvido juntamente com as equações de conservação da massa, quantidade de movimento linear e energia. Combustão e turbulência também são considerados. A verificação da parte do código que resolve os problemas de radiação foi feita com nove diferentes classes de problemas, desde geometrias não ortogonais, passando por meios não isotérmicos ou então com absorção não uniforme, até problemas com espalhamento e de meio não cinza.

Atualmente há vários métodos numéricos dedicados à simulação de fenômenos de transferência de calor por radiação. Além dos já citados: Método Monte Carlo, Método da Transferência Discreta (DTM, da terminologia em língua inglesa *Discrete Transfer Method*), Método dos Harmônicos Esféricos (SHM, em língua inglesa *Spherical Harmonics Method*) e o Método das Ordenadas Discretas (DOM, em língua inglesa *Discrete Ordinates Method*), ainda há o Método dos Volumes Finitos (FVM, em língua inglesa *Finite Volume Method*), Método do Fator de Forma Discreto (DEF, em língua inglesa *Discrete Exchange Factor*), o Método das Zonas e o Método YIX, dentre outros.

Provavelmente o método numérico mais difundido em análises de radiação térmica é o Método das Ordenadas Discretas (CHANDRASEKHAR, 1950; COELHO, 2007). Talvez a maior vantagem do DOM é porque é relativamente eficiente computacionalmente e ao mesmo tempo apresenta resultados relativamente acurados.

A acurácia dos resultados obtidos com o DOM está relacionada basicamente com duas fontes de erro: os devidos à discretização angular (KOCH et al., 1995; MOURA; BAILLIS; SACADURA, 1997; RAITHBY, 1999; KOCH; BECKER, 2004; RUKOLAINE; YUFEREV, 2001; MISHRA; ROY; MISRA, 2006; LARSEN; WOLLABER, 2007) e os devidos à discretização espacial (LATHROP, 1969; JESSEE; FIVELAND, 1997; MOURA; BAILLIS; SACADURA, 1998; JOSEPH et al., 2005; COELHO, 2007; BARICHELLO et al., 2016). Dentre os erros devido à discretização angular, ocupa posição de destaque o efeito do raio ou *Ray Effect*, da terminologia em língua inglesa, enquanto que o erro de discretização espacial mais comumente mencionado na literatura é o falso espalhamento (*false scattering*).

A referência mais antiga que o autor teve acesso sobre o efeito do raio é Lathrop (1968), sendo que na época o DOM era empregado em problemas de física de reatores nucleares. O autor aponta que ocorrem restrições no número de direções características nas quais as partículas podem viajar. Provavelmente a primeira menção ao efeito do raio em um problema de radiação térmica é reportado em Fiveland (1984). Segundo Chai, Lee e Patankar (1993), ao longo dos anos 70 e 80 surgiram propostas para mitigar seu efeito, porém sem eliminá-lo. Dentre elas estão a transformação da equação da aproximação S_N em uma equação de harmônicos esféricos (através da introdução de um termo fonte) e aplicar diferentes conjuntos de quadraturas.

O efeito do raio ocorre devido à impossibilidade de se representar no domínio discreto a intensidade como continuamente variável com a direção. Como a essência do DOM é resolver a equação do princípio de conservação da energia em um conjunto finito de direções preestabelecidas, então à medida que regiões distantes de uma fonte pontual de radiação são avaliadas, estas regiões recebem influência da fonte ou não, dependendo da sua orientação em relação a fonte e as referidas direções. Chai, Lee e Patankar (1993) exemplificam o efeito do raio sem a necessidade de uma discretização espacial, mesmo que a solução analítica da equação discreta seja usada. Em resumo: o efeito do raio é independente da discretização espacial, entretanto sempre que houver discretização angular ele ocorrerá. Outros métodos numéricos, como o DTM por exemplo, também apresentam limitação semelhante pelo mesmo motivo (FOLTRAN, 2015, p. 95-96,103-104). O efeito do raio geralmente produz soluções não realísticas, em geral contendo “oscilações” no campo do fluxo de calor, especialmente perceptíveis em meios opticamente finos.

Um artigo interessante, que talvez possa ser usado no estudo dos erros de discretização angular, e especificamente na quantificação do efeito do raio é Larsen e Wollaber (2007), pois compara a solução analítica e a solução da aproximação S_N , sendo que em ambas um vetor unitário de direção arbitrária aparece no produto interno com a direção ordenada. Os autores mostram que o conjunto de direções ordenadas não é rotacionalmente invariante, de forma que soluções com diferentes orientações deste vetor unitário possuem diferentes taxas de variação espacial da intensidade.

Outro artigo importante no estudo dos erros de discretização angular é Raithby (1999), onde é usado o Método dos Volumes Finitos para realizar tanto a discretização espacial como a discretização angular. Semelhantemente ao que ocorre com a discretização espacial, onde o valor da variável de interesse no ponto central do elemento de volume representa a variável em todo o elemento, o mesmo ocorre com a discretização angular, ou seja, a radiação concentrada

em um elemento de ângulo sólido discreto é representada pela radiação viajando no centro deste elemento. Agravando esta limitação está o caso 3D, que em geral vários elementos de ângulo sólido intersectam as fronteiras dos elementos de volume, fazendo com que haja a contribuição de mais de um elemento de volume na radiação contida em um elemento de ângulo sólido discreto.

Já o falso espalhamento é uma consequência puramente numérica, proveniente da discretização espacial apenas e não relacionado com o fenômeno físico do espalhamento em si. Muito provavelmente é citado pela primeira vez na literatura de radiação térmica no trabalho de Chai, Lee e Patankar (1993), embora já conhecido da comunidade de transporte de nêutrons como difusão numérica (MONAHAN; FILIPPONE, 1991 apud CHAI; LEE; PATANKAR, 1993). O falso espalhamento é um efeito decorrente do uso de uma discretização espacial. Este efeito indesejado é conhecido como falsa difusão em problemas de advecção/difusão em CFD (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007, p. 150).

O falso espalhamento ocorre em problemas multidimensionais, sempre que uma direção ordenada não está alinhada com as linhas que definem as faces dos elementos de volume da malha (CHAI; LEE; PATANKAR, 1993). Este é o principal motivo pelo qual nesta tese as análises de radiação em meios participantes se limitam a problemas unidimensionais, conforme mostrado no Capítulo 4. Parece não haver consenso na terminologia, pois muitas vezes o falso espalhamento é denominado espalhamento numérico ou mesmo difusão numérica. Nesta tese será usado o termo falso espalhamento, uma vez que o fenômeno de difusão não ocorre na transferência de calor por radiação (apesar do termo *diffusion* ser usado na língua francesa para se referir ao fenômeno do espalhamento).

Referente à discretização espacial, Lathrop (1969) discute a positividade e acurácia dos esquemas de discretização espacial comumente usados na época da publicação: o esquema Degrau (*Step*), o Diamante (*Diamond* ou *Diamond Difference*), Wendroff, Woods-Carlson, esquemas de diferenças ponderadas e esquemas de ponderação variável. Destes, sem dúvida os mais conhecidos e às vezes ainda empregados em publicações recentes são os esquemas Degrau (RIDER et al., 2016) e Diamante. Vale comentar aqui que em Lathrop (1969) os esquemas Degrau e Diamante são classificados diferentemente de trabalhos posteriores. Segundo este autor, o Degrau é um esquema de diferenças baseado no Método das Características, enquanto que o Diamante é um esquema de diferenças baseado em formas assumidas da função de distribuição, mais especificamente uma função linear.

O esquema Degrau, assim como o seu análogo em problemas de advecção/difusão em CFD, o esquema *upwind*, provoca suavização do campo de intensidade direcional. Já o esquema

Diamante, cujo contraparte em CFD é o esquema de diferenças centrais, é não limitado e pode induzir o aparecimento de oscilações (*overshoots* e *undershoots*) não realísticas no campo de intensidade direcional, especialmente para casos em que o meio é opticamente fino (JESSEE; FIVELAND, 1997). No caso de o valor da intensidade extrapolada para a face do volume ser negativo, muitas vezes o que se faz é fixar seu valor como nulo e recalculá-lo a intensidade no centro do volume. Este tratamento, denominado *negative intensity fix-up procedure* é bastante difundido na literatura e tem por objetivo obter soluções numéricas fisicamente possíveis com o esquema Diamante (FIVELAND, 1984, 1988; CHAI; LEE; PATANKAR, 1993; CHAI; PATANKAR; LEE, 1994; COELHO, 2008). Em alguns trabalhos é sugerido que o esquema Diamante seja trocado localmente e substituído esquema Degrau sempre que a intensidade extrapolada para a fronteira do elemento de volume resulte negativa.

Após a publicação do diagrama da variável normalizada, em Leonard (1988), outros esquemas limitados e de ordem mais elevada que o Degrau passaram a ser recomendados no DOM. Em Coelho (2008) é realizada uma comparação dos seguintes esquemas: MINMOD (HARTEN, 1983), CLAM (van LEER, 1974), MUSCL (van LEER, 1979), SMART (GASKELL; LAU, 1988), esquemas TVD, dentre outros. Mais recentemente foi publicado um compilado das últimas pesquisas com o DOM e o FVM (COELHO, 2014). Neste artigo o autor aborda o tema da discretização espacial e resume trabalhos referentes a técnicas de refinamento localizado de malha, malhas construídas em múltiplos blocos, etc.

Por fim, embora já citado nesta revisão bibliográfica e mesmo sendo relativamente antigo, Chai, Lee e Patankar (1993) é o trabalho mais próximo do proposto nesta tese, porque considera os esquemas Degrau e Diamante como casos particulares de uma mesma classe de métodos denominada Esquema de Ponderação Variável (*Variable Weight Scheme*) e por mostrar, usando expansões em Série de Taylor, que a aproximação da derivada da intensidade produz erro de truncamento que é função do fator de ponderação espacial γ . Quando $\gamma = 1$ tem-se o esquema Degrau, que é de primeira ordem e quando $\gamma = 1/2$ tem-se o esquema Diamante, o único dentre todos os valores válidos de γ que resulta em erro de truncamento de segunda ordem. Além disso, nesta tese a análise contempla não apenas o erro de truncamento devido ao Esquema de Ponderação Variável, mas também o erro devido à integração da intensidade pela Regra do Retângulo e como esses dois erros são propagados na direção ordenada.

1.6 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Este trabalho é constituído de sete capítulos, sendo os seus conteúdos brevemente descritos a seguir:

- a) No Segundo Capítulo é apresentada a fundamentação teórica do trabalho, basicamente dividida entre o modelamento matemático dos processos físicos de transferência de calor por radiação e a teoria de erros de discretização espacial em soluções numéricas;
- b) No Terceiro Capítulo é descrita a fundamentação teórica que é usada nos estudos dos erros de discretização espacial em problemas em meios não participantes;
- c) No Quarto Capítulo é descrita a fundamentação teórica que é usada nos estudos dos erros de discretização espacial em problemas em meios participantes;
- d) No Quinto Capítulo são apresentados os problemas que serão resolvidos;
- e) O Capítulo Seis é dedicado a mostrar e analisar os resultados obtidos;
- f) O Capítulo Sete faz um compilado das principais conclusões e contribuições obtidas;
- g) No Apêndice A é detalhado o algoritmo empregado na solução das funções integrais exponenciais. Essas funções são usadas na solução analítica de alguns problemas de radiação em meios participantes;
- h) No Apêndice B é apresentada a solução analítica do problema de radiação em meio não participante encerrado em uma cavidade esférica dividida em duas calotas e duas seções esféricas. Este problema origina um sistema de equações integrais de Fredholm do segundo tipo;
- i) No Anexo A é apresentada a dedução da equação do erro de truncamento da Regra do Trapézio obtida a partir de expansões em Série de Taylor com o Método das Diferenças Finitas;
- j) O Anexo B é similar ao tópico anterior, porém dedicado à Regra do Retângulo usando o Método dos Volumes Finitos;
- k) Por último, o Anexo C apresenta a solução analítica do problema de radiação em meio não participante no interior de um tubo circular de comprimento finito e extremidades abertas, onde sua área lateral interna é submetida à um fluxo de calor constante e as extremidades abrem-se para vizinhanças hipotéticas com temperatura nula.

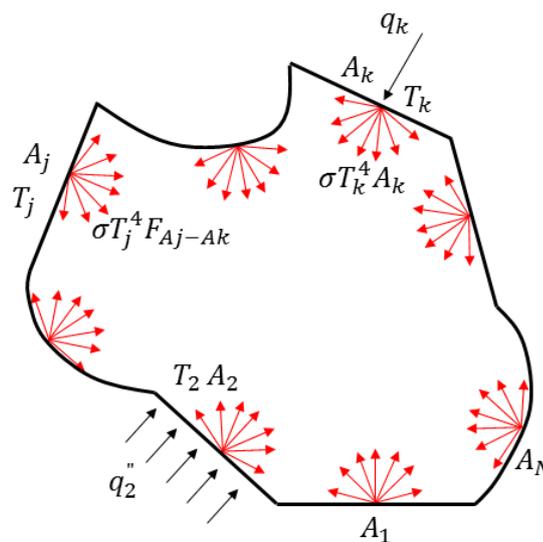
2 FUNDAMENTAÇÃO

A fundamentação teórica deste trabalho é basicamente dividida em três partes: transferência de calor por radiação em cavidades preenchidas por meios não participantes, transferência de calor por radiação em meios participantes e estudo de erros numéricos.

2.1 TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR RADIAÇÃO EM CAVIDADES PREENCHIDAS POR MEIOS NÃO PARTICIPANTES

Uma cavidade é uma região do espaço fechada em todas as direções por N superfícies. Admite-se que possa haver uma ou mais aberturas, mas neste caso estas são pequenas e o fluxo radiativo que as atravessa pode ser modelado assumindo que há uma superfície fictícia com emissividade unitária e temperatura de corpo negro condizente com a radiação que entra por ela para o interior da cavidade. A cavidade pode ter superfícies convexas e côncavas, para algumas a condição de contorno é temperatura prescrita e para outras pode ser fluxo prescrito. Ainda é possível que uma superfície bloqueie parcialmente ou mesmo totalmente a troca de radiação entre outras duas superfícies quaisquer. Tais situações ocorrem na FIGURA 2.1 abaixo.

FIGURA 2.1 - CAVIDADE HIPOTÉTICA CONTENDO N SUPERFÍCIES



FONTE: Adaptação de Howell, siegel e Mengüç (2011).

Outro conceito fundamental é o fator de forma. Segundo Howell, Siegel e Mengüç (2011, p.152), fator de forma é a fração da radiação difusa deixando uma superfície que diretamente atinge outra superfície. Admitindo que a radiação difusa seja emitida pela superfície A_1 e interceptada pela superfície A_2 , então o fator de forma para essa interação é dado por

$$dF_{dA_1-dA_2} = \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi S^2} dA_2, \quad (2.1)$$

onde θ_1 e θ_2 são ângulos formados entre a normal de cada superfície e a linha reta que une o centro dos dois elementos de área infinitesimal, cujo comprimento é S . O número π no denominador decorre de o fato do fator de forma ser definido apenas para superfícies difusas, e as fórmulas de troca de calor entre superfícies estarem escritas para as temperaturas das superfícies e não para as intensidades da radiação. As relações de reciprocidade entre os fatores de forma são necessárias ao entendimento das equações de transferência radiativa no interior de cavidades. Estas relações são

$$dA_i dF_{dA_i-dA_j} = dA_j dF_{dA_j-dA_i}, \quad (2.2a)$$

$$A_i dF_{A_i-dA_j} = dA_j F_{dA_j-A_i}, \quad (2.2b)$$

$$A_i F_{A_i-A_j} = A_j F_{A_j-A_i}, \quad (2.2c)$$

onde o primeiro subíndice representa a superfície emissora de radiação e o segundo representa a receptora, por exemplo: $dF_{dA_i-dA_j}$ é o fator de forma infinitesimal que representa a fração da radiação difusa emitida por toda a superfície A_i e interceptada pela superfície infinitesimal dA_j .

Observa-se que quando a área receptora de radiação é infinitesimal, o correspondente fator de forma também é infinitesimal.

As relações entre os fatores de forma infinitesimais e os fatores de forma para superfícies finitas são listados pelas equações (2.3a-2.3c) a seguir

$$F_{dA_i-A_j} = \int_{A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi S^2} dA_j, \quad (2.3a)$$

$$dF_{Aj-dAi} = \frac{dA_i}{A_j} \int_{A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi S^2} dA_j, \quad (2.3b)$$

$$F_{Ai-Aj} = \frac{1}{A_i} \int_{A_i} \int_{A_j} \frac{\cos \theta_i \cos \theta_j}{\pi S^2} dA_j dA_i, \quad (2.3c)$$

A última relação importante para superfícies fechadas é dedutível do Princípio de Conservação da Energia

$$\sum_{j=1}^N F_{Ai-Aj} = 1, \quad (2.4)$$

onde N é o número de superfícies que constituem a cavidade. Vale comentar que caso haja uma superfície côncava k , então $F_{Ak-Ak} \neq 0$, ou seja a superfície côncava k recebe uma parte da energia proveniente dela mesma.

O balanço de energia na superfície i requer que a taxa de transferência de calor q_i atravessando a superfície seja igual à diferença entre a taxa na qual a energia radiante é emitida e a taxa na qual a radiação proveniente de outras superfícies é absorvida pela superfície i

$$q_i = \varepsilon_i A_i \sigma T_i^4 - \alpha_i A_i H_i. \quad (2.5)$$

O primeiro termo no lado direito da Eq. (2.5) representa a quantidade de energia radiante emitida pela superfície i , onde $\sigma T_i^4 = E_i$ é denominado poder emissivo da superfície i , sendo $\sigma = 5,670374419 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K}^4)$ a constante de Stefan-Boltzmann (CODATA, 2020), T_i a temperatura absoluta da superfície i e ε_i sua emissividade.

O segundo termo no lado direito da Eq. (2.5) representa a fração da radiação que atinge a superfície i que é absorvida. Neste termo H_i representa a irradiação sobre a superfície i e α_i a absorvidade desta superfície.

Esta equação é válida independentemente das propriedades espectrais e direcionais da superfície i , porém no presente trabalho considerar-se-ão apenas situações nas quais as propriedades das superfícies independem da direção (superfícies difusas) e do comprimento de onda (superfícies cinza e negras).

2.1.1 TRANSFERÊNCIA RADIATIVA ENTRE SUPERFÍCIES NEGRAS

Se todas as superfícies de uma cavidade forem negras (*i.e.* $\varepsilon_i = \alpha_i = 1$), então o estudo da transferência de calor por radiação é relativamente simples, uma vez que não ocorre reflexão da radiação em nenhuma superfície. Entretanto esta classe de problemas produz relativa diversidade de problemas de interesse na engenharia, indo desde a resolução de um sistema de equações algébricas até a solução de um sistema de equações integrais de Fredholm do segundo tipo.

2.1.1.1 Transferência radiativa entre superfícies negras isotérmicas

Caso cada uma das superfícies da cavidade seja isotérmica e negra ($\varepsilon = \alpha = 1$), então estas emitirão difusamente com intensidade de corpo negro nas suas respectivas temperaturas. Assim a radiação incidente sobre uma superfície qualquer i proveniente das demais N superfícies é dada por

$$A_i H_i = \sum_{j=1}^N \sigma T_j^4 A_j F_{Aj-Ai}, \quad (2.6)$$

onde a relação de reciprocidade equação (2.2c) pode ser empregada, chegando à equação

$$H_i = \sum_{j=1}^N \sigma T_j^4 F_{Ai-Aj}. \quad (2.7)$$

A equação da taxa líquida de transferência de calor por radiação, equação (2.5) para a superfície i de uma cavidade constituída apenas por superfícies negras assume a forma

$$q_i = \sigma A_i T_i^4 - A_i \sum_{j=1}^N \sigma T_j^4 F_{Ai-Aj}, \quad (2.8)$$

que pode ainda ser escrita na forma de fluxo líquido de calor por radiação q_i'' fazendo $q_i'' = \frac{q_i}{A_i}$.

O primeiro termo do lado direito da equação (2.8) representa a emissão de corpo negro da superfície i podendo ser escrito como

$$\sigma A_i T_i^4 = \sum_{j=1}^N \sigma A_i T_i^4 F_{Ai-Aj}, \quad (2.9)$$

pois o Princípio da Conservação da Energia, equação (2.4), é sempre observado.

Substituindo a equação (2.9) na equação (2.8) tem-se

$$q_i = \sigma A_i \sum_{j=1}^N (T_i^4 - T_j^4) F_{Ai-Aj}, \quad 1 \leq i \leq N \quad (2.10)$$

A equação (2.10) representa um sistema de N equações algébricas com N incógnitas. Caso todas as temperaturas de superfície sejam conhecidas, então o sistema se torna um conjunto de equações algébricas e as equações podem ser resolvidas independentemente, uma de cada vez a fim de encontrar as taxas de transferência q_i .

Muitos problemas de cavidades são caracterizados por condições de contorno de fluxo conhecido em uma ou mais de suas superfícies (*e.g.* parede adiabática, aberturas com irradiação prescrita adentrando a cavidade). Neste caso deve-se encontrar a temperatura das superfícies com fluxo prescrito antes da solução do conjunto de N equações para a taxa, conforme equação (2.10). Supondo que a k -ésima superfície tem o fluxo especificado, então σT_i^4 pode ser isolado na equação (2.10) e trocados os índices i por k obtém-se

$$\sigma T_k^4 = \frac{\frac{q_k}{A_k} + \sigma \sum_{j=1, j \neq k}^N (T_j^4 F_{Ak-Aj})}{1 - F_{Ak-Ak}}, \quad (2.11)$$

onde observa-se que a superfície k foi considerada como sendo côncava e portanto recebe radiação dela mesma. Como T_k é incógnita, ela é retirada do somatório no segundo termo do lado direito da equação (2.11) e combinada ao primeiro termo do lado direito desta mesma equação, sendo posteriormente isolada. Caso k seja não côncava, então $F_{Ak-Ak} = 0$ e a equação (2.11) continua válida.

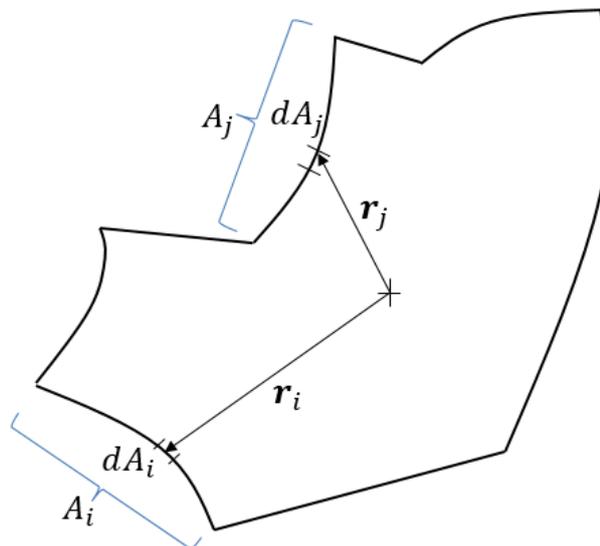
Caso mais de uma superfície tenha fluxo prescrito, a equação (2.11) formará um sistema linear com tantas equações quanto o número de superfícies com fluxo prescrito (comumente os termos do somatório para as superfícies com fluxo prescrito são isolados no lado esquerdo da equação de cada superfície). Depois de resolvido o sistema linear, a temperatura dessas superfícies é encontrada e procede-se, então, o cálculo das taxas de transferência de calor com o conjunto de equações (2.10).

Observa-se nesta seção, sobre superfícies negras e isotérmicas, que todos os tipos de problemas podem ser resolvidos com técnicas simples de álgebra linear e elementar, não requerendo programas de computador.

2.1.1.2 Transferência radiativa entre superfícies negras não isotérmicas

Quando uma superfície de uma cavidade é não isotérmica, sua temperatura pode ser descrita em função de algum referencial arbitrário, conforme mostrado na FIGURA 2.2 abaixo.

FIGURA 2.2 - REFERENCIAL ARBITRÁRIO PARA SUPERFÍCIES NÃO ISOTÉRMICAS



FONTE: Sparrow e Cess (1978)

A equação que descreve o fluxo líquido de calor transferido por radiação a partir da superfície negra i é

$$q_i''(\mathbf{r}_i) = \frac{q_i(\mathbf{r}_i)}{A_i} = \sigma T_i^4(\mathbf{r}_i) - H_i(\mathbf{r}_i), \quad (2.12)$$

para a qual a irradiação passa a ser dada pela equação (já considerando a aplicação da relação de reciprocidade, Eq. (2.2c))

$$H_i(\mathbf{r}_i) = \sum_{j=1}^N \int_{A_j} \sigma T_j^4(\mathbf{r}_j) dF_{dA_i-dA_j}. \quad (2.13)$$

Para que a variável de integração apareça explicitamente na equação é comum apresentar o fator de forma com base na função núcleo da integral K

$$K(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \frac{dF_{dA_i-dA_j}}{dA_j}, \quad (2.14)$$

assim a equação (2.13) assume a forma

$$H_i(\mathbf{r}_i) = \sum_{j=1}^N \int_{A_j} \sigma T_j^4(\mathbf{r}_j) K(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) dA_j. \quad (2.15)$$

A equação para o fluxo de calor líquido por radiação para uma cavidade composta por cavidades negras não isotérmicas, equação (2.12) assume então a forma

$$q_i''(\mathbf{r}_i) = \sigma T_i^4(\mathbf{r}_i) - \sum_{j=1}^N \int_{A_j} \sigma T_j^4(\mathbf{r}_j) K(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) dA_j, \quad (2.16)$$

válida para todas as superfícies i tal que $1 \leq i \leq N$.

Uma vez conhecido o fluxo $q_i''(\mathbf{r}_i)$, pode-se integrá-lo na superfície i para se obter a taxa de transferência de calor desta superfície

$$q_i = \int_{A_i} q_i''(\mathbf{r}_i) dA_i. \quad (2.17)$$

Quando todas as temperaturas T_i são conhecidas, então forma-se um conjunto de equações algébricas, uma vez que as integrais de cada equação podem ser resolvidas analiticamente ou numericamente.

Em equipamentos práticos da engenharia (*e.g.* caldeiras aquotubulares de grande porte, fornos de recozimento contínuo de aço, fornos de vidro e em câmaras de combustão que operam em elevadas pressões e temperaturas, como em motores de combustão interna, turbinas à gás e em motores-foguete), via de regra é raro serem especificadas as temperaturas de todas as superfícies. O mais comum é que se estabeleçam trocas de calor com o ambiente (condição de contorno de Robin).

No caso de uma superfície, por exemplo, a superfície k ter o fluxo de calor especificado, então a equação (2.16) pode ser manipulada para fornecer a temperatura de equilíbrio para o fluxo especificado. Isto fornece a equação algébrica

$$\sigma T_k^4(\mathbf{r}_k) = q_k''(\mathbf{r}_k) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \int_{A_j} \sigma T_j^4(\mathbf{r}_j) K(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j) dA_j, \quad (2.18)$$

válida se a superfície k for plana ou convexa, pois então $K(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k) = 0$. Eventualmente a função $K(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j)$ pode assumir uma forma complexa, de integração trabalhosa, de forma que a integração numérica seja preferida. Caso a superfície k seja côncava, então esta receberá radiação proveniente dela própria e como sua temperatura não é conhecida, a equação (2.16) torna-se uma equação integral de Fredholm do segundo tipo, sendo linear em T^4 , pois a quarta potência da temperatura T_k^4 aparecerá dentro e fora da integral

$$\sigma T_k^4(\mathbf{r}_k) = C(\mathbf{r}_k) + \int_{A_k} \sigma T_k^4(\mathbf{r}_k) K(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_k) dA_k, \quad (2.19)$$

onde

$$C(\mathbf{r}_k) = q_k''(\mathbf{r}_k) + \sum_{j=1, j \neq k}^N \int_{A_j} \sigma T_j^4(\mathbf{r}_j) K(\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j) dA_j. \quad (2.20)$$

Caso mais superfícies não côncavas tenham especificados seus fluxos de calor, então se forma um sistema de equações integrais de Fredholm do segundo tipo.

2.1.2 TRANSFERÊNCIA RADIATIVA ENTRE SUPERFÍCIES CINZA-DIFUSAS

O estudo de cavidades envolvendo uma ou mais superfícies cinza-difusas aumenta a complexidade do modelo matemático, uma vez que é necessário levar em conta a reflexão de parte da radiação que incide sobre uma superfície cinza. Assim como o estudo de cavidades negras, as cavidades contendo superfícies cinza-difusas produzem modelos matemáticos desde sistemas de equações algébricas até sistemas de equações integrais, porém com maior frequência os problemas produzirão modelos matemáticos de maior complexidade, por exemplo, sistemas de equações integrais.

Uma superfície cinza-difusa é uma superfície que emite difusamente (*i.e.* com intensidade igual em todas as direções) uma fração da radiação de um corpo negro equivalente (que esteja à mesma temperatura) e esta fração é constante em todos os comprimentos de onda do espectro eletromagnético.

Para o estudo de superfícies cinza-difusas define-se a radiosidade B_i da superfície i como

$$B_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4 + \rho_i H_i, \quad (2.21)$$

onde ρ_i é a refletividade hemisférica da superfície i à radiação incidente sobre ela H_i . Considerando que a superfície i seja opaca (nenhuma fração da radiação incidente é transmitida) então $\rho_i = 1 - \alpha_i$ onde α_i é a absortividade da superfície i . Como a superfície é cinza por definição, então $\alpha_i = \varepsilon_i$, ou seja, sua absortividade é igual à sua emissividade.

2.1.2.1 Transferência radiativa entre superfícies cinza-difusas isotérmicas com radiosidade uniforme

A quantidade de energia fornecida (externamente à cavidade) para uma superfície interna de uma cavidade pode ser calculada por

$$q_i = A_i(B_i - H_i) = A_i(\varepsilon_i \sigma T_i^4 - \alpha_i H_i), \quad (2.22)$$

e que também pode ser escrita em função apenas das temperaturas e das radiosidades como

$$\frac{q_i}{A_i} = q_i'' = \frac{\varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i} (\sigma T_i^4 - B_i). \quad (2.23)$$

Quando todas as superfícies internas de uma cavidade são isotérmicas e cinza, então é possível formular um sistema de N equações com N incógnitas, obtendo assim as radiosidades B_i

$$B_i = \varepsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \varepsilon_i) \sum_{j=1}^N B_j F_{Ai-Aj}, \quad (2.24)$$

onde o último termo do lado direito representa a parcela da irradiação sobre a superfície i que é refletida. Após encontrar todas as radiosidades, pode-se calcular as taxas de transferência de calor por radiação com a equação (2.23).

Caso uma das N superfícies seja negra, por exemplo a superfície k , então sua radiosidade será simplesmente sua emissão de corpo negro $B_k = \sigma T_k^4$, portanto não dependerá das demais superfícies. O sistema linear será então de $N - 1$ equações por $N - 1$ incógnitas. No limite, se apenas uma superfície for cinza, então ao invés de um sistema de equações lineares, ter-se-á um conjunto de equações algébricas.

Quando pelo menos uma superfície possui fluxo de calor prescrito ou a taxa de transferência prescrita, então a radiosidade pode ser obtida por

$$B_i = \frac{q_i}{A_i} + \sum_{j=1}^N B_j F_{Ai-Aj}, \quad (2.25)$$

Ainda é possível obter uma formulação para as temperaturas que elimina as radiosidades. Esta formulação é dada por

$$\sigma T_i^4 - \frac{1}{\varepsilon_i} \frac{q_i}{A_i} = \sum_{j=1}^N \sigma T_j^4 F_{Ai-Aj} - \sum_{j=1}^N \frac{(1 - \varepsilon_j) q_j}{\varepsilon_j} \frac{1}{A_j} F_{Ai-Aj}, \quad (2.26)$$

válida inclusive para superfícies negras.

2.1.2.2 Transferência radiativa entre superfícies cinza-difusas não isotérmicas

Para o caso de superfícies cinza não isotérmicas, a radiosidade será variável. Neste caso a taxa de transferência de calor será calculada em função do fluxo de calor local q_i'' como

$$q_i = \int_{A_i} q_i''(\mathbf{r}_i) dA_i. \quad (2.27)$$

Para o caso onde as temperaturas de todas as N superfícies são conhecidas, as radiosidades podem ser calculadas por

$$B_i(\mathbf{r}_i) = \varepsilon_i \sigma T_i^4(\mathbf{r}_i) + (1 - \varepsilon_i) \sum_{j=1}^N \int_{A_j} B_j(\mathbf{r}_j) dF_{dA_i-dA_j}, \quad (2.28)$$

formando um sistema de N equações por N incógnitas. Caso uma das superfícies seja côncava, então receberá radiação dela mesma, configurando uma equação integral de Fredholm do segundo tipo para esta superfície.

Com o cálculo das radiosidades B_i , então o fluxo de calor pode ser encontrado substituindo cada B_i na equação

$$q_i''(\mathbf{r}_i) = \frac{\varepsilon_i}{(1 - \varepsilon_i)} [\sigma T_i^4(\mathbf{r}_i) - B_i(\mathbf{r}_i)]. \quad (2.29)$$

Caso uma ou mais superfícies tenham especificados o fluxo de calor em vez da temperatura, então sua irradiação será calculada por

$$B_i(\mathbf{r}_i) = q_i''(\mathbf{r}_i) + \sum_{j=1}^N \int_{A_j} B_j(\mathbf{r}_j) dF_{dA_i-dA_j}. \quad (2.30)$$

A fórmula alternativa, eliminando a radiosidade é

$$\sigma T_i^4(\mathbf{r}_i) - \frac{q_i''(\mathbf{r}_i)}{\varepsilon_i} = \sum_{j=1}^N \int_{A_j} \sigma T_j^4(\mathbf{r}_j) dF_{dA_i-dA_j} - \sum_{j=1}^N \int_{A_j} \frac{(1 - \varepsilon_j)}{\varepsilon_j} q_j''(\mathbf{r}_j) dF_{dA_i-dA_j}. \quad (2.31)$$

2.2 TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR RADIAÇÃO EM MEIOS PARTICIPANTES

Segundo Howell, Siegel e Mengüç (2011, p.8) o objetivo dos cálculos de transferência de calor por radiação é determinar a quantidade de energia trocada entre superfícies após atravessar um meio que as separa, composto de gases, partículas em suspensão ou outro material. Se uma superfície emite certa quantidade de radiação que eventualmente atinge a outra superfície e a intensidade da radiação que lá chegou sofreu alteração, então o meio que as separa é denominado meio participante.

Ainda segundo Howell, Siegel e Mengüç (2011, p.441-444), a emissão e absorção de radiação térmica podem ocorrer em sólidos, líquidos e em gases, porém nos gases as variações espectrais são bastante irregulares, principalmente em temperaturas relativamente baixas, tornando o problema da sua modelagem difícil. Dentre os gases comumente encontrados em aplicações de engenharia (em geral combustão) estão o dióxido de carbono (CO_2), o monóxido de carbono (CO), vapor de água (H_2O) e metano (CH_4).

A fim de quantificar a energia radiante emitida a partir de superfícies, se define ângulo sólido como sendo a razão entre a área de calota esférica em relação ao quadrado do seu raio (BERGMAN et al., 2011, p. 773). O ângulo sólido, mostrado FIGURA 2.3B é um análogo tridimensional para o ângulo plano, mostrado FIGURA 2.3A.

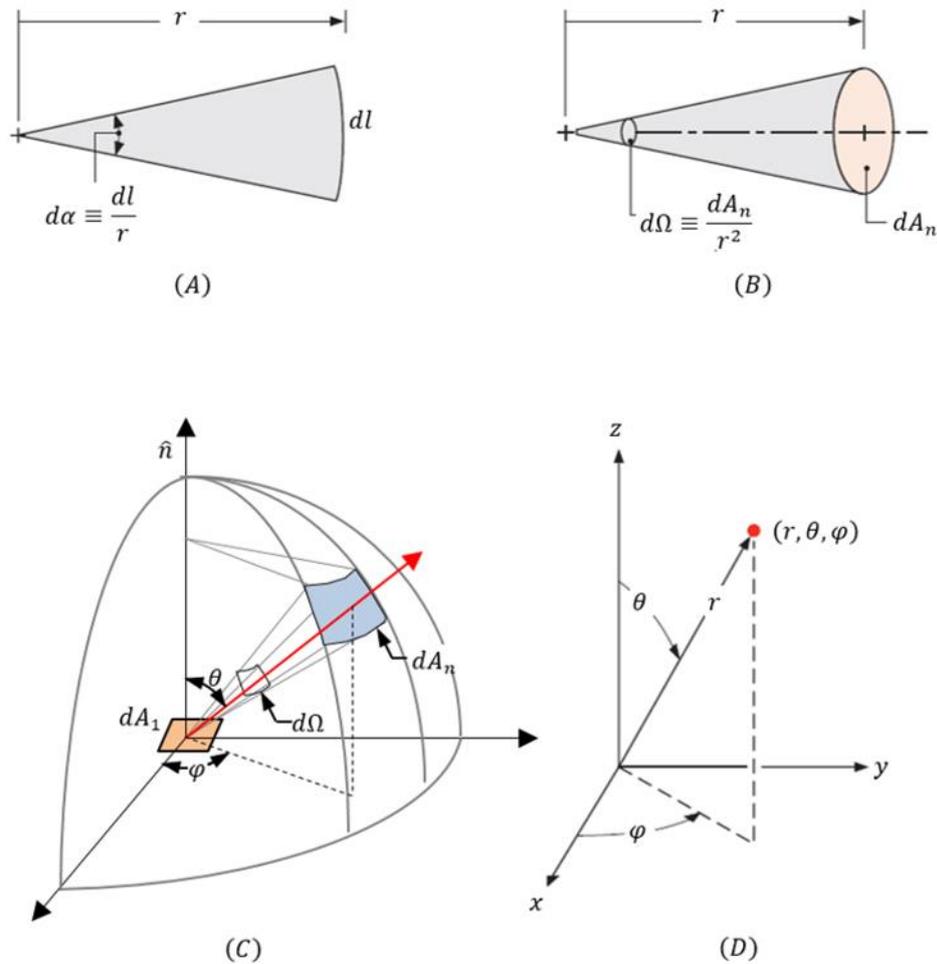
O ângulo sólido infinitesimal $d\Omega$ é dado por

$$d\Omega = \frac{dA_n}{r^2}, \quad (2.32)$$

onde dA_n é a área infinitesimal de uma calota esférica de raio r . Com base nesta definição tem-se o esferorradiano ou esterradiano, unidade de medida de ângulo sólido do Sistema

Internacional de Unidades. O esferorradiano (símbolo sr) é o ângulo sólido subtendido por uma calota esférica de área equivalente ao quadrado do seu raio de curvatura $dA_n = r^2$. Uma esfera, por exemplo, subtende $4\pi sr$.

FIGURA 2.3 - RELAÇÃO ENTRE ÂNGULO SÓLIDO E ÂNGULO PLANO



FONTE: Adaptado de Bergman et al. (2011, p.773)

A área de calota esférica é tipicamente representada no sistema de coordenadas esféricas, onde θ é denominado ângulo polar e φ é o ângulo azimutal. De acordo com a FIGURA 2.3C, se pode deduzir que $dA_n = r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi$, portanto

$$d\Omega = \sin(\theta) d\theta d\varphi. \quad (2.33)$$

Uma vez definido o ângulo sólido define-se uma propriedade escalar da radiação denominada intensidade espectral direcional. É definida como a taxa de transferência de calor

q é emitida a um comprimento de onda λ na direção $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{s}}(\theta, \varphi)$, por unidade de área de superfície emissora normal a essa direção $dA \cos \theta$, por unidade de ângulo sólido $d\Omega$ em torno dessa direção e por unidade do intervalo do comprimento de onda $d\lambda$ no entorno de λ (BERGMAN et al., 2011, p. 774). Em termos matemáticos

$$I_\lambda(\lambda, \mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = \lim_{dA, d\lambda, d\Omega \rightarrow 0} \frac{d^3 q_\lambda(S, \hat{\mathbf{s}})}{dA \cos \theta d\Omega d\lambda}. \quad (2.34)$$

Na equação (2.34) d^3 denota que a taxa de transferência de calor é em relação à área, ao ângulo sólido e ao comprimento de onda. Entretanto, neste trabalho, como efeitos espectrais não estarão sendo analisados, então a intensidade estará sempre em base total, ou seja, considerando todos os comprimentos de onda

$$I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = \lim_{dA, d\Omega \rightarrow 0} \frac{d^2 q(S, \hat{\mathbf{s}})}{dA \cos \theta d\Omega}. \quad (2.35)$$

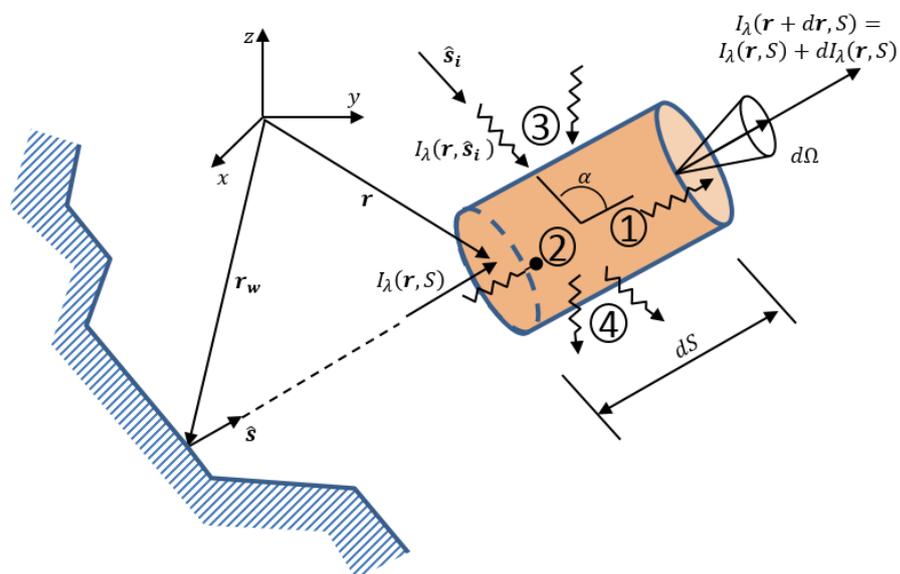
Escreve-se o princípio da conservação da energia considerando um feixe de radiação viajando pelo percurso $S = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_w\|$ na direção $\hat{\mathbf{s}}$. Um elemento de volume infinitesimal de comprimento dS pode absorver a radiação viajando na direção $\hat{\mathbf{s}}$ (denotado por 2 na FIGURA 2.4), ou espalhá-la para fora da direção $\hat{\mathbf{s}}$ (denotado por 4), sendo em ambos os casos a intensidade direcional da radiação atenuada durante o percurso.

O elemento de volume também emite radiação em função da sua temperatura não nula, sendo que parte desta emissão ocorre na direção $\hat{\mathbf{s}}$ (denotado por 1 na FIGURA 2.4), aumentando a intensidade da radiação quando esta sai do elemento de volume na posição $S + dS$. O elemento de volume pode ainda espalhar a radiação viajando em outra direção qualquer $\hat{\mathbf{s}}'$, para dentro da direção $\hat{\mathbf{s}}$, aumentando também a intensidade da radiação ao sair do elemento de volume em $S + dS$ (denotado por 3, onde o ângulo α é o ângulo formado entre as direções de incidência $\hat{\mathbf{s}}'$ e a direção do feixe $\hat{\mathbf{s}}$). O princípio da conservação da energia pode ser escrito na forma de equação como

$$(\hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla) I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = -\beta(\mathbf{r}) I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) + \kappa(\mathbf{r}) I_b(\mathbf{r}) + \frac{\sigma_s(\mathbf{r})}{4\pi} \int_{4\pi} I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}') \Phi(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}', \hat{\mathbf{s}}) d\Omega'. \quad (2.36)$$

A equação (2.36) é denominada Equação da Transferência Radiativa (RTE, da terminologia em língua inglesa *Radiative Transfer Equation*), onde a intensidade foi escrita em base total, ou seja, sem o subíndice λ . Entretanto, a equação (2.36) também é válida em base espectral para um meio não cinza e neste caso acrescenta-se o subíndice λ na intensidade. O lado esquerdo desta equação representa a derivada direcional da intensidade direcional, enquanto os termos do lado direito quantificam a influência dos diferentes fenômenos físicos que a fazem variar.

FIGURA 2.4 - PRINCÍPIO DE CONSERVAÇÃO DA ENERGIA EM MEIO PARTICIPANTE



FONTE: Adaptação de Howell, Siegel e Mengüç (2011)

O coeficiente de extinção β é dado por $\beta = \kappa + \sigma_s$, onde κ é o coeficiente de absorção e σ_s o coeficiente de espalhamento. Todos os três coeficientes são dados na unidade m^{-1} no Sistema Internacional de Unidades. Portanto o primeiro termo do lado direito corresponde ao decréscimo da intensidade I devido à absorção do meio ou espalhamento para fora do trajeto original da radiação \hat{s} .

O segundo termo do lado direito da equação (2.36) corresponde à emissão do elemento de volume, onde I_b é a intensidade de corpo negro, dada por $I_b = n^2 \sigma T^4 / \pi$, onde n é o índice de refração do meio participante (considerado unitário no presente trabalho). O último termo do lado direito corresponde ao espalhamento para a direção \hat{s} de parte da radiação proveniente das demais direções \hat{s}' . A função de fase Φ relaciona a probabilidade da radiação proveniente da direção de incidência \hat{s}' ser espalhada para a direção \hat{s} . Percebe-se que a integral neste termo

é na verdade uma integral dupla, pois em geral se utiliza o sistema de coordenadas esféricas na sua descrição, conforme mostrado na FIGURA 2.3C e pela equação (2.33).

A RTE está sujeita à condição de contorno

$$I(\mathbf{r}_w, \hat{\mathbf{s}}) = \varepsilon(\mathbf{r}_w)I_b(\mathbf{r}_w) + \frac{\rho(\mathbf{r}_w)}{\pi} \int_{\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}' < 0} I(\mathbf{r}_w, \hat{\mathbf{s}}') |\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}'| d\Omega', \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}} > 0 \quad (2.37)$$

onde ε é a emissividade hemisférica total da superfície opaca na posição \mathbf{r}_w situada na parede e ρ é a refletividade hemisférica total desta superfície. A equação (2.37) foi escrita considerando as paredes difusas, ou seja, as propriedades ε e ρ são independentes da direção. Também vale lembrar que para uma superfície difusa opaca $\rho = 1 - \varepsilon$. O vetor $\hat{\mathbf{n}}$ representa o vetor ortonormal ao elemento de área na posição \mathbf{r}_w orientado para dentro da cavidade ($\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}} > 0$). Nota-se que apenas a radiação que incide sobre a superfície na posição \mathbf{r}_w é contabilizada na parcela de radiação que pode ser refletida.

Quando o meio é unidimensional e apenas emissor e absorvedor, a RTE se resume a uma equação diferencial ordinária não homogênea

$$(\hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla)I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = \frac{dI(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})}{dS} = -\kappa(\mathbf{r})I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) + \kappa(\mathbf{r})I_b(\mathbf{r}). \quad (2.38)$$

Uma vez resolvida a RTE e encontrada a intensidade direcional, pode-se então calcular as duas principais variáveis secundárias de interesse na engenharia, que são a radiação incidente $G(\mathbf{r})$ e o fluxo de calor $\mathbf{q}''(\mathbf{r})$

$$G(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) d\Omega, \quad (2.39)$$

$$\mathbf{q}''(\mathbf{r}) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \cdot \hat{\mathbf{s}} d\Omega. \quad (2.40)$$

Também é comum escrever a RTE em uma forma alternativa, que utiliza o albedo de espalhamento ω e a espessura óptica τ . A definição de albedo de espalhamento é

$$\omega = \frac{\sigma_s}{\kappa + \sigma_s} = \frac{\sigma_s}{\beta}. \quad (2.41)$$

Define-se espessura óptica na direção s como

$$\tau_S(s) = \int_{s^*=0}^s (\kappa + \sigma_s) ds^* = \int_{s^*=0}^s \beta ds^*, \quad (2.42)$$

que resulta $\tau_S(s) = \beta S$ quando β é constante. Substituindo a Eq. (2.41) e a forma diferencial da Eq. (2.42) na Eq. (2.36) tem-se a RTE escrita em função da espessura óptica

$$\frac{dI(\tau_S, \hat{\mathbf{s}}_i)}{d\tau_S} = -I(\tau_S) + (1 - \omega)I_b(\tau_S) + \frac{\omega}{4\pi} \int_{4\pi} I(\tau_S, \hat{\mathbf{s}}') \Phi(\hat{\mathbf{s}}', \hat{\mathbf{s}}) d\Omega'. \quad (2.43)$$

A aplicação da Eq. (2.43) para o caso de um meio físico unidimensional e sem espalhamento merece atenção especial, não apenas pela sua aplicabilidade, mas também pela simplicidade, pois possui solução analítica para alguns problemas e permite o estudo sistemático dos erros de discretização. Para ilustrar este caso considera-se um meio homogêneo que absorve e emite radiação. O meio está confinado entre placas paralelas negras e infinitas mantidas a temperaturas diferentes, ambas isotérmicas e espaçadas entre si de uma distância S . Analisa-se o caminho real de propagação da radiação $\hat{\mathbf{s}}$, mas decomposto em relação a um eixo coordenado x , perpendicular às placas, sendo que θ é o ângulo formado entre essas duas direções, conforme mostrado na FIGURA 2.5.

Em vez da definição dada na Eq. (2.42), neste tipo de problema a espessura óptica costuma ser escrita com base na direção x . Para isso costuma-se usar a espessura ótica de acordo com a relação mais à esquerda na Eq. (2.44) a seguir

$$\tau(x) = \int_{x^*=0}^x \beta(x^*) dx^* = \cos \theta \int_{S^*=0}^S \beta(S^*) dS^* = \cos \theta \tau_S(S), \quad (2.44)$$

pois $dS = dx/\cos \theta = -dx/\cos(\pi - \theta)$. Com esta relação deduz-se que $d\tau(S) = d\tau(x)/\cos \theta$, portanto, considerando que a intensidade emitida em cada placa independe da direção e depende da sua temperatura, então a equação (2.43) pode ser reescrita para as direções positiva e negativa do eixo x como

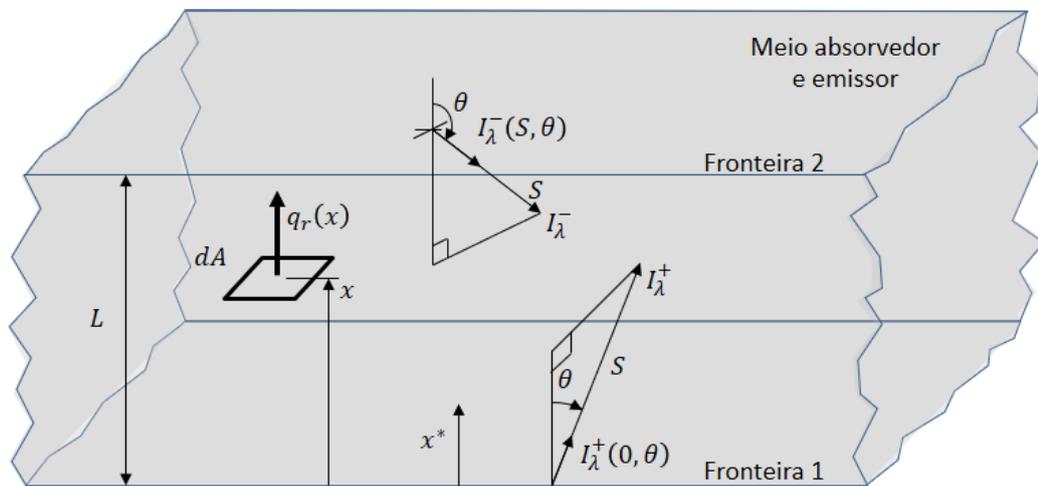
$$\mu \frac{\partial I^+}{\partial \tau} + I^+(\tau, \mu) = \hat{I}(\tau, \mu), \quad 0 < \mu \leq 1, \quad (2.45a)$$

$$\mu \frac{\partial I^-}{\partial \tau} + I^-(\tau, \mu) = \hat{I}(\tau, \mu), \quad -1 \leq \mu < 0, \quad (2.45b)$$

onde τ significa $\tau(x)$ (não confundir com τ_s), $\mu \equiv \cos \theta$, ou seja, o ângulo formado entre a direção S e o eixo x^* e I^+ indica a intensidade direcional viajando no sentido positivo do eixo x e I^- a intensidade direcional viajando no sentido negativo. O termo fonte radiativo \hat{I} é dado por

$$\begin{aligned} \hat{I}(\tau, \mu) = & (1 - \omega)I_b(T(\tau)) \\ & + \frac{\omega}{2} \left[\int_0^1 \Phi(\mu', \mu) I^+(\tau, \mu') d\mu' + \int_{-1}^0 \Phi(\mu', \mu) I^-(\tau, \mu') d\mu' \right]. \end{aligned} \quad (2.46)$$

FIGURA 2.5 - CAMADA ABSORVEDORA-EMISSORA ENTRE FRONTEIRAS PARALELAS, NEGRAS E INFINITAS



FONTE: Adaptação de Howell, Siegel e Mengüç (2011)

Em uma primeira análise considerar-se-á a solução da RTE para um meio que não apresenta espalhamento. Uma vez conhecidas as intensidades direcionais deixando ambas as fronteiras do domínio, tem-se as condições de contorno

$$I^+(\tau, \mu)|_{\tau=0} = I^+(0, \mu), \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (2.47a)$$

$$I^-(\tau, \mu)|_{\tau=\tau_L} = I^-(\tau_L, \mu), \quad -1 \leq \mu \leq 0. \quad (2.47b)$$

No caso sem espalhamento $\hat{I}(\tau, \mu) = I_b$. A solução das Eqs. (2.45) é dada por

$$I^+(\tau, \mu) = I^+(0, \mu)e^{\frac{-\tau}{\mu}} + \int_0^\tau \hat{I}'(\tau', \mu)e^{\frac{-(\tau-\tau')}{\mu}} \frac{1}{\mu} d\tau', \quad 0 < \mu < 1, \quad (2.48a)$$

$$I^-(\tau, \mu) = I^-(\tau_L, \mu)e^{\frac{-(\tau-\tau_L)}{\mu}} + \int_{\tau_L}^\tau \hat{I}'(\tau', \mu)e^{\frac{-(\tau-\tau')}{\mu}} \frac{1}{\mu} d\tau', \quad -1 < \mu < 0. \quad (2.48b)$$

Usando a já citada transformação $\mu = \cos \theta$ nas Eqs. (2.39) e (2.40) e decompondo I nas intensidades viajando em cada sentido do eixo x , então a irradiação G e o fluxo de calor q'' escritos em função de τ resultam em (MODEST, 2003, p. 427)

$$G(\tau) = 2\pi \left\{ \int_0^1 I^+(0, \mu)e^{\frac{-\tau}{\mu}} d\mu + \int_0^1 I^-(\tau_L, -\mu)e^{\frac{(\tau_L-\tau)}{-\mu}} d\mu + \int_0^1 \left[\int_0^\tau \hat{I}'(\tau', \mu)e^{\frac{-(\tau-\tau')}{\mu}} d\tau' + \int_\tau^{\tau_L} \hat{I}'(\tau', -\mu)e^{\frac{(\tau'-\tau)}{-\mu}} d\tau' \right] \frac{d\mu}{\mu} \right\}, \quad (2.49)$$

$$q''(\tau) = 2\pi \left\{ \int_0^1 I^+(0, \mu)e^{\frac{-\tau}{\mu}} \mu d\mu - \int_0^1 I^-(\tau_L, -\mu)e^{\frac{(\tau_L-\tau)}{-\mu}} \mu d\mu + \int_0^1 \left[\int_0^\tau \hat{I}'(\tau', \mu)e^{\frac{-(\tau-\tau')}{\mu}} d\tau' - \int_\tau^{\tau_L} \hat{I}'(\tau', -\mu)e^{\frac{(\tau'-\tau)}{-\mu}} d\tau' \right] d\mu \right\}. \quad (2.50)$$

É possível ver que no caso das funções I^+ , I^- e \hat{I}' serem independentes de μ (e.g. paredes difusas e meio cinza sem espalhamento), então as integrais podem ser relacionadas à função integral exponencial E_n de ordem n (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1972, p.228; MODEST, 2003, p. 429). Fazendo isso, as equações (2.49) e (2.50) resultam, respectivamente em

$$G(\tau) = 2\pi \left[I^+(0)E_2(\tau) + I^-(\tau_L)E_2(\tau_L - \tau) + \int_0^\tau \hat{I}'(\tau')E_1(\tau - \tau')d\tau' \right. \\ \left. + \int_\tau^{\tau_L} \hat{I}'(\tau')E_1(\tau' - \tau)d\tau' \right], \quad (2.51)$$

$$q''(\tau) = 2\pi \left[I^+(0)E_3(\tau) - I^-(\tau_L)E_3(\tau_L - \tau) + \int_0^\tau \hat{I}'(\tau')E_2(\tau - \tau')d\tau' \right. \\ \left. - \int_\tau^{\tau_L} \hat{I}'(\tau')E_2(\tau' - \tau)d\tau' \right]. \quad (2.52)$$

Nas equações supracitadas $E_1(\tau)$, $E_2(\tau)$ e $E_3(\tau)$ são funções integrais exponenciais de primeira, segunda e terceira ordem. A função integral exponencial de n -ésima ordem é definida por

$$E_n(x) \equiv \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n} dt, \quad (n = 0, 1, 2, \dots; x > 0) \quad (2.53)$$

que por meio da mudança de variável $\mu = 1/t$ assume a forma

$$E_n(x) = \int_0^1 \mu^{(n-2)} e^{-\frac{x}{\mu}} d\mu. \quad (2.54)$$

No desenvolvimento das soluções analíticas também são necessárias as seguintes relações

$$\frac{d}{dx} E_n(x) = -E_{n-1}(x), \quad (2.55a)$$

$$E_n(x) = \int_x^\infty E_{n-1}(x) dx, \quad (2.55b)$$

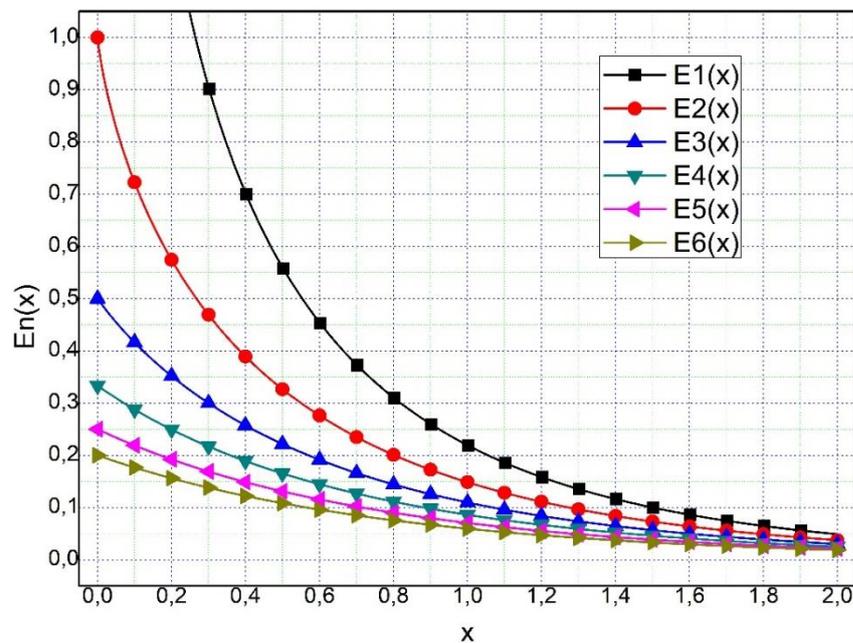
$$E_n(0) = \frac{1}{n-1}, \quad n > 1, \quad (2.55c)$$

$$\int_a^b E_{n-1}(x) dx = \int_a^\infty E_{n-1}(x) dx - \int_b^\infty E_{n-1}(x) dx, \quad a < b. \quad (2.55d)$$

As funções integrais exponenciais são utilizadas na obtenção da solução analítica de alguns problemas analisados nesta tese, portanto foi programado o código “Integral_Exponencial”, dedicado a calcular as integrais exponenciais com 32 algarismos significativos. O código está descrito no APÊNDICE A.

A FIGURA 2.6 a seguir mostra as seis primeiras funções integrais exponenciais para o intervalo $0 \leq x \leq 2$. Valores tabelados para as seis primeiras ordens são apresentados no APÊNDICE A para o intervalo $0 \leq x \leq 10$.

FIGURA 2.6 - SEIS PRIMEIRAS FUNÇÕES INTEGRAIS EXPONENCIAIS



FONTE: O Autor (2020).

Vê-se nas equações da radiação incidente e do fluxo de calor, Eqs. (2.51-2.52) que dependendo da forma da função \hat{I}' a integração do produto de \hat{I}' com a função integral exponencial pode não ser possível (*e.g.* um dos limites da integral pode não existir), inviabilizando a obtenção de soluções analíticas. Para os casos onde o meio participante é dito “fino”, em que a espessura óptica é pequena (*i.e.* $\tau \rightarrow 0$) ou então quando a temperatura do meio é relativamente pequena, (meio frio) isso faz com que a intensidade de corpo negro do meio seja pequena se comparada às intensidades provenientes das fronteiras. Nestes casos, as

seguintes aproximações podem ser empregadas, facilitando a obtenção de soluções analíticas aproximadas.

$$E_2(\tau) \approx 1, \quad (2.56a)$$

$$E_3(\tau) \approx \frac{1}{2} - \tau, \quad (2.56b)$$

$$\hat{I}(\tau) \approx 0. \quad (2.56c)$$

Para cumprir os objetivos desta tese é importante se ter soluções analíticas acuradas, portanto nenhum problema usará a aproximação do meio fino, assim como não é abordada no presente texto a aproximação de meios espessos. Para mais detalhes sugere-se ver Modest (2003, p. 450-456).

Quando o problema que está sendo estudado envolve a condição denominada equilíbrio radiativo (*e.g.* $dq''/d\tau = 0$), então toda a radiação incidente sobre um elemento de volume infinitesimal se equipara à sua emissão de corpo negro, ou seja, $G = 4\pi I_b$. Isto faz com que a Eq. (2.51) passe a ser uma equação integral de Fredholm do segundo tipo, linear em T^4

$$T^4(\tau) = \frac{1}{2} \left[T_1^4 E_2(\tau) + T_2^4 E_2(\tau_L - \tau) + \int_0^{\tau_L} T^4(\tau') E_1(\tau' - \tau) d\tau' \right], \quad (2.57)$$

cuja solução analítica aproximada é apresentada em Heaslet e Warming (1965)

$$\frac{T^4(\tau) - T_{\tau_L}^4}{T_0^4 - T_{\tau_L}^4} \approx \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}(\tau - \tau_L)}{1 + \frac{3}{4}\tau_L}, \quad \tau \approx \frac{\tau_L}{2}, \quad (2.58)$$

relativamente acurada na região do gráfico distante das fronteiras. Nesta equação T_0 e T_{τ_L} são as temperaturas das paredes nas fronteiras do meio participante. A Eq. (2.57) vale para um meio participante emissor, absorvedor e paredes negras.

2.2.1 Métodos Numéricos Empregados na Solução de Problemas de Radiação em Meios Participantes

Os principais métodos numéricos empregados na solução de problemas de radiação térmica em meios participantes são o Método das Zonas (HOWELL; SIEGEL; MENGÜÇ, 2011, p.672-680), o Método de Monte Carlo (HOWELL; SIEGEL; MENGÜÇ, 2011, p.680-691; HOWELL 1998), o Método dos Harmônicos Esféricos (MODEST, 2003, p. 465-492; HOWELL; SIEGEL; MENGÜÇ, 2011, p.623-640), o Método das Ordenadas Discretas (CHANDRASEKHAR, 1950; MODEST, 2003, p. 498-523; HOWELL; SIEGEL; MENGÜÇ, 2011, p.640-655), o Método da Transferência Discreta (LOCKWOOD; SHAH, 1981; COELHO; CARVALHO, 1997) e o Método dos Volumes Finitos (CHUI; RATHBY; HUGHES, 1992). Dentre os métodos citados, serão descritos apenas aqueles que o autor já empregou na solução de problemas de radiação em meios participantes. Inicialmente são descritos brevemente o Método da Transferência Discreta e o Método dos Harmônicos Esféricos. Em seguida é descrito mais detalhadamente o Método das Ordenadas Discretas, sendo este o método escolhido para a análise dos erros de truncamento nesta tese.

2.2.1.1 Método da Transferência Discreta

Proposto e descrito por Lockwood e Shah (1981), o Método da Transferência Discreta (DTM da terminologia em língua inglesa *Discrete Transfer Method*) é um método integral, ou seja, a equação da transferência radiativa é usada na forma integrada ao longo de uma distância ΔS para calcular a intensidade que sai de um de um elemento de volume discreto com base na intensidade que entra e no quanto o elemento de volume absorve, emite e espalha.

Trata-se de um método numérico eficiente que permite a aplicação em geometrias complexas e em qualquer tipo de malha, sendo indicado para abordar problemas de combustão, por exemplo, câmaras de combustão de motores de combustão interna (HENSON, 1998), combustores de turbinas a gás (CARVALHO; COELHO, 1989), fornos de vidro (CARVALHO; DURÃO; PEREIRA, 1987; CARVALHO; OLIVEIRA; SEMIÃO, 1988).

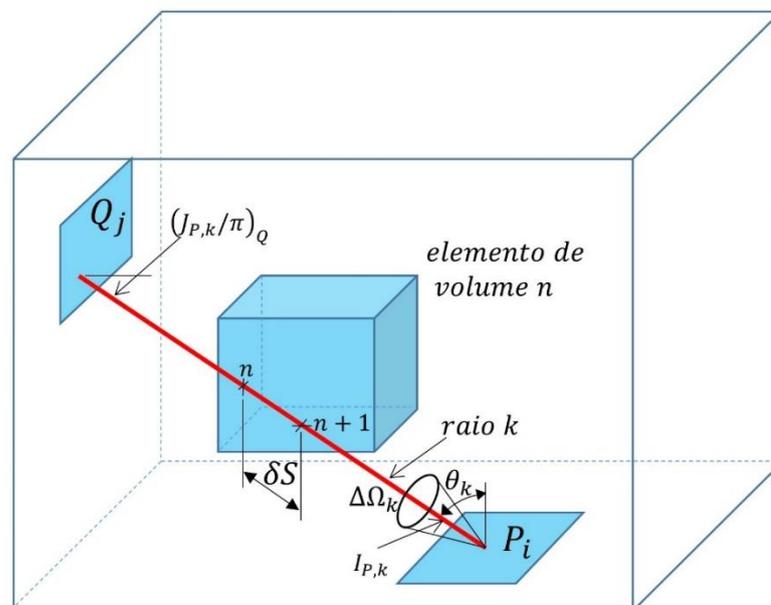
Entretanto, até o final da década de 80 o DTM apresentava desvantagens, principalmente por ser não satisfazer o Princípio da Conservação da Energia e pouco eficiente na modelagem do espalhamento, particularmente o espalhamento anisotrópico. Dentre as diversas melhorias sugeridas ao longo dos anos, sobressaem a proposta de uma formulação

conservativa do método (COELHO; CARVALHO, 1997), a proposta de quadraturas para aumentar a acurácia no cálculo da radiação incidente e uma representação mais acurada do campo de temperatura (CUMBER, 1995) e mais recentemente, Heugang, Kamdem e Pelap (2016) propuseram uma solução para contornar a dificuldade do DTM em modelar o espalhamento anisotrópico. Portanto, atualmente este método é capaz de modelar todas as classes de problemas de radiação térmica.

O DTM foi empregado pelo autor em seu mestrado, de forma que a descrição a seguir é basicamente aquela apresentada em Foltran (2015). Também se recomenda a leitura de Henson (1998), onde informações detalhadas são dadas, não apenas do procedimento de traçagem de raios, mas também de como acoplar métodos de cálculo das propriedades radiativas dos gases participantes e como acoplar o algoritmo de radiação com a simulação dos demais fenômenos físicos.

A fronteira do domínio é discretizada em elementos de área ou elementos de face, n_f , de tal forma que pelo menos uma das faces do elemento de volume adjacente à fronteira coincida com um elemento de área, sendo crucial armazenar a informação de qual elemento de volume está associado com qual(is) elemento(s) de área na fronteira. As propriedades físicas são consideradas uniformes dentro de cada elemento de volume e em cada elemento de área. Para todos os elementos de área i da fronteira do domínio é feita a determinação dos pontos centrais P_i , conforme a FIGURA 2.7.

FIGURA 2.7 – REPRESENTAÇÃO DE UM RAIOS PERCORRENDO O DOMÍNIO.



FONTE: Adaptado de Howell, Siegel e Mengüç (2011, p.655).

Um hemisfério hipotético centralizado sobre o elemento de área P_i e orientado para dentro do domínio é discretizado em um número de ângulos sólidos. Os elementos discretos de ângulo nas direções θ e φ são dados por

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{2 n_\theta}, \quad (2.59a)$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{n_\varphi}, \quad (2.59b)$$

onde n_θ e n_φ são o número de elementos de ângulo discretizados nas direções polar e azimutal, respectivamente e informados pelo usuário do programa.

No centro de cada elemento de ângulo sólido (*i.e.* $\Delta\theta/2$ e $\Delta\varphi/2$) um raio é “disparado” no interior do domínio. Este raio é seguido até que atinja uma fronteira do domínio no ponto Q_j no elemento de face j . É necessário armazenar a informação de quais elementos de volume são atravessados pelo raio assim como a distância percorrida pelo raio dentro de cada elemento de volume (mapeando os pontos de entrada e saída do raio).

De forma geral Q_j não coincide com o ponto central do elemento de área de fronteira j , porém é assumido que a intensidade em Q_j é igual à intensidade no centro do elemento de face j que pertence à fronteira. Até então nenhum cálculo relativo à radiação térmica é feito, apenas uma traçagem do raio para determinar o caminho percorrido (Procedimento de Traçagem dos Raios ou *Ray Tracing Procedure*, conforme terminologia técnica em língua inglesa).

A condição de contorno para temperatura conhecida no elemento de face j é dada por

$$B_j = \varepsilon_j(T_j)\sigma T_j^4 + [1 - \varepsilon_j(T_j)]H_j, \quad (2.60)$$

onde H_j é a irradiação total ou fluxo de radiação incidente na superfície j e B_j a radiosidade total ou fluxo de radiação combinada (emissão e reflexão difusa a partir da superfície j). A partir de Q_j o raio é seguido em sentido contrário até a origem e a equação da transferência radiativa (caso sem espalhamento) é integrada analiticamente ao longo do trajeto produzindo a relação

$$I_{n+1} = I_n e^{-\kappa \delta s} + I_{b,n+1/2} (1 - e^{-\kappa \delta s}), \quad (2.61)$$

onde δs indica a distância percorrida no interior do volume n e os índices $n + 1$ e n indicam, respectivamente a intensidade na saída e entrada do volume n atravessado pelo raio. A diferença entre a intensidade que deixa um elemento de volume e a que entra é usada para calcular a contribuição deste raio para o termo fonte radiativo do elemento de volume n

$$S_n = \sum_j \sum_i (I_{n+1,j \rightarrow i} - I_{n,j \rightarrow i}) A_i \cos(\theta_k) \text{sen}(\theta_k) \text{sen}(\Delta\theta_k) \Delta\varphi_k, \quad (2.62)$$

onde os dois somatórios compreendem todos os raios emitidos a partir de elementos de área em todas as fronteiras e atingem outro elemento de área, eventualmente atravessando o volume n .

Se o número de raios que atravessam cada um dos elementos de volume no interior do domínio for suficientemente grande, então o termo fonte radiativo calculado será aproximadamente igual ao divergente do fluxo de calor radiativo para o volume n

$$S_{rad,n} = -(\vec{\nabla} \cdot \vec{q}^n)_n \cong -\frac{S_n}{\Delta V_n}, \quad (2.63)$$

onde ΔV_n é o volume do elemento de volume n e $S_{rad,n}$ indica o termo fonte radiativo do elemento de volume n a ser utilizado em algoritmos que acoplam a radiação térmica com os demais mecanismos de transporte de energia térmica.

Por fim a irradiação H_i é calculada somando a contribuição de todos os raios conforme a discretização do hemisfério sobre o elemento de área de fronteira i

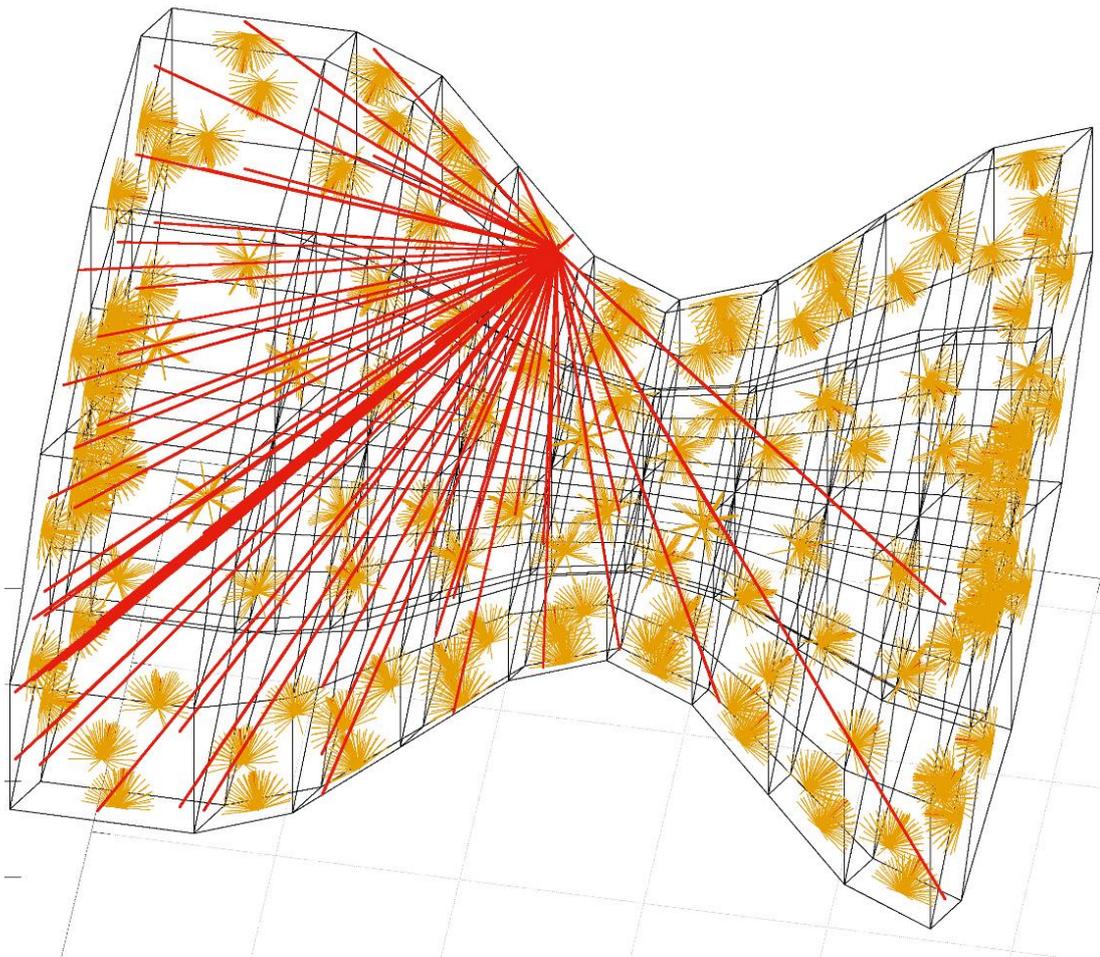
$$H_i = \sum_{k=1}^{n_r} I_{j \rightarrow i} \cos(\theta_k) \text{sen}(\theta_k) \text{sen}(\Delta\theta_k) \Delta\varphi_k, \quad (2.64)$$

onde $n_r = n\theta n\varphi$ é o número de raios discretizados e os índices i e j estão associados aos elementos de área onde ocorre a incidência e emissão da radiação térmica, respectivamente.

Depois de calculada a irradiação para a superfície i o processo passa para o próximo elemento de área na fronteira até que toda a fronteira do domínio tenha sido visitada pelo método.

Como se pode observar na Eq. (2.60), a radiosidade deixando um elemento de área da fronteira depende, além da sua emissão, da irradiação vinda de todos os outros elementos de fronteira que possam ser visualizados a partir dele. Como esta irradiação é influenciada pelo meio participante, o processo se torna iterativo a menos que $\varepsilon_j = 1$ para todos os elementos de área da fronteira. Neste caso todas as superfícies se comportam como corpos negros e a radiosidade é a própria emissão de corpo negro.

FIGURA 2.8 – TRAÇAGEM DE RAIOS NO INTERIOR DA CÂMARA DE EMPUXO DE UM MOTOR-FOGUETE HIPOTÉTICO



FONTE: Foltran e Araki (2018).

2.2.1.2 Método dos Harmônicos Esféricos

Também denominado Aproximação P_N , o Método dos Harmônicos Esféricos (SHM da terminologia em língua inglesa *Spherical Harmonics Method*) é caracterizado pela expansão da intensidade direcional em uma Série de Fourier bidimensional

$$I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l I_l^m(\mathbf{r}) Y_l^m(\hat{\mathbf{s}}), \quad (2.65)$$

onde I_l^m , são coeficientes a serem determinados (função das coordenadas espaciais apenas) e Y_l^m são harmônicos esféricos (função da direção apenas), apresentados em (MODEST. 2003, p. 466) como³

$$Y_l^m(\hat{\mathbf{s}}) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \left[\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right]^{1/2} e^{im\varphi} P_l^{|m|}(\cos \theta). \quad (2.66)$$

Na Eq. (2.66) $P_l^{|m|}(\cos \theta)$ são os Polinômios Associados de Legendre do primeiro tipo, grau l e ordem m dados por

$$P_l^{|m|}(\mu) = \frac{(1-\mu^2)^{\frac{|m|}{2}}}{2^l l!} \frac{d^{l+|m|}}{d\mu^{l+|m|}} (\mu^2 - 1)^l, \quad (2.67)$$

onde $\mu = \cos \theta$. As cinco primeiras ordens dos polinômios associados são mostradas na TABELA 2.1 da próxima página. Quando substituídos na Eq. (2.66), estes produzem os harmônicos esféricos mostrados na TABELA 2.2, também apresentada na próxima página, porém limitada a mostrar os harmônicos até $m = 3$ para não exceder o limite das bordas.

A Eq. (2.65) satisfaz os momentos, porém é necessário truncar a série a fim de obter soluções analíticas ou numéricas para os problemas de interesse prático. Normalmente a série é truncada logo nos primeiros termos, pois a complexidade matemática do método aumenta sobremaneira à medida que mais termos são considerados.

³ Em Howell, Siegel e Mengüç (2011, p.625) é apresentada uma definição equivalente de $Y_l^m(\hat{\mathbf{s}})$, que está em acordo com outra versão da Eq. (2.67).

TABELA 2.1 – PRIMEIROS CINCO POLINÔMIOS ASSOCIADOS DE LEGENDRE

$m \setminus l$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	μ	$\sin \theta$	0	0	0	0
2	$\frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)$	$3 \cos \theta \sin \theta$	$3\sin^2 \theta$	0	0	0
3	$\frac{1}{2}(5\mu^2 - 3)\mu$	$\frac{3}{2}(5\cos^2 \theta - 1) \sin \theta$	$15 \cos \theta \sin^2 \theta$	$15\sin^3 \theta$	0	0
4	$\frac{1}{8}(35\mu^4 - 30\mu^2 + 3)$	$\frac{5}{2}(7 \cos \theta - 3) \cos \theta \sin \theta$	$\frac{15}{2}(7\cos^2 \theta - 1)\sin^2 \theta$	$105 \cos \theta \sin^3 \theta$	$105\sin^4 \theta$	0
5	$\frac{1}{8}(63\mu^4 - 70\mu^2 + 15)\mu$	$\frac{15}{8}(21\cos^4 \theta - 14\cos^2 \theta + 1) \sin \theta$	$\frac{105}{2}(3\cos^2 \theta - 1) \cos \theta \sin^2 \theta$	$\frac{105}{2}(9\cos^2 \theta - 1)\sin^3 \theta$	$945 \cos \theta \sin^4 \theta$	$945\sin^5 \theta$

Fonte: O Autor (2020).

TABELA 2.2 – PRIMEIROS TRÊS HARMÔNICOS ESFÉRICOS

$l \setminus m$	-3	-2	-1	0	1	2	3
0	---	---	---	1	---	---	---
1	---	---	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \varphi - i \sin \varphi) \sin \theta$	$\cos \theta$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}(\cos \varphi + i \sin \varphi) \sin \theta$	---	---
2	---	$\frac{3}{2\sqrt{6}}[\cos(2\varphi) - i \sin(2\varphi)]\sin^2 \theta$	$\frac{3}{\sqrt{6}}(\cos \varphi - i \sin \varphi) \cos \theta \sin \theta$	$\frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - 1)$	$\frac{-3}{\sqrt{6}}(\cos \varphi + i \sin \varphi) \cos \theta \sin \theta$	$\frac{3}{2\sqrt{6}}[\cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi)]\sin^2 \theta$	---
3	$\frac{5}{4\sqrt{5}}[\cos(3\varphi) - i \sin(3\varphi)]\sin^3 \theta$	$\frac{15}{2\sqrt{30}}[\cos(2\varphi) - i \sin(2\varphi)] \cos \theta \sin^2 \theta$	$\frac{3}{4\sqrt{3}}(\cos \varphi - i \sin \varphi)(5\cos^2 \theta - 1) \sin \theta$	$\frac{1}{2}(5\cos^2 \theta - 3) \cos \theta$	$\frac{-3}{4\sqrt{3}}(\cos \varphi + i \sin \varphi)(5\cos^2 \theta - 1) \sin \theta$	$\frac{15}{2\sqrt{30}}[\cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi)] \cos \theta \sin^2 \theta$	$\frac{-5}{4\sqrt{5}}[\cos(3\varphi) + i \sin(3\varphi)]\sin^3 \theta$

Fonte: O Autor (2020).

O método é construído multiplicando a RTE, Eq. (2.36) por Y_k^m e expandindo a função de fase do espalhamento em uma Série de Polinômios de Legendre. Em seguida, integra-se a equação para cada k em todas as direções, totalizando $4\pi sr$.

No caso do meio participante com simetria azimutal (*i.e.* caso unidimensional) a expansão da intensidade direcional resulta em

$$I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = \sum_{l=0}^{\infty} I_l(\tau) P_l(\mu), \quad (2.68)$$

pois $P_l^0(\mu) = P_l(\mu)$.

A função de fase do espalhamento expandida em Série de Polinômios de Legendre assume, então, a forma

$$\Phi(\mu, \mu') = \sum_{m=0}^M A_m P_m(\mu') P_m(\mu), \quad (2.69)$$

onde M é a ordem da aproximação para a função de fase e A_m são os coeficientes usados na definição da forma da função de fase do espalhamento.

Multiplicando a Eq. (2.68) e Eq. (2.69), porém imaginando I na Eq. (2.68) como sendo a radiação proveniente de outra direção qualquer I' , constrói-se o termo dentro da integral da versão unidimensional da RTE, Eq. (2.41). Truncada a série após N termos, o termo integral da RTE, Eq. (2.41) fica (após transformado θ para μ e usando a condição de simetria azimutal)

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \Phi(\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' \\ &= \int_{-1}^1 \sum_{m=0}^M A_m P_m(\mu') P_m(\mu) \sum_{l=0}^N I_l(\tau) P_l(\mu') d\mu'. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Expandindo ambos os somatórios no integrando e reagrupando os termos, primeiro com base em I_l e depois com base em $A_m P_m(\mu)$, obtém-se

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \Phi(\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' \\ &= \sum_{l=0}^N I_l(\tau) \sum_{m=0}^M A_m P_m(\mu) \int_{-1}^1 P_m(\mu') P_l(\mu') d\mu'. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Usando a propriedade da ortogonalidade dos Polinômios de Legendre (MODEST 2003, p. 468)

$$\int_{-1}^1 P_m(\mu) P_l(\mu) d\mu = \frac{2\delta_{lm}}{2m+1} = \begin{cases} 0, & m \neq l \\ \frac{2}{2m+1}, & m = l \end{cases} \quad (2.72)$$

onde δ_{lm} é a função Delta de Dirac, chega-se enfim no termo integral da RTE a ser usado no SHM

$$\int_{-1}^1 \Phi(\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' = \sum_{l=0}^N \frac{2A_l I_l(\tau)}{2l+1} P_l(\mu). \quad (2.73)$$

A Eq. (2.41) e escrita em termos de τ ao invés de τ_s fica

$$\mu \frac{dI(\tau)}{d\tau} + I(\tau) = (1 - \omega) I_b(\tau) + \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 \Phi(\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu'. \quad (2.74)$$

Substituindo a Eq. (2.73) truncada após o N-ésimo termo e a Eq. (2.68), ambas na Eq. (2.74) tem-se

$$\begin{aligned} & \mu \frac{d}{d\tau} \left[\sum_{l=0}^N I_l(\tau) P_l(\mu) \right] + \sum_{l=0}^N I_l(\tau) P_l(\mu) \\ &= (1 - \omega) I_b(\tau) + \omega \sum_{l=0}^N \frac{A_l I_l(\tau)}{2l+1} P_l(\mu). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Usando a relação de recursividade 8.5.3 apresentada em Abramowitz e Stegun (1972, p.338) e escrita aqui para o número real μ

$$(2l + 1)\mu P_l(\mu) = lP_{l-1}(\mu) + (l + 1)P_{l+1}(\mu), \quad (2.76)$$

tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^N \left[\frac{lP_{l-1}(\mu) + (l + 1)P_{l+1}(\mu)}{(2l + 1)} \frac{dI_l(\tau)}{d\tau} + I_l(\tau)P_l(\mu) \right] \\ = (1 - \omega)I_b(\tau) + \omega \sum_{l=0}^N \frac{A_l I_l(\tau)}{2l + 1} P_l(\mu). \end{aligned} \quad (2.77)$$

A Eq. (2.77) pode ser convertida em $N + 1$ equações diferenciais ordinárias para I_l , $l = 0, 1, \dots, N$. Faz-se isso multiplicando-a por $P_k(\mu)$, $k = 0, 1, \dots, N$ e integrando sobre todos os μ , o que resulta em

$$\begin{aligned} \frac{k + 1}{2k + 3} \frac{dI_{k+1}}{d\tau} + \frac{k}{2k - 1} \frac{dI_{k-1}}{d\tau} + \left(1 - \frac{\omega A_k}{2k + 1} \right) I_k \\ = (1 - \omega)I_b(\tau)\delta_{0k}, \quad k = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Este sistema de equações requer $N + 1$ condições de contorno, por exemplo as condições de Mark ou de Marshak (MODEST 2003, p. 469-472). Assumindo que a aproximação usada é de ordem ímpar (e.g. P_1, P_3, P_5, \dots) então são necessárias $\frac{N+1}{2}$ condições de contorno para cada fronteira. Por exemplo, as condições de contorno de Marshak para problemas de simetria azimutal são obtidas multiplicando a intensidade conhecida em cada fronteira pelo Polinômio de Legendre e integrando no hemisfério correspondente

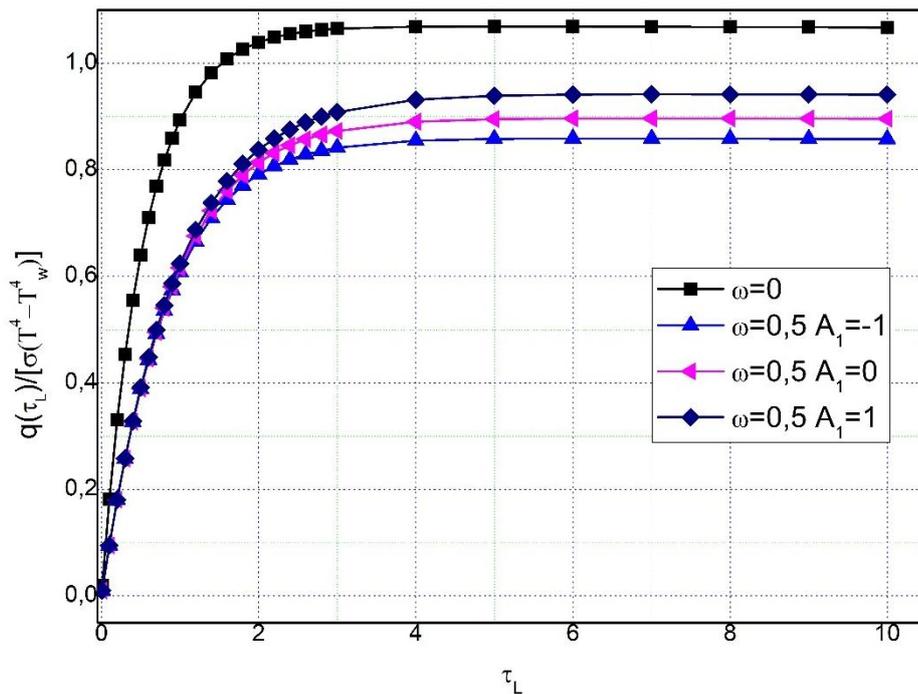
$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 I(0, \mu) P_{2i-1}(\mu) d\mu &= \int_0^1 I_{w1}(\mu) P_{2i-1}(\mu) d\mu \\ \int_{-1}^0 I(\tau_L, \mu) P_{2i-1}(\mu) d\mu &= \int_{-1}^0 I_{w2}(\mu) P_{2i-1}(\mu) d\mu \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, \frac{N+1}{2}, \quad (2.79)$$

onde I_{w1} e I_{w2} são as intensidades das fronteiras em $x = 0$ e $x = \tau_L$, respectivamente. Com base nestas condições é possível quantificar os coeficientes I_k na Eq. (2.78).

Há uma maneira alternativa relativamente simples de obter as equações do SHM, ao menos para a Aproximação P_1 , porém ela não é apresentada aqui porque o objetivo principal do estudo do SHM foi tentar obter uma relação que permitisse estudar o erro de truncamento devido à discretização angular. Entretanto, contratempos na obtenção de relações que embasassem o erro de truncamento devido à discretização espacial impediram o autor de progredir no estudo dos erros de discretização angular. Por isso o SHM aparece apenas nesta revisão bibliográfica, não sendo utilizado na análise dos problemas propostos nesta tese.

O SHM foi programado pelo autor e usado para calcular o fluxo de calor adimensional trocado entre um meio participante e suas fronteiras em função da espessura óptica, como exemplificado na FIGURA 2.9. Para mais detalhes da dedução da Aproximação P_1 consultar Modest (2003, p. 472-477).

FIGURA 2.9 – FLUXO ADIMENSIONAL OBTIDO COM O SHM EM FUNÇÃO DA ESPESSURA ÓPTICA



FONTE: O Autor (2020).

Na FIGURA 2.9 ambas as fronteiras são superfícies negras, paralelas e isotérmicas, mantidas na temperatura T_w . O meio é mantido a uma temperatura T , onde $T > T_w$ e possui albedo de espalhamento ω especificado. O primeiro caso da legenda, $\omega = 0$ significa que o meio não promove espalhamento, porém emite e absorve. Nota-se que quanto menor a espessura óptica do meio (abscissa), há menos meio aquecido separando as duas paredes.

No limite, quando a espessura ótica tende a zero, não há fluxo de calor (pois ambas as paredes estão à mesma temperatura e o meio praticamente não influencia no fluxo de calor). Entretanto, à medida que mais meio participante se torna mais espesso, mais ele transfere calor para elas (pois está significativamente mais aquecido), aumentando o fluxo de calor.

Nota-se que além de aproximadamente $\tau_L = 3$, este fluxo não aumenta significativamente mais. Isso ocorre porque a radiação deixando uma das paredes é sobrepujada pela emissão do meio que, sendo isotérmico, não importa quanto maior seja sua espessura, o fluxo não aumenta mais porque é quase atingida a máxima intensidade possível da radiação (intensidade de corpo negro).

Para os três outros casos apresentados na FIGURA 2.9 onde há espalhamento ($\omega = 0,5$, ou seja, $\kappa = \sigma_s$), o espalhamento ocorre de acordo com o valor do coeficiente linear anisotrópico A_1 . Quando $A_1 = -1$ o espalhamento ocorre preferencialmente em direções contrárias à de incidência ($\mu < 0$), o que faz menos radiação atingir a parede à direita, onde $\tau = \tau_L$ (por isso o fluxo de calor é ligeiramente menor que o caso $A_1 = 0$). No caso de $A_1 = 0$ o espalhamento ocorre igualmente em todas as direções, ou seja, é isotrópico. Por último, há o caso em que o espalhamento ocorre preferencialmente em direções $\mu > 0$, caso em que $A_1 = 1$, o que faz aumentar um pouco o fluxo de calor que atinge a parede à direita.

Outra observação que se pode fazer na FIGURA 2.9 é que o fluxo de calor adimensional para o caso $\omega = 0$ é maior que a unidade, o que é inconsistente fisicamente. Este resultado evidencia a acurácia relativamente pobre da Aproximação P_1 , especialmente notável quando a intensidade apresenta anisotropia. Para contornar esta deficiência deve-se empregar aproximações de ordem maior, como a P_3 e a P_5 (já que aproximações de ordem par imediatamente superiores não aumentam significativamente a acurácia da solução).

Por último, pode-se dizer que o SHM obtém resultados diretamente para as variáveis globais do problema como a radiação incidente G e o fluxo de calor q'' e não para a intensidade direcional. Do ponto de vista de aplicações de engenharia, via de regra estas são as variáveis de interesse, porém ressalta-se que há problemas em que o objetivo é conhecer a distribuição direcional da intensidade direcional (MOURA, 1998).

2.2.1.3 Método das Ordenadas Discretas

Um dos métodos mais utilizados atualmente para cálculos de radiação térmica, o Método das Ordenadas Discretas (DOM da sigla em inglês *Discrete Ordinates Method*) foi

possivelmente sugerido pela primeira vez por Wick (1943) e desenvolvido em detalhes por Chandrasekhar (1950, p.54-68), visando o estudo de atmosferas de estrelas. O DOM também tem sido empregado no estudo de reatores de fissão nuclear e de armas atômicas (CARLSON, 1953, 1970; CARLSON; LEE, 1961; LATHROP, 1966). Uma das primeiras aplicações do DOM na engenharia mecânica foi para quantificar o fluxo de calor radiativo em câmaras de combustão de fornos a gás (KHALIL; TRUELOVE, 1977) e em caldeiras aquotubulares de grande porte (FIVELAND, 1988), mas o método foi e continua sendo aplicado para modelar diversos equipamentos como espaçonaves (ALMEIDA, 2000), fornos de vidro, caldeiras, e fenômenos como a predição de fuligem (LECOCQ et al., 2014), dentre outros.

Segundo Modest (2003, p. 498) o DOM é baseado na representação discreta da variação direcional da intensidade. A RTE é resolvida para um conjunto de direções discretas no entorno de 4π esferorradianos de acordo com a ordem da aproximação (*e.g.* S_2, S_4, S_6, S_8).

A discretização angular consiste em escrever a Equação da Transferência Radiativa, RTE para um número finito de direções específicas, escolhidas de forma a preservar a simetria geométrica, ou seja, garantir que reflexões e rotações de 90° sejam mantidas para certos grupos de direções (CARLSON; LEE, 1961; FIVELAND, 1991; THURGOOD; POLLARD; BECKER, 1995). Com isso, o termo integral da RTE é substituído por uma quadratura numérica.

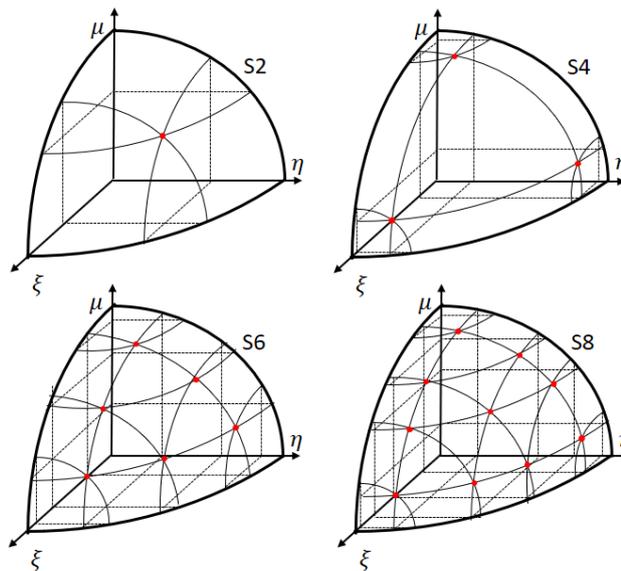
No caso de um meio tridimensional que não espalha radiação, por não haver acoplamento entre as direções, o modelo numérico se resume a um conjunto de equações diferenciais parciais. Caso o meio participante apresente espalhamento, então há acoplamento, produzindo assim um sistema de equações diferenciais parciais. No caso de o problema ser não linear (*e.g.* propriedades do meio ou das superfícies dependentes da temperatura e problema de equilíbrio radiativo) é necessário repetir o processo até que algum critério de convergência seja atingido. Por fim, calcula-se o fluxo radiativo e radiação incidente no interior do domínio e a radiosidade e irradiação nas fronteiras (pós processamento).

Feita a discretização angular, a RTE escrita para cada direção m fica

$$\begin{aligned} \mu_m \frac{\partial I_m}{\partial x} + \xi_m \frac{\partial I_m}{\partial y} + \eta_m \frac{\partial I_m}{\partial z} \\ = \kappa(S)I_b(S) - \beta(S)I_m(S) + \frac{\sigma_s(S)}{4\pi} \sum_{m'} w_{m'} I_{m'}(S) \Phi_{m'm}(S), \end{aligned} \quad (2.80)$$

onde $\mu_m = \cos \theta$, $\xi_m = \sin \theta \cos \varphi$ e $\eta_m = \sin \theta \sin \varphi$ são os cossenos diretores da direção m de acordo com os eixos coordenados mostrados na FIGURA 2.10 e w representa fatores de ponderação usados na quadratura que substitui o termo integral da RTE. Os valores de w e μ para a versão unidimensional do DOM são mostrados na TABELA 2.3 e ilustrados geometricamente para a versão tridimensional do DOM na FIGURA 2.10 e FIGURA 2.11.

FIGURA 2.10 - COSENOS DIRETORES DAS DIREÇÕES DISCRETAS, APROXIMAÇÕES S_2 , S_4 , S_6 E S_8



FONTE: Adaptado de Versteeg e Malalasekera (2007) e Carlson e Lathrop (1965)

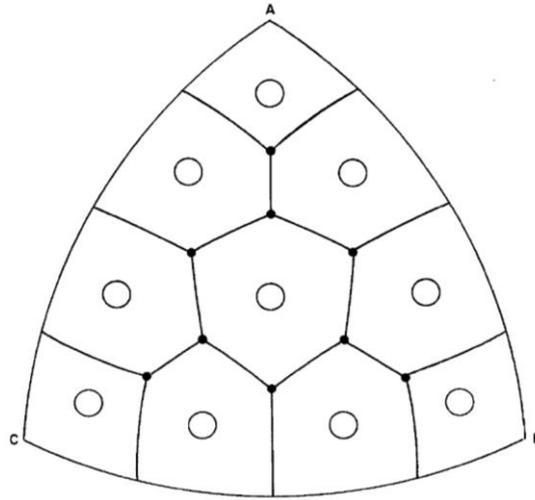
TABELA 2.3 – PESOS E DIREÇÕES ORDENADAS PARA VERSÃO UNIDIMENSIONAL DO DOM

S_N	w^4	$\pm\mu$
S_2 (assimétrica)	6,2831853	0,5000000
S_4	4,1887902	0,2958759
	2,0943951	0,9082483
S_6	2,7382012	0,1838670
	2,9011752	0,6950514
	0,6438068	0,9656013
S_8	2,1637144	0,1422555
	2,6406988	0,5773503
	0,7938272	0,8040087
	0,6849436	0,9795543

Fonte: Modest (2003, p. 503)

⁴ Por se tratar da versão unidimensional do método, os pesos contabilizam todas as direções com mesmo ângulo polar.

FIGURA 2.11 - DIVISÃO DE UM OCTANTE DA SUPERFÍCIE DA ESFERA EM ÁREAS QUE REPRESENTAM O PESO DA SUA RESPECTIVA DIREÇÃO PARA A APROXIMAÇÃO s_8 .



FONTE: Carlson e Lee (1961)

A condição de contorno na posição \mathbf{r}_w sobre a fronteira (em geral uma superfície opaca) onde tem início a direção m inclui, de forma genérica, a emissão e reflexão da radiação incidente sobre ela

$$I_m(S = 0, \mathbf{r}_w) = \varepsilon_w(\mathbf{r}_w)I_{b,w}(\mathbf{r}_w) + \frac{1 - \varepsilon_w(\mathbf{r}_w)}{\pi} \sum_{m'} l_{i,m'} w_{m'} I_{m'}(\mathbf{r}_w), \quad (2.81)$$

onde $l_{i,m'}$ é o cosseno entre a m' -ésima direção e a direção i , que é perpendicular à fronteira.

A ordem da aproximação angular S_N é denotada por $N = \{2,4,6, \dots\}$ e o número total de direções utilizadas n é determinado pela ordem da aproximação e pelo número de dimensões do domínio d de acordo com a fórmula $n = 2^d N(N + 2)/8$ (HOWELL; SIEGEL; MENGÜÇ, 2011, p. 646). Para cada direção ordenada é necessário calcular a intensidade no sentido positivo e negativo, portanto haverá duas equações para uma determinada direção, sendo esta a explicação do porquê as direções devem garantir reflexão e rotação de 90° entre certos grupos de direções.

Já a discretização espacial pode ser feita de forma similar à empregada no Método dos Elementos Finitos (MARTIN; DUDERSTADT, 1977; FERNANDES, 1991) ou no Método dos Volumes Finitos (LATHROP; CARLSON, 1967; MODEST, 2003, p. 514; COELHO, 2014),

sendo que alguns autores, como Fiveland (1989) chamam esta técnica de Aproximação de Diferenças Finitas, entretanto este termo não tem sido mais usado.

Após a discretização no espaço é feita a integração da equação governante no elemento de volume. Isto faz aparecer os valores da intensidade em cada face do volume. Para um domínio bidimensional, a Eq. (2.80) quando integrada para o volume genérico P resulta em

$$\mu_m(I_{em}A_e - I_{wm}A_w) + \xi_m(I_{nm}A_n - I_{sm}A_s) = -\beta\Delta V I_{Pm} + \beta\Delta V S_{Pm}, \quad (2.82)$$

válida para as direções $m = 1, 2, \dots, n$ e onde ΔV indica o volume do elemento, A indica a área da face do elemento de volume sendo que os subíndices e, w, n, s indicam as faces leste, oeste, norte e sul, respectivamente. O termo fonte S_{Pm} é dado por

$$S_{Pm} = (1 - \omega)I_b + \frac{\omega}{4\pi} \sum_{m'=1}^n w_{m'} I_{m'} \Phi_{m'm}. \quad (2.83)$$

Tanto o DOM a como o Método dos Volumes Finitos efetuam a integração da RTE no elemento de volume discreto, porém a subsequente substituição de alguns termos por aproximações numéricas é fundamentalmente diferente. Enquanto no Método dos Volumes Finitos as aproximações conectam o volume discreto com seus vizinhos, no DOM isso não ocorre. A aproximação numérica apenas escreve a variação da intensidade dentro de um elemento de volume como uma função de ponderação linear em função das intensidades em cada face do elemento de volume, ou seja

$$I_{Pm} = \gamma I_{em} + (1 - \gamma) I_{wm}, \quad (2.84a)$$

$$I_{Pm} = \gamma I_{nm} + (1 - \gamma) I_{sm}, \quad (2.84b)$$

onde $0 \leq \gamma \leq 1$ é o fator de ponderação. Em geral são utilizados os esquemas Diamante ($\gamma = 0,5$) e Degrau ($\gamma = 1,0$) (LATHROP 1969). Outros fatores de ponderação podem ser encontrados em Lathrop (1969) e em Moura, Baillis e Sacadura (1988).

Isolando I_{em} na Eq. (2.84a), I_{nm} na Eq. (2.84b), substituindo-os na Eq. (2.82) juntamente com a Eq. (2.83) e isolando I_{Pm} tem-se

$$I_{Pm} = \frac{\mu_m \Delta y_P I_{wm} + \xi_m \Delta x_P I_{sm} + \gamma \Delta x_P \Delta y_P S_{Pm}}{\mu_m \Delta y_P + \xi_m \Delta x_P + \gamma \Delta x_P \Delta y_P \beta}, \quad (2.85)$$

onde se supôs uma malha de volumes retangulares com tamanhos Δx_P e Δy_P nas direções x e y , respectivamente.

Uma vez calculado I_{Pm} , isolam-se as intensidades nas faces leste e oeste para obter intensidades “saindo” do elemento de volume P , ou seja

$$I_{em} = \frac{I_{Pm} - (1 - \gamma)I_{wm}}{\gamma}, \quad (2.86a)$$

$$I_{nm} = \frac{I_{Pm} - (1 - \gamma)I_{sm}}{\gamma}. \quad (2.86b)$$

As intensidades “saindo” do volume P se tornam as intensidades “entrando” no elemento de volume seguinte na direção m .

É registrado na literatura que, dependendo do problema, as Eqs. (2.84) eventualmente produzem intensidades negativas à jusante quando o Esquema Diamante é usado, o que é fisicamente inconsistente. Neste caso, recomenda-se fixar a intensidade à jusante como nula e recalculer I_{Pm} com a Eq. (2.82) (LATHROP, 1969; CHAI; LEE; PATANKAR, 1993).

O processo de marcha prossegue até atingir a fronteira oposta. Ao atingi-la, a irradiação sobre ela pode ser calculada assim que todas as direções forem contabilizadas

$$H(S = r, \mathbf{r}_w) = \sum_{m=1}^n w_m I_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}_w) \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}, \quad (2.87)$$

onde \mathbf{r} é o vetor posição na fronteira oposta e $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}$ representa o produto interno entre a direção \mathbf{r} e o vetor normal à fronteira oposta $\hat{\mathbf{n}}$. Apenas produtos internos de sinal negativo devem ser considerados, pois indicam que a radiação incide sobre a fronteira oposta.

Em seguida o processo de marcha pode correr no sentido contrário, resolvendo a direção oposta à m , utilizando a condição de contorno pertinente à fronteira em questão. Após todas as direções ordenadas terem sido calculadas o termo fonte radiativo S_{rad} , (que em problemas envolvendo modos combinados de transferência de calor entra na equação da energia como termo fonte) é dado por

$$S_{rad,m} = (\nabla \cdot \mathbf{q}'') = 4\pi\kappa I_b - \kappa \sum_{m=1}^n w_m I_m(S, \mathbf{r}), \quad (2.88)$$

assim como as variáveis secundárias nas fronteiras, conforme já comentado anteriormente.

Nos problemas de equilíbrio radiativo a temperatura do meio não é conhecida em princípio. Neste caso é usada uma estimativa inicial e após o DOM ter sido executado uma nova estimativa da temperatura é calculada com base na radiação incidente.

Para isto faz-se $\nabla \cdot \mathbf{q}'' = 0$ na Eq. (2.88) e isola-se a temperatura do meio participante T , já que $I_b = \frac{\sigma T^4}{\pi}$. Este processo é repetido até que algum critério de convergência seja atingido.

2.3 ERROS NUMÉRICOS

Nesta seção é apresentada a teoria básica dos erros de truncamento e cálculo do erro de discretização e da ordem de uma variável dependente qualquer. Também são apresentados os equacionamentos da técnica denominada Múltiplas Extrapolações de Richardson (MER).

Embora já definido na Seção 1.1 desta tese, é necessário discorrer com mais detalhes sobre os erros numéricos. Por questão de comodidade, a definição do erro numérico E , dado pela Eq. (1.1), é reproduzida abaixo⁵

$$E(\phi) = \Phi - \phi, \quad (2.89)$$

onde Φ é a solução analítica exata e ϕ a solução numérica. Segundo Marchi (2001, p.6) as fontes de erros numéricos são: a) erros de truncamento; b) erros de iteração; c) erros de arredondamento e d) erros de programação. Se o programa de computador não possui erros de programação e os erros de iteração e arredondamento são muito pequenos ou inexistentes, então o erro numérico na Eq. (2.89) é devido majoritariamente aos erros de truncamento. Quando isso ocorre, então o erro é chamado de discretização (FERZIGER; PERIĆ, 2002, p. 58).

⁵ Nesta tese é usada a definição apresentada em Knupp e Salari (2003, p.10), entretanto também se pode usar $E(\phi) = \phi - \Phi$, que é usada por Roache (2009) e em ASME (2009, p.10), bastando trocar o sinal para converter o resultado entre ambas as definições.

Adotando a nomenclatura empregada em Marchi et al. (2013) o erro de discretização pode ser escrito como

$$E(\phi) = C_0 h^{p_0} + C_1 h^{p_1} + C_2 h^{p_2} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} C_m h^{p_m}. \quad (2.90)$$

Na Eq. (2.90) C_0, C_1, C_2, \dots são coeficientes dependentes das derivadas da solução analítica Φ , porém independentes do tamanho do elemento de malha h . Os expoentes p_0, p_1, p_2, \dots são chamadas ordens verdadeiras p_m do erro e assumem valores positivos inteiros $0 < p_0 < p_1 < p_2 < \dots$ que aparecem em progressão aritmética com razão $q = p_1 - p_0$. Seus valores típicos são $1 \leq q \leq 4$. O menor expoente p_0 é denominado ordem assintótica porque compõe o termo que domina o erro quando $h \rightarrow 0$, caso em que as soluções numéricas apresentam convergência monotônica, porém ainda não afetadas pelo erro de arredondamento. Quando analisado um gráfico de E em função de h , onde ambos os eixos coordenados estão em escala logarítmica, observa-se que p_0 representa a inclinação dos resultados representados. As ordens verdadeiras p_m do erro de discretização são dadas por

$$p_m = p_0 + m(p_1 - p_0), \quad (2.91)$$

onde m é um inteiro maior ou igual à unidade.

O erro numérico dado pela Eq. (2.89) só pode ser usado para problemas cuja solução analítica do modelo matemático é conhecida. Entretanto, não é este o caso da maioria dos problemas de interesse prático na engenharia, seja por conta da quantidade de fenômenos físicos que precisam ser considerados (equação ou sistema de equações muito complexo), seja por complicações devidas a geometria do domínio, condições de contorno e iniciais ou então devido a não linearidades (*e.g.* propriedades físicas são funções das variáveis dependentes).

Nos problemas sem solução analítica conhecida é possível calcular o erro estimado $U_{(\phi)}$ da solução numérica. Isso é feito por uma técnica *a posteriori*, ou seja, a estimativa do erro é calculada com base nas soluções numéricas obtidas em duas ou mais malhas de progressiva razão de refino. De forma análoga ao erro numérico, a estimativa do erro da solução numérica $U_{(\phi)}$ é dada por

$$U_{(\phi)} = \phi_{\infty} - \phi, \quad (2.92)$$

onde ϕ_∞ é a solução analítica estimada.

Há vários tipos de estimadores de erro (*i.e.* Richardson, *GCI*, Delta, dentre outros) que podem ser encontrados em Ferziger e Perić (2002, p.59) e Marchi (2001, p. 55-72), assim como a metodologia empregada para estimar o erro de discretização e como apresentá-la. Entretanto, no presente trabalho são empregados apenas o estimador de Richardson U_{Ri} e o *Grid Convergence Index (GCI)* U_{GCI} , dados por

$$U_{Ri} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{r^{p_0} - 1}, \quad (2.93)$$

e

$$U_{GCI} = FS \frac{|\phi_2 - \phi_1|}{r^{p_0} - 1}. \quad (2.94)$$

onde $r = h_1/h_2$ é a razão de refino, tipicamente 2 e ϕ_2 e ϕ_1 são as soluções numéricas obtidas nas malhas grossa e fina, respectivamente. Observa-se que U_{GCI} é basicamente U_{Ri} tomado sem o sinal e multiplicado por um fator de segurança FS , que pode ser 3 para aplicações em geral, porém quando se sabe que as soluções numéricas se encontram na região de convergência monotônica, pode-se usar 1,25. As representações dos resultados numéricos são feitas de acordo com as seguintes equações

$$\phi = \phi_2 + U_{Ri(\phi_2)}, \quad (2.95)$$

e

$$\phi = \phi_2 \pm U_{GCI(\phi_2)}. \quad (2.96)$$

Segundo Sidi (2003, p.2), quando apropriado, um método de extrapolação produz, a partir de uma determinada sequência, uma nova sequência que converge para o limite da primeira mais rapidamente quando este limite existe. A Extrapolação de Richardson (*RE* da terminologia em língua inglesa *Richardson Extrapolation*) é uma técnica de extrapolação que pode ser empregada como pós-processamento em programas, aumentando a acurácia das

soluções numéricas mesmo se fórmulas de baixa ordem são empregadas (RICHARDSON, 1910; RICHARDSON; GAUNT, 1927; BURDEN; FAIRES, 2011, p. 185). Outra vantagem é que seu uso permite reduzir o erro de discretização a partir de resultados obtidos em malhas relativamente grosseiras.

A estratégia deste procedimento é combinar duas soluções numéricas obtidas com diferentes tamanhos de elementos de malha h para eliminar o termo de mais baixa ordem na Eq. (2.90), neste caso p_0 . A equação resultante será de ordem p_1 , que é maior que p_0 .

Considerando não duas, mas um conjunto de várias soluções numéricas obtidas em $g = [1, G]$ malhas, onde $g = 1$ é a malha mais grossa (*i.e.* maior h) e $g = G$ a malha mais fina (*i.e.* menor h), o processo de *RE* produz $m = G - 1$ soluções extrapoladas de ordem p_1 . As soluções extrapoladas das malhas mais finas são mais acuradas que as das malhas mais grossas, considerando que todas são do mesmo nível de extrapolação p_1 (exceto no caso em que a malha é suficientemente fina para que o erro de arredondamento seja significativo em relação ao erro de discretização). É possível notar que o processo pode ser repetido, obtendo soluções extrapoladas de ordem p_2 baseadas nas soluções extrapoladas de ordem p_1 previamente obtidas. Este processo pode ser repetido várias vezes produzindo tantas extrapolações quanto possível, ou seja, $G - 1$ no total. Esta generalização do processo de Extrapolação de Richardson é denominada Múltiplas Extrapolações de Richardson (MER, ou *RRE*, da nomenclatura em língua inglesa *Repeated Richardson Extrapolations*) (ROACHE; KNUPP, 1993; SIDI, 2003; MARCHI; SUERO; ARAKI, 2009).

A solução numérica extrapolada ϕ na malha g após m extrapolações é dada por

$$\phi_{g,m} = \phi_{g,m-1} + \frac{\phi_{g,m-1} - \phi_{g-1,m-1}}{r^{(p_{m-1})} - 1}, \quad (2.97)$$

válida para $2 \leq g \leq G$ e $1 \leq m \leq g - 1$ e onde $r = h_{g-1}/h_g$ é a razão de refino, conforme já visto anteriormente. Observa-se que o segundo termo no membro da direita na Eq. (2.97) é o estimador de Richardson U_{Ri} do nível de extrapolação g , ou seja, é a generalização da Eq. (2.93).

As ordens efetivas do erro de discretização podem ser obtidas *a priori*, ou seja, deduzidas matematicamente a partir da comparação entre os operadores diferenciais presentes nas equações do modelo matemático e seus equivalentes numéricos obtidos por meio de expansões em Série de Taylor. Entretanto, as ordens verdadeiras podem ser confirmadas *a posteriori*, por meio do conceito de ordem efetiva p_E do erro de discretização calculada por

$$(p_E)_{g,m} = \frac{\log \left| \frac{\Phi - \phi_{g-1,m}}{\Phi - \phi_{g,m}} \right|}{\log(r)}, \quad (2.98)$$

válida para $2 \leq g \leq G$ e $0 \leq m \leq g - 2$. Se forem obtidas soluções numéricas em um número relativamente grande de malhas, então é possível observar que quando $h \rightarrow 0$, $(p_E)_{g,m} \rightarrow p_m$.

Apesar de quase todos os problemas estudados neste trabalho possuírem solução analítica conhecida, nem sempre este é o caso de muitos dos problemas de interesse prático da engenharia. Além disso, quando se deseja confirmar *a posteriori* as ordens verdadeiras p_m , a Eq. (2.97) não é totalmente independente da análise *a priori*, pois as soluções numéricas nas diversas malhas e níveis de extrapolação são obtidas com base na Eq. (2.91), portanto baseadas em p_m . Em tais casos recomenda-se o uso do conceito de ordem aparente ou ordem observada p_U , dada pela equação

$$(p_U)_{g,m} = \frac{\log \left| \frac{\theta_{g-1,m} - \theta_{g-2,m}}{\theta_{g,m} - \theta_{g-1,m}} \right|}{\log(r)}, \quad (2.99)$$

válida para $3 \leq g \leq G$ e $0 \leq m \leq \text{int}[(g - 3)/2]$, onde *int* denota a parte inteira da fração entre colchetes e subentende o uso de razão de refino constante. Quando $m = 0$, a variável θ recebe a solução numérica da variável de interesse na respectiva malha $\theta_{g,0} = \phi_{g,0}$. Na Eq. (2.99) a solução numérica é denotada por θ ao invés de ϕ porque as extrapolações são baseadas na ordem aparente ao invés da ordem efetiva, ou seja,

$$\theta_{g,m} = \theta_{g,m-1} + \frac{\theta_{g,m-1} - \theta_{g-1,m-1}}{r^{(p_U)_{g,m-1}} - 1}, \quad (2.100)$$

válida de $3 \leq g \leq G$ e $1 \leq m \leq \text{int}[(g - 1)/2]$.

Comparando as equações das soluções extrapoladas e suas respectivas equações para cálculo das ordens, vê-se que a análise baseada na ordem aparente requer três malhas consecutivas para produzir uma extrapolação enquanto que a ordem efetiva requer apenas duas. Entretanto é vantajoso considerar a ordem aparente porque enquanto a ordem efetiva p_E requer o conhecimento da solução analítica Φ , a ordem aparente p_U requer apenas soluções numéricas

ϕ em diversas malhas, permitindo também a análise de problemas sem solução analítica conhecida.

Embora a análise *a posteriori* não permita provar que a dedução *a priori* está correta, ela pode ser utilizada para evidenciar uma dedução incorreta. Para isso se analisa a diferença entre o erro deduzido *a priori* e o medido *a posteriori*. Também pode-se analisar sistematicamente funções matemáticas que permitam avaliar cada termo da equação do erro de discretização. Este último procedimento é conduzido para testar a dedução da equação do erro de discretização da Regra 1/3 de Simpson reportada no próximo capítulo.

3 ERROS DE DISCRETIZAÇÃO NA SOLUÇÃO NUMÉRICA DE INTEGRAIS

Hildebrand (1965, p. 281-293) apresenta técnicas de solução de equações integrais de Fredholm. Dentre as técnicas de integração numéricas podem ser citadas a Regra do Trapézio, as Regras de Simpson e a Quadratura de Gauss.

Embora a Quadratura de Gauss permita a integração exata sob certas condições, é necessário calcular as posições dos nós e os respectivos pesos da quadratura. No caso das Regras do Trapézio e Simpson o domínio pode ser discretizado usando uma malha uniforme (*i.e.* elementos da malha possuem tamanhos iguais) e os pesos aplicados à cada nó ou conjunto de nós são os mesmos, independentemente da posição e do grau de refinamento da malha (*i.e.* a fórmula conectando um nó genérico com os nós adjacentes não varia). Esta metodologia foi empregada em Galant e Goorvitch (1996) e permite obter as soluções numéricas em malhas com refinamento de malha progressivo de forma imediata.

Combinar regras de integração simples, mesmo que de baixa ordem, juntamente com MER permite não apenas obter soluções de elevada acurácia (SIDI, 2003), mas também obter o erro estimado associado a cada solução (ROACHE; KNUPP, 1993; MARCHI; SUERO; ARAKI, 2009), além de servir como procedimento de verificação de código, ou seja, ajuda a conferir se o programa de computador contém erros de programação (KNUPP; SALARI, 2003).

Os esquemas mais comuns de integração numérica baseiam-se nas fórmulas de Newton-Cotes e nos Polinômios Interpoladores de Lagrange (CHAPRA; CANALE, 2015, p.603). A estratégia é aproximar o integrando contínuo $F(x)$ por um polinômio $P_n(x)$

$$I = \int_a^b F(x)dx \cong \int_a^b P_n(x)dx, \quad (3.1)$$

onde o polinômio $P_n(x)$ de ordem n é da forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n. \quad (3.2)$$

Problemas envolvendo radiação em meios não participantes são geralmente resolvidos utilizando o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Elementos Finitos e o Método de Monte Carlo. Destes, o Método das Diferenças Finitas foi escolhido para estudar erros numéricos para problemas de radiação térmica em meios não participantes, pois é simples e é embasado por uma metodologia de cálculo de erros de truncamento.

As aproximações numéricas mais comuns baseadas nas fórmulas de Newton-Cotes são a Regra do Trapézio (CHAPRA; CANALE, 2015, p. 605-615) e as Regras de Simpson (CHAPRA; CANALE, 2015, p. 615-624), as quais serão estudados em detalhe nas seções a seguir.

3.1 REGRA DO TRAPÉZIO

A Regra do Trapézio é a primeira fórmula de integração de Newton-Cotes, ou seja, o polinômio utilizado na sua construção é de primeira ordem: $P_1(x)$. Nos problemas de radiação térmica em meios não participantes é comum que se utilize fatores de forma infinitesimais, assim uma etapa de integração numérica é necessária para avaliar os fluxos radiativos.

A fórmula geral para a aplicação múltipla da Regra do Trapézio (integração sobre o domínio completo, discretizado em N elementos, ou seja, $0, 1, \dots, N$ nós) pode ser obtida com a expansão em Série de Taylor conforme mostrado no ANEXO A deste trabalho, resultando em⁶

$$I_L^{exato} = \frac{h}{2} \sum_{j=1}^N (F_{j-1} + F_j) + L \left[-\frac{\overline{F^{ii}}}{12} h^2 - \frac{\overline{F^{iv}}}{480} h^4 - \frac{\overline{F^{vi}}}{53760} h^6 - \dots \right], \quad (3.3)$$

onde F_j e F_{j-1} são os valores que a função a ser integrada assume no nó que está sendo considerado no somatório e no seu vizinho da esquerda, respectivamente. As variáveis $\overline{F^{ii}}$, $\overline{F^{iv}}$ e $\overline{F^{vi}}$ representam a média em todo o domínio das derivadas de segunda, quarta e sexta ordens da função incógnita, respectivamente, e suas definições podem ser encontradas no ANEXO A. O primeiro termo do lado direito é considerado quando se faz a aproximação pela Regra do Trapézio no domínio de comprimento L , neste trabalho representada por $I_L^{trapezio}$, ou seja

$$I_L^{trapezio} = \frac{h}{2} \sum_{j=1}^N (F_{j-1} + F_j). \quad (3.4)$$

O erro da aproximação pela Regra do Trapézio $E_L^{trapezio}$ para a integral sobre o domínio de comprimento L é

⁶ Dedução feita por Carlos Henrique Marchi e apresentada ao autor enquanto cursava a disciplina Verificação e Validação em CFD, ofertada pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFPR.

$$E_L^{trapezio} = L \left[-\frac{\overline{F_{ii}}}{12} h^2 - \frac{\overline{F_{iv}}}{480} h^4 - \frac{\overline{F_{vi}}}{53760} h^6 - \dots \right]. \quad (3.5)$$

Na Eq. (3.5) pode-se constatar que quando a malha for refinada sucessivamente o primeiro termo dentro dos colchetes no lado direito se torna dominante porque os demais termos tendem a zero mais rapidamente à medida que o tamanho do elemento de malha tende a zero ($h \rightarrow 0$). Quando este comportamento ocorre, diz-se que o erro de discretização se encontra na região assintótica ou região de convergência monotônica. No caso da Regra do Trapézio, à medida que o tamanho dos elementos da malha é reduzido pela metade, o erro da aproximação se reduz com o quadrado do tamanho do elemento de malha, ou seja, se reduz quatro vezes.

Vale ressaltar aqui que na literatura especializada o erro de truncamento é geralmente apresentado como $F_{\xi}^{ii} h^2 / 12$ (CHAPRA; CANALE, 2015, p.608; ABRAMOWITZ; STEGUN, 1972, p. 885; CARNAHAN; LUTHER; WILKES, 1969, p. 78). Isto ocorre porque sendo baseada em um polinômio interpolador de Newton-Gregory, a dedução do erro de truncamento possui um único termo calculado em uma posição desconhecida ξ dentro do intervalo de integração. A Eq. (3.5), cuja formulação é mostrada no ANEXO A, baseia-se em expansões em Série de Taylor, portanto obtém o erro na forma de uma série infinita, calculada no centro de cada elemento discreto, uma característica que permite a análise das soluções numéricas obtidas com a técnica de Múltiplas Extrapolações de Richardson.

3.2 REGRA DE SIMPSON

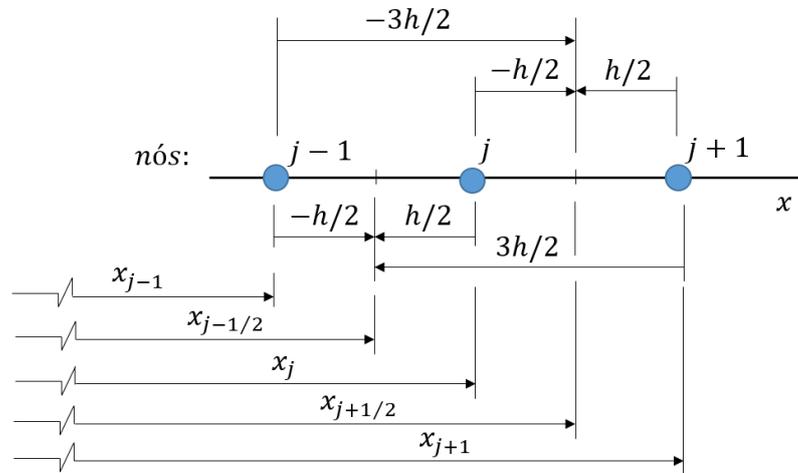
Em Chapra e Canale (2015, p.616) é apresentada a dedução da Regra 1/3 de Simpson, (aqui também denominada simplesmente Regra de Simpson) que inclui a estimativa de ordem de magnitude do erro de truncamento. O método lá usado é a integração do polinômio interpolador de Newton-Gregory de quarta ordem em dois intervalos discretos $[x_{j-1}, x_j]$ e $[x_j, x_{j+1}]$, delimitados por três pontos quaisquer no interior do domínio x_{j-1}, x_j e x_{j+1} , conforme mostrado na FIGURA 3.1. A fórmula da Regra de Simpson é dada por

$$I_{[j-1, j+1]}^{num} = \frac{(F_{j-1} + 4F_j + F_{j+1})h}{3}, \quad (3.6)$$

onde h é o tamanho dos intervalos discretos e o erro de truncamento $E_{[j-1,j+1]}$ da integração numérica no intervalo $[x_{j-1}, x_{j+1}]$ é dado por

$$E_{[j-1,j+1]} = \frac{-F_{\xi}^{iv}}{90} h^5, \quad x_{j-1} < \xi < x_{j+1}. \quad (3.7)$$

FIGURA 3.1 – NOMENCLATURA DOS PONTOS NODAIS NA MALHA 1D UNIFORME



FONTE: O Autor (2020)

O texto que se segue mostra uma dedução alternativa da Regra de Simpson e constitui uma contribuição inédita desta tese. Ela emprega expansões em Séries de Taylor para os valores da função nos pontos nodais. Sua principal característica é que o erro de truncamento não é obtido em um ponto ξ contido em uma posição desconhecida dentro do intervalo $[x_{j-1}, x_{j+1}]$, mas sim no ponto nodal x_j . A contrapartida é que possui tantos termos quanto o número de derivadas não nulas do integrando. Caso o integrando possua infinitas derivadas, então a equação do erro de truncamento terá infinitos termos.

Para ser aplicada, a Regra de Simpson requer no mínimo dois intervalos discretos $[x_{j-1}, x_j]$ e $[x_j, x_{j+1}]$. O primeiro passo consiste em calcular a integral da função $F(x)$ nos dois intervalos, somando-as em seguida

$$I_{[j-1,j+1]}^{num} = I_{[j-1,j]}^{num} + I_{[j,j+1]}^{num}. \quad (3.8)$$

Cada termo no lado direito da Eq. (3.8) é obtido a partir da integral da função $F(x)$ no respectivo intervalo de integração. Para obter o primeiro termo faz-se a expansão no entorno do ponto intermediário $x_{j-1/2}$ e para o segundo termo expande-se a série no entorno do ponto $x_{j+1/2}$. Iniciando com a expansão no entorno de $x_{j-1/2}$, tem-se

$$\begin{aligned}
F(x) = & F_{j-1/2} + F_{j-1/2}^i(x - x_{j-1/2}) + \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{2}(x - x_{j-1/2})^2 \\
& + \frac{F_{j-1/2}^{iii}}{6}(x - x_{j-1/2})^3 + \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{24}(x - x_{j-1/2})^4 \\
& + \frac{F_{j-1/2}^v}{120}(x - x_{j-1/2})^5 + \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{720}(x - x_{j-1/2})^6 \\
& + \frac{F_{j-1/2}^{vii}}{5040}(x - x_{j-1/2})^7 + \frac{F_{j-1/2}^{viii}}{40320}(x - x_{j-1/2})^8 + \dots
\end{aligned} \tag{3.9}$$

O valor exato da integral $I_{[j-1,j]}^{exata}$ no semi-intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ é

$$I_{[j-1,j]}^{exata} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} F(x) dx. \tag{3.10}$$

Substituindo a Eq. (3.9) na Eq. (3.10) tem-se

$$\begin{aligned}
I_{[j-1,j]}^{exata} = & \int_{x_{j-1}}^{x_j} F_{j-1/2} dx + \int_{x_{j-1}}^{x_j} F_{j-1/2}^i(x - x_{j-1/2}) dx \\
& + \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{2}(x - x_{j-1/2})^2 dx + \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{F_{j-1/2}^{iii}}{6}(x - x_{j-1/2})^3 dx \\
& + \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{24}(x - x_{j-1/2})^4 dx + \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{F_{j-1/2}^v}{120}(x - x_{j-1/2})^5 dx \\
& + \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{720}(x - x_{j-1/2})^6 dx + \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{F_{j-1/2}^{vii}}{5040}(x - x_{j-1/2})^7 dx \\
& + \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{F_{j-1/2}^{viii}}{40320}(x - x_{j-1/2})^8 dx + \dots
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Definindo uma variável auxiliar z

$$z = x - x_{j-1/2}, \quad (3.12)$$

$$dz = dx. \quad (3.13)$$

Os limites inferior z_i e superior z_s de integração são

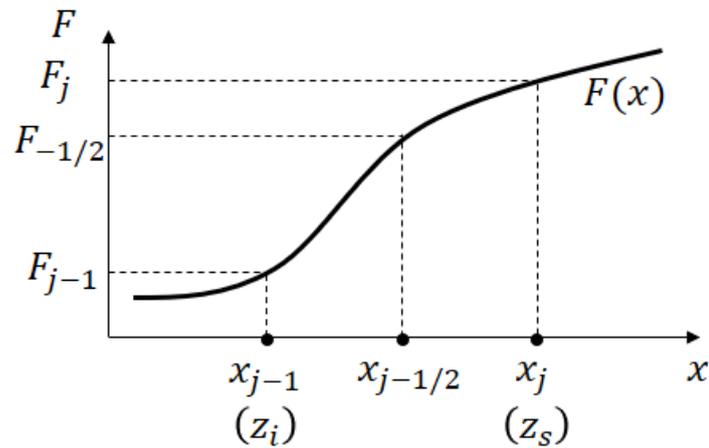
$$z_i = x_{j-1} - x_{x_{j-1/2}} = -\frac{h}{2}, \quad (3.14)$$

$$z_s = x_j - x_{x_{j-1/2}} = \frac{h}{2}. \quad (3.15)$$

Em forma gráfica as variáveis z_i e z_s ficam conforme a FIGURA 3.2. Substituindo da Eq. (3.12) até a Eq. (3.15) em cada termo da Eq. (3.11) e resolvendo obtém-se

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} F_{j-1/2} dx = F_{j-1/2} \int_{z_i}^{z_s} dz = F_{j-1/2} z \Big|_{-h/2}^{h/2} = F_{j-1/2} h, \quad (3.16)$$

FIGURA 3.2 – INTEGRAÇÃO DA FUNÇÃO F DO NÓ $j - 1$ ATÉ O NÓ j



FONTE: O Autor (2020)

$$\begin{aligned}
\int_{x_{j-1}}^{x_j} F_{j-1/2}^i (x - x_{j-1/2}) dx &= F_{j-1/2}^i \int_{z_i}^{z_s} z dz = F_{j-1/2}^i \frac{z^2}{2} \Big|_{-h/2}^{h/2} \\
&= \frac{F_{j-1/2}^i}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - \left(\frac{-h}{2} \right)^2 \right] = 0,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{2} (x - x_{j-1/2})^2 dx &= \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{2} \int_{z_i}^{z_s} z^2 dz = \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{2} \frac{z^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} \\
&= \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{6} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^3 - \left(\frac{-h}{2} \right)^3 \right] = \frac{2F_{j-1/2}^{ii}}{48} h^3,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{F_{j-1/2}^{iii}}{6} (x - x_{j-1/2})^3 dx &= \frac{F_{j-1/2}^{iii}}{6} \int_{z_i}^{z_s} z^3 dz = \frac{F_{j-1/2}^{iii}}{6} \frac{z^4}{4} \Big|_{-h/2}^{h/2} \\
&= \frac{F_{j-1/2}^{iii}}{24} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^4 - \left(\frac{-h}{2} \right)^4 \right] = 0,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{24} (x - x_{j-1/2})^4 dx &= \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{24} \int_{z_i}^{z_s} z^4 dz = \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{24} \frac{z^5}{5} \Big|_{-h/2}^{h/2} \\
&= \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{120} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^5 - \left(\frac{-h}{2} \right)^5 \right] = \frac{2F_{j-1/2}^{iv}}{3840} h^5,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{F_{j-1/2}^v}{120} (x - x_{j-1/2})^5 dx &= \frac{F_{j-1/2}^v}{120} \int_{z_i}^{z_s} z^5 dz = \frac{F_{j-1/2}^v}{120} \frac{z^6}{6} \Big|_{-h/2}^{h/2} \\
&= \frac{F_{j-1/2}^v}{720} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^6 - \left(\frac{-h}{2} \right)^6 \right] = 0,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{720} (x - x_{j-1/2})^6 dx &= \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{720} \int_{z_i}^{z_s} z^6 dz = \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{720} \frac{z^7}{7} \Big|_{-h/2}^{h/2} \\
&= \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{5040} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^7 - \left(\frac{-h}{2} \right)^7 \right] = \frac{2F_{j-1/2}^{vi}}{645120} h^7,
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{F_{j-1/2}^{vii}}{5040} (x - x_{j-1/2})^7 dx &= \frac{F_{j-1/2}^{vii}}{5040} \int_{z_i}^{z_s} z^7 dz = \frac{F_{j-1/2}^{vii}}{5040} \frac{z^8}{8} \Big|_{-h/2}^{h/2} \\ &= \frac{F_{j-1/2}^{vii}}{40320} \left[\left(\frac{h}{2}\right)^8 - \left(\frac{-h}{2}\right)^8 \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{F_{j-1/2}^{viii}}{40320} (x - x_{j-1/2})^8 dx &= \frac{F_{j-1/2}^{viii}}{40320} \int_{z_i}^{z_s} z^8 dz = \frac{F_{j-1/2}^{viii}}{40320} \frac{z^9}{9} \Big|_{-h/2}^{h/2} \\ &= \frac{F_{j-1/2}^{viii}}{362880} \left[\left(\frac{h}{2}\right)^9 - \left(\frac{-h}{2}\right)^9 \right] = \frac{2F_{j-1/2}^{viii}}{185794560} h^9. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Substituindo a Eq. (3.16) até a Eq. (3.24) na Eq. (3.11) tem-se

$$\begin{aligned} I_{[j-1,j]}^{exata} &= F_{j-1/2} h + \frac{2F_{j-1/2}^{ii}}{48} h^3 + \frac{2F_{j-1/2}^{iv}}{3840} h^5 + \frac{2F_{j-1/2}^{vi}}{645120} h^7 \\ &\quad + \frac{2F_{j-1/2}^{viii}}{185794560} h^9 + \dots \end{aligned} \quad (3.25)$$

Efetuando a expansão da função $F(x)$ em Série de Taylor no entorno do ponto intermediário $x_{j+1/2}$ tem-se

$$\begin{aligned} F(x) &= F_{j+1/2} + F_{j+1/2}^i (x - x_{j+1/2}) + \frac{F_{j+1/2}^{ii}}{2} (x - x_{j+1/2})^2 \\ &\quad + \frac{F_{j+1/2}^{iii}}{6} (x - x_{j+1/2})^3 + \frac{F_{j+1/2}^{iv}}{24} (x - x_{j+1/2})^4 \\ &\quad + \frac{F_{j+1/2}^v}{120} (x - x_{j+1/2})^5 + \frac{F_{j+1/2}^{vi}}{720} (x - x_{j+1/2})^6 \\ &\quad + \frac{F_{j+1/2}^{vii}}{5040} (x - x_{j+1/2})^7 + \frac{F_{j+1/2}^{viii}}{40320} (x - x_{j+1/2})^8 + \dots \end{aligned} \quad (3.26)$$

O valor exato da integral $I_{[j,j+1]}^{exata}$ no semi-intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ é

$$I_{[j,j+1]}^{exata} = \int_{x_j}^{x_{j+1}} F(x) dx. \quad (3.27)$$

Substituindo a Eq. (3.26) na Eq. (3.27) tem-se

$$\begin{aligned}
 I_{[j,j+1]}^{exata} = & \int_{x_j}^{x_{j+1}} F_{j+1/2} dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} F_{j+1/2}^i (x - x_{j+1/2}) dx \\
 & + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{F_{j+1/2}^{ii}}{2} (x - x_{j+1/2})^2 dx \\
 & + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{F_{j+1/2}^{iii}}{6} (x - x_{j+1/2})^3 dx \\
 & + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{F_{j+1/2}^{iv}}{24} (x - x_{j+1/2})^4 dx \\
 & + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{F_{j+1/2}^v}{120} (x - x_{j+1/2})^5 dx \\
 & + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{F_{j+1/2}^{vi}}{720} (x - x_{j+1/2})^6 dx \\
 & + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{F_{j+1/2}^{vii}}{5040} (x - x_{j+1/2})^7 dx \\
 & + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{F_{j+1/2}^{viii}}{40320} (x - x_{j+1/2})^8 dx + \dots
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Novamente emprega-se a variável auxiliar z , mas desta vez em relação ao ponto $x_{j+1/2}$ para aplicar como limites de integração inferior e superior

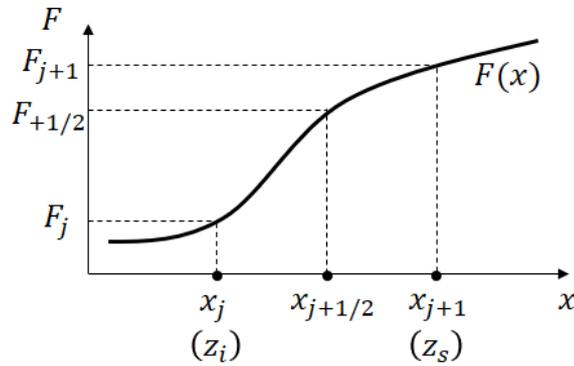
$$z = x - x_{j+1/2}, \tag{3.29}$$

$$dz = dx, \tag{3.30}$$

$$z_i = x_j - x_{j+1/2} = -\frac{h}{2}, \tag{3.31}$$

$$z_s = x_{j+1} - x_{j+1/2} = \frac{h}{2}. \tag{3.32}$$

Em forma gráfica as variáveis z_i e z_s ficam conforme a FIGURA 3.3.

FIGURA 3.3 - INTEGRAÇÃO DA FUNÇÃO F DO NÓ j ATÉ O NÓ $j + 1$ 

FONTE: O Autor (2020)

Substituindo a Eq. (3.29) até a Eq. (3.32) em cada termo da Eq. (3.28) tem-se

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} F_{j+1/2} dx = F_{j+1/2} \int_{z_i}^{z_s} dz = F_{j+1/2} z \Big|_{-h/2}^{h/2} = F_{j+1/2} h, \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} F_{j+1/2}^i (x - x_{j+1/2}) dx &= F_{j+1/2}^i \int_{z_i}^{z_s} z dz = F_{j+1/2}^i \frac{z^2}{2} \Big|_{-h/2}^{h/2} \\ &= \frac{F_{j+1/2}^i}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - \left(\frac{-h}{2} \right)^2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{F_{j+1/2}^{ii}}{2} (x - x_{j+1/2})^2 dx &= \frac{F_{j+1/2}^{ii}}{2} \int_{z_i}^{z_s} z^2 dz = \frac{F_{j+1/2}^{ii}}{2} \frac{z^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} \\ &= \frac{F_{j+1/2}^{ii}}{6} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^3 - \left(\frac{-h}{2} \right)^3 \right] = \frac{2F_{j+1/2}^{ii}}{48} h^3, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{F_{j+1/2}^{iii}}{6} (x - x_{j+1/2})^3 dx &= \frac{F_{j+1/2}^{iii}}{6} \int_{z_i}^{z_s} z^3 dz = \frac{F_{j+1/2}^{iii}}{6} \frac{z^4}{4} \Big|_{-h/2}^{h/2} \\ &= \frac{F_{j+1/2}^{iii}}{24} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^4 - \left(\frac{-h}{2} \right)^4 \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{F_{j+1/2}^{iv}}{24} (x - x_{j+1/2})^4 dx &= \frac{F_{j+1/2}^{iv}}{24} \int_{z_i}^{z_s} z^4 dz = \frac{F_{j+1/2}^{iv}}{24} \frac{z^5}{5} \Big|_{-h/2}^{h/2} \\
&= \frac{F_{j+1/2}^{iv}}{120} \left[\left(\frac{h}{2}\right)^5 - \left(\frac{-h}{2}\right)^5 \right] = \frac{2F_{j+1/2}^{iv}}{3840} h^5,
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{F_{j+1/2}^v}{120} (x - x_{j+1/2})^5 dx &= \frac{F_{j+1/2}^v}{120} \int_{z_i}^{z_s} z^5 dz = \frac{F_{j+1/2}^v}{120} \frac{z^6}{6} \Big|_{-h/2}^{h/2} \\
&= \frac{F_{j+1/2}^v}{720} \left[\left(\frac{h}{2}\right)^6 - \left(\frac{-h}{2}\right)^6 \right] = 0,
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{F_{j+1/2}^{vi}}{720} (x - x_{j+1/2})^6 dx &= \frac{F_{j+1/2}^{vi}}{720} \int_{z_i}^{z_s} z^6 dz = \frac{F_{j+1/2}^{vi}}{720} \frac{z^7}{7} \Big|_{-h/2}^{h/2} \\
&= \frac{F_{j+1/2}^{vi}}{5040} \left[\left(\frac{h}{2}\right)^7 - \left(\frac{-h}{2}\right)^7 \right] = \frac{2F_{j+1/2}^{vi}}{645120} h^7,
\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{F_{j+1/2}^{vii}}{5040} (x - x_{j+1/2})^7 dx &= \frac{F_{j+1/2}^{vii}}{5040} \int_{z_i}^{z_s} z^7 dz = \frac{F_{j+1/2}^{vii}}{5040} \frac{z^8}{8} \Big|_{-h/2}^{h/2} \\
&= \frac{F_{j+1/2}^{vii}}{40320} \left[\left(\frac{h}{2}\right)^8 - \left(\frac{-h}{2}\right)^8 \right] = 0,
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{F_{j+1/2}^{viii}}{40320} (x - x_{j+1/2})^8 dx &= \frac{F_{j+1/2}^{viii}}{40320} \int_{z_i}^{z_s} z^8 dz = \frac{F_{j+1/2}^{viii}}{40320} \frac{z^9}{9} \Big|_{-h/2}^{h/2} \\
&= \frac{F_{j+1/2}^{viii}}{362880} \left[\left(\frac{h}{2}\right)^9 - \left(\frac{-h}{2}\right)^9 \right] = \frac{2F_{j+1/2}^{viii}}{185794560} h^9.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Substituindo a Eq. (3.33) até a Eq. (3.41) na Eq. (3.28) tem-se

$$\begin{aligned}
I_{[j,j+1]}^{exata} &= F_{j+1/2} h + \frac{2F_{j+1/2}^{ii}}{48} h^3 + \frac{2F_{j+1/2}^{iv}}{3840} h^5 + \frac{2F_{j+1/2}^{vi}}{645120} h^7 \\
&\quad + \frac{2F_{j+1/2}^{viii}}{185794560} h^9 + \dots.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

A integral exata no intervalo $[x_{j-1}; x_{j+1}]$ é obtida substituindo a Eq. (3.25) e Eq. (3.42) na Eq. (3.8)

$$\begin{aligned}
I_{[j-1,j+1]}^{exata} &= (F_{j-1/2} + F_{j+1/2})h + \frac{2}{48}(F_{j-1/2}^{ii} + F_{j+1/2}^{ii})h^3 \\
&+ \frac{2}{3840}(F_{j-1/2}^{iv} + F_{j+1/2}^{iv})h^5 \\
&+ \frac{2}{645120}(F_{j-1/2}^{vi} + F_{j+1/2}^{vi})h^7 \\
&+ \frac{2}{185794560}(F_{j-1/2}^{viii} + F_{j+1/2}^{viii})h^9 + \dots.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Por enquanto a Eq. (3.43) não possui nenhum valor da função $F_{(x)}$ nos pontos nodais F_{j-1} e F_j , então é necessário fazer $F_{(x)} = F_{j-1}$ em $x = x_{j-1}$ na Eq. (3.9)

$$\begin{aligned}
F_{j-1} &= F_{j-1/2} + F_{j-1/2}^i \left(\frac{-h}{2}\right) + \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{2} \left(\frac{-h}{2}\right)^2 + \frac{F_{j-1/2}^{iii}}{6} \left(\frac{-h}{2}\right)^3 \\
&+ \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{24} \left(\frac{-h}{2}\right)^4 + \frac{F_{j-1/2}^v}{120} \left(\frac{-h}{2}\right)^5 + \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{720} \left(\frac{-h}{2}\right)^6 \\
&+ \frac{F_{j-1/2}^{vii}}{5040} \left(\frac{-h}{2}\right)^7 + \frac{F_{j-1/2}^{viii}}{40320} \left(\frac{-h}{2}\right)^8 + \frac{F_{j-1/2}^{ix}}{362880} \left(\frac{-h}{2}\right)^9 + \dots.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}
F_{j-1} &= F_{j-1/2} - \frac{F_{j-1/2}^i}{2} h + \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{8} h^2 - \frac{F_{j-1/2}^{iii}}{48} h^3 + \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{384} h^4 - \frac{F_{j-1/2}^v}{3840} h^5 \\
&+ \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{46080} h^6 - \frac{F_{j-1/2}^{vii}}{645120} h^7 + \frac{F_{j-1/2}^{viii}}{10321920} h^8 \\
&- \frac{F_{j-1/2}^{ix}}{185794560} h^9 + \dots.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Aplicando o mesmo procedimento para o ponto $x = x_j$, onde $F_{(x)} = F_j$, obtém-se

$$\begin{aligned}
F_j = F_{j-1/2} + \frac{F_{j-1/2}^i}{2} h + \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{8} h^2 + \frac{F_{j-1/2}^{iii}}{48} h^3 + \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{384} h^4 + \frac{F_{j-1/2}^v}{3840} h^5 \\
+ \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{46080} h^6 + \frac{F_{j-1/2}^{vii}}{645120} h^7 + \frac{F_{j-1/2}^{viii}}{10321920} h^8 \\
+ \frac{F_{j-1/2}^{ix}}{185794560} h^9 + \dots
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Somando-se a Eq. (3.45) com a Eq. (3.46) e isolando $F_{j-1/2}$ tem-se

$$\begin{aligned}
F_{j-1/2} = \frac{F_{j-1} + F_j}{2} - \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{8} h^2 - \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{384} h^4 - \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{46080} h^6 - \frac{F_{j-1/2}^{viii}}{10321920} h^8 \\
- \dots
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Para obter uma equação para $F_{j+1/2}$ basta fazer $F_{(x)} = F_j$ em $x = x_j$ na Eq. (3.26), assim como $F_{(x)} = F_{j+1}$ em $x = x_{j+1}$

$$\begin{aligned}
F_j = F_{j+1/2} - \frac{F_{j+1/2}^i}{2} h + \frac{F_{j+1/2}^{ii}}{8} h^2 - \frac{F_{j+1/2}^{iii}}{48} h^3 + \frac{F_{j+1/2}^{iv}}{384} h^4 - \frac{F_{j+1/2}^v}{3840} h^5 \\
+ \frac{F_{j+1/2}^{vi}}{46080} h^6 - \frac{F_{j+1/2}^{vii}}{645120} h^7 + \frac{F_{j+1/2}^{viii}}{10321920} h^8 \\
- \frac{F_{j+1/2}^{ix}}{185794560} h^9 + \dots,
\end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}
F_{j+1} = F_{j+1/2} + \frac{F_{j+1/2}^i}{2} h + \frac{F_{j+1/2}^{ii}}{8} h^2 + \frac{F_{j+1/2}^{iii}}{48} h^3 + \frac{F_{j+1/2}^{iv}}{384} h^4 + \frac{F_{j+1/2}^v}{3840} h^5 \\
+ \frac{F_{j+1/2}^{vi}}{46080} h^6 + \frac{F_{j+1/2}^{vii}}{645120} h^7 + \frac{F_{j+1/2}^{viii}}{10321920} h^8 \\
+ \frac{F_{j+1/2}^{ix}}{185794560} h^9 + \dots
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Somando-se a Eq. (3.48) com a Eq. (3.49) e isolando $F_{j+1/2}$ tem-se

$$\begin{aligned}
F_{j+1/2} = \frac{F_j + F_{j+1}}{2} - \frac{F_{j+1/2}^{ii}}{8} h^2 - \frac{F_{j+1/2}^{iv}}{384} h^4 - \frac{F_{j+1/2}^{vi}}{46080} h^6 - \frac{F_{j+1/2}^{viii}}{10321920} h^8 \\
- \dots
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Substituindo a Eq. (3.47) e a Eq. (3.50) na Eq. (3.43) obtém-se uma equação para a integral exata no intervalo $[x_{j-1}; x_{j+1}]$

$$\begin{aligned}
 I_{[j-1,j+1]}^{exata} = & \frac{(F_{j-1} + 2F_j + F_{j+1})}{2} h - \frac{4}{48} (F_{j-1/2}^{ii} + F_{j+1/2}^{ii}) h^3 \\
 & - \frac{8}{3840} (F_{j-1/2}^{iv} + F_{j+1/2}^{iv}) h^5 \\
 & - \frac{12}{645120} (F_{j-1/2}^{vi} + F_{j+1/2}^{vi}) h^7 \\
 & + \frac{16}{185794560} (F_{j-1/2}^{viii} + F_{j+1/2}^{viii}) h^9 - \dots.
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

Agora a Eq. (3.51) possui em seu primeiro termo no lado direito os valores da variável nos pontos nodais, porém observa-se que o segundo termo do lado direito (e primeiro termo do erro de truncamento) é de ordem três, enquanto sabe-se que é de ordem cinco para dois intervalos discretos (CHAPRA; CANALE, 2015, p. 617). Também se observa que o primeiro termo não constitui a aproximação da Regra de Simpson. Estas constatações ocorrem porque ainda é possível expandir a função $F(x)$ nos pontos nodais e manipular as equações de modo a obter $F_{j-1/2}^{ii}$ e $F_{j+1/2}^{ii}$, de forma similar ao que foi feito desde a Eq. (3.44) até a Eq. (3.51).

A fim de obter $F_{j-1/2}^{ii}$ em função dos pontos nodais, toma-se as Eq. (3.45), Eq. (3.46) e a Eq. (3.53) deduzida a seguir como uma expressão para F_{j+1} no entorno de $x_{j-1/2}$

$$\begin{aligned}
 F_{j+1} = & F_{j-1/2} + F_{j-1/2}^i \left(\frac{3h}{2}\right) + \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{2} \left(\frac{3h}{2}\right)^2 + \frac{F_{j-1/2}^{iii}}{6} \left(\frac{3h}{2}\right)^3 \\
 & + \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{24} \left(\frac{3h}{2}\right)^4 + \frac{F_{j-1/2}^v}{120} \left(\frac{3h}{2}\right)^5 + \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{720} \left(\frac{3h}{2}\right)^6 \\
 & + \frac{F_{j-1/2}^{vii}}{5040} \left(\frac{3h}{2}\right)^7 + \frac{F_{j-1/2}^{viii}}{40320} \left(\frac{3h}{2}\right)^8 + \dots.
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}
F_{j+1} = F_{j-1/2} &+ \frac{3F_{j-1/2}^i}{2}h + \frac{9F_{j-1/2}^{ii}}{8}h^2 + \frac{27F_{j-1/2}^{iii}}{48}h^3 + \frac{81F_{j-1/2}^{iv}}{384}h^4 \\
&+ \frac{243F_{j-1/2}^v}{3840}h^5 + \frac{729F_{j-1/2}^{vi}}{46080}h^6 + \frac{2187F_{j-1/2}^{vii}}{645120}h^7 \\
&+ \frac{6561F_{j-1/2}^{viii}}{10321920}h^8 + \dots
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Assim, tem-se o seguinte sistema linear

$$\left\{ \begin{aligned}
F_{j-1} &= F_{j-1/2} - \frac{F_{j-1/2}^i}{2}h + \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{8}h^2 - \frac{F_{j-1/2}^{iii}}{48}h^3 + \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{384}h^4 - \dots \\
F_j &= F_{j-1/2} + \frac{F_{j-1/2}^i}{2}h + \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{8}h^2 + \frac{F_{j-1/2}^{iii}}{48}h^3 + \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{384}h^4 + \dots \\
F_{j+1} &= F_{j-1/2} + \frac{3F_{j-1/2}^i}{2}h + \frac{9F_{j-1/2}^{ii}}{8}h^2 + \frac{27F_{j-1/2}^{iii}}{48}h^3 + \frac{81F_{j-1/2}^{iv}}{384}h^4 + \dots
\end{aligned} \right. \tag{3.54}$$

Embora foram representados até os termos de ordem quatro, os cálculos devem considerar até a ordem oito, a fim de que o resultado, quando substituído na Eq. (3.51) produza termos de ordem nove, ou seja, em acordo com o restante das equações.

A fim de obter uma expressão de $F_{j-1/2}^{ii}$ com $h \geq 1$ é necessário cancelar os termos sublinhados nas equações que compõem o sistema (4.54). Desta forma, pode-se criar outro sistema linear de equações, que permita calcular as constantes multiplicadoras das Eq. (3.54) de forma que, ao somá-las, os termos de ordem baixa sejam cancelados

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 3/2 \\ 1/8 & 1/8 & 9/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C \end{bmatrix}, \quad C \neq 0 \tag{3.55}$$

Resolvendo-se o sistema linear, Eq. (3.55) e assumindo que $C = 1$ tem-se que $X = 1$; $Y = -2$ e $Z = 1$. Conclui-se que para isolar $F_{j-1/2}^{ii}$ basta multiplicar a equação para F_j na Eq. (3.54) por -2 e somar com as outras equações que compõem o sistema. Feito isso, tem-se

$$\begin{aligned}
F_{j-1/2}^{ii} = & \frac{F_{j-1} - 2F_j + F_{j+1}}{h^2} - \frac{24F_{j-1/2}^{iii}}{48}h - \frac{80F_{j-1/2}^{iv}}{384}h^2 - \frac{240F_{j-1/2}^v}{3840}h^3 \\
& - \frac{728F_{j-1/2}^{vi}}{46080}h^4 - \frac{2184F_{j-1/2}^{vii}}{645120}h^5 - \frac{6560F_{j-1/2}^{viii}}{10321920}h^6 - \dots.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

A fim de obter $F_{j+1/2}^{ii}$ em função dos pontos nodais, toma-se a Eq. (3.48), Eq. (3.49) e a Eq. (3.58) deduzida a seguir, obtida da expansão de F_{j-1} no entorno do ponto $x_{j+1/2}$

$$\begin{aligned}
F_{j-1} = & F_{j+1/2} + F_{j+1/2}^i \left(\frac{-3h}{2}\right) + \frac{F_{j+1/2}^{ii}}{2} \left(\frac{-3h}{2}\right)^2 + \frac{F_{j+1/2}^{iii}}{6} \left(\frac{-3h}{2}\right)^3 \\
& + \frac{F_{j+1/2}^{iv}}{24} \left(\frac{-3h}{2}\right)^4 + \frac{F_{j+1/2}^v}{120} \left(\frac{-3h}{2}\right)^5 + \frac{F_{j+1/2}^{vi}}{720} \left(\frac{-3h}{2}\right)^6 \\
& + \frac{F_{j+1/2}^{vii}}{5040} \left(\frac{-3h}{2}\right)^7 + \frac{F_{j+1/2}^{viii}}{40320} \left(\frac{-3h}{2}\right)^8 + \dots,
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}
F_{j-1} = & F_{j+1/2} - \frac{3F_{j+1/2}^i}{2}h + \frac{9F_{j+1/2}^{ii}}{8}h^2 - \frac{27F_{j+1/2}^{iii}}{48}h^3 + \frac{81F_{j+1/2}^{iv}}{384}h^4 \\
& - \frac{243F_{j+1/2}^v}{3840}h^5 + \frac{729F_{j+1/2}^{vi}}{46080}h^6 - \frac{2187F_{j+1/2}^{vii}}{645120}h^7 \\
& + \frac{6561F_{j+1/2}^{viii}}{10321920}h^8 - \dots.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Assim, tem-se o seguinte sistema linear

$$\left\{ \begin{aligned}
F_{j-1} &= F_{j+1/2} - \frac{3F_{j+1/2}^i}{2}h + \frac{9F_{j+1/2}^{ii}}{8}h^2 - \frac{27F_{j+1/2}^{iii}}{48}h^3 + \frac{81F_{j+1/2}^{iv}}{384}h^4 - \dots \\
F_j &= F_{j+1/2} - \frac{F_{j+1/2}^i}{2}h + \frac{F_{j+1/2}^{ii}}{8}h^2 - \frac{F_{j+1/2}^{iii}}{48}h^3 + \frac{F_{j+1/2}^{iv}}{384}h^4 - \dots \\
F_{j+1} &= F_{j+1/2} + \frac{F_{j+1/2}^i}{2}h + \frac{F_{j+1/2}^{ii}}{8}h^2 + \frac{F_{j+1/2}^{iii}}{48}h^3 + \frac{F_{j+1/2}^{iv}}{384}h^4 + \dots
\end{aligned} \right. \tag{3.59}$$

Repetindo o procedimento descrito após a Eq. (3.54) verifica-se que para isolar $F_{j+1/2}^{ii}$ deve-se multiplicar a equação de F_j em (3.59) por -2 e somá-la com as demais equações. Feito isso obtém-se

$$\begin{aligned}
F_{j+1/2}^{ii} = & \frac{F_{j-1} - 2F_j + F_{j+1/2}}{h^2} + \frac{24F_{j+1/2}^{iii}}{48}h - \frac{80F_{j+1/2}^{iv}}{384}h^2 + \frac{240F_{j+1/2}^v}{3840}h^3 \\
& - \frac{728F_{j+1/2}^{vi}}{46080}h^4 + \frac{2184F_{j+1/2}^{vii}}{645120}h^5 - \frac{6560F_{j+1/2}^{viii}}{10321920}h^6 + \dots.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Substituindo a Eq. (3.56) e Eq. (3.60) na Eq. (3.51) tem-se

$$\begin{aligned}
I_{[j-1,j+1]}^{exata} = & \frac{(F_{j-1} + 2F_j + F_{j+1})}{2}h \\
& - \frac{4}{48} \left[\frac{F_{j-1} - 2F_j + F_{j+1}}{h^2} - \frac{24F_{j-1/2}^{iii}}{48}h - \frac{80F_{j-1/2}^{iv}}{384}h^2 \right. \\
& - \frac{240F_{j-1/2}^v}{3840}h^3 - \frac{728F_{j-1/2}^{vi}}{46080}h^4 - \frac{2184F_{j-1/2}^{vii}}{645120}h^5 \\
& - \frac{6560F_{j-1/2}^{viii}}{10321920}h^6 - \dots + \frac{F_{j-1} - 2F_j + F_{j+1}}{h^2} + \frac{24F_{j+1/2}^{iii}}{48}h \\
& - \frac{80F_{j+1/2}^{iv}}{384}h^2 + \frac{240F_{j+1/2}^v}{3840}h^3 - \frac{728F_{j+1/2}^{vi}}{46080}h^4 \\
& \left. + \frac{2184F_{j+1/2}^{vii}}{645120}h^5 - \frac{6560F_{j+1/2}^{viii}}{10321920}h^6 + \dots \right] h^3 \\
& - \frac{8}{3840}(F_{j-1/2}^{iv} + F_{j+1/2}^{iv})h^5 - \frac{12}{645120}(F_{j-1/2}^{vi} + F_{j+1/2}^{vi})h^7 \\
& + \frac{16}{185794560}(F_{j-1/2}^{viii} + F_{j+1/2}^{viii})h^9 - \dots,
\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}
I_{[j-1,j+1]}^{exata} = & \frac{(F_{j-1} + 4F_j + F_{j+1})}{3}h + \frac{(F_{j-1/2}^{iii} - F_{j+1/2}^{iii})}{24}h^4 \\
& + \frac{11(F_{j-1/2}^{iv} + F_{j+1/2}^{iv})}{720}h^5 + \frac{(F_{j-1/2}^v - F_{j+1/2}^v)}{192}h^6 \\
& + \frac{157(F_{j-1/2}^{vi} + F_{j+1/2}^{vi})}{120960}h^7 + \frac{13(F_{j-1/2}^{vii} - F_{j+1/2}^{vii})}{46080}h^8 \\
& + \frac{307(F_{j-1/2}^{viii} + F_{j+1/2}^{viii})}{5806080}h^9 + \dots.
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Observa-se que o primeiro termo do lado direito da Eq. (3.62) é a aproximação da Regra de Simpson, porém os termos do erro estão escritos com base nos pontos $x_{j-1/2}$ e $x_{j+1/2}$ e não

com base em x_j . Também se observa que o termo de mais baixa ordem é de ordem quatro, enquanto a ordem esperada é a quinta.

O último passo da dedução envolve a expansão em Série de Taylor de todas as derivadas até oitava ordem no entorno do ponto x_j

$$F_{j-1/2}^{iii} = F_j^{iiii} - \frac{F_j^{iv}}{2}h + \frac{F_j^v}{8}h^2 - \frac{F_j^{vi}}{48}h^3 + \frac{F_j^{vii}}{384}h^4 - \frac{F_j^{viii}}{3840}h^5 + \dots, \quad (3.63)$$

$$F_{j+1/2}^{iii} = F_j^{iiii} + \frac{F_j^{iv}}{2}h + \frac{F_j^v}{8}h^2 + \frac{F_j^{vi}}{48}h^3 + \frac{F_j^{vii}}{384}h^4 + \frac{F_j^{viii}}{3840}h^5 + \dots, \quad (3.64)$$

$$F_{j-1/2}^{iv} = F_j^{iv} - \frac{F_j^v}{2}h + \frac{F_j^{vi}}{8}h^2 - \frac{F_j^{vii}}{48}h^3 + \frac{F_j^{viii}}{384}h^4 - \dots, \quad (3.65)$$

$$F_{j+1/2}^{iv} = F_j^{iv} + \frac{F_j^v}{2}h + \frac{F_j^{vi}}{8}h^2 + \frac{F_j^{vii}}{48}h^3 + \frac{F_j^{viii}}{384}h^4 + \dots, \quad (3.66)$$

$$F_{j-1/2}^v = F_j^v - \frac{F_j^{vi}}{2}h + \frac{F_j^{vii}}{8}h^2 - \frac{F_j^{viii}}{48}h^3 + \dots, \quad (3.67)$$

$$F_{j+1/2}^v = F_j^v + \frac{F_j^{vi}}{2}h + \frac{F_j^{vii}}{8}h^2 + \frac{F_j^{viii}}{48}h^3 + \dots, \quad (3.68)$$

$$F_{j-1/2}^{vi} = F_j^{vi} - \frac{F_j^{vii}}{2}h + \frac{F_j^{viii}}{8}h^2 - \dots, \quad (3.69)$$

$$F_{j+1/2}^{vi} = F_j^{vi} + \frac{F_j^{vii}}{2}h + \frac{F_j^{viii}}{8}h^2 + \dots, \quad (3.70)$$

$$F_{j-1/2}^{vii} = F_j^{vii} - \frac{F_j^{viii}}{2}h + \dots, \quad (3.71)$$

$$F_{j+1/2}^{vii} = F_j^{vii} + \frac{F_j^{viii}}{2}h + \dots, \quad (3.72)$$

$$F_{j-1/2}^{viii} = F_j^{viii} - \dots, \quad (3.73)$$

$$F_{j+1/2}^{viii} = F_j^{viii} + \dots. \quad (3.74)$$

Substituindo da Eq. (3.63) até a Eq. (3.74) na Eq. (3.62) e organizando os termos tem-se

$$I_{[j-1,j+1]}^{exata} = \frac{(F_{j-1} + 4F_j + F_{j+1})}{3} h - \frac{1}{90} F_j^{iv} h^5 - \frac{1}{1890} F_j^{vi} h^7 - \frac{1}{90720} F_j^{viii} h^9 - \dots. \quad (3.75)$$

A Eq. (3.75) é a integral exata da função $F_{(x)}$ no intervalo $[x_{j-1}; x_{j+1}]$. O primeiro termo do lado direito é a aproximação da integral conhecida por Regra 1/3 de Simpson, dada por

$$I_{[j-1,j+1]}^{Simpson} = \frac{(F_{j-1} + 4F_j + F_{j+1})}{3} h, \quad (3.76)$$

enquanto os demais termos constituem o erro de truncamento $E_{[j-1,j+1]}^{num}$, dado por

$$E_{[j-1,j+1]}^{num} = -\frac{1}{90} F_j^{iv} h^5 - \frac{1}{1890} F_j^{vi} h^7 - \frac{1}{90720} F_j^{viii} h^9 - \dots. \quad (3.77)$$

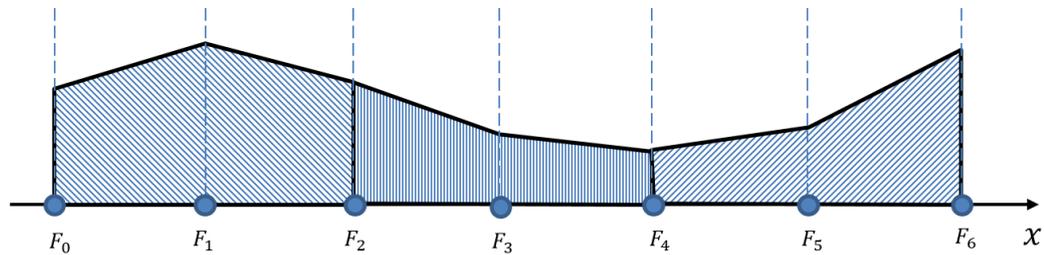
Comparando a Eq. (3.7) com a Eq. (3.77), vê-se que ambas possuem ordem cinco, mesmo coeficiente numérico e envolvem a derivada de quarta ordem. A diferença é que a Eq. (3.7) se constitui de um termo único e a derivada de quarta ordem é avaliada no ponto ξ , que está posicionado em alguma posição desconhecida dentro do intervalo $]x_{j-1}, x_{j+1}[$. Já na Eq. (3.77) a derivada é avaliada no ponto nodal x_j e há infinitos termos, sempre de ordem ímpar maior e igual a cinco.

Com base na Eq. (3.77), tem-se que a Regra 1/3 de Simpson para dois intervalos discretos possui ordens verdadeiras

$$p_m = 5, 7, 9, \dots \quad (3.78)$$

Uma vez feita a dedução da equação do erro de truncamento para dois intervalos, então deve-se deduzir como fica a equação do erro para o domínio completo contendo N intervalos discretos, sendo que para a Regra 1/3 de Simpson N é um número par, maior ou igual a 2. Desta forma o número de pontos nodais do domínio ($N + 1$) será sempre ímpar e nomeados conforme mostrado na FIGURA 3.4 abaixo, para a qual se escolheu arbitrariamente $N = 6$, ou seja, haverá 7 pontos nomeados como $P = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

FIGURA 3.4 – INTEGRAL NO DOMÍNIO COMPLETO CONTENDO 6 INTERVALOS DISCRETOS



FONTE: O Autor (2020)

A integral numérica considerando todo o domínio é dada em Chapra e Canale (2015, p.618)

$$I_L^{exata} = \frac{h}{3} \left[F_0 + 4 \sum_{i=1,3,5,\dots}^{N-1} (F_i) + 2 \sum_{j=2,4,\dots}^{N-2} (F_j) + F_N \right] - \frac{(b-a)}{180} F_\mu^{iv} h^4, \quad (3.79)$$

onde a posição do ponto μ é desconhecida, porém dentro do domínio, ou seja, $a < \mu < b$. A aproximação da integral exata em todo o domínio usando a Regra de Simpson é

$$I_L^{num} = \frac{h}{3} \left[F_0 + 4 \sum_{i=1,3,5,\dots}^{N-1} (F_i) + 2 \sum_{j=2,4,\dots}^{N-2} (F_j) + F_N \right]. \quad (3.80)$$

Em termos dos pontos nodais genéricos $j - 1, j$ e $j + 1$ e considerando o exemplo da FIGURA 3.4, a Eq. (3.80) pode ser escrita em uma forma mais conveniente

$$\begin{aligned}
I_L^{num} &= \sum_{j=1,3,5,\dots}^{N-1} \frac{h}{3} (F_{j-1} + 4F_j + F_{j+1}) \\
&= \frac{h}{3} [(F_0 + 4F_1 + F_2) + (F_2 + 4F_3 + F_4) + (F_4 + 4F_5 + F_6)].
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Considerando a integral analítica I_L^{exata} no domínio completo, por exemplo, no intervalo $[a, b]$, onde $L = b - a$, então pode-se escrever, com base na forma da Eq. (3.75)

$$\begin{aligned}
I_L^{exata} &= \int_a^b F(x) dx = \int_0^L F(x) dx \\
&= \sum_{j=1,3,5,\dots}^{N-1} \frac{(F_{j-1} + 4F_j + F_{j+1})}{3} h \\
&+ \sum_{j=1,3,5,\dots}^{N-1} \left[-\frac{1}{90} F_j^{iv} h^5 - \frac{1}{1890} F_j^{vi} h^7 - \frac{1}{90720} F_j^{viii} h^9 - \dots \right],
\end{aligned} \tag{3.82}$$

onde o primeiro termo do lado direito da Eq. (3.82) é a integral numérica dada pela Regra de Simpson, Eq. (3.81), e o segundo termo do mesmo lado representa o erro de truncamento em todo o domínio E_L^{num} , ou seja

$$E_L^{num} = \sum_{j=1,3,5,\dots}^{N-1} \left[-\frac{1}{90} F_j^{iv} h^5 - \frac{1}{1890} F_j^{vi} h^7 - \frac{1}{90720} F_j^{viii} h^9 - \dots \right]. \tag{3.83}$$

Definindo as seguintes médias de derivadas

$$\overline{F_j^{iv}} = \frac{\sum_{j=1,3,\dots}^{N-1} F_j^{iv}}{(N/2)}, \tag{3.84}$$

$$\overline{F_j^{vi}} = \frac{\sum_{j=1,3,\dots}^{N-1} F_j^{vi}}{(N/2)}, \tag{3.85}$$

$$\overline{F_j^{viii}} = \frac{\sum_{j=1,3,\dots}^{N-1} F_j^{viii}}{(N/2)}, \tag{3.86}$$

que substituídas na Eq. (3.83) produzem

$$E_L^{num} = -\frac{1}{90} \overline{F_j^{iv}} \frac{N}{2} h^5 - \frac{1}{1890} \overline{F_j^{vi}} \frac{N}{2} h^7 - \frac{1}{90720} \overline{F_j^{viii}} \frac{N}{2} h^9 - \dots \quad (3.87)$$

Isolando N e um h de cada potência tem-se

$$E_L^{num} = Nh \left(-\frac{1}{180} \overline{F_j^{iv}} h^4 - \frac{1}{3780} \overline{F_j^{vi}} h^6 - \frac{1}{181440} \overline{F_j^{viii}} h^8 - \dots \right). \quad (3.88)$$

Como $h = L/N$, então $L = Nh$, que substituído na Eq. (3.88) reduz a ordem de cada termo da série

$$E_L^{num} = -L \left(\frac{1}{180} \overline{F_j^{iv}} h^4 + \frac{1}{3780} \overline{F_j^{vi}} h^6 + \frac{1}{181440} \overline{F_j^{viii}} h^8 + \dots \right). \quad (3.89)$$

A Eq. (3.89) representa o erro de discretização proveniente da aplicação da Regra 1/3 de Simpson em um domínio unidimensional segundo a técnica de expansões em Série de Taylor. Assim, tem-se que a ordem assintótica p_0 da Regra de Simpson é quatro e que o intervalo entre ordens sucessivas é dois, ou seja, as ordens verdadeiras p_m são

$$p_m = 4, 6, 8, \dots \quad (3.90)$$

Todos os resultados apresentados nesta seção são obtidos de um programa de computador escrito pelo autor na linguagem FORTRAN95 e denominado 'Projeto_0_Tese', composto por duas partes distintas, uma dedicada à solução do modelo matemático e a outra dedicada à aplicação de MER. Todas as variáveis empregadas são de precisão quádrupla.

As soluções analíticas utilizadas para o cálculo do erro de discretização foram obtidas pelo autor com o *software* MAPLE17 fixando o número de algarismos significativos em 50, sendo que os 34 primeiros foram copiados para compor a solução analítica, fazendo-a compatível com a precisão quádrupla.

Embora a equação do erro de discretização da Regra de Simpson, Eq. (3.89) não constitua uma dedução formal, é possível avaliar se ela está correta por meio de testes sistemáticos de funções polinomiais. Sua vantagem é que possuem um número específico de derivadas não nulas, e como a Eq. (3.89) possui derivadas da variável dependente em cada um

de seus termos, então uma análise pode ser feita selecionando polinômios de graus progressivamente maiores a fim de testar se cada termo da referida equação está correto.

Polinômios de ordem quatro e cinco tem apenas um termo não nulo na Eq. (3.89), enquanto polinômios de ordem seis e sete terão dois termos, e assim por diante. Mediante a aplicação de MER, após um determinado número de extrapolações a solução analítica deve ser atingida em todas as malhas e ordens efetivas maiores não existirão.

Também estão incluídas nas análises as funções e^x e $\sin x$. Como elas possuem um número infinito de derivadas não nulas, então elas permitirão a obtenção de tantos níveis de extrapolação quanto possíveis.

Iniciando com os polinômios, as funções testadas são representadas de forma geral como

$$I = \int_2^5 x^n dx, \quad (3.91)$$

onde $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20$. Os limites de integração são arbitrários e escolhidos de forma a evitar o intervalo clássico $[0,1]$ que não exercita a variável L na Eq. (3.89).

A TABELA 3.1 mostra as soluções numéricas para $n = 4$, cuja solução analítica é $\Phi = 618,6$. O problema foi resolvido em 14 malhas contendo de 2 até 16.384 elementos discretos. A integração de x^4 possui apenas o primeiro termo não nulo na Eq. (3.89), então após a primeira extrapolação ($m = 1$) a solução analítica é atingida em todas as malhas. Apesar de não mostrados na TABELA 3.1, valores para $m > 1$ e $g \geq m + 1$ são os mesmos de $m = 1$.

Como a solução analítica é atingida após uma extrapolação, apenas a quarta ordem é observada, conforme o esperado. Isto é facilmente observado na FIGURA 3.5 como a inclinação do logaritmo do erro de discretização em função do logaritmo do tamanho do elemento de malha. Ambas p_E e p_U resultam iguais a $p_0 = 4$, como mostrado na FIGURA 3.6.

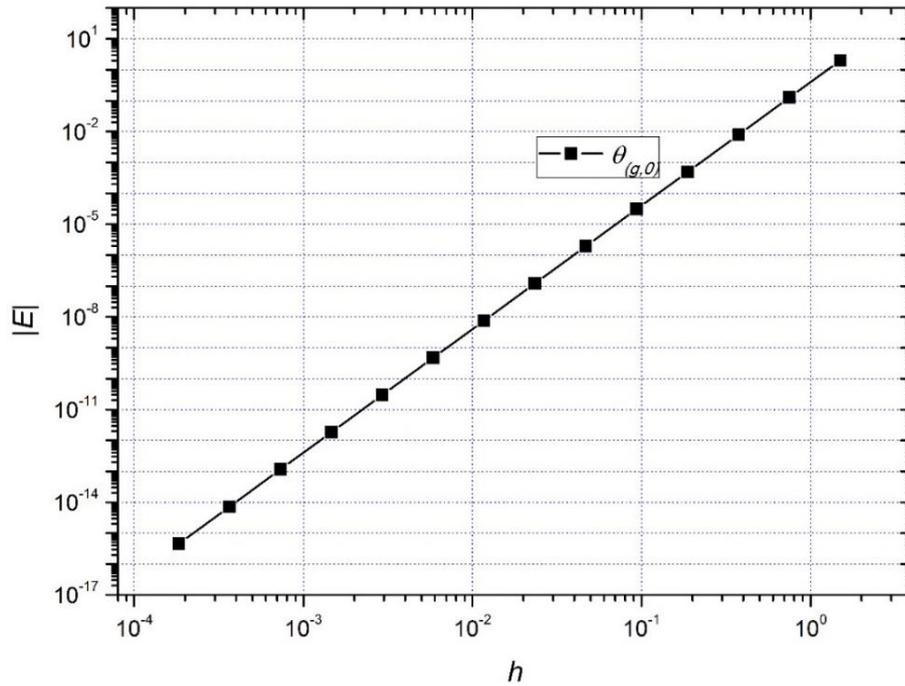
Embora não mostrados aqui, resultados similares são obtidos para o caso $n = 5$, conforme esperado considerando-se a Eq. (3.89). Isto porque o polinômio de ordem 5 possui cinco derivadas não nulas e apenas a quarta aparece na referida equação.

TABELA 3.1 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS $\theta_{(g,m)}$ DA EQ. (3.89) PARA $n = 4$.

g ↓	$m \rightarrow$	
	0	1
1	6,206250000000000000000000000000E+02	-
2	6,187265625000000000000000000000E+02	
3	6,186079101562500000000000000000E+02	
4	6,186004943847656250000000000000E+02	
5	6,186000308990478515625000000000E+02	
6	6,186000019311904907226562500000E+02	
7	6,1860000012069940567016601562500E+02	
8	6,186000000754371285438537597656E+02	6,186000000000000000000000000000E+02
9	6,186000000047148205339908599854E+02	
10	6,186000000002946762833744287491E+02	
11	6,186000000000184172677109017968E+02	
12	6,186000000000011510792319313623E+02	
13	6,186000000000000719424519957101E+02	
14	6,186000000000000044964032497319E+02	

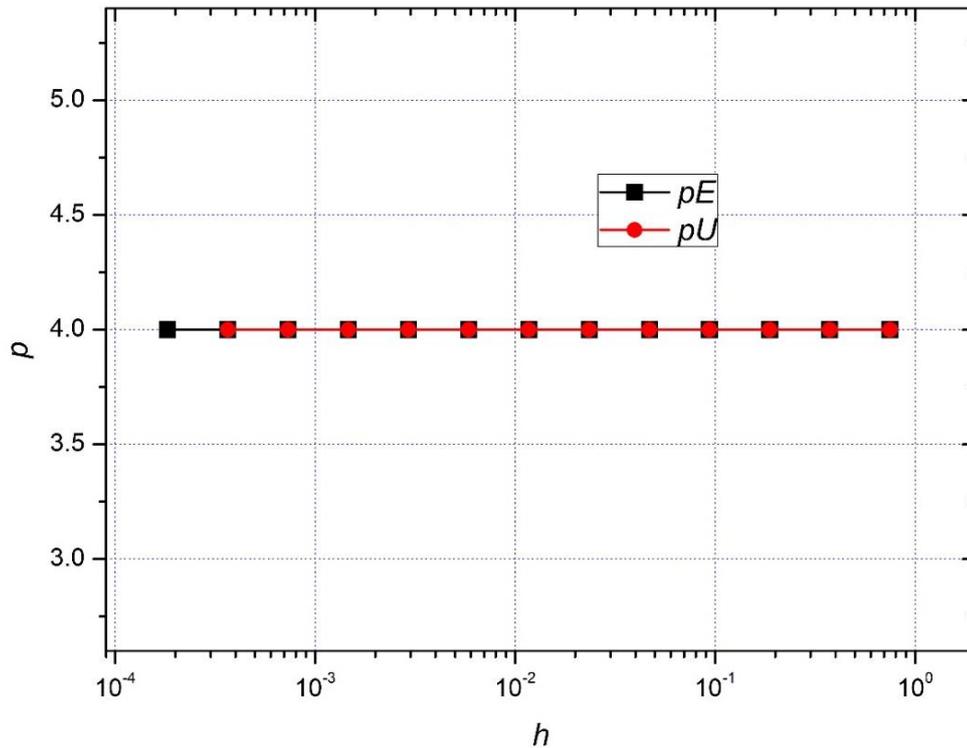
Fonte: O Autor (2020).

FIGURA 3.5 - MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO DO POLINÔMIO x^4 COMO FUNÇÃO DO TAMANHO DO ELEMENTO DE MALHA.



Fonte: O Autor (2020).

FIGURA 3.6 - ORDENS EFETIVA E APARENTE DA INTEGRAÇÃO DO POLINÔMIO x^4 COMO FUNÇÃO DO TAMANHO DO TAMANHO DE MALHA.



Fonte: O Autor (2020).

Os casos $n = 6$ e $n = 7$ possuem dois termos na Eq. (3.89), portanto após duas extrapolações ($m = 2$) a solução analítica deve ser atingida em todas as malhas. Esta predição é confirmada na TABELA 3.2, onde se vê as soluções numéricas para $n = 6$ baseada na ordem efetiva, Eq. (2.98). A TABELA 3.3 mostra as respectivas ordens efetivas. Como esperado, após a primeira extrapolação, o primeiro termo da Eq. (3.89) é eliminado e a ordem efetiva tende à sexta ordem. Quando $m = 2$ os termos restantes na Eq. (3.89) resultam zero e $\Phi - \phi_{(g,m)} = 0$. Como esta subtração aparece dentro de um logaritmo na equação de p_E , Eq. (2.98), então esta perde a validade.

Entretanto, é interessante notar que, diferentemente do comportamento observado com base em p_E , as soluções numéricas baseadas na ordem aparente p_U atingem a solução analítica somente nas malhas mais finas mesmo para $m \geq 2$, fazendo com que a Eq. (2.99) não perca a validade e as extrapolações possam prosseguir. À medida que o cálculo de p_U e as soluções extrapoladas $\theta_{(g,m)}$ progridem até ordens mais altas, as soluções numéricas das malhas mais grossas também atingem a solução analítica.

TABELA 3.2 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS $\theta_{(g,m)}$ DA EQ. (3.89) PARA $n = 6$ BASEADAS EM p_E .

g ↓	$m \rightarrow$		
	0	1	2
1	1,152103125000000000000000000000E+04	-	-
2	1,116685400390625000000000000000E+04	1,114324218750000000000000000000E+04	-
3	1,114396707916259765625000000000E+04	1,114244128417968750000000000000E+04	1,1142428571428571428571428571429E+04
4	1,1142524914383888244628906250000E+04	1,114242877006530761718750000000E+04	
5	1,1142434595772996544837951660156E+04	1,1142428574532270431518554687500E+04	
6	1,1142428947995562339201569557190E+04	1,1142428571477066725492477416992E+04	
7	1,1142428594964718740811804309487E+04	1,1142428571429329167585819959641E+04	
8	1,1142428572899591735279045678908E+04	1,1142428571428583268243528436869E+04	
9	1,1142428571520510371173351416019E+04	1,1142428571428571613566305131826E+04	
10	1,1142428571434317615193934636331E+04	1,1142428571428571431461973517685E+04	
11	1,1142428571428930565277677167471E+04	1,1142428571428571428616593336214E+04	
12	1,1142428571428593874616230701915E+04	1,1142428571428571428572134270878E+04	
13	1,1142428571428572831449239041978E+04	1,1142428571428571428571439597982E+04	
14	1,1142428571428571516251291887360E+04	1,1142428571428571428571428743718E+04	

Fonte: O Autor (2020).

Após um número suficiente de extrapolações a solução analítica é atingida em todas as malhas e só então a equação de p_U , Eq. (2.99), perde a validade para todos os trios de malhas consecutivas. Entretanto, este comportamento produz ordens aparentes não realísticas, chamadas aqui de “ordens fantasma”, que à primeira vista estão coerentes com a equação de p_m , Eq. (2.91). A TABELA 3.4 apresenta a tendência de p_U atingir a oitava ordem (fantasma) para o caso de $n = 6$ (dados para $m = 0$ foram omitidos).

TABELA 3.4 – COMPORTAMENTO ANÔMALO DA ORDEM APARENTE p_U PARA O CASO $n = 6$.

g	$m \rightarrow$	
	1	2
1	-	-
2	-	-
3	-	-
4	-	-
5	6,0511944515912422329340040442271E+00	-
6	6,0125245434875339395982729270638E+00	-
7	6,0031145182693227085101499994434E+00	8,0267172904188597381924959646708E+00
8	6,0007775986911526756961109243058E+00	8,0066483593755642967228307126324E+00
9	6,0001943353626908339520877146317E+00	8,0016601681290620290896908273273E+00
10	6,0000485798231574069103717385606E+00	8,0004149221341004234240558278334E+00
11	6,0000121447047240003927763561837E+00	8,0001037230537823004125862108400E+00
12	6,0000030361604858517946024027065E+00	8,0000259288787752429781188046953E+00
13	6,0000007590393470080204658026013E+00	8,0000065955272540463274139390969E+00
14	6,0000001897217813746578783099711E+00	7,9999993713855291427506008178215E+00

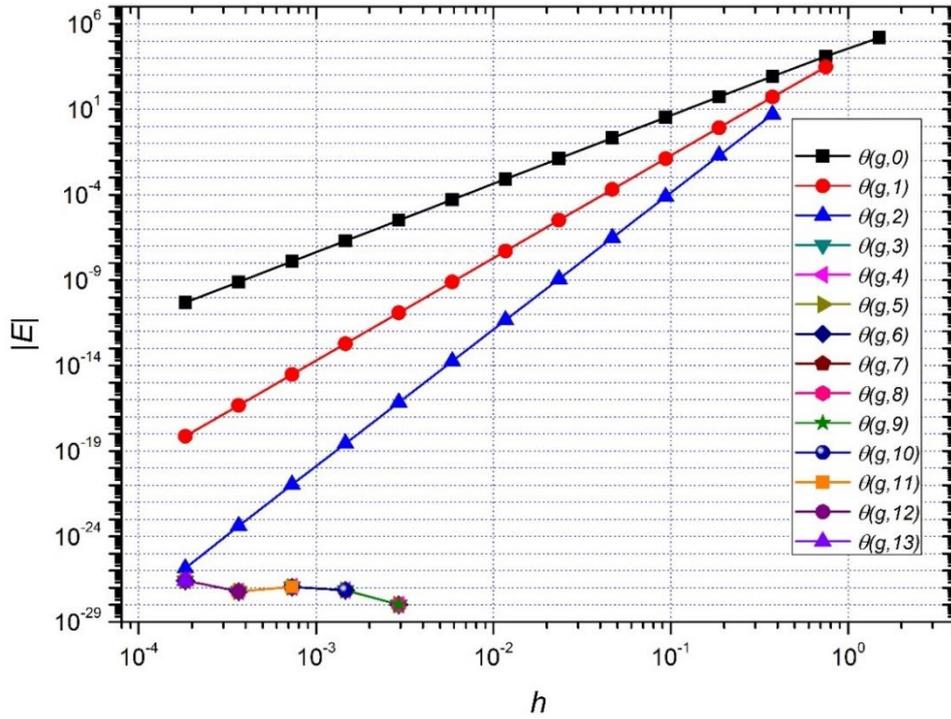
Fonte: O Autor (2020).

Os resultados para os casos $n = 8$ e $n = 9$ apresentam o mesmo comportamento de $n = 6$. Os resultados do módulo do erro de discretização são mostrados na FIGURA 3.7 para o caso $n = 9$, onde é possível observar as três ordens esperadas: 4,6,8. A aparente falta de dados para $m \geq 3$ para as malhas mais grossas é devida ao erro de discretização nulo. Somente nas malhas mais refinadas este erro aparece, provavelmente devido ao erro de arredondamento.

As ordens efetiva e aparente são mostradas na FIGURA 3.8. Novamente as ordens efetivas estão de acordo com a teoria, porém a ordem aparente apresenta ordens não realísticas, neste caso as ordens 10 e 12.

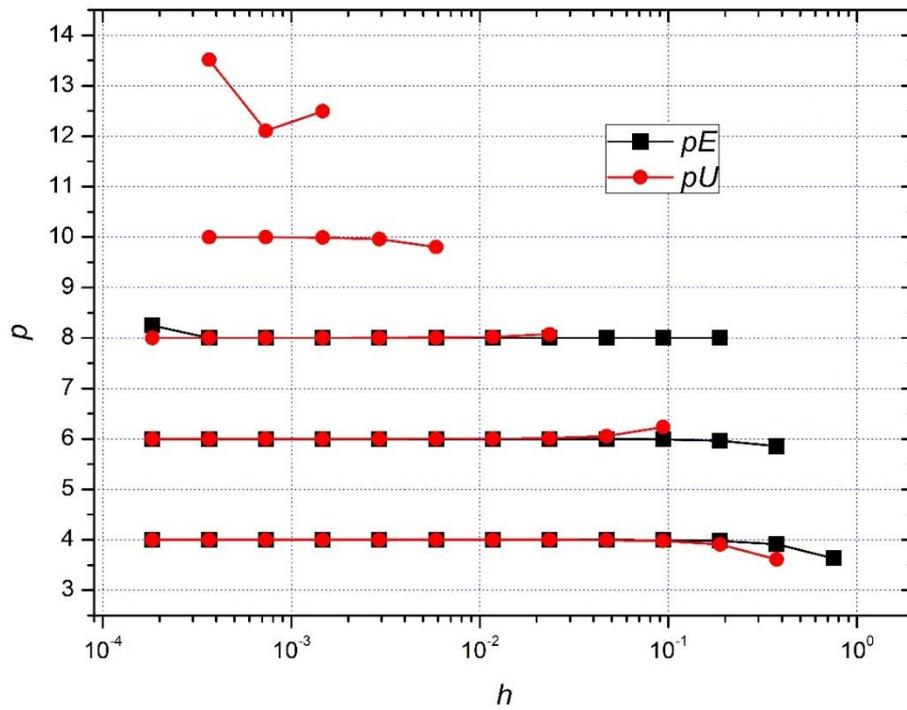
O mesmo comportamento observado na FIGURA 3.7 e FIGURA 3.8 foi obtido para os casos $n = 10$ e $n = 20$, portanto não são mostrados aqui.

FIGURA 3.7 – MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO PARA O POLINÔMIO x^9 EM FUNÇÃO DO TAMANHO DO ELEMENTO DE MALHA



Fonte: O Autor (2020).

FIGURA 3.8 – ORDENS EFETIVA E APARENTE PARA A INTEGRAÇÃO DO POLINÔMIO x^9 EM FUNÇÃO DO TAMANHO DO ELEMENTO DE MALHA



Fonte: O Autor (2020).

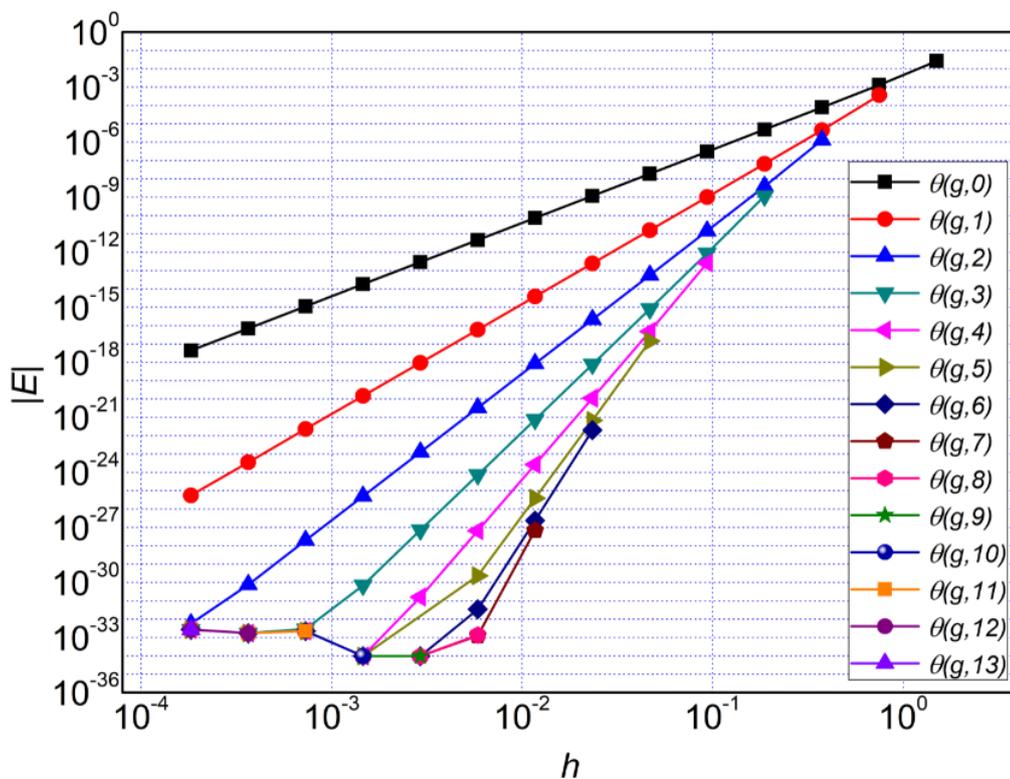
Outros problemas testados foram as funções exponencial e seno

$$I = \int_2^5 e^x dx, \quad (3.92)$$

$$I = \int_2^5 \text{sen}(x) dx. \quad (3.93)$$

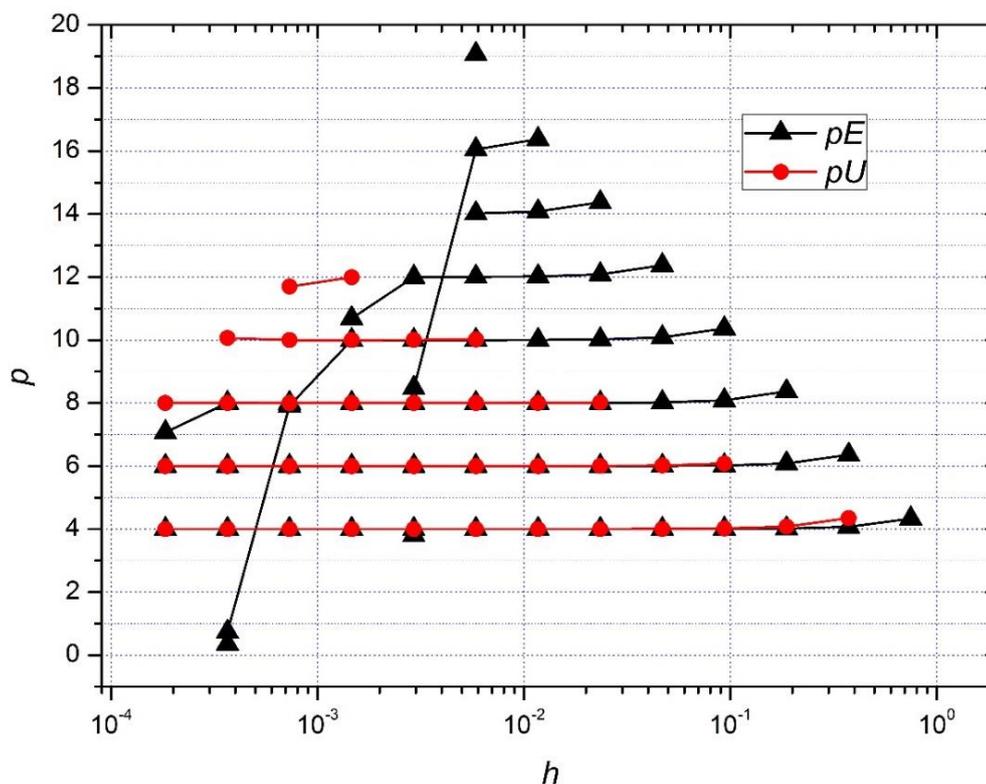
As funções supracitadas possuem infinitas derivadas não nulas, portanto tantas ordens efetivas e aparentes devem aparecer quanto o processo de MER e a precisão da computação permitir. As ordens efetiva e aparente são mostradas nas FIGURA 3.9 e FIGURA 3.10 referentes à integral da função seno. Porém os resultados para a integral da exponencial são similares. Ambas as figuras mostram o comportamento típico da aplicação de MER em problemas de CFD e CHT, conforme reportado em Marchi et al. (2013).

FIGURA 3.9 – MÓDULO DO ERRO NUMÉRICO DA INTEGRAL DE $\text{SEN}(x)$ COMO FUNÇÃO DO TAMANHO DO ELEMENTO DE MALHA



Fonte: O Autor (2020).

FIGURA 3.10 – ORDENS EFETIVA E APARENTE PARA A INTEGRAL DA FUNÇÃO $\text{SEN}(x)$ COMO FUNÇÃO DO TAMANHO DO ELEMENTO DE MALHA



Fonte: O Autor (2020).

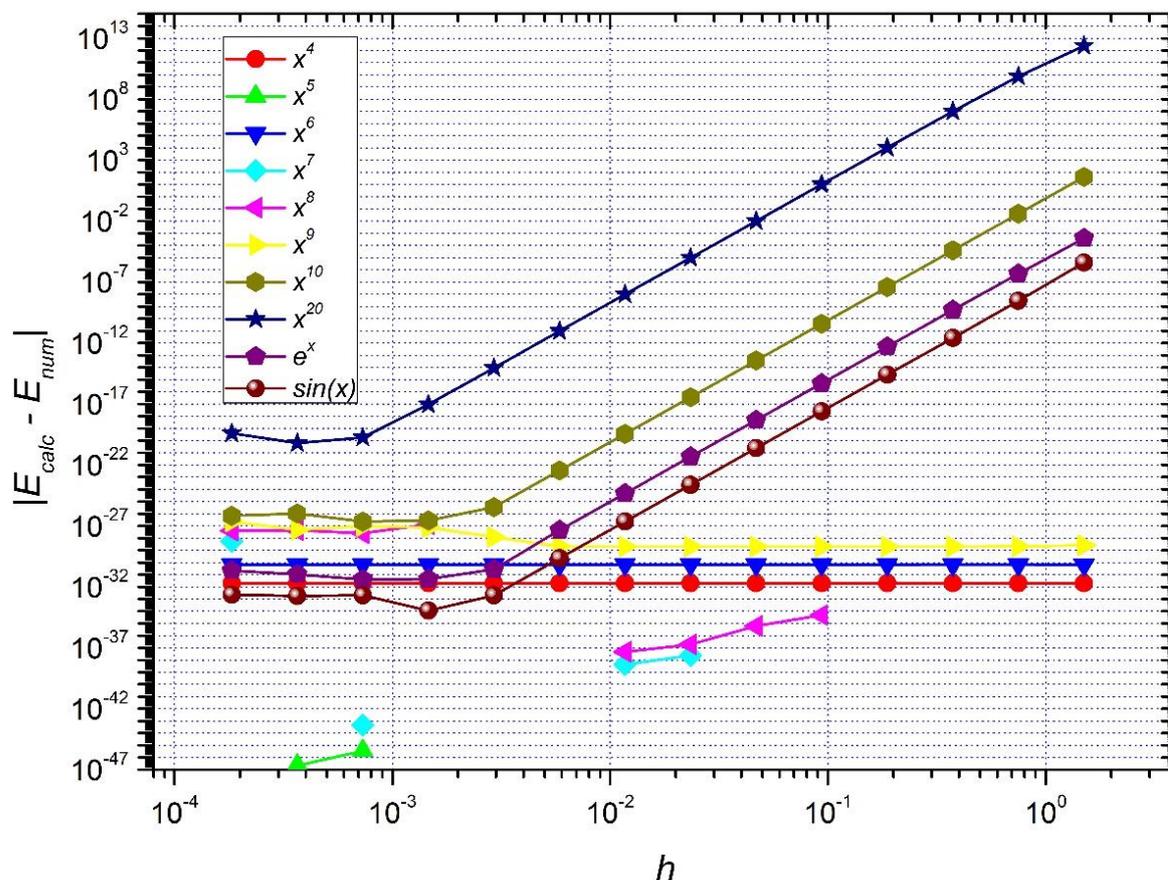
Por último é analisada a diferença entre o erro numérico calculado com a Eq. (3.89) (considerando apenas os três termos deduzidos) e o respectivo valor medido com a Eq. (2.89).

É possível ver na FIGURA 3.11 que a diferença entre os erros calculado e medido estão na ordem do erro de arredondamento (dentro da precisão quádrupla) para todos os polinômios que possuem nove derivadas não nulas ou menos. Isso ocorre porque os três termos deduzidos na Eq. (3.89) são suficientes para calcular o erro de discretização dessas funções.

Já o polinômio x^{10} possui a décima derivada não nula, portanto o gráfico exibe uma inclinação correspondente à ordem 10, conforme o esperado. O mesmo é observado para a integral do polinômio x^{20} , porém como esta possui derivadas com valores diferentes das derivadas de x^{10} , seus resultados são relativamente diferentes, porém apresentando a mesma inclinação. O mesmo vale para as funções exponencial e seno.

Considerando os resultados das diversas análises apresentados nesta seção, considerou-se que constituem evidências suficientes de que a dedução da equação do erro de truncamento para a aplicação da Regra 1/3 de Simpson, Eq. (3.89) está correta.

FIGURA 3.11 – DIFERENÇA ENTRE O ERRO NUMÉRICO CALCULADO E MEDIDO PARA TODAS AS FUNÇÕES ANALISADAS



Fonte: O Autor (2020).

Neste capítulo é mostrada a equação do erro de truncamento para a aplicação da Regra do Trapézio com base em expansões em Série de Taylor no Método das Diferenças Finitas. De forma similar é deduzida a equação do erro de truncamento para a Regra 1/3 de Simpson, sendo este o principal resultado inédito referente à análise de problemas de radiação em meios não participantes, cujo modelo matemático recai em equações integrais de Fredholm do segundo tipo.

A equação do erro de truncamento para a aplicação composta da Regra 1/3 de Simpson é metodicamente testada usando a integração de polinômios de ordens progressivamente maiores são usados para avaliar se a dedução de cada termo da equação está correta. Também foram incluídos testes com a função exponencial e seno, que por possuírem infinitas derivadas não nulas, apresentam todos os termos da equação do erro de truncamento não nulos.

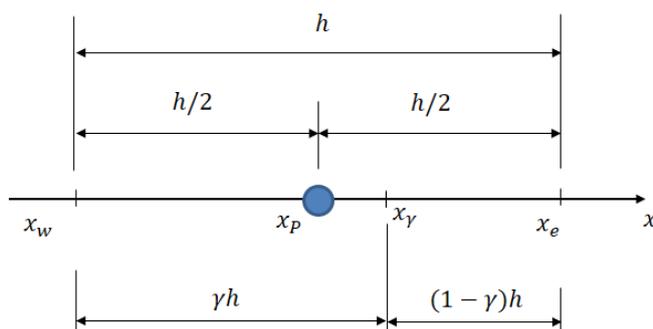
4 ERRO DE DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL NO DOM PARA PROBLEMAS DE SIMETRIA AZIMUTAL EM MEIO PARTICIPANTE HOMOGENEO SEM ESPALHAMENTO

Apesar do interesse em estimar o erro numérico em problemas bidimensionais e tridimensionais, eles geralmente são afetados por outras fontes de erro de truncamento (*e.g.* efeito de raio, falso espalhamento). Por isso esta seção se limita a analisar os erros de discretização em problemas unidimensionais (*e.g.* problemas de simetria azimutal) sem espalhamento. O conteúdo deste capítulo constitui contribuição inédita ao estudo dos erros de discretização espacial quando usado o DOM.

4.1 DEDUÇÃO DO ERRO DE TRUNCAMENTO DA RTE DISCRETIZADA

A dedução apresentada nesta seção baseia-se na discretização espacial da RTE, Eq. (2.80) de forma semelhante à empregada no Método dos Volumes Finitos. Com base na FIGURA 4.1, que mostra o elemento de volume P pertencente ao interior do domínio, o volume P é delimitado à esquerda pelo volume oeste W , sendo x_w a posição da fronteira entre eles. À direita o volume P faz fronteira com o elemento de volume leste, E sendo x_e a posição da fronteira entre ambos.

FIGURA 4.1 – MALHA DE VOLUMES FINITOS 1D MOSTRANDO O VOLUME P



Fonte: O Autor (2020).

O ponto P está centrado no elemento de volume, na posição x_p . Partindo desta malha uniforme, define-se um fator de ponderação espacial ou simplesmente fator de ponderação, representado por γ

$$\gamma \equiv \frac{x_\gamma - x_w}{x_e - x_w}. \quad (4.1)$$

Isolando x_γ e observando que $h = x_e - x_w$ tem-se

$$x_\gamma = x_w + \gamma h, \quad (4.2)$$

de forma que

$$x_w - x_\gamma = -\gamma h, \quad (4.3)$$

e

$$x_e - x_\gamma = (1 - \gamma)h. \quad (4.4)$$

Como na literatura especializada a discretização espacial é feita no domínio físico (coordenadas físicas x, y, z) e não em termos das coordenadas ópticas τ_S ou τ , toma-se a versão unidimensional da RTE, Eq. (2.80) para o volume P e sem usar o subíndice m , indicativo da direção

$$\mu \frac{dI}{dx} + \kappa I = \hat{I}, \quad (4.5)$$

onde o termo fonte \hat{I} é dado por

$$\hat{I} = \kappa I_b. \quad (4.6)$$

A simplificação de meio sem espalhamento decorre da necessidade de tornar o processo de marcha em uma dada direção independente das demais, ou seja, não ‘poluir’ o erro de truncamento calculado no volume P para uma dada direção com erros similares provenientes das demais direções.

Integrando a Eq. (4.5) no volume P tem-se

$$\mu(I_e - I_w) + \kappa \int_{x_w}^{x_e} I dx = \hat{I}_P h, \quad (4.7)$$

dentro do qual o coeficiente de absorção é constante, assim como a temperatura do meio.

No primeiro termo do lado esquerdo da Eq. (4.7) aplica-se o fator de ponderação entre as intensidades nas fronteiras e a intensidade I_P , conforme já mencionado na explanação sobre o DOM, feita na Seção 2.2.1.3, ou seja,

$$I_P = \gamma I_e + (1 - \gamma) I_w, \quad 0 \leq \gamma \leq 1. \quad (4.8)$$

Esta aproximação é semelhante àquela usada nos esquemas de ponderação no tempo empregados em problemas de CFD em regime transiente, caso em que a equação governante possui característica parabólica. Por exemplo, nota-se que nos problemas de radiação em meio participante o Esquema Diamante (LATROP, 1969) é o análogo do Esquema Crank-Nicolson (CHAPRA; CANALE, 2015, p.882-885) para os problemas de Advecção-Difusão, pois ambos são obtidos quando $\gamma = 1/2$ e ambos os esquemas são de segunda ordem. Também o Esquema Degrau (LATROP, 1969) é o análogo do Esquema *Upwind Differencing Scheme*, UDS, obtido quando $\gamma = 1$, sendo ambos de primeira ordem⁷.

A solução da RTE, Eq. (4.5), apresenta comportamento exponencial e não linear como o sugerido pela Eq. (4.8). Portanto esta aproximação apresenta um erro de truncamento, que será aqui denominado $E_{\bar{I},P}$, onde \bar{I} representa a média ponderada da intensidade dentro do volume P . Reescrevendo a Eq. (4.8), considerando o erro de truncamento no volume P devido à ponderação $E_{\bar{I},P}$, tem-se

$$\bar{I} = \gamma I_e + (1 - \gamma) I_w = I_P + E_{\bar{I},P}. \quad (4.9)$$

O objetivo da análise deste capítulo é encontrar a forma do erro de discretização na solução da Eq. (4.5). Entretanto, o erro devido à ponderação $E_{\bar{I},P}$ não é o único erro de truncamento que ocorre na Eq. (4.7), pois é necessário conduzir a integral numérica no segundo termo do lado esquerdo desta equação e o integrando I é a incógnita do problema, desconhecido *a priori*. Segundo a dedução apresentada na Seção 2.2.1.3 e tipicamente encontrada na

⁷ Em verdade usa-se $\gamma = 0$ como fator de ponderação no esquema UDS com Correção Adiada, frequentemente usado na solução numérica da equação da advecção-difusão, porém a ideia da ponderação entre dois casos limites de esquemas de aproximação numérica é semelhante.

bibliografia especializada (MODEST, 2003, p. 514), a integral deste termo resulta na aproximação denominada Regra do Retângulo. Considerando que a integral exata é dada pela aproximação numérica $I_P h$ mais o erro de truncamento $E_{RR,P}$ no intervalo $[x_w, x_e]$, tem-se

$$\int_{x_w}^{x_e} I dx = I_P h + E_{RR,P}. \quad (4.10)$$

Substituindo a Eq. (4.10) na Eq. (4.7) tem-se

$$\mu(I_e - I_w) + \kappa(I_P h + E_{RR,P}) = \hat{I}_P h. \quad (4.11)$$

Por último, há que se considerar que o processo de marcha na direção ordenada ‘carrega’ consigo o erro de discretização do volume anterior. Isto ocorre porque I_e calculado no volume anterior, $P - 1$, já possui erros de truncamento devido às duas fontes de erro citadas nos parágrafos anteriores. Este erro na intensidade que entra no volume P propagar-se-á pelo volume P (pois $I_{e,P-1} = I_{w,P}$).

Para considerar a propagação do erro de truncamento no processo de marcha, substitui-se I_w na Eq. (4.9) por $I_w + E_{e,P-1}$, ou seja,

$$\gamma I_e + (1 - \gamma)(I_w + E_{e,P-1}) = I_P + E_{\bar{I},P}, \quad (4.12)$$

onde $E_{e,P-1}$ é o erro de truncamento devido ao processo de marcha proveniente do volume anterior, onde $I_{w,P} = I_{e,P-1}$.

Isolando I_e na Eq. (4.12) e substituindo-o na Eq. (4.11), tem-se

$$\mu \left[\frac{I_P - (1 - \gamma)I_w}{\gamma} + \frac{E_{\bar{I},P} - (1 - \gamma)E_{e,P-1}}{\gamma} - (I_w + E_{e,P-1}) \right] + \kappa(I_P h + E_{RR,P}) = \hat{I}_P h. \quad (4.13)$$

Isolando I_P na Eq. (4.13) tem-se

$$I_P = \frac{\mu I_w + \gamma h \hat{I}_P}{\mu + \gamma h \kappa} - \frac{\mu E_{\bar{I},P} + \gamma \kappa E_{RR,P}}{\mu + \gamma h \kappa} + \frac{\mu E_{e,P-1}}{\mu + \gamma h \kappa}, \quad (4.14)$$

onde o primeiro termo do lado direito é a versão unidimensional correspondente à Eq. (2.85). O segundo termo no lado direito contém os erros de truncamento produzidos pelas aproximações numéricas no volume P enquanto o último termo representa como o erro de discretização provindo do volume anterior também é afetado pela discretização espacial do DOM no volume atual.

Vale ressaltar que os dois últimos termos da Eq. (4.14) constituirão no erro de discretização que será propagado para o elemento de volume seguinte $P + 1$, ou seja,

$$E_{w,P} = -\frac{\mu E_{\bar{I},P} + \gamma \kappa E_{RR,P}}{\mu + \gamma h \kappa} + \frac{\mu E_{e,P-1}}{\mu + \gamma h \kappa}, \quad (4.15)$$

e assim por diante, até atingir a fronteira oposta de onde a direção ordenada iniciou seu caminho.

A Eq. (4.15) quantifica o erro de truncamento no ponto nodal x_P , mas o processo de marcha no espaço requer que se calcule I_e com base I_P para completar o cálculo para o volume P . Com base na Eq. (4.12) tem-se

$$I_e = \left(1 - \frac{h\kappa}{\mu + \gamma h\kappa}\right) I_w + \frac{h\hat{I}_P}{\mu + \gamma h\kappa} - \frac{\kappa(E_{RR,P} - hE_{\bar{I},P})}{\mu + \gamma h\kappa} + \left(1 - \frac{h\kappa}{\mu + \gamma h\kappa}\right) E_{e,P-1}, \quad (4.16)$$

onde os dois primeiros termos do lado direito da Eq. (4.16) são a aproximação que se toma para I_e e os dois últimos termos à direita representam o erro de truncamento na posição x_e , sendo o penúltimo resultante das aproximações no volume P e o último representa quanto do erro proveniente do volume anterior foi afetado no volume atual, até atingir I_e .

Desta forma, o erro de discretização devido ao processo de marcha é

$$E_{e,P} = -\frac{\kappa(E_{RR,P} - hE_{\bar{I},P})}{\mu + \gamma h\kappa} + \left(1 - \frac{h\kappa}{\mu + \gamma h\kappa}\right) E_{e,P-1}. \quad (4.17)$$

A partir da Eq. (4.17) é possível obter uma equação para calcular o erro de discretização cumulativo ao longo do caminho até um dado volume, ou mesmo até a fronteira oposta. O erro de discretização total, desde o volume onde a direção inicia (nesta dedução $P = 1$) até a face leste do volume P , $E_{e,P}$, é dado por

$$E_{e,P} = \prod_{i=1}^P \left\{ -\frac{\kappa(E_{RR,i} - hE_{\bar{I},i})}{\mu + \gamma h\kappa} + \left(1 - \frac{h\kappa}{\mu + \gamma h\kappa}\right) E_{e,i-1} \right\}, \quad (4.18)$$

onde o produtório termina em $i = P$, mas poderia ser outro elemento de volume intermediário $1 \leq i \leq P$. No caso de a fronteira refletir parte da radiação incidente sobre ela, então este termo é não nulo ($E_{e,0} \neq 0$) e pode ser dependente da solução da ETR em todas as direções. Neste caso o processo de cálculo do erro de truncamento será iterativo e possivelmente havendo combinação dos erros de discretização espacial e angular.

Já no caso de a fronteira ser negra $E_{e,0} = 0$ para a solução de cada direção ordenada, não havendo a possibilidade de haver a contaminação de outras fontes de erro ou mesmo do erro devido à discretização espacial proveniente das demais direções. Por essa razão na Seção 4.4 apenas problemas com paredes negras são estudados.

Uma equação semelhante à Eq. (4.18), porém considerando o erro de truncamento até o centro do volume P , representado aqui por $E_{P,P}$, é dada por

$$E_{P,P} = -\frac{\mu E_{\bar{I},P} + \gamma\kappa E_{RR,P}}{\mu + \gamma h\kappa} + \frac{\mu E_{e,P-1}}{\mu + \gamma h\kappa}, \quad (4.19)$$

onde $E_{e,P-1}$ é dado conforme a Eq. (4.18) calculada até $P - 1$.

4.2 APROXIMAÇÃO NUMÉRICA E ERRO DE TRUNCAMENTO DO ESQUEMA DE PONDERAÇÃO VARIÁVEL

Em Coelho (2014) os esquemas diamante e degrau são descritos como dois casos limite do que o autor denominou de esquema de ponderação variável, onde o fator de ponderação γ pode assumir qualquer valor no intervalo $[0, 1]$, porém apenas valores no intervalo $[1/2, 1]$ são efetivamente empregados. O cálculo do erro devido ao esquema de ponderação variável $E_{\bar{I},P}$ constitui contribuição inédita desta tese. Sua dedução se inicia com a expansão em série de Taylor da intensidade na posição x_γ situada no interior do volume P , ou seja, $x_w < x_\gamma \leq x_e$:

$$\begin{aligned}
I(x) = I_{x_\gamma} + I_{x_\gamma}^i(x - x_\gamma) + \frac{I_{x_\gamma}^{ii}}{2}(x - x_\gamma)^2 + \frac{I_{x_\gamma}^{iii}}{6}(x - x_\gamma)^3 \\
+ \frac{I_{x_\gamma}^{iv}}{24}(x - x_\gamma)^4 + \frac{I_{x_\gamma}^v}{120}(x - x_\gamma)^5 + \frac{I_{x_\gamma}^{vi}}{720}(x - x_\gamma)^6 + \dots
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Fazendo $x = x_e$ substitui-se a Eq. (4.4) na Eq. (4.20)

$$\begin{aligned}
I_e = I_{x_\gamma} + I_{x_\gamma}^i(1 - \gamma)h + \frac{I_{x_\gamma}^{ii}}{2}(1 - \gamma)^2h^2 + \frac{I_{x_\gamma}^{iii}}{6}(1 - \gamma)^3h^3 + \frac{I_{x_\gamma}^{iv}}{24}(1 - \gamma)^4h^4 \\
+ \frac{I_{x_\gamma}^v}{120}(1 - \gamma)^5h^5 + \frac{I_{x_\gamma}^{vi}}{720}(1 - \gamma)^6h^6 + \dots
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Fazendo $x = x_w$ substitui-se a Eq. (4.3) na Eq. (4.21)

$$\begin{aligned}
I_w = I_{x_\gamma} - I_{x_\gamma}^i\gamma h + \frac{I_{x_\gamma}^{ii}}{2}\gamma^2h^2 - \frac{I_{x_\gamma}^{iii}}{6}\gamma^3h^3 + \frac{I_{x_\gamma}^{iv}}{24}\gamma^4h^4 - \frac{I_{x_\gamma}^v}{120}\gamma^5h^5 \\
+ \frac{I_{x_\gamma}^{vi}}{720}\gamma^6h^6 + \dots
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Nas Eq. (4.21) e Eq. (4.22) aparece o parâmetro γ , cuja análise é de interesse no contexto desta tese já que permite a análise dos esquemas degrau e diamante. Entretanto, estas equações estão escritas no entorno do ponto x_γ e o DOM considera a intensidade no ponto x_p , por isso é necessário calcular I_p e as suas seis primeiras derivadas expandidas no centro de cada elemento de volume, ou seja, em x_p .

$$\begin{aligned}
I_{x_\gamma} = I_p + I_p^i(x_\gamma - x_p)h + \frac{I_p^{ii}}{2}(x_\gamma - x_p)^2h^2 + \frac{I_p^{iii}}{6}(x_\gamma - x_p)^3h^3 \\
+ \frac{I_p^{iv}}{24}(x_\gamma - x_p)^4h^4 + \frac{I_p^v}{120}(x_\gamma - x_p)^5h^5 \\
+ \frac{I_p^{vi}}{720}(x_\gamma - x_p)^6h^6 + \dots
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Como

$$x_\gamma - x_p = (\gamma - 1/2)h, \tag{4.24}$$

então substituindo a Eq. (4.24) na Eq. (4.23) tem-se

$$\begin{aligned}
 I_{x_\gamma} = & I_P + I_P^i(\gamma - 1/2)h + \frac{I_P^{ii}}{2}(\gamma - 1/2)^2h^2 + \frac{I_P^{iii}}{6}(\gamma - 1/2)^3h^3 \\
 & + \frac{I_P^{iv}}{24}(\gamma - 1/2)^4h^4 + \frac{I_P^v}{120}(\gamma - 1/2)^5h^5 \\
 & + \frac{I_P^{vi}}{720}(\gamma - 1/2)^6h^6 + \dots,
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

cujas seis primeiras derivadas dadas pelas equações a seguir, onde o número de termos considerados são aqueles necessários para o erro de truncamento ser escrito até a ordem seis.

$$\begin{aligned}
 I_{x_\gamma}^i = & I_P^i + I_P^{ii}(\gamma - 1/2)h + \frac{I_P^{iii}}{2}(\gamma - 1/2)^2h^2 + \frac{I_P^{iv}}{6}(\gamma - 1/2)^3h^3 \\
 & + \frac{I_P^v}{24}(\gamma - 1/2)^4h^4 + \frac{I_P^{vi}}{120}(\gamma - 1/2)^5h^5 + \dots.
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}
 I_{x_\gamma}^{ii} = & I_P^{ii} + I_P^{iii}(\gamma - 1/2)h + \frac{I_P^{iv}}{2}(\gamma - 1/2)^2h^2 + \frac{I_P^v}{6}(\gamma - 1/2)^3h^3 \\
 & + \frac{I_P^{vi}}{24}(\gamma - 1/2)^4h^4 + \dots.
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$I_{x_\gamma}^{iii} = I_P^{iii} + I_P^{iv}(\gamma - 1/2)h + \frac{I_P^v}{2}(\gamma - 1/2)^2h^2 + \frac{I_P^{vi}}{6}(\gamma - 1/2)^3h^3 + \dots. \tag{4.28}$$

$$I_{x_\gamma}^{iv} = I_P^{iv} + I_P^v(\gamma - 1/2)h + \frac{I_P^{vi}}{2}(\gamma - 1/2)^2h^2 + \dots. \tag{4.29}$$

$$I_{x_\gamma}^v = I_P^v + I_P^{vi}(\gamma - 1/2)h + \dots. \tag{4.30}$$

$$I_{x_\gamma}^{vi} = I_P^{vi} + \dots. \tag{4.31}$$

Substituindo a equação da intensidade no centro do volume, Eq. (4.25), e as suas derivadas de ordem um até seis, Eq. (4.26) até Eq. (4.31), tem-se uma expressão para I_e cujo ponto de expansão da série é x_P , ou seja,

$$\begin{aligned}
I_e = & I_P + I_P^i [(\gamma - 1/2) + (1 - \gamma)]h + I_P^{ii} \left[\frac{(\gamma - 1/2)^2}{2} + (\gamma - 1/2)(1 - \gamma) + \frac{(1 - \gamma)^2}{2} \right] h^2 \\
& + I_P^{iii} \left[\frac{(\gamma - 1/2)^3}{6} + \frac{(\gamma - 1/2)^2}{2} (1 - \gamma) + (\gamma - 1/2) \frac{(1 - \gamma)^2}{2} + \frac{(1 - \gamma)^3}{6} \right] h^3 \\
& + I_P^{iv} \left[\frac{(\gamma - 1/2)^4}{24} + \frac{(\gamma - 1/2)^3}{6} (1 - \gamma) + \frac{(\gamma - 1/2)^2}{2} \frac{(1 - \gamma)^2}{2} + (\gamma - 1/2) \frac{(1 - \gamma)^3}{6} + \frac{(1 - \gamma)^4}{24} \right] h^4 \\
& + I_P^v \left[\frac{(\gamma - 1/2)^5}{120} + \frac{(\gamma - 1/2)^4}{24} (1 - \gamma) + \frac{(\gamma - 1/2)^3}{6} \frac{(1 - \gamma)^2}{2} + \frac{(\gamma - 1/2)^2}{2} \frac{(1 - \gamma)^3}{6} + (\gamma - 1/2) \frac{(1 - \gamma)^4}{24} \right. \\
& \left. + \frac{(1 - \gamma)^5}{120} \right] h^5 \\
& + I_P^{vi} \left[\frac{(\gamma - 1/2)^6}{720} + \frac{(\gamma - 1/2)^5}{120} (1 - \gamma) + \frac{(\gamma - 1/2)^4}{24} \frac{(1 - \gamma)^2}{2} + \frac{(\gamma - 1/2)^3}{6} \frac{(1 - \gamma)^3}{6} + \frac{(\gamma - 1/2)^2}{2} \frac{(1 - \gamma)^4}{24} \right. \\
& \left. + (\gamma - 1/2) \frac{(1 - \gamma)^5}{120} + \frac{(1 - \gamma)^6}{720} \right] h^6 + \dots .
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Substituindo as Eq. (4.25) até a Eq. (4.31) na Eq. (4.22) tem-se uma expressão para I_w cujo ponto de expansão da série é x_P , isto é,

$$\begin{aligned}
I_w = & I_P + I_P^i [(\gamma - 1/2) - \gamma]h + I_P^{ii} \left[\frac{(\gamma - 1/2)^2}{2} - (\gamma - 1/2)\gamma + \frac{(1 - \gamma)^2}{2} \right] h^2 \\
& + I_P^{iii} \left[\frac{(\gamma - 1/2)^3}{6} - \frac{(\gamma - 1/2)^2}{2}\gamma + (\gamma - 1/2)\frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma^3}{6} \right] h^3 \\
& + I_P^{iv} \left[\frac{(\gamma - 1/2)^4}{24} - \frac{(\gamma - 1/2)^3}{6}\gamma + \frac{(\gamma - 1/2)^2}{2}\frac{\gamma^2}{2} - (\gamma - 1/2)\frac{\gamma^3}{6} + \frac{\gamma^4}{24} \right] h^4 \\
& + I_P^v \left[\frac{(\gamma - 1/2)^5}{120} - \frac{(\gamma - 1/2)^4}{24}\gamma + \frac{(\gamma - 1/2)^3}{6}\frac{\gamma^2}{2} - \frac{(\gamma - 1/2)^2}{2}\frac{\gamma^3}{6} + (\gamma - 1/2)\frac{\gamma^4}{24} - \frac{\gamma^5}{120} \right] h^5 \\
& + I_P^{vi} \left[\frac{(\gamma - 1/2)^6}{720} - \frac{(\gamma - 1/2)^5}{120}\gamma + \frac{(\gamma - 1/2)^4}{24}\frac{\gamma^2}{2} - \frac{(\gamma - 1/2)^3}{6}\frac{\gamma^3}{6} + \frac{(\gamma - 1/2)^2}{2}\frac{\gamma^4}{24} - (\gamma - 1/2)\frac{\gamma^5}{120} \right. \\
& \left. + \frac{\gamma^6}{720} \right] h^6 + \dots .
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Substituindo as Eq. (4.32) e Eq. (4.33) na aproximação do DOM, Eq. (4.8), tem-se

$$\begin{aligned}
& \gamma I_e + (1 - \gamma) I_w \\
&= I_p + (\gamma - 1/2) I_p^i h + I_p^{ii} \left[\frac{(\gamma - 1/2)^2}{2} + \frac{(1 - \gamma)^2 \gamma}{2} + \frac{(1 - \gamma) \gamma^2}{2} \right] h^2 \\
&+ I_p^{iii} \left\{ \frac{(\gamma - 1/2)^3}{6} + (\gamma - 1/2) \left[\frac{(1 - \gamma)^2 \gamma}{2} + \frac{(1 - \gamma) \gamma^2}{2} \right] + \frac{(1 - \gamma)^3 \gamma}{6} - \frac{(1 - \gamma) \gamma^3}{6} \right\} h^3 \\
&+ I_p^{iv} \left\{ \frac{(\gamma - 1/2)^4}{24} + \frac{(\gamma - 1/2)^2}{2} \left[\frac{(1 - \gamma)^2 \gamma}{2} + \frac{(1 - \gamma) \gamma^2}{2} \right] + (\gamma - 1/2) \left[\frac{(1 - \gamma)^3 \gamma}{6} - \frac{(1 - \gamma) \gamma^3}{6} \right] + \frac{(1 - \gamma)^4 \gamma}{24} \right. \\
&\left. + \frac{(1 - \gamma) \gamma^4}{24} \right\} h^4 \\
&+ I_p^v \left\{ \frac{(\gamma - 1/2)^5}{120} + \frac{(\gamma - 1/2)^3}{6} \left[\frac{(1 - \gamma)^2 \gamma}{2} + \frac{(1 - \gamma) \gamma^2}{2} \right] + \frac{(\gamma - 1/2)^2}{2} \left[\frac{(1 - \gamma)^3 \gamma}{6} - \frac{(1 - \gamma) \gamma^3}{6} \right] \right. \\
&\left. + (\gamma - 1/2) \left[\frac{(1 - \gamma)^4 \gamma}{24} + \frac{(1 - \gamma) \gamma^4}{24} \right] + \frac{(1 - \gamma)^5 \gamma}{120} - \frac{(1 - \gamma) \gamma^5}{120} \right\} h^5 \\
&+ I_p^{vi} \left\{ \frac{(\gamma - 1/2)^6}{720} + \frac{(\gamma - 1/2)^4}{24} \left[\frac{(1 - \gamma)^2 \gamma}{2} + \frac{(1 - \gamma) \gamma^2}{2} \right] + \frac{(\gamma - 1/2)^3}{6} \left[\frac{(1 - \gamma)^3 \gamma}{6} - \frac{(1 - \gamma) \gamma^3}{6} \right] \right. \\
&\left. + \frac{(\gamma - 1/2)^2}{2} \left[\frac{(1 - \gamma)^4 \gamma}{24} + \frac{(1 - \gamma) \gamma^4}{24} \right] + (\gamma - 1/2) \left[\frac{(1 - \gamma)^5 \gamma}{120} - \frac{(1 - \gamma) \gamma^5}{120} \right] + \frac{(1 - \gamma)^6 \gamma}{720} + \frac{(1 - \gamma) \gamma^6}{720} \right\} h^6 \\
&+ \dots .
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Na Eq. (4.34) vê-se que o primeiro termo do lado direito constitui, juntamente com o lado esquerdo, no esquema de Ponderação Variável empregada no DOM, isto é

$$\gamma I_e + (1 - \gamma) I_w = I_P , \quad (4.35)$$

enquanto os demais termos do lado direito constituem o erro de truncamento dessa aproximação escrito em função do fator de ponderação γ . Para escrever o erro de forma sintética, pode-se usar a função F de ordem n , deduzida por indução, assumindo a forma

$$F_{(\gamma)}^n = \frac{(\gamma - 1/2)^n}{n!} + \sum_{i=2}^n \left\{ \frac{(\gamma - 1/2)^{(n-i)}}{(n-i)! i!} [(1-\gamma)^i \gamma + (-1)^i (1-\gamma) \gamma^i] \right\} , n \geq 1, \quad (4.36)$$

assim o erro de truncamento fica

$$E_{\bar{I}} = F_{(\gamma)}^1 I_P^i h + F_{(\gamma)}^2 I_P^{ii} h^2 + F_{(\gamma)}^3 I_P^{iii} h^3 + F_{(\gamma)}^4 I_P^{iv} h^4 + F_{(\gamma)}^5 I_P^v h^5 + F_{(\gamma)}^6 I_P^{vi} h^6 + \dots \quad (4.37)$$

Nota-se que o somatório na Eq. (4.36) não é executado para $F_{(\gamma)}^1$. Fazendo $\gamma = 1$ na Eq. (4.37), tem-se o erro de truncamento do Esquema Degrau, isto é

$$E_{\bar{I}}^{Degrau} = \frac{I_P^i}{2} h + \frac{I_P^{ii}}{8} h^2 + \frac{I_P^{iii}}{48} h^3 + \frac{I_P^{iv}}{384} h^4 + \frac{I_P^v}{3840} h^5 + \frac{I_P^{vi}}{46.080} h^6 + \dots , \quad (4.38)$$

portanto as ordens verdadeiras são

$$p_V = 1, 2, 3, \dots \quad (4.39)$$

Fazendo $\gamma = 1/2$ na Eq. (4.37), tem-se o erro de truncamento do Esquema Diamante:

$$E_{\bar{I}}^{Diamante} = \frac{I_P^{ii}}{8} h^2 + \frac{I_P^{iv}}{384} h^4 + \frac{I_P^{vi}}{46.080} h^6 + \dots , \quad (4.40)$$

portanto as ordens verdadeiras são

$$p_V = 2,4,6, \dots \quad (4.41)$$

4.3 APROXIMAÇÃO NUMÉRICA E ERRO DE TRUNCAMENTO DA REGRA DO RETÂNGULO

A aplicação da Regra do Retângulo no elemento de volume P da FIGURA 4.1 é obtida com a expansão em Série de Taylor conforme mostrado no ANEXO B deste trabalho, resultando em⁸

$$\begin{aligned}
I_{[w,e]}^{exata} = & I_P h + I_P^i \left\{ (\gamma - 1/2) + \frac{1}{2} [(1 - \gamma)^2 - \gamma^2] \right\} h^2 \\
& + I_P^{ii} \left\{ \frac{(\gamma - 1/2)^2}{2} + \frac{(\gamma - 1/2)}{2} [(1 - \gamma)^2 - \gamma^2] \right. \\
& \left. + \frac{1}{6} [(1 - \gamma)^3 + \gamma^3] \right\} h^3 \\
& + I_P^{iii} \left\{ \frac{(\gamma - 1/2)^3}{6} + \frac{(\gamma - 1/2)^2}{4} [(1 - \gamma)^2 - \gamma^2] \right. \\
& \left. + \frac{(\gamma - 1/2)}{6} [(1 - \gamma)^3 + \gamma^3] + \frac{1}{24} [(1 - \gamma)^4 - \gamma^4] \right\} h^4 \\
& + I_P^{iv} \left\{ \frac{(\gamma - 1/2)^4}{24} + \frac{(\gamma - 1/2)^3}{12} [(1 - \gamma)^2 - \gamma^2] \right. \\
& \left. + \frac{(\gamma - 1/2)^2}{12} [(1 - \gamma)^3 + \gamma^3] + \frac{(\gamma - 1/2)}{24} [(1 - \gamma)^4 - \gamma^4] \right. \\
& \left. + \frac{1}{120} [(1 - \gamma)^5 + \gamma^5] \right\} h^5 \\
& + I_P^v \left\{ \frac{(\gamma - 1/2)^5}{120} + \frac{(\gamma - 1/2)^4}{48} [(1 - \gamma)^2 - \gamma^2] \right. \\
& \left. + \frac{(\gamma - 1/2)^3}{36} [(1 - \gamma)^3 + \gamma^3] + \frac{(\gamma - 1/2)^2}{48} [(1 - \gamma)^4 - \gamma^4] \right. \\
& \left. + \frac{(\gamma - 1/2)}{120} [(1 - \gamma)^5 + \gamma^5] + \frac{1}{720} [(1 - \gamma)^6 - \gamma^6] \right\} h^6 \\
& + \dots
\end{aligned} \quad (4.42)$$

⁸ Dedução feita por Carlos Henrique Marchi e apresentada ao autor enquanto cursava a disciplina Verificação e Validação em CFD, ofertada pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFPR. Nesta tese foi apenas acrescentado o conceito do fator de ponderação γ na formulação original.

O primeiro termo do lado direito constitui a aproximação numérica da Regra do Retângulo, isto é,

$$\int_{x_w}^{x_e} I dx \approx I_p h , \quad (4.43)$$

enquanto o erro de truncamento, $E_{RR,P}$ é constituído por todos os termos a partir do segundo do lado direito.

Efetuada os produtos notáveis na Eq. (4.42) e simplificando, verifica-se que os termos de ordem par resultam nulos, enquanto que os de ordem ímpar resultam sempre nos mesmos valores, independentemente do valor de γ usado dentro do intervalo $[0,1]$, ou seja,

$$E_{RR,P}^{num} = \frac{I_p^{ii}}{24} h^3 + \frac{I_p^{iv}}{1920} h^5 + \frac{I_p^{vi}}{322.560} h^7 + \dots \quad (4.44)$$

Portanto o erro de truncamento da Regra do Retângulo independe do fator de ponderação γ , sendo esta constatação a única contribuição nova deste trabalho para o tema abordado nesta seção.

4.4 COMPARAÇÃO ENTRE O ERRO CALCULADO E ERRO MEDIDO PARA A APLICAÇÃO DO DOM EM PROBLEMA DE RADIAÇÃO EM MEIO PARTICIPANTE 1D, HOMOGENEO E SEM ESPALHAMENTO

O objetivo desta seção é mostrar que as equações do erro de discretização deduzidas para o DOM nas seções anteriores deste capítulo efetivamente preveem o erro de discretização.

Na primeira análise considera-se um meio participante homogêneo com temperatura $T_g = 200 K$, coeficiente de absorção $\kappa = 0,7 m^{-1}$, espessura $L = 1,2 m$ e paredes negras com temperatura $T_w = 100 K$. A solução analítica para o cálculo da intensidade em uma posição x e com cosseno diretor μ é dada por

$$I_p = I_0 e^{-\frac{\kappa x}{\mu}} + \hat{I}_p \left(1 - e^{-\frac{\kappa x}{\mu}} \right), \quad (4.45)$$

onde I_0 é a intensidade deixando a fronteira oeste, calculada a partir de T_w . Vê-se que I_P na Eq. (4.45) pode ser derivada em relação à x infinitas vezes, portanto tanto $E_{I,P}$ como $E_{RR,P}$ possuem infinitos termos não nulos. Considerando que apenas os seis primeiros termos de fonte do erro de discretização foram deduzidos e programados no computador, então é esperado que a diferença entre o erro calculado e o medido tenda à zero à medida que $h \rightarrow 0$. Adicionalmente, é esperado que isso ocorra seguindo a ordem imediatamente posterior à ordem 6, o que dependerá do esquema usado na simulação. No caso dos esquemas estudados nesta tese, prevê-se ordem 7 para o esquema Degrau e ordem 8 para o esquema Diamante.

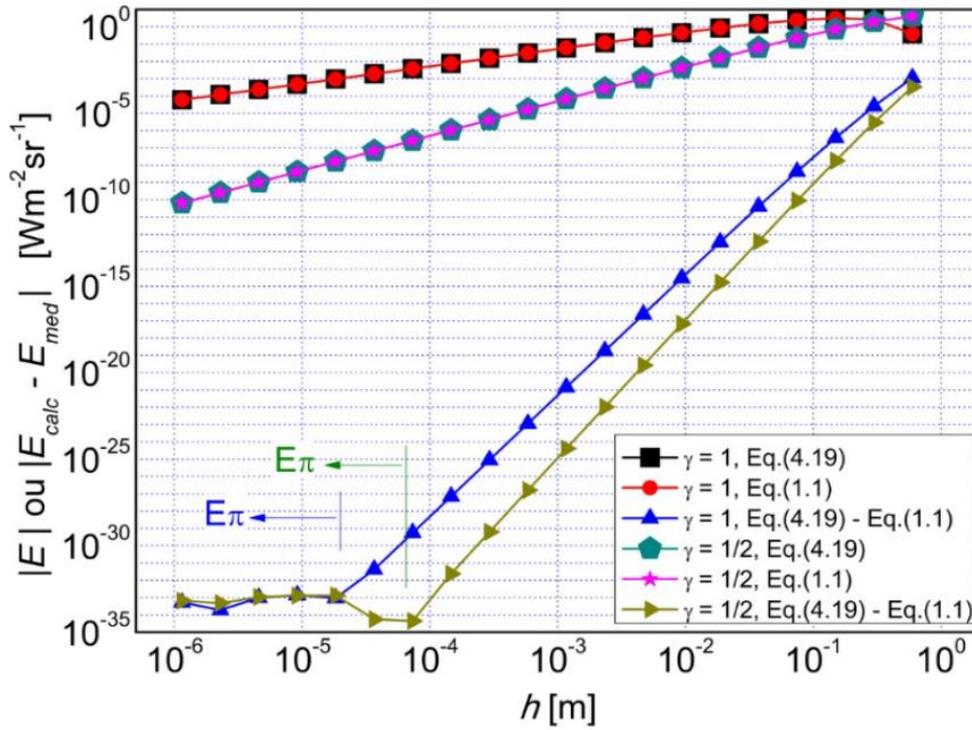
O problema foi resolvido com a aproximação S_6 em 20 malhas com razão de refinamento progressivo e constante igual a dois. Considerando o L especificado, o tamanho de cada elemento de volume varia de $h = 0,6 \text{ m}$ até $h \approx 1,14 \times 10^{-6} \text{ m}$, portanto dentro da região de convergência monotônica.

A primeira variável analisada é a intensidade nodal $I_P|_{P=1}$ na direção mais inclinada em relação ao eixo x , que é $\mu = 0,183867$, para a qual o erro é calculado substituindo a Eq. (4.45) e suas derivadas nas Eq. (4.37) e Eq. (4.44), que por sua vez são substituídas na Eq. (4.19). É importante notar que esta variável não leva em conta o erro de truncamento devido ao processo de marcha no espaço, já que para a condição de contorno de parede negra e $P = 1$ tem-se que $E_{e,0} = 0$. Assim o erro de discretização é composto apenas do erro da Ponderação Variável $E_{I,P}$ e do erro da integração com a Regra do Retângulo $E_{RR,P}$.

Observa-se na FIGURA 4.2 que o erro calculado e o erro medido aparecem graficamente sobrepostos para ambos os esquemas simulados. Porém mais interessante é observar que a diferença entre eles se reduz rapidamente até que uma malha suficientemente refinada é atingida, além da qual o erro de arredondamento E_π passa a dominar o erro numérico, impedindo que diferenças ainda menores sejam atingidas. Isso ocorre próximo do limite de precisão da computação com precisão quádrupla $\sim 10^{-33}$. Resultados similares são obtidos para as demais aproximações S_N e outras direções, e por isso não são mostrados.

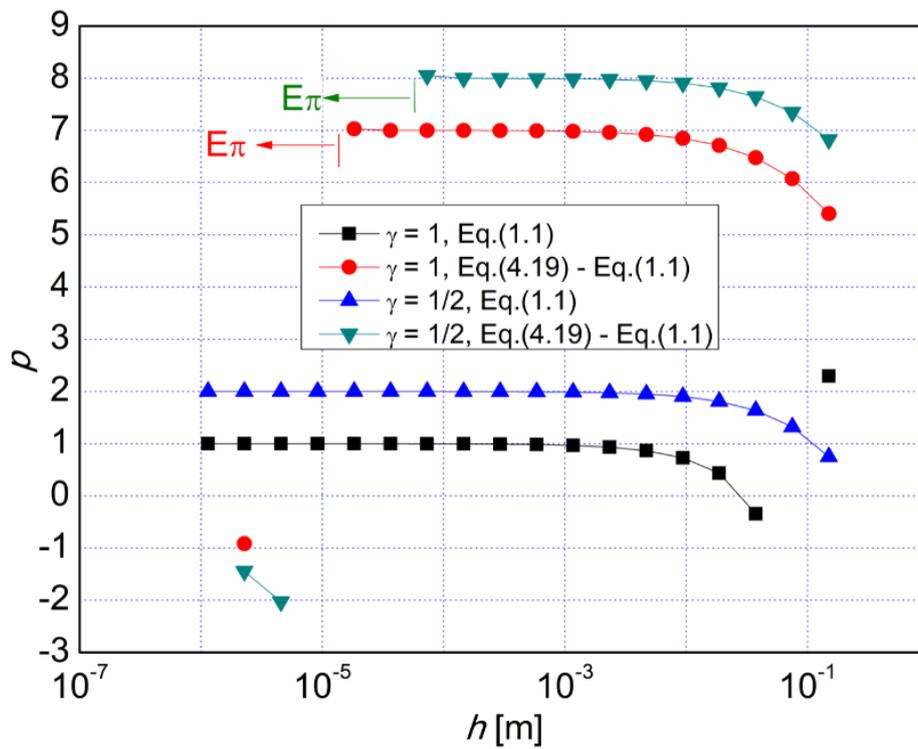
Como esperado, as soluções usando o esquema Diamante ($\gamma = 1/2$) são mais acuradas que as obtidas com o esquema Degrau ($\gamma = 1$) para um mesmo h . Já que foram deduzidas as seis primeiras ordens de cada erro e como o esquema Degrau possui ordens verdadeiras $p_V = 1,2,3, \dots$ e a Diamante ordens $p_V = 2,4,6, \dots$, então a primeira ordem resultante após a subtração entre o erro calculado e o erro medido é 7 para o Esquema Degrau e 8 para o Esquema Diamante, o que é observado na FIGURA 4.2, mas principalmente na FIGURA 4.3, que mostra a ordem aparente em função do tamanho do elemento de malha.

FIGURA 4.2 – DIFERENÇA ENTRE O ERRO CALCULADO E O MEDIDO PARA $I_p|_{p=1}$



Fonte: O Autor (2020)

FIGURA 4.3 – ORDEM APARENTE DA DIFERENÇA ENTRE OS ERROS CALCULADO E MEDIDO

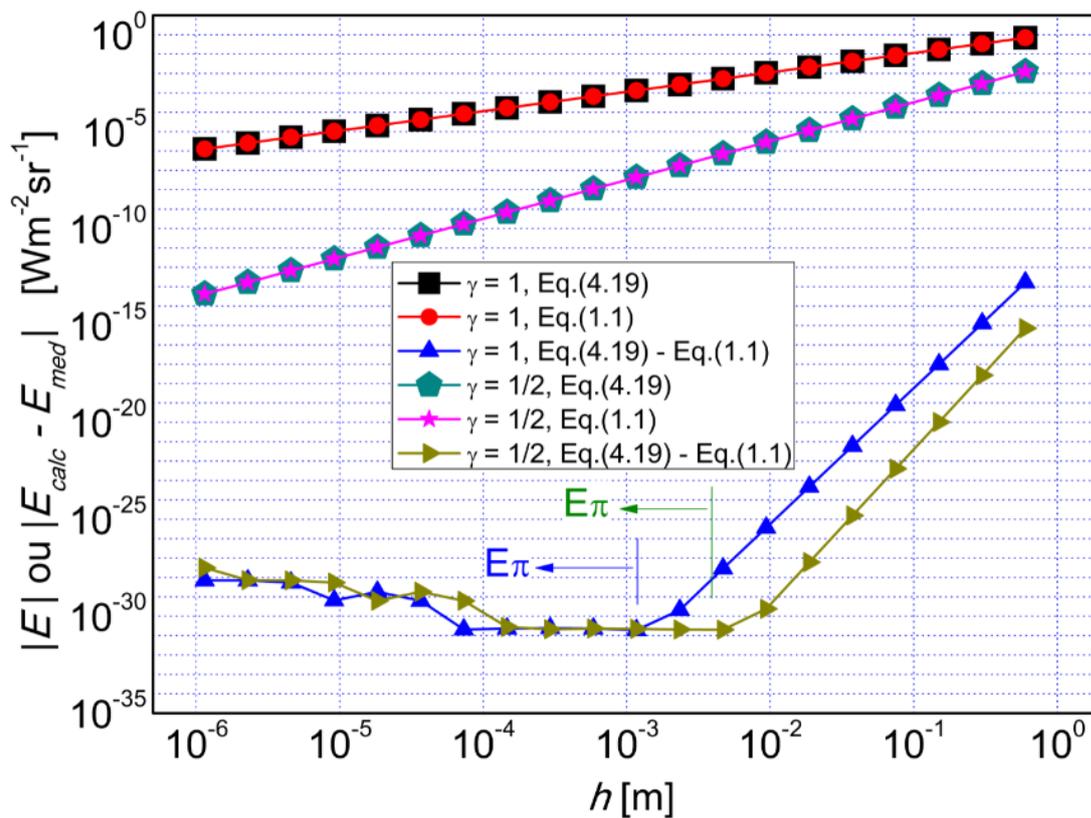


Fonte: O Autor (2020)

A próxima variável analisada é a intensidade direcional em um ponto nodal $P > 1$, situação na qual o erro decorrente do processo de marcha no espaço $E_{e,P}$ passa a se manifestar juntamente com os demais erros. O efeito cumulativo deste processo de marcha até pode reduzir o erro de discretização caso este erro de truncamento tenha sinal contrário a uma ou às duas outras fontes de erro (cancelamento subtrativo), entretanto é esperado que o erro de truncamento aumente à medida que o processo de marcha prossegue.

Tomando uma condição em princípio desfavorável $P = N$, a FIGURA 4.4 mostra o erro para a intensidade direcional $I_P|_{P=N}$ calculado com a Eq. (4.19), o erro medido com a Eq. (1.1) e a diferença entre eles.

FIGURA 4.4 – DIFERENÇA ENTRE OS ERROS CALCULADO E O MEDIDO PARA $I_P|_{P=N}$

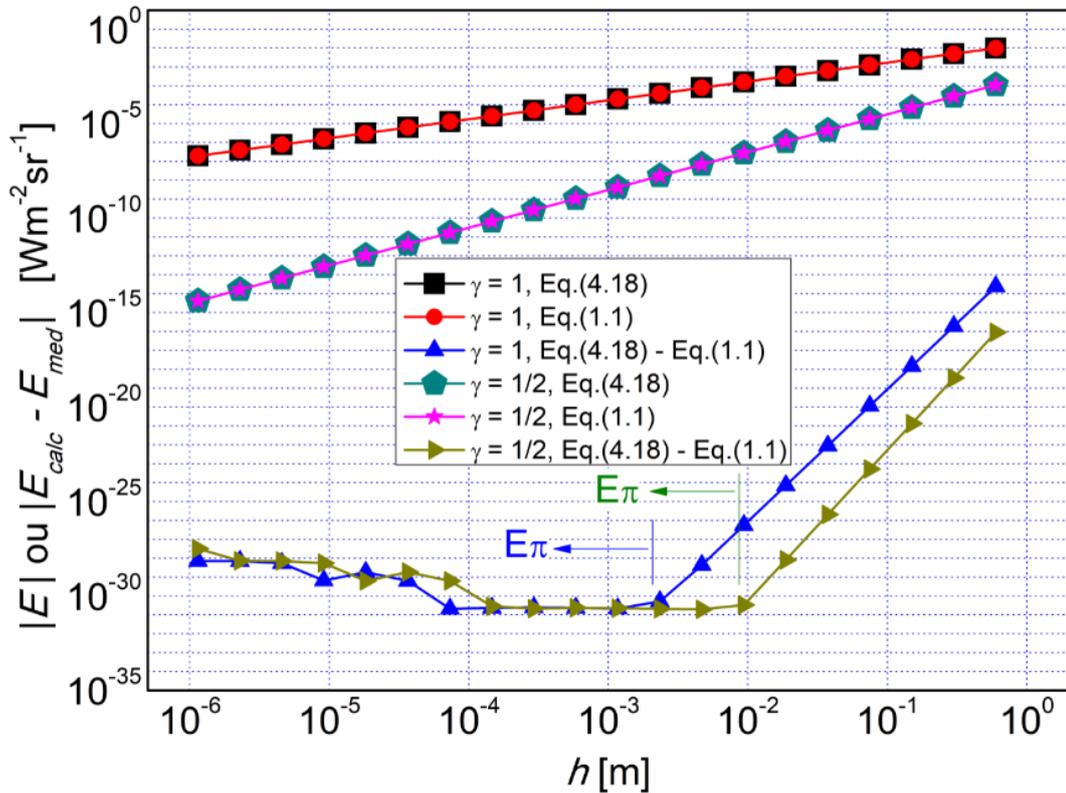


Fonte: O Autor (2020)

Curiosamente o erro de discretização para $I_P|_{P=N}$ se apresenta menor que o de $I_P|_{P=1}$, o que também contribui para que erro de arredondamento seja atingido em malhas menos refinadas. O mesmo ocorre para a última variável analisada nesta seção: o erro na intensidade atingindo a fronteira leste do domínio $I_e|_{P=N}$, calculada com a Eq. (4.18) e mostrada na

FIGURA 4.5. Interessante notar que $I_e|_{P=N}$ é a variável que apresenta menor erro de discretização dentre as variáveis analisadas e considerando os dados de entrada deste problema.

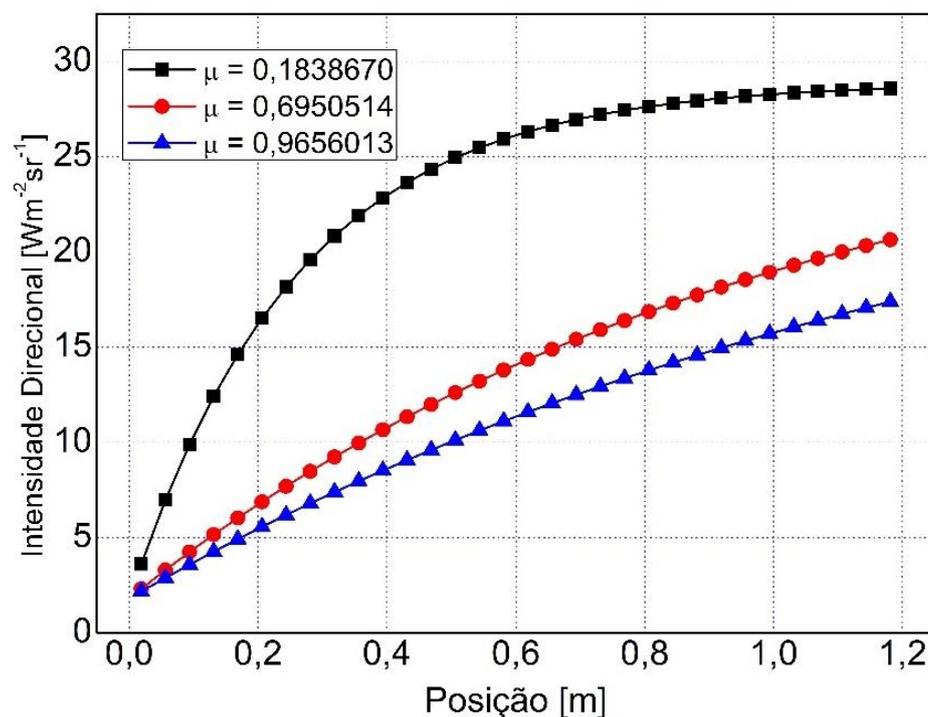
FIGURA 4.5 - DIFERENÇA ENTRE OS ERROS CALCULADO E O MEDIDO PARA $I_e|_{P=N}$



Fonte: O Autor (2020)

Dado esse comportamento inesperado, o autor realizou alguns testes variando as temperaturas do meio participante e das paredes. Resultados preliminares sugerem a combinação de dois fatores: O primeiro é que o erro no centro de um volume qualquer ($x = x_p$) é maior que o erro na face leste deste mesmo volume ($x = x_e$). O segundo está relacionado à variação da intensidade dentro do domínio. Quanto maior a magnitude das derivadas da intensidade, maior tende a ser o erro de discretização local.

Como ambas as fontes de erro $E_{I,P}$ e $E_{RR,P}$ são funções locais dependentes das derivadas da intensidade, então é esperado que o erro seja maior próximo à fronteira oeste, especialmente em $P = 1$ e na direção mais inclinada (menor valor de μ), pois é nesta região e direção que a intensidade e suas derivadas apresentam maior variação, conforme mostrado na FIGURA 4.6.

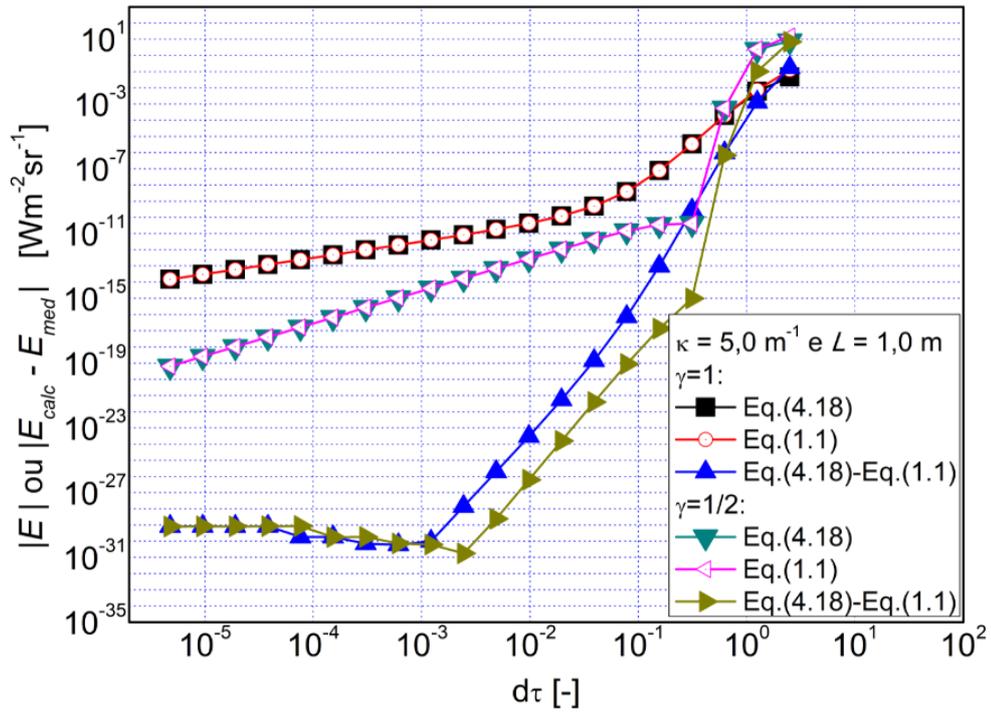
FIGURA 4.6 – INTENSIDADE DIRECIONAL PARA AS 3 DIREÇÕES POSITIVAS DE S_6 

Fonte: O Autor (2020)

Todas as análises até este ponto foram conduzidas considerando os dados de entrada citados no início desta seção. Entretanto, condições diferentes foram testadas, variando tanto as temperaturas das paredes e do meio, como também testando diversas configurações de espessuras óticas. Para exemplificar, dois cenários podem ser considerados: no primeiro o meio participante é espesso ($\kappa = 5 \text{ m}^{-1}$ e $L = 1 \text{ m}$, resultando em $\tau = 5$) e no segundo o meio é fino ($\kappa = 1/5 = 0,2 \text{ m}^{-1}$ e $L = 1 \text{ m}$, resultando em $\tau = 0,2$). As temperaturas da parede e do meio participante são as mesmas do problema original descrito nesta seção: $T_0 = T_L = 100 \text{ K}$ e $T_g = 200 \text{ K}$. É empregada a aproximação S_6 . Os resultados obtidos com ambos os esquemas Degrau e Diamante para o erro calculado, o erro medido e a diferença entre eles para a variável $I_e|_{P=N}$ na direção mais inclinada e meio espesso são mostrados na FIGURA 4.7. Resultados similares são mostrados na FIGURA 4.8 para o caso do meio fino.

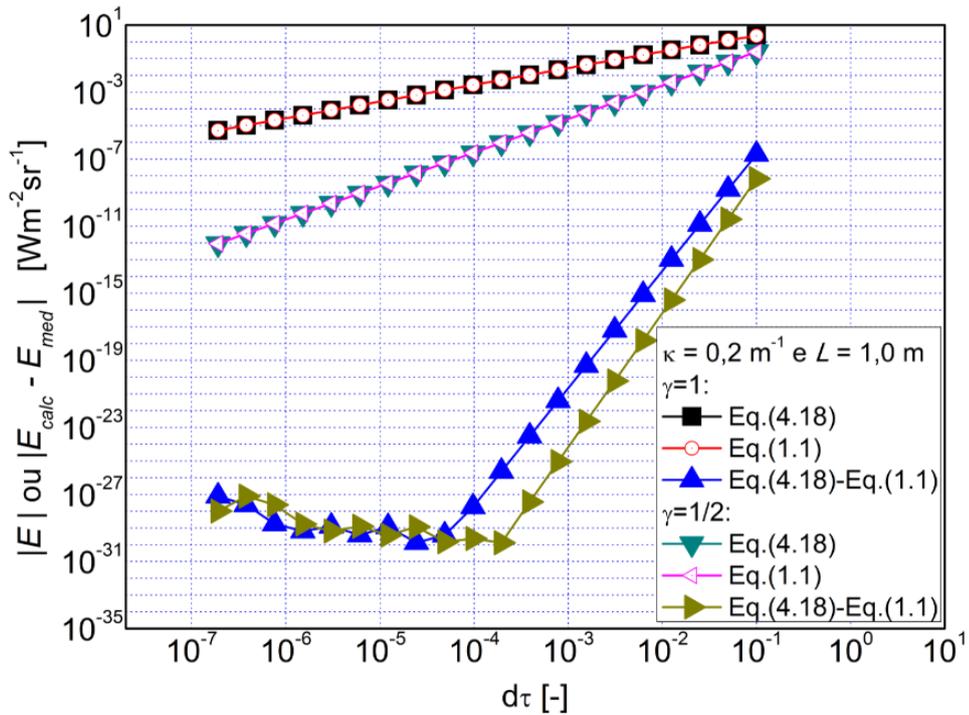
Primeiramente o que chama a atenção é que enquanto o erro no caso do meio fino parece se situar inteiramente na região de convergência monotônica, no caso do meio espesso aparece também uma região onde o erro ainda é influenciado pelos termos de ordem mais elevada (aqueles com expoentes p_1, p_2, \dots na Eq. (2.90)) pelo fato que h não é suficientemente pequeno na região em que $d\tau \gtrsim 10^{-1}$.

FIGURA 4.7 – COMPARAÇÃO DE $I_e|_{P=N}$ CONSIDERANDO MEIO ESPESSE, $\tau = 5$



Fonte: O Autor (2020)

FIGURA 4.8 – COMPARAÇÃO DE $I_e|_{P=N}$ CONSIDERANDO MEIO FINO, $\tau = 0,2$



Fonte: O Autor (2020)

Como já mencionado, diversas combinações de diferentes valores de variáveis de entrada foram testadas com resultados similares. Isso indica que quando um problema de radiação em meio participante espesso com simetria azimutal e sem espalhamento é resolvido, os resultados das malhas mais grossas possíveis não são adequados para estimar o erro de discretização. Quanto mais espesso é o meio, mais refinadas devem ser as malhas para garantir que as soluções estejam na região de convergência monotônica e as estimativas de erros de discretização sejam confiáveis.

Apesar dessa característica aparentemente desfavorável na simulação de meios espessos, observa-se na FIGURA 4.7 e FIGURA 4.8 que o erro na malha mais fina de todas é menor no caso do meio espesso. Isso ocorre porque imediatamente antes de entrar na região de convergência monotônica o erro de discretização se reduz consideravelmente no caso do meio espesso. No caso mostrado o erro de discretização do meio fino na malha mais fina é $\sim 10^{-5}$, enquanto no caso do meio espesso é $\sim 10^{-14}$, ambos os resultados considerando o esquema Degrau.

5 PROBLEMAS ESTUDADOS

Os modelos matemáticos estudados no presente trabalho estão basicamente divididos em duas grandes classes, que são avaliados separadamente. São elas: problemas de radiação térmica em meios não participantes e problemas de radiação térmica em meios participantes. Cada classe será abordada com uma metodologia diferente, porém independentemente da classe, os problemas de ambas as classes estão nesta tese descritos em linhas gerais por:

a) Um texto definindo o problema. Neste texto estarão identificadas as variáveis de interesse e seus símbolos, as propriedades físicas envolvidas (*i.e.* propriedades das superfícies e dos meios participantes), a geometria do problema e as condições de contorno;

b) Lista das hipóteses simplificadoras utilizadas para modelar matematicamente o problema;

c) Apresentação do modelo matemático para todas as variáveis de interesse ainda não apresentadas, assim como as equações para determinação de propriedades secundárias;

d) Apresentação dos dados de entrada das simulações e características da malha;

e) As soluções analíticas serão extraídas da literatura especializada ou obtidas pelo autor utilizando, por exemplo, o *software* Maple 17 ou uma rotina dedicada dentro do próprio programa que implementa o problema. As soluções analíticas serão obtidas preferencialmente com um número de algarismos significativos maior que os respectivos valores obtidos nas soluções numéricas a serem estudadas.

f) Apresentação das ordens verdadeiras e assintótica das soluções numéricas;

g) Descrição do *solver* empregado na solução do sistema linear, caso aplicável (MALISKA, 2010, p.212-230);

h) Caso aplicável, é descrito como é monitorada a convergência do processo iterativo e apresentadas equações definindo as variáveis usadas para acompanhar a redução do resíduo e do critério de parada;

i) Apresentar nome e versão dos programas de computador implementados. Todos os projetos são do tipo *Console Application* e versão *release*;

j) A linguagem de programação usada em todos os programas é o FORTRAN 95. É usada precisão quádrupla para as variáveis reais;

k) O *hardware* empregado na simulação dos problemas de radiação em meio não participante, descritos na Seção 5.1 foi um computador Samsung NP300E4A-BD2BR, com processador Intel Core i3-2350M de 2,3 GHz e 4 GB de memória RAM. O sistema operacional é o Windows 7 *Home Premium* de 64 Bits. Já os problemas de meios participantes, descritos

na Seção 5.2 foram simulados em um notebook DELL Inspiron, com processador Intel Pentium com 1,6 GHz e 4 GB de memória RAM. O sistema operacional é o Windows 10 de 64 Bits;

l) O tempo de processamento dos problemas em geral é entre alguns segundos e cinco minutos, portanto não se julgou necessário apresentar o tempo para resolver cada problema.

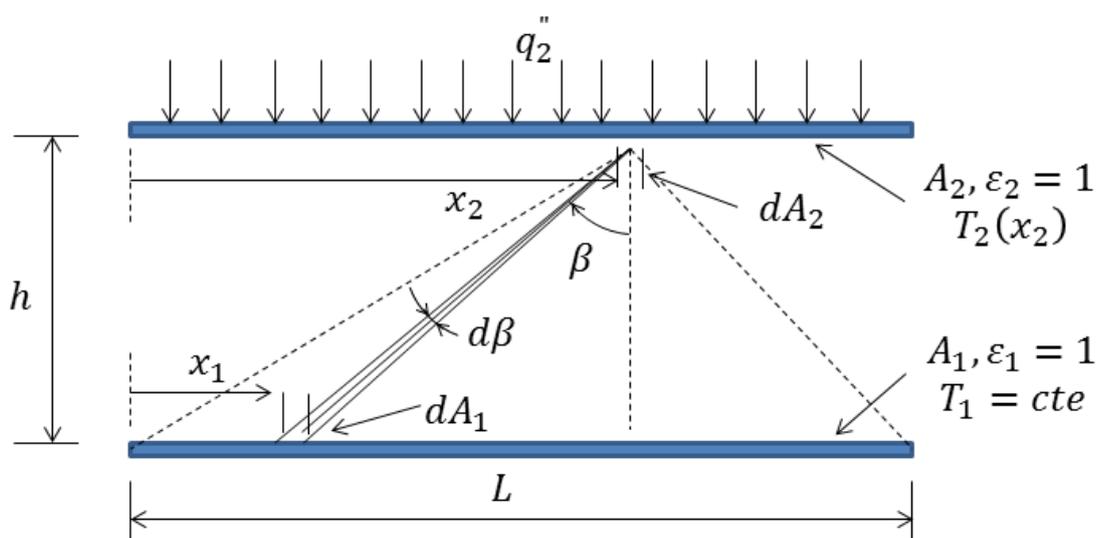
5.1 PROBLEMAS DE RADIAÇÃO TÉRMICA EM MEIOS NÃO PARTICIPANTES

Segundo Hildebrand (1965, p. 279) as Regras do Trapézio e as Regras de Simpson são as técnicas numéricas mais comumente empregadas na solução de equações integrais, embora haja técnicas mais elaboradas e acuradas na literatura. Entretanto, o uso das Múltiplas Extrapolações de Richardson permite aumentar a acurácia das soluções numéricas sem a necessidade de se recorrer a tais técnicas. De forma prática esses problemas compõem as etapas listadas a seguir.

5.1.1 EQUAÇÃO ALGÉBRICA CONTENDO TERMO INTEGRAL

O primeiro problema trata da transferência de calor por radiação apenas entre as duas placas negras não isotérmicas e paralelas entre si mostradas na FIGURA 5.1 (CARNAHAN; LUTHER; WILKES, 1969, p.80).

FIGURA 5.1 - PLACAS PARALELAS NEGRAS DO PRIMEIRO PROBLEMA.



FONTE: Adaptado de Carnahan, Luther e Wilkes (1969)

A distância de separação das duas placas paralelas é h e seus comprimentos infinitos e larguras L . Enquanto a placa 1 tem área A_1 e temperatura T_1 constante, a placa superior 2 tem área A_2 e recebe um fluxo de calor constante q_2'' . Entre as duas placas há um meio não participante e admite-se que a radiação proveniente de fora da região entre as placas seja nula. Desta forma, a temperatura T_2 deve variar em função de x_2 , podendo ser calculada com a Eq. (2.18), reproduzida aqui e adaptada para o problema:

$$\sigma T_2^4(x_2) = q_2'' + \int_{A_1} \sigma T_1^4 K(x_2, x_1) dA_1, \quad (5.1)$$

onde o fator de forma $dF_{dA_2-dA_1}$ é mais convenientemente escrito usando o núcleo $K(x_2, x_1)$:

$$K(x_2, x_1) = \frac{dF_{dA_2-dA_1}}{dA_1} = \frac{1}{2} d(\sin \beta). \quad (5.2)$$

Na Eq. (5.2) o ângulo β é o ângulo formado entre a normal da placa 2 e o elemento de área infinitesimal dA_1 posicionado na coordenada x_1 . Observa-se que dA_1 é a variável de integração. Como as placas são infinitamente longas, então faz-se $dA_1 = dx_1$. Reescrevendo a Eq. (5.2) em termos das dimensões do problema tem-se:

$$K(x_2, x_1) = \frac{dF_{dA_2-dA_1}}{dA_1} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{[(x_2 - x_1)^2 + h^2]^{3/2}}. \quad (5.3)$$

Como na Eq. (5.1) o poder emissivo da placa 1, σT_1^4 é um valor constante, este pode ser retirado de dentro da integral, resultando na solução analítica para a temperatura $T_2(x_2)$:

$$\sigma T_2^4(x_2) = q_2'' + \frac{\sigma T_1^4}{2h} \left[\frac{x_2}{\sqrt{\frac{x_2^2}{h^2} + 1}} + \frac{(L - x_2)}{\sqrt{\frac{(L - x_2)^2}{h^2} + 1}} \right], \quad (5.4)$$

Tendo a solução analítica deste problema é possível obter o erro numérico $E(\phi)$ em cada malha, desde a malha mais grosseira, com dois elementos discretos até a malha mais refinada, com 2048 elementos. Na solução deste problema utilizou-se $T_1 = 1000 \text{ K}$, $q_2'' = 1000 \text{ Wm}^{-2}$, $L = 1 \text{ m}$ e $h = 1 \text{ m}$.

A Eq. (5.4) representa uma variável local e nem sempre esse tipo de variável apresenta convergência monotônica tão óbvia quanto as variáveis globais, por exemplo a temperatura média ou a taxa de transferência de calor de uma superfície (ASME, 2009).

Encontrar a solução analítica da temperatura média pode ser consideravelmente difícil dependendo da forma matemática do fator de forma. No caso da placa 2 não foi possível obter uma solução analítica para a temperatura média, pois ao isolar T_2 na Eq. (5.4) deve-se extrair a raiz quarta do lado direito desta equação e depois calcular a média, ou seja, integrar a função ao longo do domínio e dividir por L .

Entretanto, o poder emissivo médio da placa 2, representado aqui por \overline{E}_2 , é calculado integrando a Eq. (5.4). No lado esquerdo aparece $\overline{E}_2 L$, que isolado resulta

$$\overline{E}_2 = q_2'' + \frac{\sigma T_1^4}{L} (\sqrt{L^2 + h^2} - h). \quad (5.5)$$

Outra variável global que pode ser usada é a taxa de transferência de calor q_2 na placa 2, sabendo que deve resultar $q_2 = q_2'' A_2 = q_2'' (1 \times L)$.

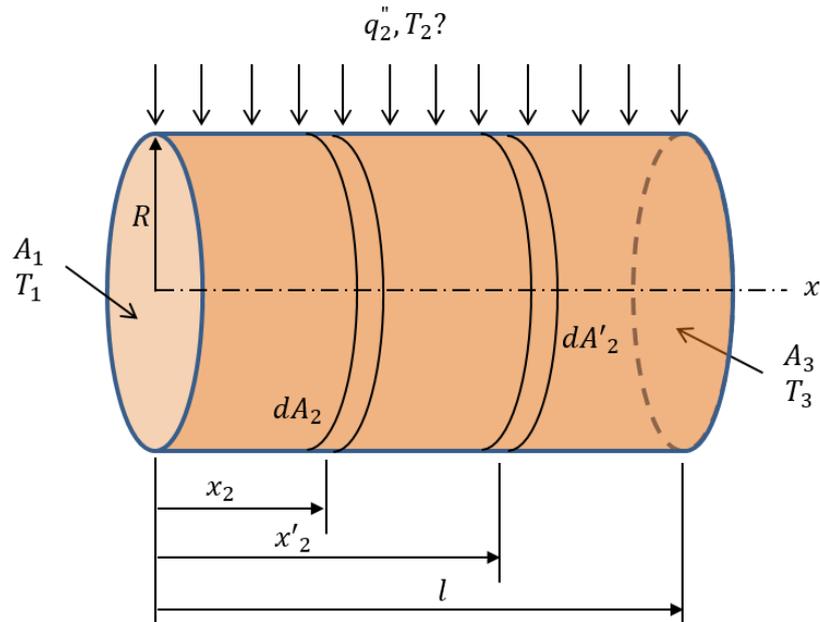
5.1.2 EQUAÇÃO DE FREDHOLM DO SEGUNDO TIPO

O modelo físico proposto nesta seção é de um tubo de seção transversal cilíndrica de raio $R = 1 \text{ m}$ e de comprimento $l = 2 \text{ m}$. O tubo recebe $q_2'' = 1000 \text{ Wm}^{-2}$ pela sua área lateral A_2 (*i.e.* área lateral do cilindro) de forma que sua superfície interna possui temperatura $T_2(x_2)$ variável, sendo esta a incógnita do problema.

Ambas as extremidades do tubo (*i.e.* áreas das bases do cilindro) permitem a entrada de radiação ambiente, comportando-se como superfícies negras fictícias, cada uma com sua respectiva temperatura de corpo negro. As áreas das extremidades são denominadas área A_1 , posicionada na origem do sistema de coordenadas e A_3 , na posição $x = l$, conforme mostrado na FIGURA 5.2. Como a área A_2 apresenta temperatura variável, então estão representados nesta figura os elementos infinitesimais de área lateral de cilindro dA_2 e dA'_2 .

As temperaturas das áreas das extremidades são $T_1 = 1000 \text{ K}$ e $T_3 = 500 \text{ K}$, ou seja, diferentes entre si. O objetivo é evidenciar a contribuição de todos os termos da equação do modelo matemático e também de todas as estruturas do código computacional.

FIGURA 5.2 - TUBO FINITO COM FLUXO DE CALOR PRESCRITO NA ÁREA LATERAL E RADIAÇÃO AMBIENTE NAS EXTREMIDADES.



FONTE: Adaptado de Usiskin e Siegel (1960)

O modelo matemático deste problema é dado pela equação (2.19), reproduzida a seguir já considerando as variáveis do problema desta seção:

$$\begin{aligned} \sigma T_2^4(x_2) - \int_{A_2} \sigma T_2^4(x_2) K(x_2, x'_2) dA'_2 \\ = q_2'' + \int_{A_1} \sigma T_1^4 K_e(x_2) dA_1 + \int_{A_3} \sigma T_3^4 K_e(L - x_2) dA_3, \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde σT_2^4 é o poder emissivo da superfície A_2 . O núcleo da integral K que contém a incógnita é dado por

$$K(x_2, x'_2) = 1 - \frac{Z^3 + \frac{3}{2}Z}{\sqrt{Z^2 + 1}}, \quad Z = |X_2 - X'_2|, \quad (5.7)$$

onde a distância Z é dada em termos das coordenadas adimensionalizadas $X_2 = \frac{x_2}{2R}$ e $X'_2 = \frac{x'_2}{2R}$.

O núcleo das integrais referentes à radiação proveniente das extremidades K_e é dado por

$$K_e(S) = \frac{S^2 + \frac{1}{2}}{\sqrt{S^2 + 1}} - S^2, \quad (5.8)$$

onde $S = \frac{x_2}{2R}$ ou $S = \frac{l-x_2}{2R}$, dependendo qual termo do lado direito da Eq. (5.6) está sendo integrado.

Escrita em termos do poder emissivo $E_2 = \sigma T_2^4$, e em função das coordenadas adimensionalizadas, a Eq. (5.6) assume a forma

$$\begin{aligned} E_2(X_2) - \int_0^{X_2} E_2(X_2)K(X_2, X'_2)dx_2 - \int_{X_2}^L E_2(X_2)K(X_2, X'_2)dX_2 \\ = q_2'' + \sigma T_1^4 \left[\frac{X_2^2 + 1/2}{\sqrt{X_2^2 + 1}} - X_2^2 \right] \\ + \sigma T_3^4 \left[\frac{(L - X_2)^2 + 1/2}{\sqrt{(L - X_2)^2 + 1}} - (L - X_2)^2 \right], \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde $L = \frac{l}{2R}$. A integral do lado esquerdo na Eq. (5.9) foi dividida em duas integrais, pois a variável Z possui derivada contínua por partes.

Em Usiskin e Siegel (1960) são apresentadas duas soluções analíticas aproximadas da Eq. (5.9): uma obtida com núcleo aproximado separável e a outra pelo método variacional. Embora ambas foram programadas, escolheu-se a última para ser apresentada no presente trabalho (ver ANEXO C). Sendo uma solução analítica aproximada, já é esperado que a ordem efetiva da solução numérica tenda a zero a partir de uma malha suficientemente refinada, porém a análise da tendência, mesmo em malhas mais grosseiras, pode indicar que o programa está resolvendo corretamente o modelo matemático do problema.

Discretizada empregando a Regra do Trapézio e escrita para um nó qualquer i , a Eq. (5.9) assume a forma

$$E_{2,i} - h \frac{(f_{i,0} + 2 \sum_{j=1}^N f_{i,j} + f_{i,N})}{2} = LD, \quad (5.10)$$

onde LD é o lado direito da Eq. (5.9) e

$$f_{i,j} = E_{2,i,j}K_{2,i,j} = E_{2,i,j} \left[1 - \frac{Z^3 + 3Z/2}{(Z^2 + 1)^{3/2}} \right], \quad Z \geq 0, \quad (5.11)$$

Discretizada com a Regra 1/3 de Simpson, escreve-se a Eq. (5.9) como

$$E_{2,i} - h \frac{(f_{i,0} + 4 \sum_{j=1,3,\dots}^{N-1} f_{i,j} + 2 \sum_{j=2,4,\dots}^{N-2} f_{i,j} + f_{i,N})}{3} = LD, \quad (5.12)$$

Na forma de sistema linear as Eq. (5.10) e Eq. (5.12) são dadas na página seguinte pelas Eq. (5.14) e Eq. (5.15), respectivamente. Observa-se que em ambos os modelos numéricos as matrizes de coeficientes são cheias, por isso é empregado na solução do sistema linear o Método da Eliminação de Gauss, já programado pelo autor durante seus estudos no mestrado.

Uma vez resolvido o sistema linear para E_2 , então a temperatura da superfície interior do tubo pode ser calculada usando a definição de poder emissivo, ou seja,

$$T_2(X_2) = \sqrt[4]{\frac{E_2(X_2)}{\sigma}}. \quad (5.13)$$

As variáveis usadas na verificação são $T_2(0)$ e $T_2(L/2)$, ou seja, as temperaturas nas posições $X_2 = 0$ e $X_2 = L/2$.

$$\begin{bmatrix}
1 - \frac{h}{2}K_{0,0} & -hK_{0,1} & \cdots & & & -hK_{0,N-1} & -\frac{h}{2}K_{0,N} \\
-\frac{h}{2}K_{1,0} & 1 - hK_{1,1} & \cdots & -hK_{0,i} & \cdots & -hK_{1,N-1} & -\frac{h}{2}K_{1,N} \\
\vdots & \vdots & \ddots & -hK_{1,i} & \cdots & \vdots & \vdots \\
-\frac{h}{2}K_{i,0} & -hK_{i,1} & \cdots & 1 - hK_{i,i} & \ddots & \vdots & -\frac{h}{2}K_{i,N} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
-\frac{h}{2}K_{N-1,0} & -hK_{N-1,1} & \cdots & \vdots & \cdots & 1 - hK_{N-1,N-1} & -\frac{h}{2}K_{N-1,N} \\
-\frac{h}{2}K_{N,0} & -hK_{N,1} & \cdots & -hK_{N-1,i} & \cdots & -hK_{N,N-1} & 1 - \frac{h}{2}K_{N,N}
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{2,0} \\ E_{2,1} \\ \vdots \\ E_{2,i} \\ \vdots \\ E_{2,N-1} \\ E_{2,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} LD_0 \\ LD_1 \\ \vdots \\ LD_i \\ \vdots \\ LD_{N-1} \\ LD_N \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

e

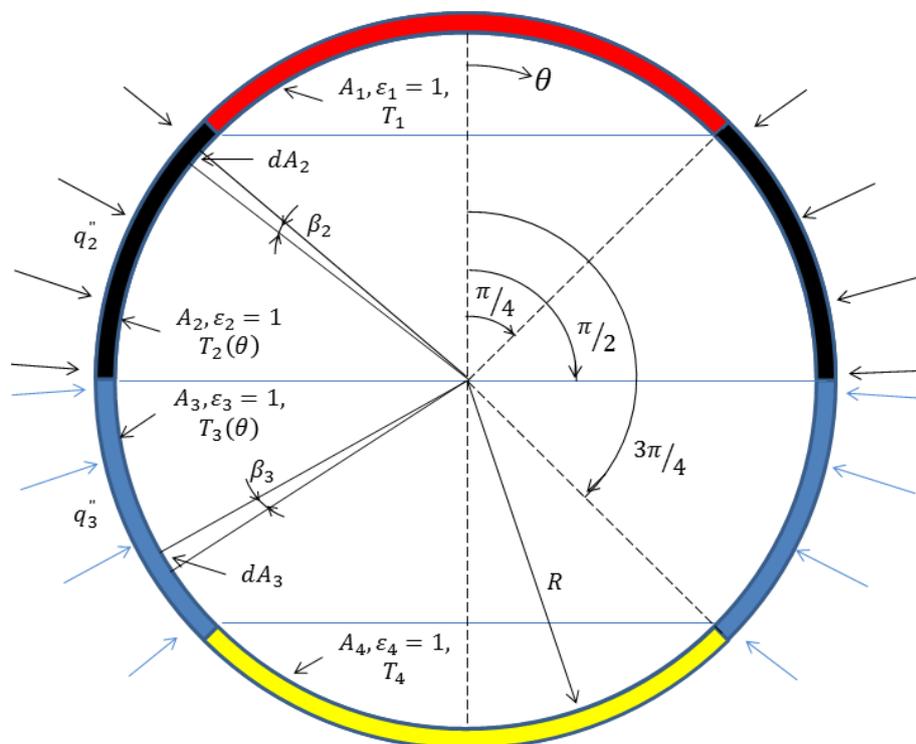
$$\begin{bmatrix}
1 - \frac{h}{3}K_{0,0} & -\frac{4h}{3}K_{0,1} & -\frac{2h}{3}K_{0,2} & \cdots & -\frac{4h}{3}K_{0,i} & -\frac{2h}{3}K_{0,i+1} & \cdots & -\frac{2h}{3}K_{0,N-2} & -\frac{4h}{3}K_{0,N-1} & -\frac{h}{3}K_{0,N} \\
-\frac{h}{3}K_{1,0} & 1 - \frac{4h}{3}K_{1,1} & -\frac{2h}{3}K_{1,2} & \cdots & -\frac{4h}{3}K_{1,i} & -\frac{2h}{3}K_{1,i+1} & \cdots & -\frac{2h}{3}K_{1,N-2} & -\frac{4h}{3}K_{1,N-1} & -\frac{h}{3}K_{1,N} \\
-\frac{h}{3}K_{2,0} & -\frac{4h}{3}K_{2,1} & 1 - \frac{2h}{3}K_{2,2} & \cdots & -\frac{4h}{3}K_{2,i} & -\frac{2h}{3}K_{2,i+1} & \cdots & -\frac{2h}{3}K_{2,N-2} & -\frac{4h}{3}K_{2,N-1} & -\frac{h}{3}K_{2,N} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
-\frac{h}{3}K_{i,0} & -\frac{4h}{3}K_{i,1} & -\frac{2h}{3}K_{i,2} & \cdots & 1 - \frac{4h}{3}K_{i,i} & -\frac{2h}{3}K_{i,i+1} & \cdots & -\frac{2h}{3}K_{i,N-2} & -\frac{4h}{3}K_{i,N-1} & -\frac{h}{3}K_{i,N} \\
-\frac{h}{3}K_{i+1,0} & -\frac{4h}{3}K_{i+1,1} & -\frac{2h}{3}K_{i+1,2} & \cdots & -\frac{4h}{3}K_{i+1,i} & 1 - \frac{2h}{3}K_{i+1,i+1} & \cdots & -\frac{2h}{3}K_{i+1,N-2} & -\frac{4h}{3}K_{i+1,N-1} & -\frac{h}{3}K_{i+1,N} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
-\frac{h}{3}K_{N-2,0} & -\frac{4h}{3}K_{N-2,1} & -\frac{2h}{3}K_{N-2,2} & \cdots & -\frac{4h}{3}K_{N-2,i} & -\frac{2h}{3}K_{N-2,i+1} & \cdots & 1 - \frac{2h}{3}K_{N-2,N-2} & -\frac{4h}{3}K_{N-2,N-1} & -\frac{h}{3}K_{N-2,N} \\
-\frac{h}{3}K_{N-1,0} & -\frac{4h}{3}K_{N-1,1} & -\frac{2h}{3}K_{N-1,2} & \cdots & -\frac{4h}{3}K_{N-1,i} & -\frac{2h}{3}K_{N-1,i+1} & \cdots & -\frac{2h}{3}K_{N-1,N-2} & 1 - \frac{4h}{3}K_{N-1,N-1} & -\frac{h}{3}K_{N-1,N} \\
-\frac{h}{3}K_{N,0} & -\frac{4h}{3}K_{N,1} & -\frac{2h}{3}K_{N,2} & \cdots & -\frac{4h}{3}K_{N,i} & -\frac{2h}{3}K_{N,i+1} & \cdots & -\frac{2h}{3}K_{N,N-2} & -\frac{4h}{3}K_{N,N-1} & 1 - \frac{h}{3}K_{N,N}
\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{2,0} \\ E_{2,1} \\ E_{2,2} \\ \vdots \\ E_{2,i} \\ E_{2,i+1} \\ \vdots \\ E_{2,N-2} \\ E_{2,N-1} \\ E_{2,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} LD_0 \\ LD_1 \\ LD_2 \\ \vdots \\ LD_i \\ LD_{i+1} \\ \vdots \\ LD_{N-2} \\ LD_{N-1} \\ LD_N \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

5.1.3 SISTEMA DE EQUAÇÕES INTEGRAIS DE FREDHOLM DO SEGUNDO TIPO

Um sistema de equações integrais de Fredholm pode ser constituído caso haja duas ou mais superfícies côncavas, negras ou difusas, que troquem radiação entre si. Isso porque cada superfície troca energia consigo mesma e com a outra superfície, que por sua vez também recebe radiação dela própria.

Para formar um sistema linear de equações determinado, pelo menos uma das superfícies da cavidade deve ter sua temperatura especificada. No problema proposto para esta seção são consideradas duas superfícies 1 e 4 (calotas esféricas) com temperaturas constantes $T_1 = 1000\text{ K}$ e $T_4 = 500\text{ K}$ e duas superfícies 2 e 3 (zonas esféricas) com fluxos de calor prescritos e constantes, $q_2'' = 500\text{ Wm}^{-2}$ e $q_3'' = 800\text{ Wm}^{-2}$, respectivamente. Assim as temperaturas T_2 e T_3 serão obrigatoriamente função do ângulo polar θ , conforme representado na FIGURA 5.3.

FIGURA 5.3 - CAVIDADE ESFÉRICA NEGRA DIVIDIDA EM QUATRO SEÇÕES COM DIFERENTES CONDIÇÕES DE CONTORNO.



FONTE: O Autor (2020)

Neste problema o sistema de equações é formado por duas equações integrais de Fredholm do segundo tipo, não homogêneas, isto é

$$\begin{cases} \sigma T_2^4(\theta) = q_2'' + \int_{A_2} \sigma T_2^4(\theta) dF_{dA_2-dA_2} + \int_{A_3} \sigma T_3^4(\theta) dF_{dA_2-dA_3} + C_2 \\ \sigma T_3^4(\theta) = q_3'' + \int_{A_3} \sigma T_3^4(\theta) dF_{dA_3-dA_3} + \int_{A_2} \sigma T_2^4(\theta) dF_{dA_3-dA_2} + C_3 \end{cases}, \quad (5.16)$$

onde termos C_2 e C_3 são dados por

$$C_2 = \int_{A_1} \sigma T_1^4 dF_{dA_2-dA_1} + \int_{A_4} \sigma T_4^4 dF_{dA_2-dA_4}, \quad (5.17)$$

$$C_3 = \int_{A_1} \sigma T_1^4 dF_{dA_3-dA_1} + \int_{A_4} \sigma T_4^4 dF_{dA_3-dA_4}. \quad (5.18)$$

Neste problema os fatores de forma infinitesimais entre dois elementos quaisquer de área infinitesimal dA_i e dA_j são constantes, independentes das posições dos elementos infinitesimais que trocam radiação entre si (HOWELL, 2019, Seção C.136), ou seja,

$$K = \frac{dF_{dA_i-dA_j}}{dA_j} = \frac{dF_{dA_j-dA_i}}{dA_i} = \frac{1}{4\pi R^2}. \quad (5.19)$$

Substituindo a Eq. (5.19) nas Eq. (5.16) a Eq. (5.18) e usando a definição de poder emissivo $E_i = \sigma T_i^4$ para tornar o problema linear, obtém-se

$$\begin{cases} E_2 - \int_{A_2} E_2 \frac{1}{4\pi R^2} dA_2 - \int_{A_3} E_3 \frac{1}{4\pi R^2} dA_3 = q_2'' + \frac{E_1}{4\pi R^2} \int_{A_1} dA_1 + \frac{E_4}{4\pi R^2} \int_{A_4} dA_4 \\ E_3 - \int_{A_3} E_3 \frac{1}{4\pi R^2} dA_3 - \int_{A_2} E_2 \frac{1}{4\pi R^2} dA_2 = q_3'' + \frac{E_1}{4\pi R^2} \int_{A_1} dA_1 + \frac{E_4}{4\pi R^2} \int_{A_4} dA_4 \end{cases} \quad (5.20)$$

As integrais na Eq. (5.20) são integrais duplas, portanto:

$$\begin{cases} E_2 - \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2} \frac{E_2 R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi}{4\pi R^2} - \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=\pi/2}^{3\pi/4} \frac{E_3 R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi}{4\pi R^2} = S_2 \\ E_3 - \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=\pi/2}^{3\pi/4} \frac{E_3 R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi}{4\pi R^2} - \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2} \frac{E_2 R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi}{4\pi R^2} = S_3 \end{cases}, \quad (5.21)$$

onde os termos do lado direito de ambas as equações S_2 e S_3 são dados por

$$S_2 = q_2'' + \frac{E_1 A_1}{4\pi R^2} + \frac{E_4 A_4}{4\pi R^2}, \quad (5.22)$$

$$S_3 = q_3'' + \frac{E_1 A_1}{4\pi R^2} + \frac{E_4 A_4}{4\pi R^2}. \quad (5.23)$$

Conduzindo as integrais no ângulo azimutal ϕ e calculando as áreas $A_1 = A_4 = (2 - \sqrt{2})\pi R^2$, tem-se

$$\begin{cases} E_2 - \frac{1}{2} \int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2} E_2 \sin(\theta) d\theta - \frac{1}{2} \int_{\theta=\pi/2}^{3\pi/4} E_3 \sin(\theta) d\theta = q_2'' + (E_1 + E_4) \frac{(2 - \sqrt{2})}{4} \\ E_3 - \frac{1}{2} \int_{\theta=\pi/2}^{3\pi/4} E_3 \sin(\theta) d\theta - \frac{1}{2} \int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2} E_2 \sin(\theta) d\theta = q_3'' + (E_1 + E_4) \frac{(2 - \sqrt{2})}{4} \end{cases}. \quad (5.24)$$

A solução analítica do sistema de Eq. (5.24) é apresentada no APÊNDICE B. Já a solução numérica pode ser obtida dividindo ambas as superfícies em N intervalos discretos, formando um sistema de $2N + 2$ equações, sendo que as equações relativas à primeira equação em Eq. (5.24) (superfície 2) vão da equação algébrica (*i.e.* linha da matriz de coeficientes) com índice 0 até N (enumeração clássica aplicada ao Método das Diferenças Finitas) e as equações discretizadas relativas à segunda equação no sistema Eq. (5.24) vão do índice $N + 1$ até $2N + 1$.

Quando discretizadas usando o Método das Diferenças Finitas com a Regra do Trapézio, as equações que compõem o sistema de Eq. (5.24) podem ser combinadas formando o seguinte sistema linear de equações algébricas:

$$\begin{aligned}
E_i - \frac{h}{2} \sum_{j=1}^N (f_{j-1} + f_j) - \frac{h}{2} \sum_{j=N+2}^{2N+1} (f_{j-1} + f_j) \\
= q_i'' + (E_1 + E_4) \frac{(2 - \sqrt{2})}{4}, \quad 0 \leq i \leq 2N + 1,
\end{aligned} \tag{5.25}$$

onde f_j é dado por

$$f_j = E_j K_{i,j} = E_j \frac{\text{sen}(\theta_j)}{2}. \tag{5.26}$$

Discretizada com a Regra 1/3 de Simpson, escreve-se a Eq. (5.24) como

$$\begin{aligned}
E_i - \frac{h}{3} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{N-1} (f_{j-1} + 4f_j + f_{j+1}) \\
- \frac{h}{3} \sum_{j=N+2,N+4,\dots}^{2N} (f_{j-1} + 4f_j + f_{j+1}) \\
= q_i'' + (E_1 + E_4) \frac{(2 - \sqrt{2})}{4}, \quad 0 \leq i \leq 2N + 1.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

A matriz de coeficientes dos sistemas lineares descritos pelas Eq. (5.25) e Eq. (5.27) são apresentados na próxima página, pois sendo constituídas de $2N + 2$ equações, são necessárias muitas colunas a mais para mostrar sua configuração, já que a metade superior da matriz se refere à área 2, enquanto a metade inferior refere-se à área 3. Uma linha traço-pontilhada é usada para auxiliar na distinção entre as áreas. Outra linha traço-pontilhada vertical separa as contribuições dos demais elementos discretos em cada área sobre cada elemento discreto.

Infelizmente não foi possível representar a matriz de coeficientes encerrada entre colchetes por conta de dificuldades com o editor de texto. Em vez disso foi empregado o símbolo de determinante (*i.e.* $| \quad |$). Entretanto, entenda-se neste caso que ele representa a matriz de coeficientes e não o seu determinante.

A matriz de coeficientes considerando a aplicação da Regra do Trapézio assume a forma:

$$\begin{array}{cccccc|cccc}
 1 - \frac{h}{2}K_{0,0} & -hK_{0,1} & \cdots & -hK_{0,N-1} & -\frac{h}{2}K_{0,N} & -\frac{h}{2}K_{0,N+1} & -hK_{0,N+2} & \cdots & -hK_{0,2N} & -\frac{h}{2}K_{0,2N+1} \\
 -\frac{h}{2}K_{1,0} & 1 - hK_{1,1} & \cdots & -hK_{1,N-1} & -\frac{h}{2}K_{1,N} & -\frac{h}{2}K_{1,N+1} & -hK_{1,N+2} & \cdots & -hK_{1,2N} & -\frac{h}{2}K_{1,2N+1} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 -\frac{h}{2}K_{N-1,0} & -hK_{N-1,1} & \cdots & 1 - hK_{N-1,N-1} & -\frac{h}{2}K_{N-1,N} & -\frac{h}{2}K_{N-1,N+1} & -hK_{N-1,N+2} & \cdots & -hK_{N-1,2N} & -\frac{h}{2}K_{N-1,2N+1} \\
 -\frac{h}{2}K_{N,0} & -hK_{N,1} & \cdots & -hK_{N,N-1} & 1 - \frac{h}{2}K_{N,N} & -\frac{h}{2}K_{N,N+1} & -hK_{N,N+2} & \cdots & -hK_{N,2N} & -\frac{h}{2}K_{N,2N+1} \\
 \hline
 -\frac{h}{2}K_{N+1,0} & -hK_{N+1,1} & \cdots & -hK_{N+1,N-1} & -\frac{h}{2}K_{N+1,N} & 1 - \frac{h}{2}K_{N+1,N+1} & -hK_{N+1,N+2} & \cdots & -hK_{N+1,2N} & -\frac{h}{2}K_{N+1,2N+1} \\
 -\frac{h}{2}K_{N+2,0} & -hK_{N+2,1} & \cdots & -hK_{N+2,N-1} & -\frac{h}{2}K_{N+2,N} & -\frac{h}{2}K_{N+2,N+1} & 1 - hK_{N+2,N+2} & \cdots & -hK_{N+2,2N} & -\frac{h}{2}K_{N+2,2N+1} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 -\frac{h}{2}K_{2N,0} & -hK_{2N,1} & \cdots & -hK_{2N,N-1} & -\frac{h}{2}K_{2N,N} & -\frac{h}{2}K_{2N,N+1} & -hK_{2N,N+2} & \cdots & 1 - hK_{2N,2N} & -\frac{h}{2}K_{2N,2N+1} \\
 -\frac{h}{2}K_{2N+1,0} & -hK_{2N+1,1} & \cdots & -hK_{2N+1,N-1} & -\frac{h}{2}K_{2N+1,N} & -\frac{h}{2}K_{2N+1,N+1} & -hK_{2N+1,N+2} & \cdots & -hK_{2N+1,2N} & 1 - \frac{h}{2}K_{2N+1,2N+1}
 \end{array}$$

(5.28)

Já a matriz de coeficientes considerando a aplicação da Regra 1/3 de Simpson assume a forma:

$$\begin{array}{cccccccc|cccccccc}
 1 - \frac{h}{3}K_{0,0} & -\frac{4h}{3}K_{0,1} & -\frac{2h}{3}K_{0,2} & \cdots & -\frac{2h}{3}K_{0,N-2} & -\frac{4h}{3}K_{0,N-1} & -\frac{h}{3}K_{0,N} & -\frac{h}{3}K_{0,N+1} & -\frac{4h}{3}K_{0,N+2} & -\frac{2h}{3}K_{0,N+3} & \cdots & -\frac{2h}{3}K_{0,2N-3} & -\frac{4h}{3}K_{0,2N} & -\frac{h}{3}K_{0,2N+1} \\
 -\frac{h}{3}K_{1,0} & 1 - \frac{4h}{3}K_{1,1} & -\frac{2h}{3}K_{1,2} & \cdots & -\frac{2h}{3}K_{1,N-2} & -\frac{4h}{3}K_{1,N-1} & -\frac{h}{3}K_{1,N} & -\frac{h}{3}K_{1,N+1} & -\frac{4h}{3}K_{1,N+2} & -\frac{2h}{3}K_{1,N+3} & \cdots & -\frac{2h}{3}K_{1,2N-3} & -\frac{4h}{3}K_{1,2N} & -\frac{h}{3}K_{1,2N+1} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 -\frac{h}{3}K_{N-1,0} & -\frac{4h}{3}K_{N-1,1} & -\frac{2h}{3}K_{N-1,2} & \cdots & -\frac{2h}{3}K_{N-1,N-2} & 1 - \frac{4h}{3}K_{N-1,N-1} & -\frac{h}{3}K_{N-1,N} & -\frac{h}{3}K_{N-1,N+1} & -\frac{4h}{3}K_{N-1,N+2} & -\frac{2h}{3}K_{N-1,N+3} & \cdots & -\frac{2h}{3}K_{N-1,2N-3} & -\frac{4h}{3}K_{N-1,2N} & -\frac{h}{3}K_{N-1,2N+1} \\
 -\frac{h}{3}K_{N,0} & -\frac{4h}{3}K_{N,1} & -\frac{2h}{3}K_{N,2} & \cdots & -\frac{2h}{3}K_{N,N-2} & -\frac{4h}{3}K_{N,N-1} & 1 - \frac{h}{3}K_{N,N} & -\frac{h}{3}K_{N,N+1} & -\frac{4h}{3}K_{N,N+2} & -\frac{2h}{3}K_{N,N+3} & \cdots & -\frac{2h}{3}K_{N,2N-3} & -\frac{4h}{3}K_{N,2N} & -\frac{h}{3}K_{N,2N+1} \\
 -\frac{h}{3}K_{N+1,0} & -\frac{4h}{3}K_{N+1,1} & -\frac{2h}{3}K_{N+1,2} & \cdots & -\frac{2h}{3}K_{N+1,N-2} & -\frac{4h}{3}K_{N+1,N-1} & -\frac{h}{3}K_{N+1,N} & 1 - \frac{h}{3}K_{N+1,N+1} & -\frac{4h}{3}K_{N+1,N+2} & -\frac{2h}{3}K_{N+1,N+3} & \cdots & -\frac{2h}{3}K_{N+1,2N-3} & -\frac{4h}{3}K_{N+1,2N} & -\frac{h}{3}K_{N+1,2N+1} \\
 -\frac{h}{3}K_{N+2,0} & -\frac{4h}{3}K_{N+2,1} & -\frac{2h}{3}K_{N+2,2} & \cdots & -\frac{2h}{3}K_{N+2,N-2} & -\frac{4h}{3}K_{N+2,N-1} & -\frac{h}{3}K_{N+2,N} & -\frac{h}{3}K_{N+2,N+1} & 1 - \frac{4h}{3}K_{N+2,N+2} & -\frac{2h}{3}K_{N+2,N+3} & \cdots & -\frac{2h}{3}K_{N+2,2N-3} & -\frac{4h}{3}K_{N+2,2N} & -\frac{h}{3}K_{N+2,2N+1} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 -\frac{h}{3}K_{2N,0} & -\frac{4h}{3}K_{2N,1} & -\frac{2h}{3}K_{2N,2} & \cdots & -\frac{2h}{3}K_{2N,N-2} & -\frac{4h}{3}K_{2N,N-1} & -\frac{h}{3}K_{2N,N} & -\frac{h}{3}K_{2N,N+1} & -\frac{4h}{3}K_{2N,N+2} & -\frac{2h}{3}K_{2N,N+3} & \cdots & -\frac{2h}{3}K_{2N,2N-3} & 1 - \frac{4h}{3}K_{2N,2N} & -\frac{h}{3}K_{2N,2N+1} \\
 -\frac{h}{3}K_{2N+1,0} & -\frac{4h}{3}K_{2N+1,1} & -\frac{2h}{3}K_{2N+1,2} & \cdots & -\frac{2h}{3}K_{2N+1,N-2} & -\frac{4h}{3}K_{2N+1,N-1} & -\frac{h}{3}K_{2N+1,N} & -\frac{h}{3}K_{2N+1,N+1} & -\frac{4h}{3}K_{2N+1,N+2} & -\frac{2h}{3}K_{2N+1,N+3} & \cdots & -\frac{2h}{3}K_{2N+1,2N-3} & -\frac{4h}{3}K_{2N+1,2N} & 1 - \frac{h}{3}K_{2N+1,2N+1}
 \end{array}$$

(5.29)

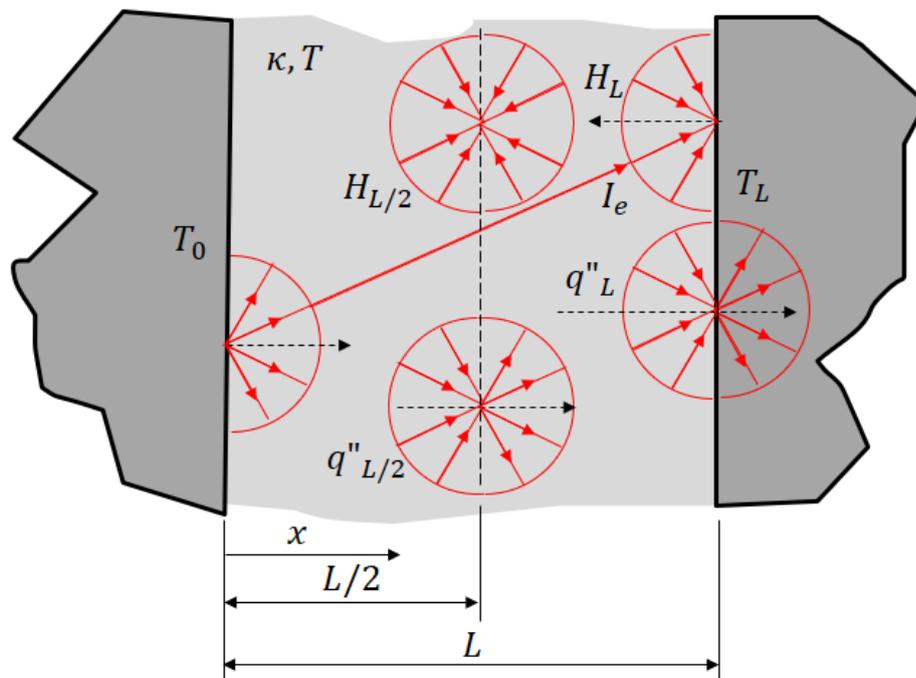
5.2 PROBLEMAS DE RADIAÇÃO TÉRMICA EM MEIOS PARTICIPANTES

Esta classe de problemas é bastante distinta da citada na seção anterior, pois em vez de envolver equações integrais, no caso mais complexo (com espalhamento) envolve uma equação íntegro-diferencial para um número grande (idealmente infinito) de direções.

5.2.1 MEIO ABSORVEDOR E EMISSOR ENTRE DUAS PLACAS NEGRAS, PLANAS E PARALELAS DE COMPRIMENTO INFINITO

O primeiro problema da classe de problemas em meios participantes será um meio participante unidimensional emissor e absorvedor de radiação, com temperatura uniforme T e coeficiente de absorção constante. As superfícies separadas pelo meio participante são negras, planas e paralelas entre si, separadas por uma distância L , conforme mostrado na FIGURA 5.4. As temperaturas de ambas são conhecidas, sendo T_0 a temperatura na fronteira à oeste (*i.e.* em $x = 0$ ou $\tau = 0$) e T_L a temperatura na fronteira à leste (*i.e.* em $x = L$ ou $\tau = \tau_L$).

FIGURA 5.4 – MEIO ABSORVEDOR EMISSOR SEPARADO POR PLACAS NEGRAS, PARALELAS E INFINITAS



FONTE: O Autor (2020)

Este problema é interessante porque permite a obtenção da solução analítica de todas as variáveis de interesse, sejam elas primárias ou secundárias. A seguir são especificadas as variáveis estudadas e suas respectivas soluções analíticas.

A intensidade direcional atingindo a fronteira leste do domínio $I_e(\mu)$ tem a sua solução analítica obtida após integrar o termo fonte da Eq. (2.45a), resultando em

$$I_e(L, \mu) = \frac{\sigma T_0^4}{\pi} e^{-\frac{\tau_L}{\mu}} + \frac{\sigma T^4}{\pi} \left(1 - e^{-\frac{\tau_L}{\mu}} \right), \quad 0 < \mu < 1. \quad (5.30)$$

Duas variáveis secundárias estudadas são o fluxo de calor no centro do domínio $q''_{L/2}$ e na fronteira leste q''_L , ambos resolvidos pela Eq. (2.52) fazendo $\tau = \tau_L/2$ e $\tau = \tau_L$, respectivamente, ou seja,

$$q''(\tau) = 2\pi \left\{ \frac{\sigma T_0^4}{\pi} E_3(\tau) - \frac{\sigma T_L^4}{\pi} E_3(\tau_L - \tau) + \frac{\sigma T^4}{\pi} [E_3(\tau) + E_3(\tau_L - \tau) - 2E_3(0)] \right\}. \quad (5.31)$$

Já a irradiação sobre a fronteira leste foi calculada usando a mesma quadratura empregada na solução numérica. Da Eq. (2.87) tem-se

$$H(L) = \sum_{m=1}^n w_m I_e(L, m) \mu_m. \quad (5.32)$$

A radiação incidente no centro do domínio é a última variável analisada. Dada pela Eq. (2.51), para o problema dessa seção ela assume a forma

$$G(\tau) = 2\pi \left[\frac{\sigma T_0^4}{\pi} + \frac{\sigma T_L^4}{\pi} \right] E_2(\tau_{L/2}). \quad (5.33)$$

5.2.2 RADIAÇÃO EM MEIO PARTICIPANTE COM TEMPERATURA VARIÁVEL

O objetivo do problema desta seção é avaliar o comportamento das ordens efetivas do erro numérico no caso em que o termo fonte radiativo \hat{I} resulta em erro de truncamento não nulo, quando da integração da Eq. (4.5) para chegar na Eq. (4.7).

Nesta seção é proposto um problema similar ao da seção anterior, mostrado na FIGURA 5.4, exceto que a temperatura do meio participante é representada por um polinômio do segundo grau mostrado na Eq. (5.34). Trata-se do exemplo 10.2 proposto em Howell, Siegel e Mengüç (2011, p. 500). Neste problema a derivada segunda da função temperatura fará o primeiro termo da Eq. (4.44) não nulo quando da integração com a Regra do Retângulo para obter a equação da intensidade direcional pela discretização espacial do DOM.

$$T(x) = T_0 - (T_0 - T_L)(x/L)^2. \quad (5.34)$$

As soluções analíticas da intensidade direcional, radiação incidente e fluxo de calor estão programadas diretamente no computador, ou seja, a solução analítica é resolvida numericamente em uma malha de 5000 elementos de volume. Para isso empregou-se a Regra 1/3 de Simpson e as funções integrais exponenciais de acordo com procedimento exposto no APÊNDICE A. Como há erro na obtenção desta solução, não se espera que a acurácia da solução analítica seja compatível com a precisão quádrupla. Ainda assim ela é relevante para a verificação das soluções numéricas.

5.2.3 MEIO PARTICIPANTE COM ESPALHAMENTO ISOTRÓPICO

O problema descrito nesta seção é idêntico ao da Seção 5.2.1, mostrado na FIGURA 5.4, exceto pelo fato que agora o coeficiente de espalhamento do meio é não nulo. Embora o autor não obteve solução analítica para este problema, o problema de equilíbrio radiativo, descrito na próxima seção possui solução analítica para algumas variáveis e estas soluções analíticas são válidas também para casos em que o espalhamento isotrópico está presente. Portanto, a falta de soluções analíticas não compromete a verificação do código numérico para a classe de problema em que o espalhamento isotrópico está presente e a temperatura do meio é constante.

O principal objetivo deste problema é avaliar se as ordens verdadeiras p_V observadas quando o espalhamento é incluído são as mesmas previstas pela dedução apresentada no Capítulo 4, que considera o meio como absorvedor-emissor apenas. Vale lembrar que do ponto de vista numérico as equações algébricas resultantes da discretização angular da RTE, Eq. (2.80), passam de conjunto de equações algébricas a sistema de equações algébricas quando o espalhamento é incluído.

Desta forma, o DOM passa a ser um procedimento recursivo (*i.e.* iterativo) e não se sabe se o caso de espalhamento puro, ou mesmo a adição do espalhamento à absorção-emissão, produz ordens verdadeiras previstas no Capítulo 4. Embora os erros de truncamento para problemas com espalhamento não foram deduzidos é interessante analisar este caso. Também é válido como uma forma de prospectar possibilidades de estudos futuros.

5.2.4 MEIO PARTICIPANTE COM ESPALHAMENTO ISOTRÓPICO EM EQUILÍBRIO RADIATIVO

O problema desta seção considera que além de emitir e absorver a radiação, o meio participante é capaz de espalhá-la isotropicamente. A geometria do problema é apresentada na FIGURA 5.4 e a solução analítica aproximada deste problema para o caso em que ambas as fronteiras são negras é dada pela Eq. (2.58).

Um detalhe interessante desta solução analítica é que admite desde o caso em que o meio é absorvedor-emissor apenas, meios em que também há espalhamento, até o caso limite em que ocorre espalhamento puro. Do ponto de vista analítico a solução aproximada é a mesma para todas as combinações de κ e σ_s , porém do ponto de vista numérico os casos limites permitem verificar trechos específicos do código. Desta forma a solução analítica aproximada fornece valiosa contribuição à verificação do código.

Quando o meio não possui espalhamento a RTE discretizada e escrita para cada direção m , Eq. (2.85), forma um conjunto de equações algébricas, porém quando o espalhamento é incluído essas equações passam a ser acopladas entre si, constituindo um sistema de equações. A simulação deste problema deve mostrar se este acoplamento entre as equações afeta as ordens verdadeiras.

A temperatura do meio participante é desconhecida *a priori*, portanto uma estimativa inicial informada pelo usuário é usada na primeira iteração. Após o procedimento do DOM ser executado (ver Seção 2.2.1.3), então um laço, executado apenas quando o usuário do programa

informa que se trata de um problema de equilíbrio radiativo, atualiza a temperatura do meio com base na radiação incidente

$$T = \sqrt[4]{\frac{G}{4\sigma}}, \quad (5.35)$$

sendo este processo de resolver a RTE e atualizar o campo de temperatura e intensidade de corpo negro repetido até que a convergência seja atingida (*i.e.* critério de parada).

O critério de parada usado pelo ‘DOM_1D_2.1’ é a norma L1 do resíduo da intensidade direcional em todos os volumes e todas as direções. Na i -ésima iteração a norma L1 é representada por $(L1)^i$, sendo seu valor na primeira iteração assumido como fator de adimensionalização da norma (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007, p. 287)

$$(L1)^i = \sum_{m=1}^n \sum_{P=1}^N [(I_P^m)^i - (I_P^m)^{i-1}], \quad i = 1, 2, \dots, itmax, \quad (5.36)$$

onde m é o contador das direções, n o número de direções da aproximação S_N (ver Seção 2.2.1.3), P é o contador dos elementos de volume, N é o número de volumes do domínio e $itmax$ é o número máximo de iterações da simulação informado pelo usuário.

A parada do processo iterativo ocorre na iteração i em que a norma L1 adimensionalizada pelo seu valor na primeira iteração atinge um valor inferior à tolerância tol também informada pelo usuário, ou seja, $\frac{(L1)^i}{(L1)^1} \leq tol$.

Entretanto, da forma como o “DOM_1D_2.1” foi programado, a parada do processo iterativo pode se dar caso o número da iteração i exceder o valor máximo informado pelo usuário $itmax$, ou seja, $i > itmax$. Caso este critério seja atendido antes do descrito no parágrafo anterior, então o programa mostra uma mensagem de aviso para o usuário, indicando que o procedimento iterativo não convergiu para a tolerância informada e pausa em seguida a sua execução.

6 RESULTADOS

Exceto quando especificado o contrário, todas as soluções analíticas apresentadas neste capítulo foram obtidas no *software* Maple 17 com 50 algarismos significativos. Os resultados foram truncados de forma a obter 36 algarismos significativos, pois todas as variáveis do tipo real são de precisão quádrupla.

6.1 PROBLEMAS DE RADIAÇÃO TÉRMICA EM MEIOS NÃO PARTICIPANTES

Os programas descritos nesta seção são baseados no programa ‘Projeto_0_Tese’ usado na Seção 3.2 para validar a equação do erro de truncamento da Regra 1/3 de Simpson.

6.1.1 PROBLEMA 1: EQUAÇÃO ALGÉBRICA CONTENDO TERMO INTEGRAL

As soluções numéricas foram obtidas com o programa “Projeto1_Tese_2p1” programado na linguagem FORTRAN95 com a opção de usar a Regra do Trapézio ou a Regra de Simpson.

As variáveis de interesse neste problema são as temperaturas nodais T_2 nas posições $x_2 = 0$ e $x_2 = L/2$, obtidas com a Eq. (5.4) e o poder emissivo médio \overline{E}_2 , obtido com a Eq. (5.5). As soluções analíticas estão listadas na TABELA 6.1.

TABELA 6.1 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS DAS VARIÁVEIS DE INTERESSE

Variável	Φ
$\overline{E}_2 [Wm^{-2}]$	2,44874291503283985258848528603077306E+04
$T_2(x = L/2) [K]$	8,25710880829833186763201056730973114E+02
$T_2(x = 0) [K]$	7,80546453732183654478304248009699457E+02

Fonte: O Autor (2020)

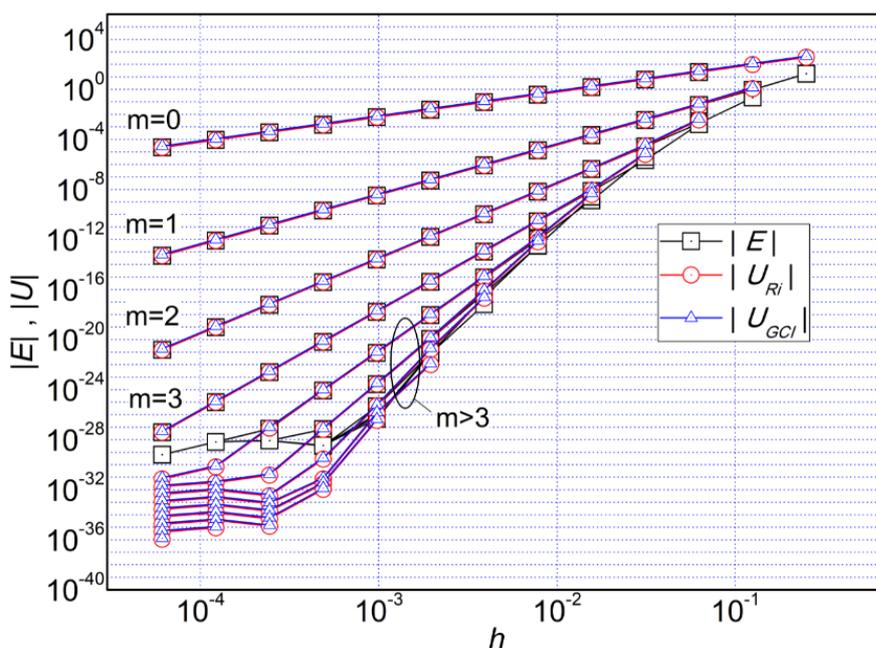
Segundo ASME (2009), a aplicação de MER mostra de forma mais evidente a dependência monotônica de h quando variáveis globais são analisadas. Por esse motivo, primeiramente são apresentados e discutidos os resultados para \overline{E}_2 e em seguida as temperaturas nodais.

A FIGURA 6.1 mostra o comportamento do erro numérico E e das estimativas do erro numérico com base no estimador de Richardson U_{Ri} e no *Grid Convergence Index* U_{GCI} em função de h quando \overline{E}_2 é calculada com a Regra do Trapézio. A FIGURA 6.2 mostra as ordens com que o erro e as estimativas do erro são reduzidos à medida que o refinamento de malha progride ($h \rightarrow 0$) e as as extrapolações se sucedem (m aumenta). A FIGURA 6.3 e a FIGURA 6.4 mostram resultados equivalentes para a mesma variável, porém utilizando a Regra de Simpson.

Na FIGURA 6.1 e FIGURA 6.3, cada ponto representa uma solução numérica, para a qual é possível calcular o erro e a sua estimativa. Exceto pela linha que apresenta os maiores valores de $|E|$ e $|U|$, correspondente às soluções numéricas de cada malha sem aplicar MER (*i.e.* $m = 0$), as demais linhas correspondem aos subsequentes níveis de extrapolação.

Ainda na FIGURA 6.1 e FIGURA 6.3, observa-se que os resultados que em princípio deveriam ser mais acurados (*i.e.* com menor erro) são aqueles onde $h \lesssim 10^{-3}$ e $m \geq 4$. Entretanto nota-se que a inclinação de cada conjunto de linhas deixa de aumentar e se inicia uma tendência de estabilizar os valores do erro e da estimativa do erro. Isto ocorre porque o erro de arredondamento começa a se manifestar na mesma ordem de magnitude do erro de discretização e impede que o erro de discretização continue a ser reduzido.

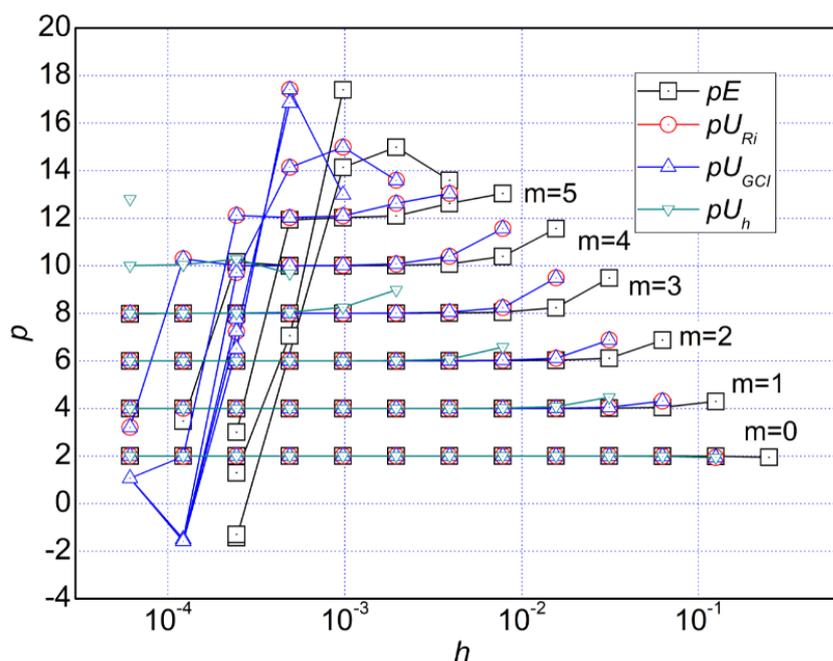
FIGURA 6.1 - ERRO E ESTIMATIVAS DO ERRO PARA \overline{E}_2 EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 1 USANDO A REGRA DO TRAPÉZIO.



FONTE: O Autor (2020)

Este fenômeno é melhor visualizado na FIGURA 6.2 e FIGURA 6.4, pois as linhas correspondentes à ordem 10 em cada figura são aquelas de maior ordem que ainda exibem um comportamento monotônico evidente (tendem à respectiva ordem à medida que $h \rightarrow 0$). Para o problema em questão, nesta ordem MER atinge sua capacidade de reduzir o erro de discretização e por esta razão os resultados numéricos considerados mais acurados são aqueles obtidos na décima malha ($g = 10$) e no quarto nível de extrapolação ($m = 4$). Os resultados numéricos apresentados na primeira linha da TABELA 6.2 foram selecionados baseados nesta observação. Cada resultado aparece acompanhado da respectiva estimativa do erro baseada no GCI , onde a escolha deste estimador foi motivada por ser comumente empregado na literatura. Porém, tanto o estimador de Richardson quanto o estimador baseado na ordem aparente são adequados e poderiam ser usados.

FIGURA 6.2 - ORDENS EFETIVA E APARENTE DE \overline{E}_2 EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 1 USANDO A REGRA DO TRAPÉZIO.



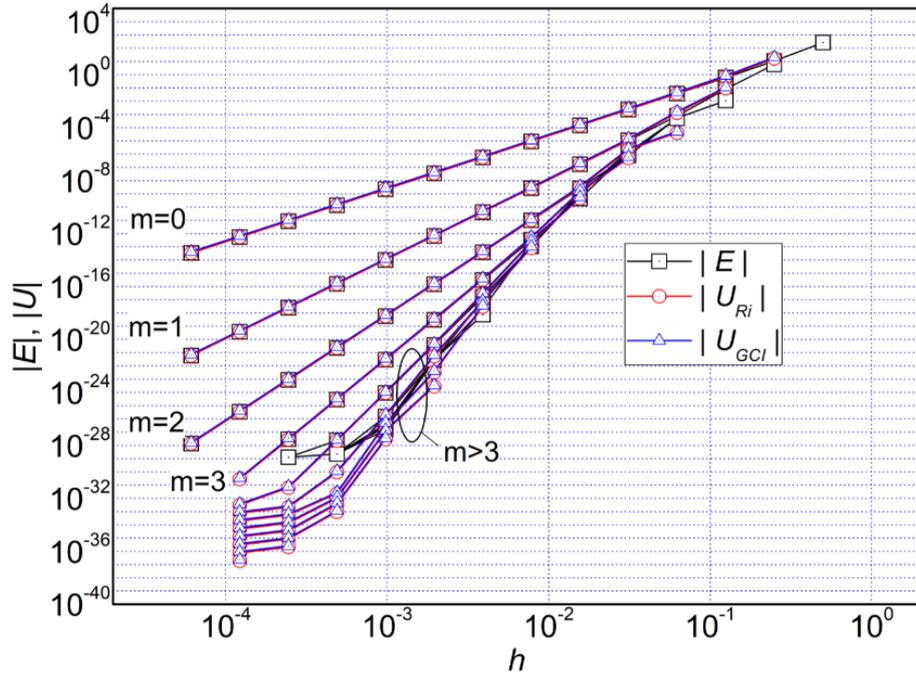
FONTE: O Autor (2020)

TABELA 6.2 – RESULTADOS NUMÉRICOS COM MER ($g = 10, m = 4$)

Variável	Regra do Trapézio		Regra de Simpson	
	$\phi [Wm^{-2} \text{ ou } K]$	$U_{GCI}(\phi)$	$\phi [Wm^{-2} \text{ ou } K]$	$U_{GCI}(\phi)$
\overline{E}_2	24487,42915032839852588	$1,1E - 21$	24487,42915032839852588485	$1,1E - 24$
$T_{2,x=0}$	780,54645373218365447830425	$1,3E - 25$	780,546453732183654478304248010	$7,6E - 29$
$T_{2,x=L/2}$	825,7108808298331867632011	$2,9E - 24$	825,7108808298331867632010567	$3,1E - 27$

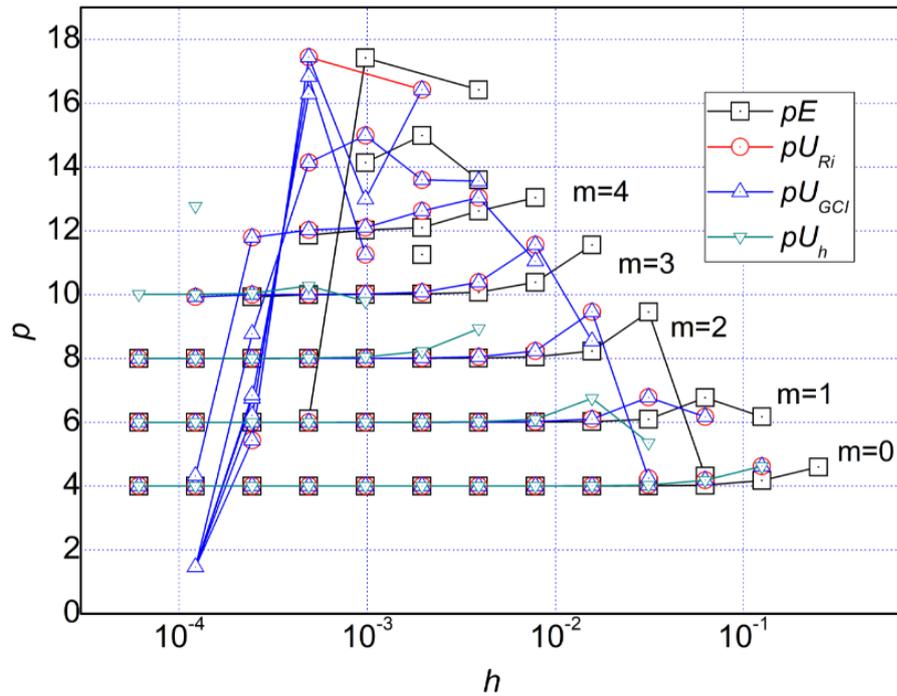
Fonte: O Autor (2020)

FIGURA 6.3 - ERRO E ESTIMATIVAS DO ERRO PARA \bar{E}_2 EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 1 USANDO A REGRA DE SIMPSON.



FONTE: O Autor (2020)

FIGURA 6.4 - ORDENS EFETIVA E APARENTE DE \bar{E}_2 EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 1 USANDO A REGRA DE SIMPSON.

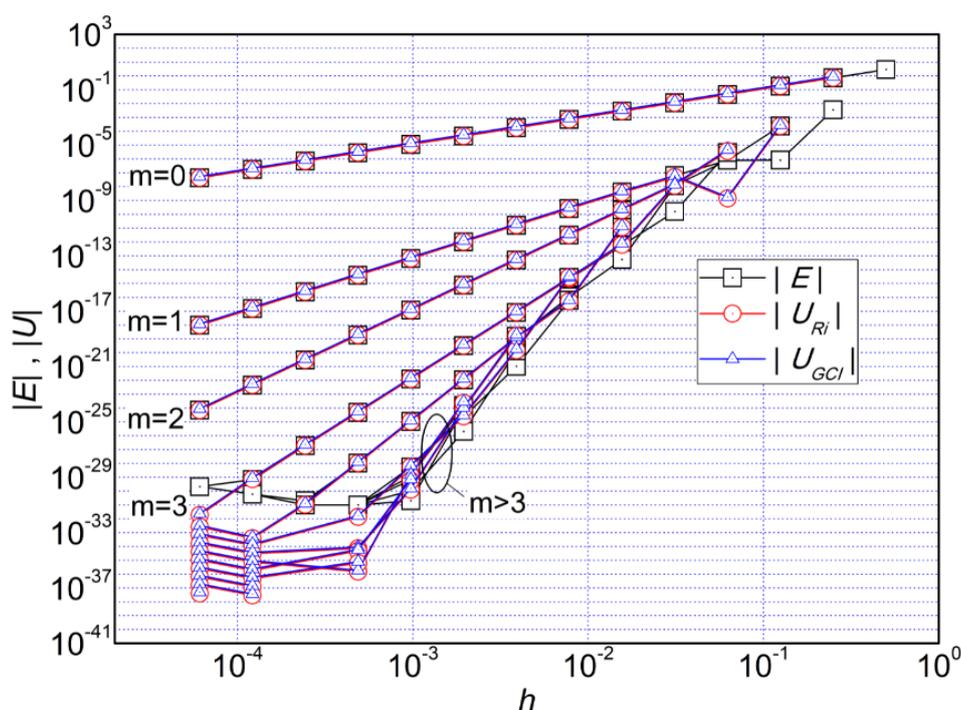


FONTE: O Autor (2020)

A análise de uma grande quantidade de malhas (tantas quanto possível ou viável) se justifica, porque permite conhecer para cada problema (em que os erros de iteração são ausentes ou devidamente controlados) qual a malha ótima, além da qual o erro numérico que estava se reduzindo com a redução de h , passa a aumentar por conta da grande quantidade de computações realizadas nas malhas demasiadamente refinadas.

A temperatura $T_2(x = L/2)$, no centro da placa 2 apresenta gráficos similares aos apresentados acima, mesmo sendo uma variável local. Já para a temperatura $T_2(x = 0)$ o erro e a suas estimativas se reduzem monotonicamente, porém com comportamento oscilatório para $m \geq 3$ à medida que h é reduzido. Isto fica evidente na FIGURA 6.5, onde se empregou a Regra do Trapézio. Os resultados para a Regra de Simpson não são mostrados porque o comportamento oscilatório é pouco notório.

FIGURA 6.5 - ERRO E ESTIMATIVAS DO ERRO PARA $T_2(x = 0)$ EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 1 USANDO A REGRA DO TRAPÉZIO.



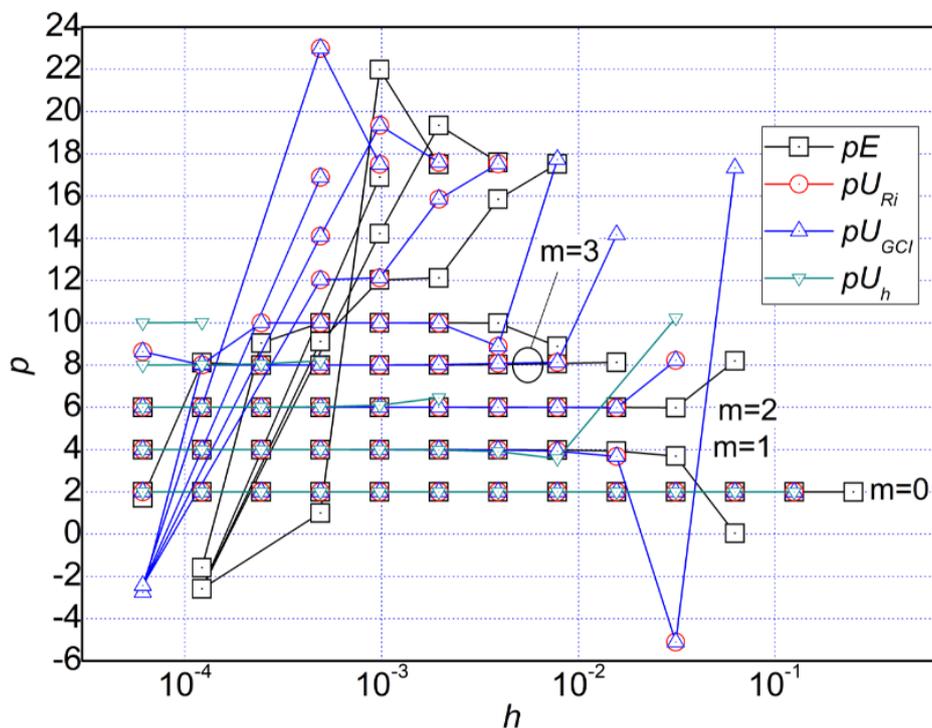
FONTE: O Autor (2020)

Entretanto, quando se analisa a ordem efetiva e as ordens aparentes, mostradas na FIGURA 6.6, vê-se que todas se aproximam da respectiva ordem teórica em cada nível de extrapolação à medida que $h \rightarrow 0$. Apenas as malhas mais grossas exibem o comportamento oscilante. Este comportamento provavelmente é provocado pela influência do segundo e terceiros termos da equação do erro de discretização (vide Eq. 2.90), ou seja, no caso da variável

$T_2(x = L/2)$, as malhas mais grossas são pouco refinadas e a região de convergência monotônica ainda não foi atingida e a aplicação de MER parece amplificar esse efeito, que nos níveis $m = 0$ e $m = 1$ são pouco perceptíveis.

A seleção da combinação de malha e nível de extrapolação para selecionar o resultado numérico e sua respectiva estimativa, tanto para a variável $T_2(x = 0)$ quanto a $T_2(x = L/2)$ são os mesmos empregados para $\overline{E_2}$.

FIGURA 6.6 - ORDEM EFETIVA DE $T_2(x = 0)$ EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 1 USANDO A REGRA DO TRAPÉZIO.



FONTE: O Autor (2020)

6.1.2 PROBLEMA 2: EQUAÇÃO DE FREDHOLM DO SEGUNDO TIPO

As soluções numéricas foram obtidas com o programa “Projeto_3p1_Tese” programado na linguagem FORTRAN95 que tem a opção de usar a Regra do Trapézio ou a Regra de Simpson. O problema foi resolvido em 12 malhas, com h variando entre $h = 0,5m$ (*i.e.* $N = 2$) e $h \cong 2,4 \times 10^{-4}m$ (*i.e.* $N = 4096$). Estas soluções numéricas compõem o nível de extrapolação zero do processo de MER, programado diretamente no código-fonte do programa supracitado. As extrapolações são conduzidas de acordo com a descrição dada na Seção 2.3 desta Tese.

As variáveis de interesse do problema desta seção são as temperaturas nodais T_2 nas posições $x_2 = 0$ e $x_2 = L/2$, obtidas com a Eq. (B.13-14) do APÊNDICE B. As soluções analíticas aproximadas estão listadas na TABELA 6.3 a seguir. Observa-se que nela constam apenas variáveis locais. Isto porque a solução analítica deste problema não é exata, então o seu uso no cálculo da temperatura média no domínio não parece justificável, uma vez que a ordem aparente não tenderá à assintótica mesmo para as variáveis primárias. Entretanto, a temperatura média numérica é apresentada e analisada juntamente com os resultados numéricos das variáveis locais.

TABELA 6.3 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS APROXIMADAS DAS VARIÁVEIS

Variável	Φ
$T_2(X_2 = 0)$ [K]	9,48806253568790229776372843166286510E+02
$T_2(X_2 = L/2)$ [K]	8,71822283080032567212448171367211537E+02

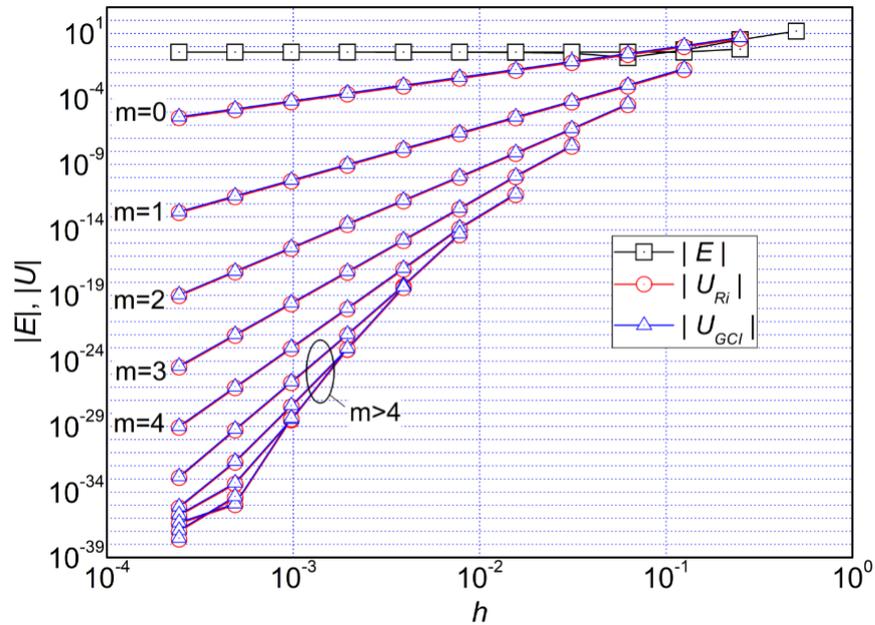
Fonte: O Autor (2020)

A variável analisada é $T_2(X_2 = 0)$, porém os resultados para $T_2(X_2 = L/2)$ são similares. Empregando a Regra do Trapézio, os resultados do erro e das estimativas do erro calculadas com os estimadores de Richardson e GCI são apresentados na FIGURA 6.7. Como a solução analítica é aproximada e não exata, o erro se estabiliza em um valor da ordem de 10^{-1} já nas malhas mais grossas e assim se mantém nas demais malhas. Por outro lado, as estimativas do erro obtidas com o GCI e o estimador de Richardson apresentam o comportamento típico da aplicação de MER, com as ordens esperadas: $pU_h = 2, 4, 6, \dots$

Já quando a Regra de Simpson é empregada, as estimativas do erro não mostram o típico aumento progressivo da ordem de acurácia à medida que as extrapolações se sucedem. A FIGURA 6.8 mostra que a taxa na qual a estimativa do erro se reduz em cada nível se mostra constante igual a dois, e não como o esperado: seguindo a progressão quatro, seis, oito,

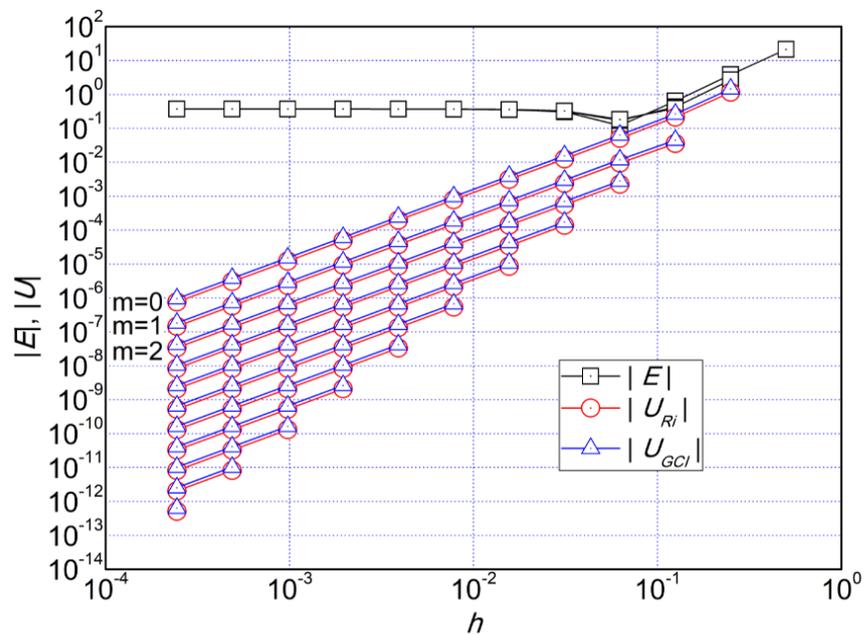
Apesar disso, a estimativa do erro se reduz à medida que o tamanho de malha é reduzido e também se reduz à medida que o nível de extrapolação é aumentado. Portanto, além da ordem aparente tendendo a dois e não a quatro, os sucessivos níveis de extrapolação não aumentam a ordem de duas em duas unidades, mas sim mantêm-se como ordem dois.

FIGURA 6.7 - ERRO E ESTIMATIVAS DO ERRO PARA $T_2(X_2 = 0)$ EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 2 USANDO A REGRA DO TRAPÉZIO.



FONTE: O Autor (2020)

FIGURA 6.8 - ERRO E ESTIMATIVAS DO ERRO PARA $T_2(X_2 = 0)$ EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 2 USANDO A REGRA DE SIMPSON.

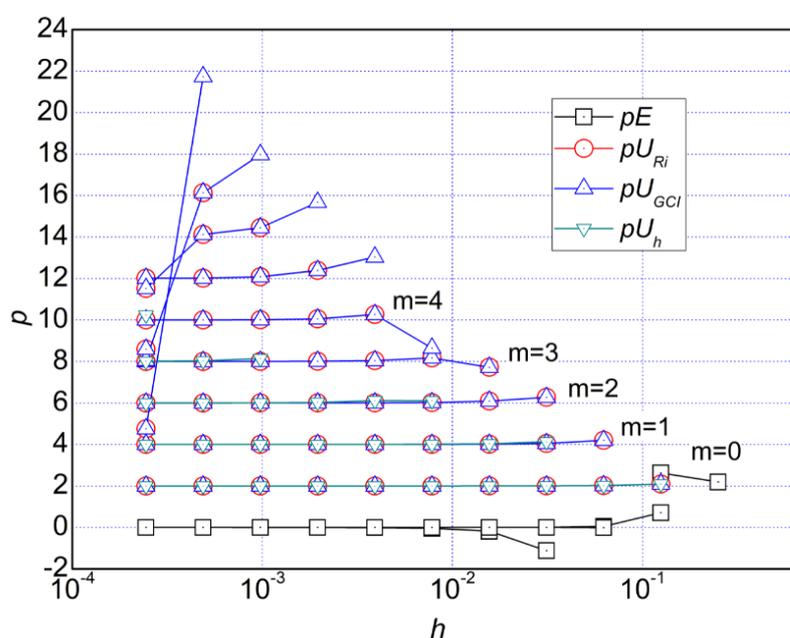


FONTE: O Autor (2020)

A comparação das ordens é melhor percebida na FIGURA 6.9 e FIGURA 6.10, que mostram a ordem efetiva e aparente em função do tamanho do elemento de malha para os casos em que são empregadas a Regra do Trapézio e Regra 1/3 de Simpson, respectivamente. Como

a solução analítica é aproximada, a ordem efetiva tende a zero em ambas as figuras, de acordo com o esperado. Entretanto, no caso do uso da Regra do Trapézio (FIGURA 6.9), se vê que as ordens verdadeiras tendem aos valores previstos pela demonstração do ANEXO A, discordando apenas nas malhas mais finas dos níveis de extrapolações maiores, indicando que o número de algarismos significativos da solução extrapolada atinge o limite da precisão das variáveis reais empregadas pelo computador.

FIGURA 6.9 - ORDENS EFETIVA E APARENTE DE $T_2(x_2 = 0)$ EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 2 USANDO A REGRA DO TRAPÉZIO



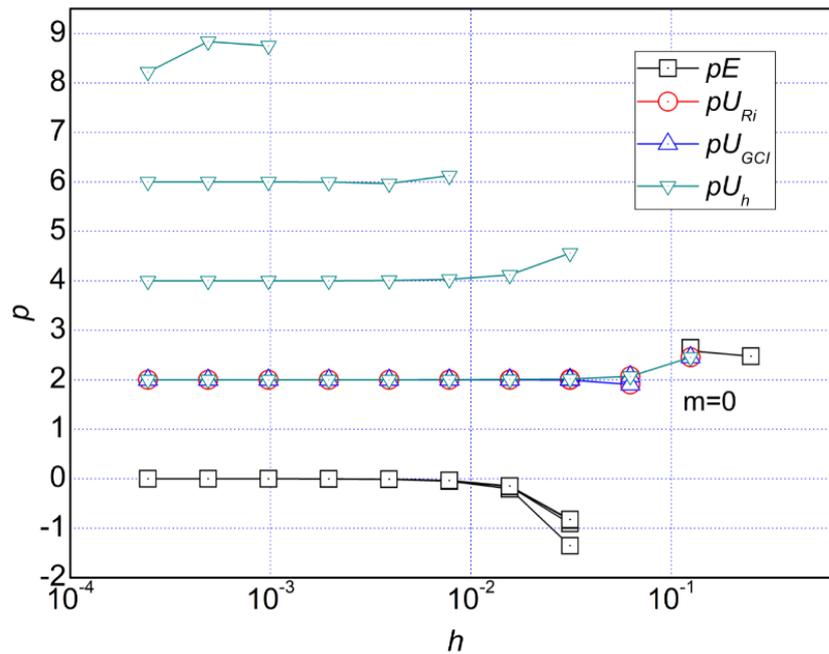
FONTE: O Autor (2020)

Entretanto, quando a Regra 1/3 de Simpson é usada as ordens verdadeiras se mostram todas iguais à dois, ou seja, além de não constituírem uma progressão aritmética de razão dois, sua ordem assintótica não equivale à quatro, conforme o previsto pela dedução da Seção 3.2. Também na FIGURA 6.10 se nota o aparecimento de ordens não realísticas, denominadas “ordens fantasma” $pU_h = 4, 6, \dots$ na Seção 3.2 e lá discutidas. Entretanto, alguns testes foram conduzidos especificamente para investigar o resultado anômalo do problema desta seção, conforme relatado a seguir.

A primeira hipótese para explicar o aparecimento das ordens inconsistentes com a aplicação da Regra de Simpson foi a adição não intencional de um ou mais erros de programação no código. Durante a execução do código, há um laço que determina o preenchimento da matriz de coeficientes do sistema linear. Fora deste laço e imediatamente

antes dele, a matriz de coeficientes é inicializada como sendo a matriz identidade. Uma vez dentro deste laço, a então matriz identidade é subtraída dos respectivos coeficientes relativos à regra de integração solicitada pelo usuário do código no arquivo de dados de entrada da simulação, formando assim as matrizes apresentadas na Eq. (5.14) para a Regra do Trapézio e Eq. (5.15) no caso da Regra de Simpson.

FIGURA 6.10 - ORDENS EFETIVA E APARENTE DE $T_2(X_2 = 0)$ EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 2 USANDO A REGRA DE SIMPSON



FONTE: O Autor (2020)

Após conferir o preenchimento da matriz, notou-se que o comportamento apresentado na FIGURA 6.8 e na FIGURA 6.10 persistiram. Uma série de testes foi conduzida, chegando mesmo a construir um novo programa independente. Os resultados foram idênticos.

Observando a função do fator de forma, dada pela Eq. (5.7) e convenientemente reescrita abaixo, se nota que embora contínua, sua primeira derivada é descontínua em X_2 , pois a variável Z é definida como o módulo da subtração entre X_2 e X'_2 .

$$K(x_2, x'_2) = 1 - \frac{Z^3 + \frac{3}{2}Z}{\sqrt{Z^2 + 1}}, \quad Z = |X_2 - X'_2|, \quad (6.1)$$

Caso o módulo seja retirado da definição da função Z , então os resultados apresentados na FIGURA 6.8 e FIGURA 6.10 passam a ser aqueles esperados quando da aplicação da Regra de Simpson: $pU_h = 4, 6, 8, \dots$

Obviamente, quando Z é definida sem o módulo, o problema que está sendo resolvido é diferente daquele proposto, porém a alteração de código é mínima e permite testar se a implementação do restante do código está correta. Entretanto, uma maneira mais adequada de verificar o código é resolver um problema semelhante, mas cuja função núcleo e suas derivadas sejam contínuas. Neste caso, espera-se que o resultado da variável que se deseja calcular (e.g. T_2 em $X_2 = 0$) seja aproximadamente o mesmo.

Quanto mais semelhante à função núcleo original for a função similar, mais próximos serão os resultados obtidos nas duas simulações numéricas, permitindo a verificação do código. Com isso em mente, foi proposta a função

$$K^* = (Y_2 - Y_2') \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + (X_2 - X_2')^2}, \quad (6.2)$$

inspirada nas equações usadas na modelagem do alargamento de linhas espectrais (HOWELL; SIEGEL; MENGÜÇ, 2011, p. 448). Para este problema encontrou-se que $\gamma = 0,32$ e $(Y_2 - Y_2') = 1$ reproduzem relativamente bem a função original. A FIGURA 6.11 compara K^* com a função núcleo original K para três valores de X_2 .

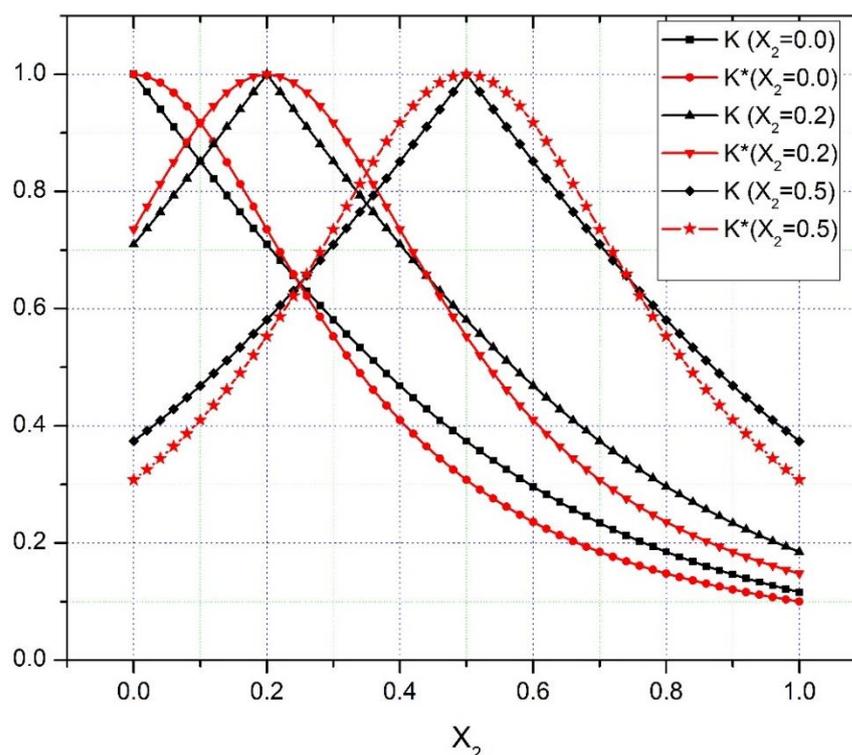
Quando se usou K^* em vez de K , os resultados, seja do poder emissivo como da temperatura, resultaram 3,39% menores na extremidade do tubo e 4,83% menores no centro do tubo. As ordens observadas foram $pU_h = 2, 4, 6, \dots$ para a aplicação da Regra do Trapézio e $pU_h = 4, 6, 8, \dots$ quando aplicada a Regra de Simpson, ou seja, foram obtidas as ordens mostradas no ANEXO A e previstas na Seção 3.2, respectivamente.

Por último, como este problema não possui solução analítica exata foi adicionada uma comparação entre os resultados do programa “Projeto_3p1_Tese” com o resultado equivalente, obtido com o programa “DTM_3D_Axisymmetric 1.1”, desenvolvido pelo autor durante o seu mestrado (FOLTRAN, 2015). Este programa consegue, com alterações mínimas no código-fonte, resolver o problema proposto nesta seção.

O programa “DTM_3D_Axisymmetric 1.1” usa o Método da Transferência Discreta (DTM), empregado na solução da Equação da Transferência Radiativa Eq. (2.36) sem espalhamento em domínios tridimensionais axissimétricos. Para o caso de fluxo de calor especificado na área A_2 , o DTM se torna iterativo. Adicionou-se um laço que recalcula a

temperatura da área A_2 com base na radiação incidente sobre ela e no fluxo de calor $Q_2 = 1000 \text{ Wm}^{-2}$. O programa repete o laço até que a norma L1 do resíduo da temperatura entre duas iterações consecutivas convirja para o valor nulo.

FIGURA 6.11 - ALTERAÇÃO DA DEFINIÇÃO DE K COMO TESTE DA HIPÓTESE DA DERIVADA DESCONTÍNUA



FONTE: O Autor (2020)

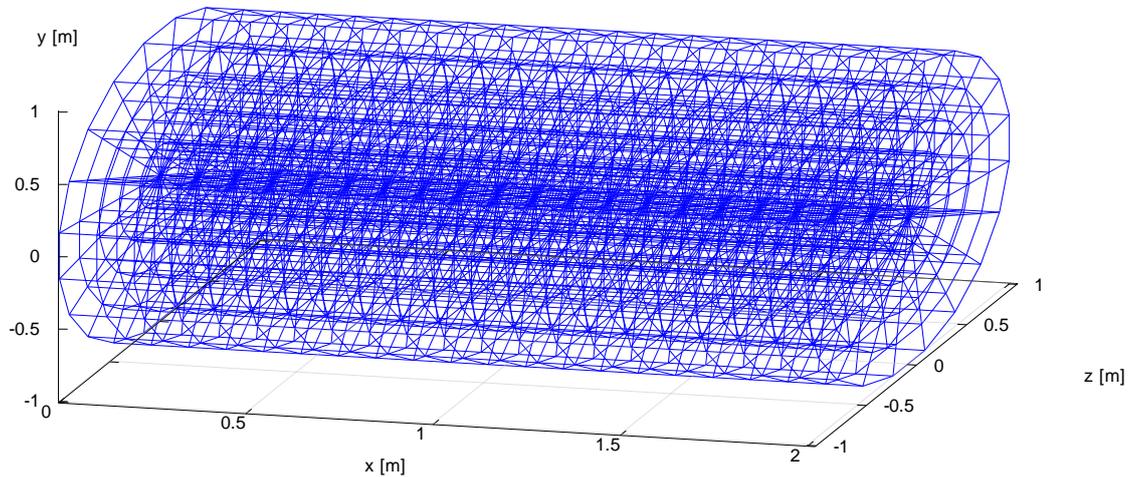
Nesta simulação foi empregada uma malha de 20 volumes na direção longitudinal, 5 na direção radial e 20 na direção circunferencial, totalizando 2000 volumes discretos. Cada elemento de área na fronteira lançou $N\theta = 12$ raios na direção polar e $N\phi = 10$ na direção azimutal, resultando em 120 raios por elemento de área, 72.000 raios no total. Para simular o problema desta seção, basta atribuir valor nulo ao coeficiente de absorção κ e definir a geometria do problema. A malha é mostrada na FIGURA 6.12.

O resultado do perfil de temperatura na área lateral do cilindro é exibido na FIGURA 6.13, juntamente com as soluções do programa “Projeto_3p1_Tese” usando as Regras do Trapézio e Simpson. Vê-se que tais soluções são praticamente idênticas a obtida com o DTM.

Como a degeneração de ordem foi observada apenas com a Regra de Simpson, pode-se inferir que o programa está correto e a causa da degeneração de ordem é a descontinuidade na derivada do fator de forma, Eq. (6.1), por que seu argumento é tomado em módulo. Os

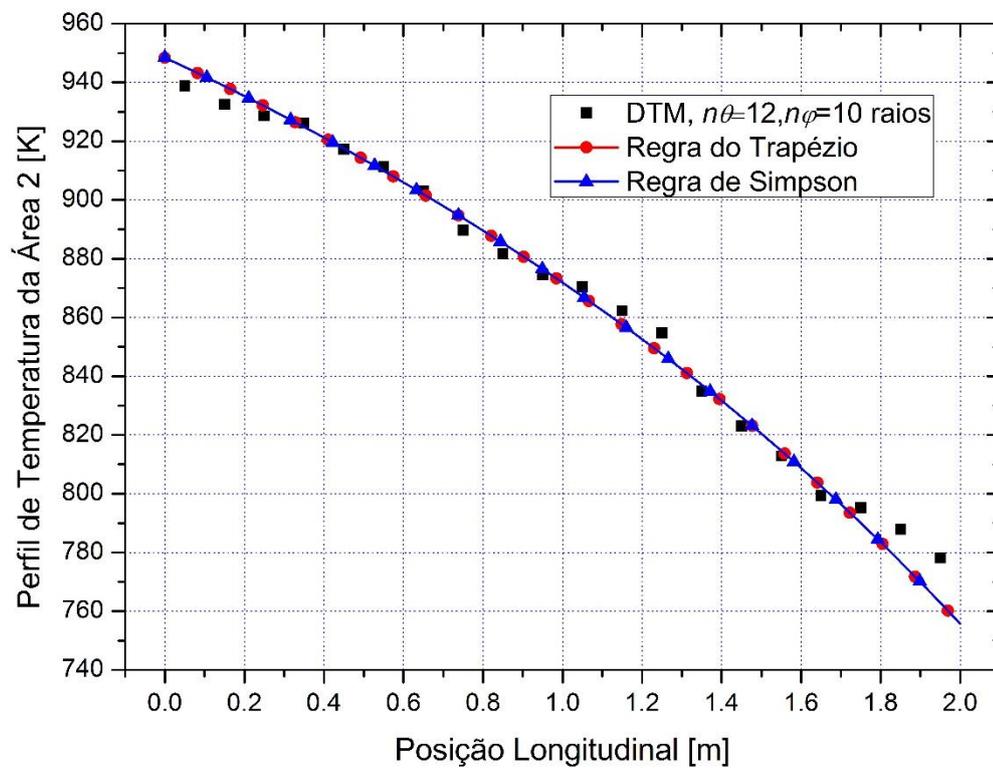
resultados obtidos com o Método da Transferência Discreta confirmam essa conclusão e são obtidos de forma independente.

FIGURA 6.12 - MALHA EMPREGADA NO PROGRAMA DTM_3D_AXISYMMETRIC 1.1



FONTE: O Autor (2020)

FIGURA 6.13 - COMPARAÇÃO DO PERFIL DE TEMPERATURA OBTIDO COM O DTM



FONTE: O Autor (2020)

A provável explicação para o comportamento anômalo do problema estudado nesta seção é que a Regra de Simpson é aplicada de dois em dois intervalos discretos, e não em apenas um, como ocorre quando é aplicada a Regra do Trapézio.

Quando a Regra de Simpson é usada para integrar funções núcleo com derivadas descontínuas, a descontinuidade eventualmente localizar-se-á no ponto nodal entre os dois intervalos. Seguindo a dedução da equação do erro de truncamento, apresentada na Seção 3.2, se vê que no sistema de equações Eq. (3.54) a variável dependente F na posição x_{j+1} , ou seja, F_{j+1} é expandida em Série de Taylor no entorno do ponto intermediário $x_{j-1/2}$, onde a derivada é diferente da derivada na posição x_{j+1} . O mesmo ocorre no sistema de equações Eq. (3.59) para F_{j-1} , que é expandida no entorno do ponto intermediário $x_{j+1/2}$.

Observa-se que no passo imediatamente anterior à Eq. (3.54) os termos que mais adiante constituirão o erro de truncamento ainda apresentam ordem dois como ordem mais baixa, exatamente a ordem aparente obtida nas soluções numéricas e todas as extrapolações, conforme mostrado na FIGURA 6.8 e FIGURA 6.10.

Já a Regra (Composta) do Trapézio consiste em um somatório, onde cada termo consiste na aplicação da Regra do Trapézio em cada intervalo do domínio. Então a função núcleo e suas derivadas são sempre contínuas em cada intervalo. Isso explica porque a regra do Trapézio não apresenta degeneração de ordem quando MER é empregado.

Até o presente momento o autor não encontrou referências ao comportamento anômalo das ordens aparentes quando da aplicação de MER sobre os resultados obtidos com a Regra 1/3 de Simpson. É importante notar que nos catálogos de fatores de forma (*e.g.* HOWELL, 2019) há muitos fatores de forma que são descritos a partir de variáveis independentes definidas como o módulo da subtração das variáveis primitivas do problema.

Conclui-se que para o caso de problemas de radiação em meios não participantes em que a função núcleo é descontínua, deve-se dar preferência ao uso da Regra do Trapézio, embora a Regra de Simpson também forneça resultados numéricos coerentes. Na prática o que se faz é programar ambos os métodos, pois uma vez programado um dos métodos, a adição do outro é quase imediata. Entretanto, deve-se ter em mente que a regra de Simpson apresentará degradação de ordem. Por isso o autor recomenda fazer a verificação de código com a Regra do Trapézio e em seguida apenas comparar se os resultados numéricos obtidos por cada regra de integração são concordantes na malha mais fina (ainda dentro da região de convergência monotônica).

6.1.3 PROBLEMA 3: SISTEMA DE EQUAÇÕES INTEGRAIS DE FREDHOLM DO SEGUNDO TIPO

As soluções numéricas foram obtidas com o programa “Projeto_4_Tese” programado na linguagem FORTRAN95 que tem a opção de usar a Regra do Trapézio ou a Regra de Simpson. O problema foi resolvido em 11 malhas, com h variando entre $h = 0,393m$ (*i.e.* $N = 2$) e $h \cong 3,83 \times 10^{-4}m$ (*i.e.* $N = 2048$). As MER são conduzidas de acordo com a descrição dada na Seção 2.3 desta Tese.

A solução analítica deste problema é dada pelas Eq. (B.13) e Eq. (B.14) apresentadas no APÊNDICE B. Essas equações mostram que os poderes emissivos E_2 e E_3 são constantes, independentes do ângulo polar θ . Com os dados de entrada do problema: $T_1 = 1000 K$, $T_4 = 500 K$, $q_2'' = 1000 Wm^{-2}$ e $q_3'' = 500 Wm^{-2}$, chega-se aos resultados analíticos listados na TABELA 6.4 a seguir. As análises consideram o poder emissivo das superfícies 2 e 3, assim como suas respectivas temperaturas.

TABELA 6.4 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS DAS VARIÁVEIS DE INTERESSE

Variável	Φ
$E_2 [Wm^{-2}]$	3,2934484859279821286601266543157274E+04
$T_2 [K]$	8,7299132201651090831374920554318692E+02
$E_3 [Wm^{-2}]$	3,2434484859279821286601266543157274E+04
$T_3 [K]$	8,6965892646652683967967212920502228E+02

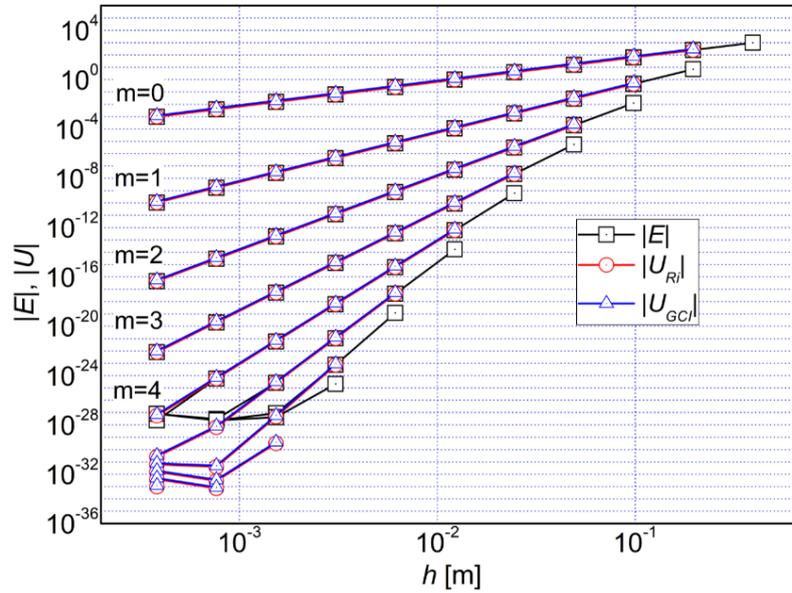
Fonte: O Autor (2020)

Antes de apresentar os resultados numéricos e efetuar a comparação com os respectivos resultados analíticos é feita uma análise de convergência. Em seguida são apresentados os resultados do erro e de suas estimativas para cada simulação, assim como resultados das ordens encontradas em cada extrapolação.

A primeira variável analisada é o poder emissivo da área 2, E_2 . A FIGURA 6.14 mostra os resultados obtidos com a Regra do Trapézio para o módulo do erro e sua estimativa obtida com os estimadores de Richardson e GCI . Cada conjunto de linhas unindo as soluções numéricas representa uma extrapolação. Observa-se que depois da quarta extrapolação ($m > 4$) os resultados numéricos das malhas mais refinadas ($h < 10^{-3}$) começam a ser afetados pelo erro de arredondamento. Isto fica evidente observando a inclinação das linhas, que começa a apresentar a tendência de estabilizar o módulo do erro na ordem de 10^{-28} aproximadamente.

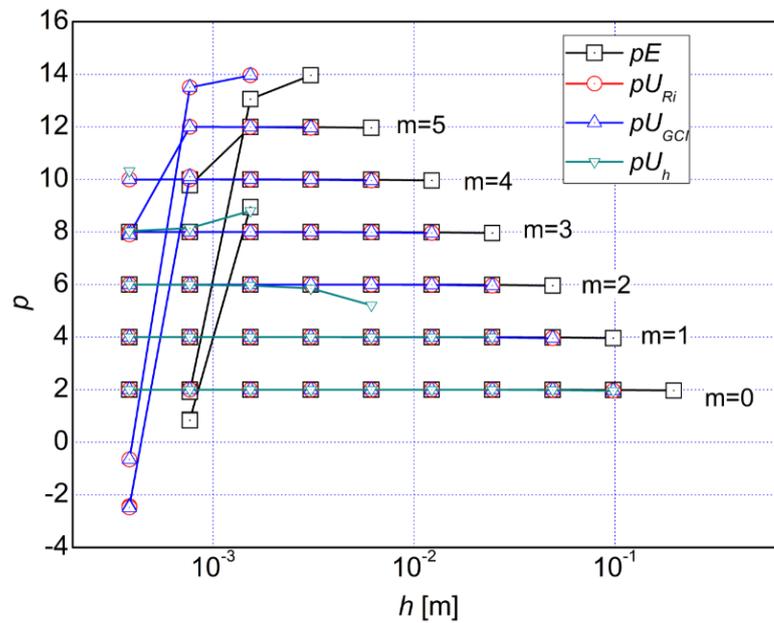
A FIGURA 6.15 mostra os mesmos resultados em termos das ordens. Como o esperado, a ordem assintótica observada é 2 e o intervalo entre ordens é 2.

FIGURA 6.14 - ERRO E ESTIMATIVAS DO ERRO PARA E_2 EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 3 USANDO A REGRA DO TRAPÉZIO



FONTE: O Autor (2020)

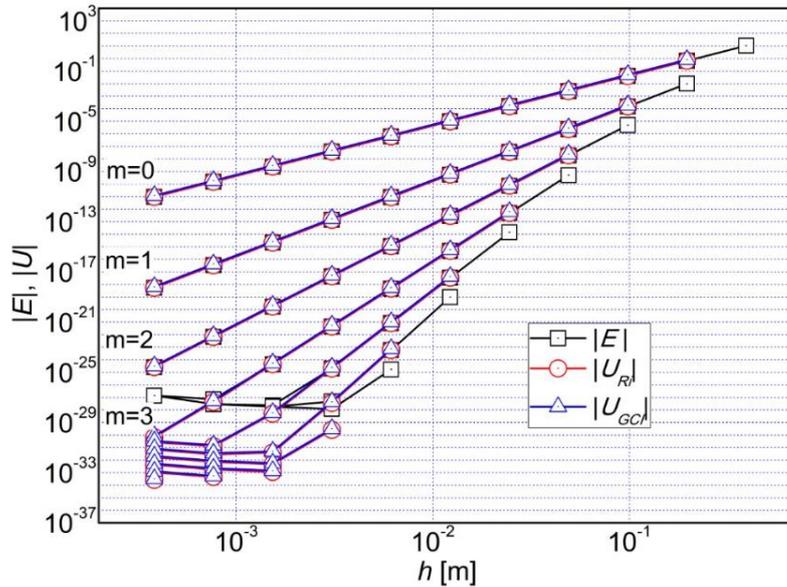
FIGURA 6.15 - ORDENS EFETIVA E APARENTE DE E_2 EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 3 USANDO A REGRA DO TRAPÉZIO



FONTE: O Autor (2020)

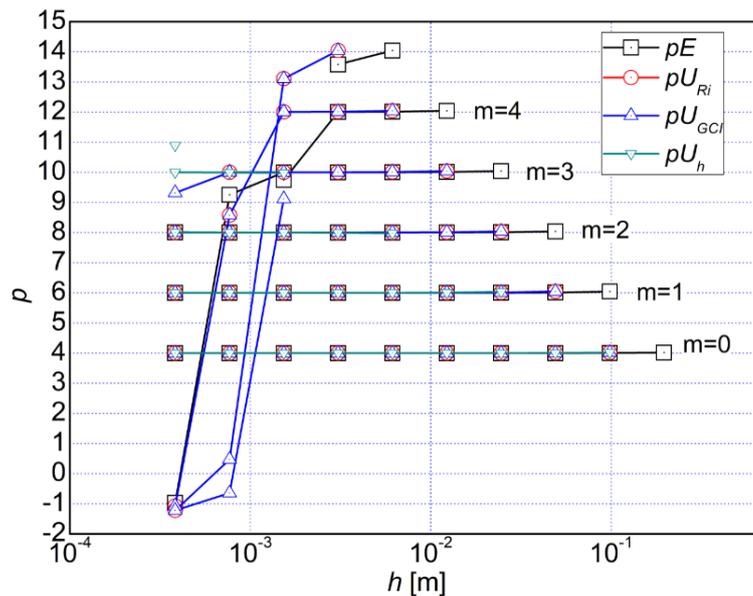
Resultados similares são obtidos usando a Regra de Simpson, porém o erro de arredondamento já é atingido nas duas malhas mais refinadas após 4 extrapolações, sendo que a ordem do erro é de 10^{-28} e a da estimativa do erro é de 10^{-31} , entretanto a ordem assintótica observada é 4 e o intervalo entre as ordens sucessivas é 2.

FIGURA 6.16 - ERRO E ESTIMATIVAS DO ERRO PARA E_2 EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 3 USANDO A REGRA DE SIMPSON



FONTE: O Autor (2020)

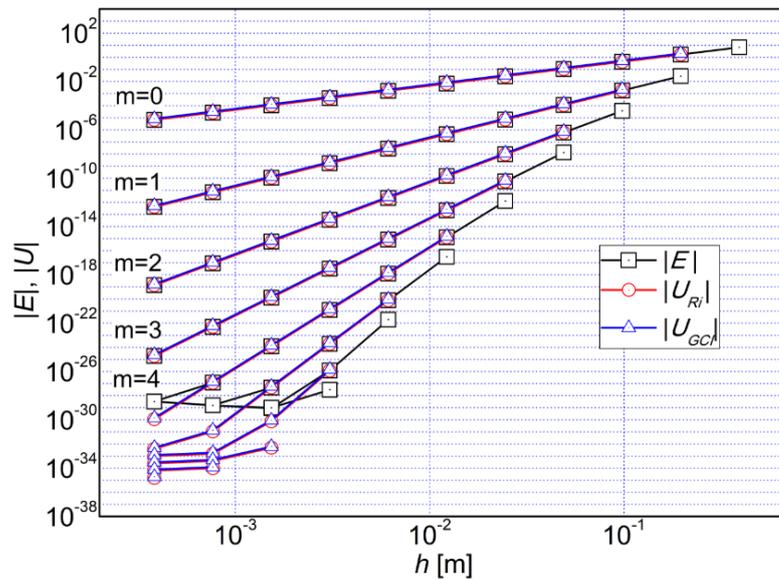
FIGURA 6.17 - ORDENS EFETIVA E APARENTE DE E_2 EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 3 USANDO A REGRA DE SIMPSON



FONTE: O Autor (2020)

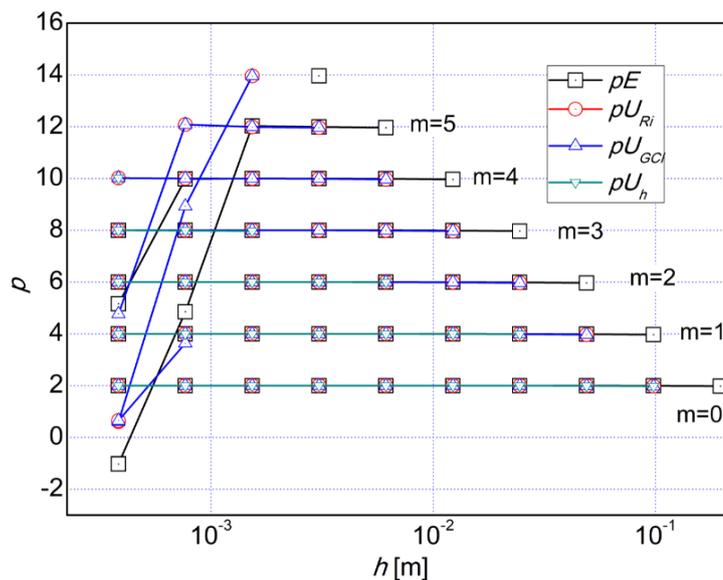
A variável T_2 é obtida a partir de E_2 usando a definição de poder emissivo. Como o problema reportando nesta seção é bem comportado, são mostrados a seguir os resultados de apenas mais uma variável, T_3 , que por sua vez é obtida a partir de E_3 . Vê-se da FIGURA 6.18 à FIGURA 6.21 que os resultados encontrados são similares aos apresentados para a variável E_2 .

FIGURA 6.18 - ERRO E ESTIMATIVAS DO ERRO PARA T_3 EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 3 USANDO A REGRA DO TRAPÉZIO



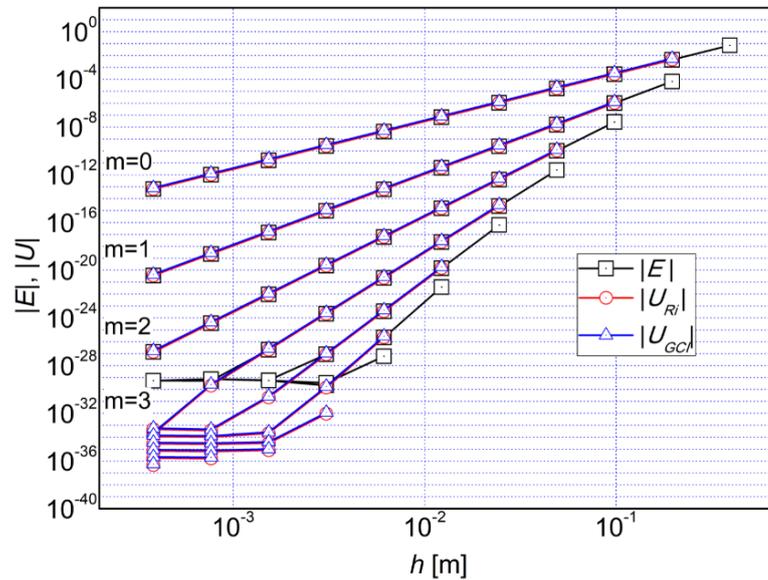
FONTE: O Autor (2020)

FIGURA 6.19 - ORDENS EFETIVA E APARENTE DE T_3 EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 3 USANDO A REGRA DO TRAPÉZIO



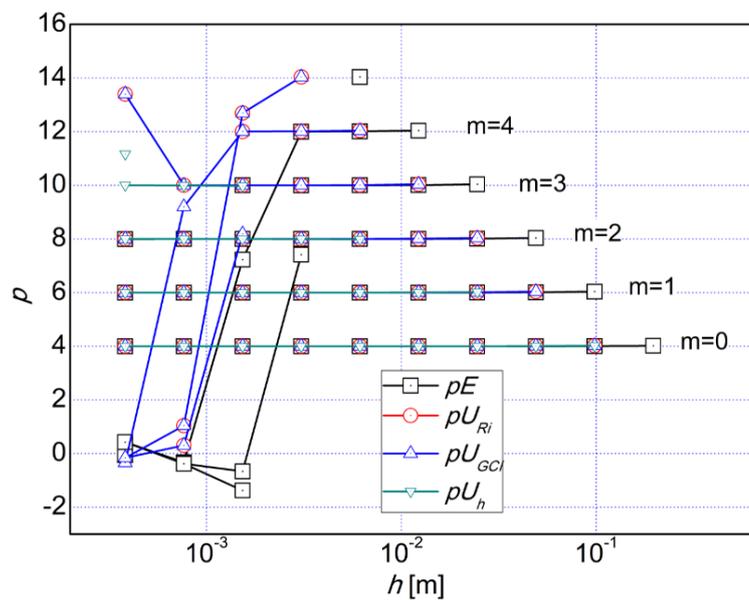
FONTE: O Autor (2020)

FIGURA 6.20 - ERRO E ESTIMATIVAS DO ERRO PARA T_3 EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 3 USANDO A REGRA DE SIMPSON



FONTE: O Autor (2020)

FIGURA 6.21 - ORDENS EFETIVA E APARENTE DE T_3 EM FUNÇÃO DE h PARA O PROBLEMA 3 USANDO A REGRA DE SIMPSON



FONTE: O Autor (2020)

Por fim, foram selecionados os resultados numéricos da oitava malha ($g = 8$) e quarta extrapolação ($m = 5$) para compor os resultados numéricos apresentados na TABELA 6.5 a seguir.

TABELA 6.5 – RESULTADOS NUMÉRICOS COM MER ($g = 8, m = 4$)

Variável	Regra do Trapézio		Regra de Simpson	
	$\phi [Wm^{-2} \text{ ou } K]$	$U_{GCI}(\phi)$	$\phi [Wm^{-2} \text{ ou } K]$	$U_{GCI}(\phi)$
E_2	32934,484859279821287	$7,4E - 19$	32934,484859279821286601267	$2,5E - 25$
T_2	872,9913220165109083138	$1,5E - 21$	872,9913220165109083137492055	$1,1E - 27$
E_3	32434,484859279821287	$7,4E - 19$	32434,484859279821286601267	$2,5E - 25$
T_3	869,6589264665268396797	$1,5E - 21$	869,6589264665268396796721292	$1,1E - 27$

Fonte: O Autor (2020)

6.1.4 RESUMO DE RESULTADOS DOS PROBLEMAS DE RADIAÇÃO EM MEIOS NÃO PARTICIPANTES

De forma geral a técnica de combinar o uso de aproximações numéricas de ordem relativamente baixa, resolver o problema em múltiplas malhas e aplicar a técnica de pós processamento denominada Múltiplas Extrapolações de Richardson se mostra satisfatória na obtenção de soluções numéricas acuradas para equações integrais de Fredholm do segundo tipo e sistemas de equações integrais. Esta metodologia pode ser usada também como procedimento de verificação de código, conforme mostrado nesta tese para três tipos de problemas de meios não participantes listados na TABELA 6.6.

TABELA 6.6 – RESUMO DAS ORDENS DAS VARIÁVEIS NOS 3 PROBLEMAS DE MEIOS NÃO PARTICIPANTES ESTUDADOS

Tipo de problema	Regra Trapézio	Regra de Simpson	Exceções
Equação contendo um termo integral	2, 4, 6, ...	4, 6, 8, ...	—
Equação de Fredholm do segundo tipo	2, 4, 6, ...	4, 6, 8, ...	2, 2, 2, ... quando usa Simpson e a função núcleo da integral apresenta primeira derivada descontínua
Sistema de equações de Fredholm do segundo tipo	2, 4, 6, ...	4, 6, 8, ...	—

Fonte: O Autor (2020)

6.2 PROBLEMAS DE RADIAÇÃO EM MEIOS PARTICIPANTES

O programa usado na solução numérica dos problemas desta seção é o “DOM_1D”. Na versão 2.0 seu algoritmo segue a proposta originalmente apresentada para a comunidade de radiação térmica, mais detalhadamente descrita em Fiveland (1984). Esta também é a versão usada no Capítulo 4 para validar as equações do erro de discretização do Método das Ordenadas Discretas.

O programa consiste na versão unidimensional do DOM para meio absorvedor, emissor e com espalhamento isotrópico. As paredes são modeladas como paralelas, isotérmicas e cinza-difusas (embora apenas problemas com paredes negras são estudadas nesta tese). Três diferentes configurações podem ser escolhidas para a temperatura do meio participante: temperatura constante; função quadrática limitada pelas temperaturas das fronteiras especificadas pelo usuário; e condição de equilíbrio radiativo.

O DOM é resolvido em processo de marcha em ambas as direções do eixo coordenado e não por meio de *solver* que opera com matriz esparsa. Para o estudo dos casos em que há espalhamento foi criada a versão 2.1, cuja única diferença é implementação da linearização do termo fonte sugerida em Chai, Patankar e Lee (1994).

O programa foi escrito na linguagem FORTRAN95 empregando todas as variáveis do tipo real com precisão quádrupla. Na análise do problema descrito na Seção 6.2.1 desta tese, todas as soluções analíticas foram obtidas no programa Maple 17 com 50 algarismos significativos. As demais seções, por envolverem integrais numéricas na obtenção da solução analítica, foram programadas diretamente nas duas versões do “DOM_1D”.

Para minimizar o erro de discretização da integração numérica, as integrais numéricas são conduzidas com a Regra 1/3 de Simpson e em uma malha de diferenças finitas com 5.000 elementos discretos. Constatou-se que as soluções analíticas obtidas diretamente no “DOM_1D” não prejudicam significativamente a verificação das soluções numéricas.

6.2.1 PROBLEMA 4: RADIAÇÃO EM MEIO EMISSOR E ABSORVEDOR COM TEMPERATURA CONSTANTE

O problema desta seção é semelhante ao da Seção 4.4, porém agora é usada a Aproximação S_8 . O meio participante é homogêneo com temperatura $T = 2000 K$, coeficiente

de absorção $\kappa = 4,0 \text{ m}^{-1}$, espessura $L = 0,5 \text{ m}$, paredes negras com temperatura $T_0 = T_L = 400 \text{ K}$.

Os resultados de 18 malhas são suficientes para produzir soluções extrapoladas acuradas sem que o erro de arredondamento polua excessivamente os gráficos. As variáveis avaliadas para este problema são: a) intensidade direcional atingindo a fronteira leste do domínio na direção mais inclinada em relação ao eixo coordenado, $I_e(\mu \cong 0,142)$; b) idem ao item anterior, porém para a direção menos inclinada, $I_e(\mu \cong 0,979)$; c) fluxo de calor na face leste do domínio, q_e'' ; d) fluxo de calor no centro do domínio, $q_{L/2}''$; e) irradiação sobre a fronteira leste, H_e ; f) radiação incidente no centro do domínio, $G_{L/2}$. As respectivas soluções analíticas estão apresentadas na TABELA 6.7 com 35 algarismos significativos.

TABELA 6.7 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS DAS VARIÁVEIS ANALISADAS

Variável	Φ
$I_e(\mu \cong 0,142) [Wm^{-2}sr^{-1}]$	2,8878919393370874256338668412526899E+05
$I_e(\mu \cong 0,979) [Wm^{-2}sr^{-1}]$	2,5136394624083471267025473008156992E+05
$q_e'' [Wm^{-2}]$	8,5164205345700896093007704746407975E+05
$q_{L/2}'' [Wm^{-2}]$	0,000000000000000000000000000000E+00
$H_e [Wm^{-2}]$	8,5309366740900896093007704746407980E+05
$G_{L/2} [Wm^{-2}]$	3,0842452650698763813282973016904239E+06

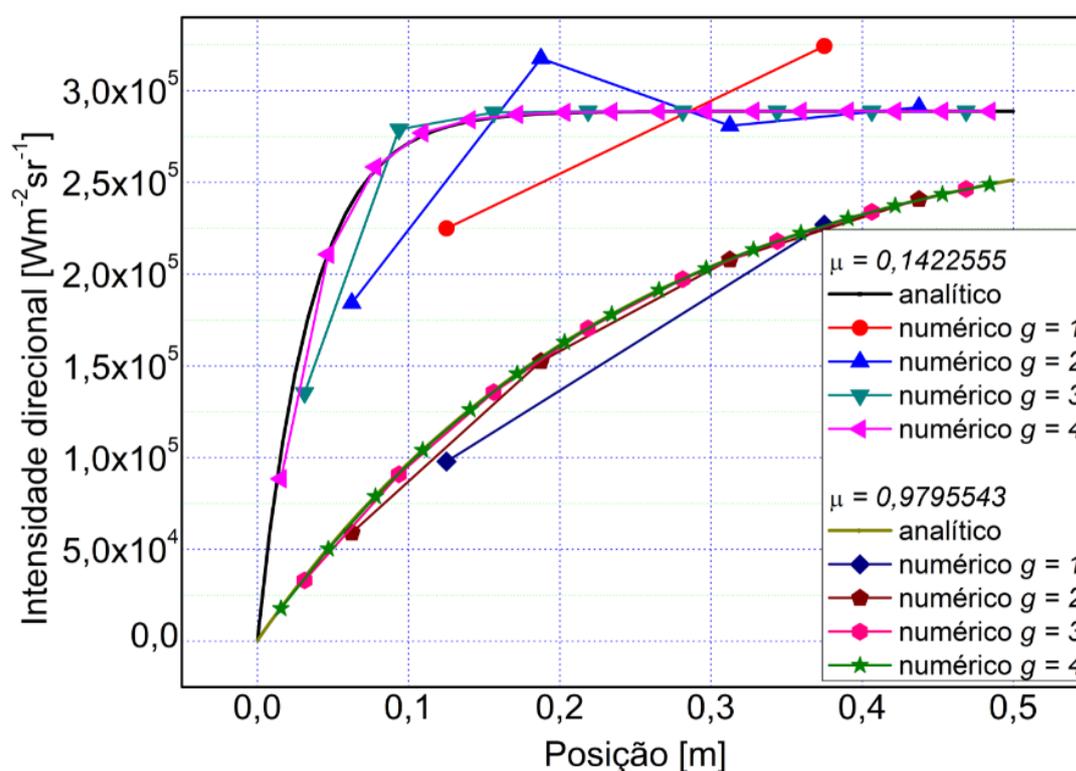
Fonte: O Autor (2020)

Apenas para algumas variáveis são apresentados os gráficos de erro ou ordem em função do tamanho do elemento de malha, pois todas as variáveis extrapoladas apresentam comportamento similar, com ordens aparentes previstas no Capítulo 4, *i.e.* $p_V = 1, 2, 3, \dots$ para o esquema Degrau e $p_V = 2, 4, 6, \dots$ para o esquema Diamante. Entretanto, antes de apresentar os resultados numéricos na forma de tabela, algumas observações interessantes são pontuadas a seguir.

A FIGURA 6.22 ilustra bem como varia a intensidade de acordo com a direção neste tipo de problema. Os dados relativos à direção mais inclinada em relação ao eixo coordenado ($\mu = 0,1422555$ para a Aproximação S_8) apresentam variação mais abrupta porque a radiação percorre uma distância maior para uma mesma posição medida ao longo do eixo. O comportamento oscilatório de I_p ao redor das respectivas soluções analíticas, típico de soluções numéricas obtidas com o esquema Diamante, também é claramente perceptível, já que apenas

as soluções numéricas nas quatro malhas mais grossas foram representadas (*i.e.* $g = 1, 2, 3, 4$). Observa-se que os resultados que apresentam maior oscilação são os da malha mais grossa ($g = 1$) e a oscilação se reduz nos resultados obtidos com malhas progressivamente mais finas. Vê-se também que as oscilações de maior amplitude ocorrem na direção mais inclinada, pois é nela que o maior gradiente da intensidade é observado.

FIGURA 6.22 – COMPARAÇÃO DOS VALORES NUMÉRICOS (4 MALHAS) DA INTENSIDADE I_p NAS DIREÇÕES MAIS E MENOS INCLINADAS PARA $\gamma = 1/2$



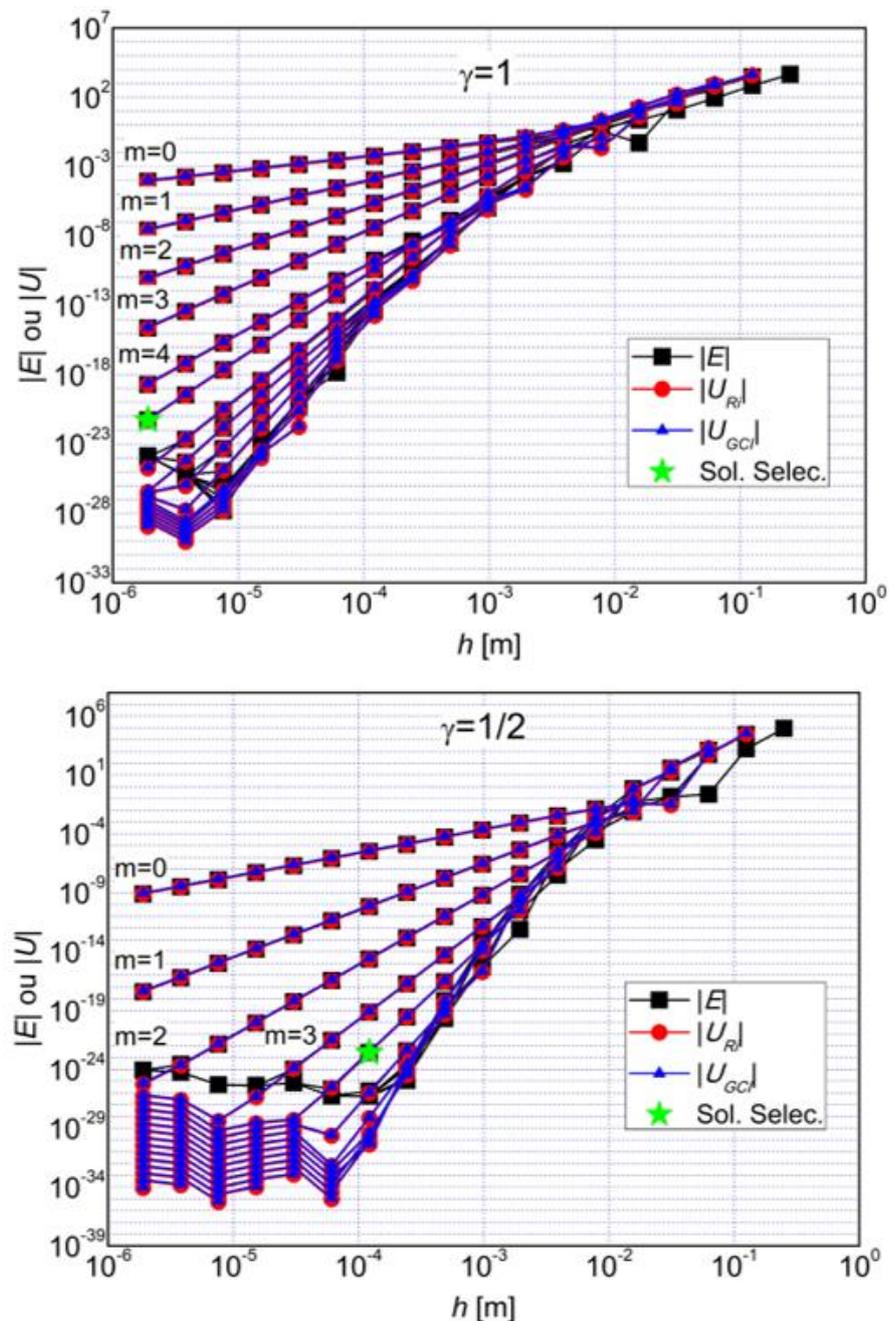
Fonte: O Autor (2020)

Apesar da malha mais grossa apresentar $h < 1$, o comportamento das soluções extrapoladas com MER nem sempre se mostra monotônico desde as malhas mais grossas. Na FIGURA 6.23 são apresentados o erro e erro estimado da intensidade atingindo a fronteira leste do domínio na direção mais inclinada em relação ao eixo coordenado, $I_e(\mu \cong 0,142)$. Vê-se que nem todas as extrapolações se apresentam com inclinação constante na região $10^{-2} \lesssim h \lesssim 10^{-1} \text{ m}$. Esta variável apresenta as maiores irregularidades na inclinação dentre todas as variáveis analisadas, sendo por isso escolhida para ser mostrada graficamente.

Considerando todas as variáveis, malhas e extrapolações numéricas disponíveis, o resultado numérico considerado mais acurado para o esquema Diamante $\gamma = 1/2$ é o da décima segunda malha ($g = 12$) e quarto nível de extrapolação ($m = 4$). Já para o esquema Degrau o

resultado mais acurado é o da décima oitava malha ($g = 18$) e quinta extrapolção ($m = 5$). Estes resultados para $I_e(\mu \cong 0,142)$ aparecem destacados na FIGURA 6.23 como “Sol. Selec.”, significando “solução numérica selecionada”, que é apresentada na forma de tabela mais adiante no texto. Vale ressaltar que para essa variável há soluções numéricas mais acuradas, porém aqui se buscou aquela malha e extrapolção que atende também às demais variáveis analisadas neste problema.

FIGURA 6.23 – MÓDULO DO ERRO E ESTIMATIVAS DO ERRO NA APLICAÇÃO DE MER PARA $I_e(\mu \cong 0,142)$ NO PROBLEMA 4



Exceto para $q''_{L/2}$, que atinge o erro de arredondamento mesmo na malha mais grossa devido ao cancelamento subtrativo e à simetria do problema, os resultados numéricos são apresentados na TABELA 6.8 e TABELA 6.9 acompanhados da respectiva estimativa baseada no GCI , onde a escolha deste estimador é motivada por ser comumente empregado na literatura. Entretanto, tanto o estimador de Richardson quanto o estimador baseado na ordem aparente são adequados e podem ser usados. Uma vez escolhido o GCI , então os resultados numéricos, juntamente com a estimativa do erro associada devem ser reportados de acordo com a Eq.(2.96).

Vale comentar que todas as variáveis que puderam ser extrapoladas apresentaram ordens aparentes previstas no Capítulo 4, ou seja, $p_V = 1,2,3, \dots$ para o esquema Degrau e $p_V = 2,4,6, \dots$ para o esquema Diamante. Os gráficos para a variável $G_{L/2}$ são mostrados na FIGURA 6.24, porém o comportamento é o mesmo observado para as demais variáveis extrapoladas.

Por fim ressalta-se que como este problema possui solução analítica é possível medir o erro numérico diretamente. Observando a FIGURA 6.23 se percebe a concordância entre os resultados do erro e da sua estimativa, evidenciando a capacidade de MER obter soluções numéricas acuradas juntamente com a estimativa do erro associada.

TABELA 6.8 – RESULTADOS NUMÉRICOS DO PROBLEMA 4 COM MER ($\gamma = 1, g = 18, m = 5$)

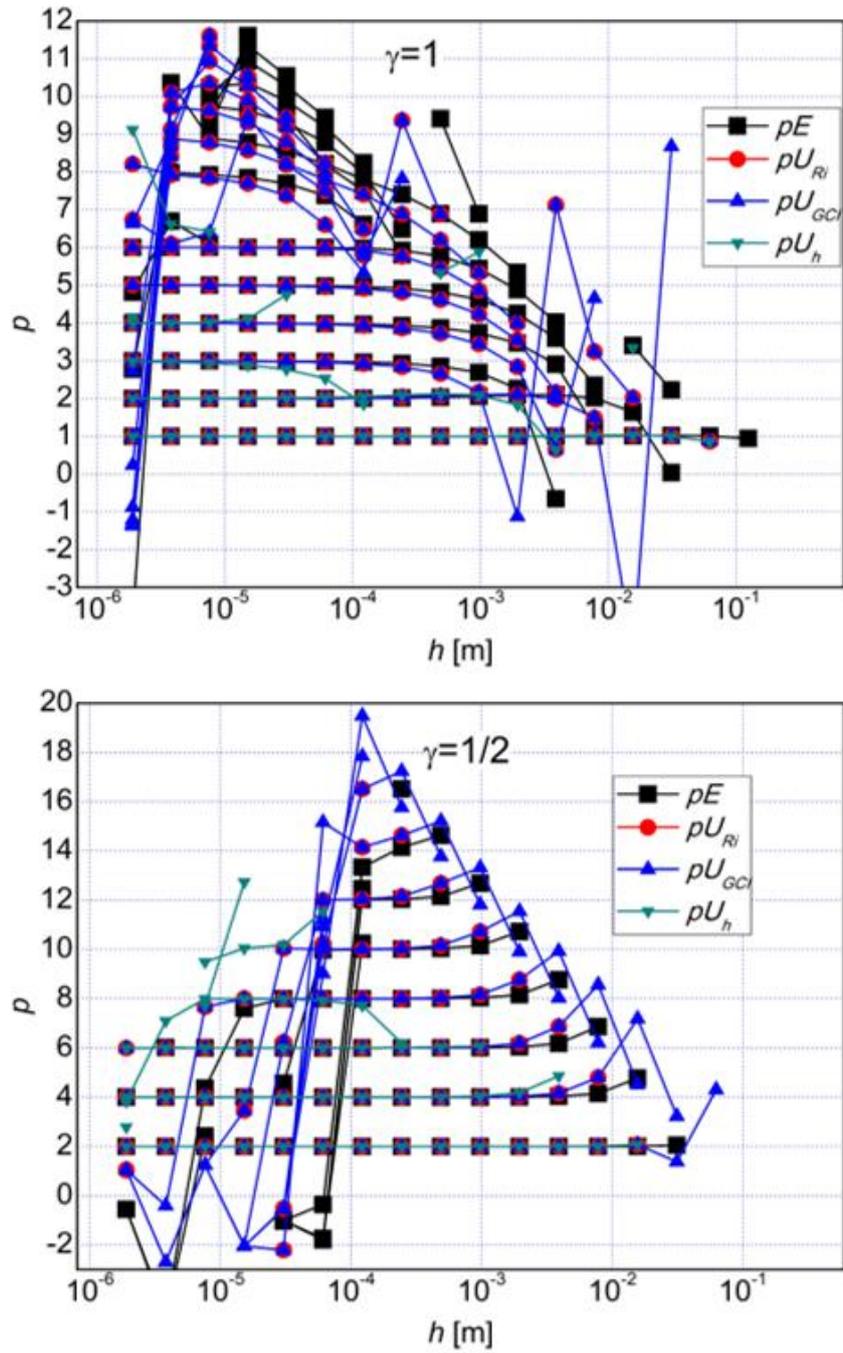
Variável	$\phi [Wm^{-2}sr^{-1} \text{ ou } Wm^{-2}]$	$U_{GCI}(\phi)$
$I_e(\mu \approx 0,1)$	2,8878919393370874256338668360E + 05	6,6E – 22
$I_e(\mu \approx 0,9)$	2,513639462408347126702547300930E + 05	8,7E – 24
q''_e	8,5164205345700896093007704735E + 05	1,6E – 22
H_e	8,5309366740900896093007704735E + 05	1,6E – 22
$G_{L/2}$	3,084245265069876381328297266E + 06	4,5E – 20

Fonte: O Autor (2020)

TABELA 6.9 – RESULTADOS NUMÉRICOS DO PROBLEMA 4 COM MER ($\gamma = 1/2, g = 12, m = 4$)

Variável	$\phi [Wm^{-2}sr^{-1} \text{ ou } Wm^{-2}]$	$U_{GCI}(\phi)$
$I_e(\mu \approx 0,1)$	2,88789193933708742563386684099E + 05	3,3E – 23
$I_e(\mu \approx 0,9)$	2,5136394624083471267025473008152E + 05	8,0E – 28
q''_e	8,51642053457008960930077047456E + 05	1,0E – 23
H_e	8,53093667409008960930077047456E + 05	1,0E – 23
$G_{L/2}$	3,084245265069876381328297288E + 06	1,8E – 20

Fonte: O Autor (2020)

FIGURA 6.24 – ORDENS EFETIVA E APARENTE PARA $G_{L/2}$ NO PROBLEMA 4

Fonte: O Autor (2020)

6.2.2 PROBLEMA 5: RADIAÇÃO EM MEIO PARTICIPANTE COM TEMPERATURA VARIÁVEL

O problema desta seção foi extraído de Howell, Siegel e Mengüç (2011, p. 500). A diferença para o problema da seção anterior é que a temperatura do meio participante é função da posição, dada pela Eq. (6.3), reproduzida a seguir

$$T(x) = T_0 - (T_0 - T_L)(x/L)^2, \quad (6.3)$$

onde x é a posição, contada a partir da fronteira esquerda e $L = 0,6 \text{ m}$ é a espessura da camada de meio participante. A temperatura da fronteira oeste é $T_0 = 650 \text{ K}$ e da fronteira leste é $T_L = 425 \text{ K}$, ambas modeladas como superfícies negras. O meio participante possui coeficiente de absorção constante $\kappa = 1,6 \text{ m}^{-1}$.

A solução analítica para a intensidade direcional é dada pela Eq. (2.48), onde $\hat{I} = \frac{\kappa \sigma T(x)^4}{\pi}$. A solução do fluxo de calor é obtida com a Eq. (2.52) e da irradiação sobre a fronteira da direita, em $x = L$ com a Eq. (2.87). Já a radiação incidente, dada pela Eq. (2.51), não pôde ser obtida porque um dos limites de integração resulta infinito, entretanto seus resultados numéricos serão analisados por serem distintos, como explanado mais adiante. As soluções analíticas são apresentadas na TABELA 6.10 com um número de algarismos significativos reduzidos já que na sua obtenção é feita a integração numérica do produto da função temperatura com funções integrais exponenciais.

TABELA 6.10 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS DAS VARIÁVEIS ANALISADAS NO PROBLEMA 5

Variável	Φ
$I_e(\mu = 0,5) [Wm^{-2}sr^{-1}]$	1,901E + 03
$q_e'' [Wm^{-2}]$	4,12E + 03
$H_e [Wm^{-2}]$	5,97E + 03

Fonte: O Autor (2020)

As soluções numéricas são obtidas com a Aproximação S_2 em 18 malhas, com tamanhos dos elementos de malha variando de $h = 0,3 \text{ m}$ até $h \approx 2,3 \times 10^{-6} \text{ m}$. Embora os gráficos de MER de todas as variáveis atinjam o limite da precisão quádrupla, a qualidade das soluções analíticas é limitada já que a integração é obtida numericamente.

Por conta disso, embora seja possível escolher soluções numéricas extrapoladas de elevada acurácia, são apresentados na TABELA 6.11 e TABELA 6.12 os valores mais refinados ainda compatíveis com a acurácia da solução analítica. Considerando ambos os esquemas ($\gamma = 1$ e $\gamma = 1/2$) se vê que isso ocorre na quarta malha e extrapolação zero. Estes valores aparecem destacados nos gráficos de erro e estimativa do erro na FIGURA 6.25 e FIGURA 6.26. Especialmente na FIGURA 6.25 vê-se que o erro e as estimativas do erro são compatíveis no nível de extrapolação zero até a nona malha aproximadamente. Porém para a FIGURA 6.26 se vê que isso ocorre já na quarta malha, já que $\gamma = 1/2$ é um esquema mais acurado.

TABELA 6.11 – RESULTADOS NUMÉRICOS DO PROBLEMA 5 ($\gamma = 1, g = 4, m = 0$)

<i>Variável</i>	$\phi [Wm^{-2}sr^{-1} \text{ ou } Wm^{-2}]$	$U_{GCI}(\phi)$
$I_e(\mu = 0,5)$	1,946E + 03	5,6E + 01
q_e''	4,26E + 03	1,8E + 02
H_e	6,04E + 03	1,8E + 02
$G_{L/2}$	2,523E + 04	8,4E + 02

Fonte: O Autor (2020)

TABELA 6.12 – RESULTADOS NUMÉRICOS DO PROBLEMA 5 ($\gamma = 1/2, g = 4, m = 0$)

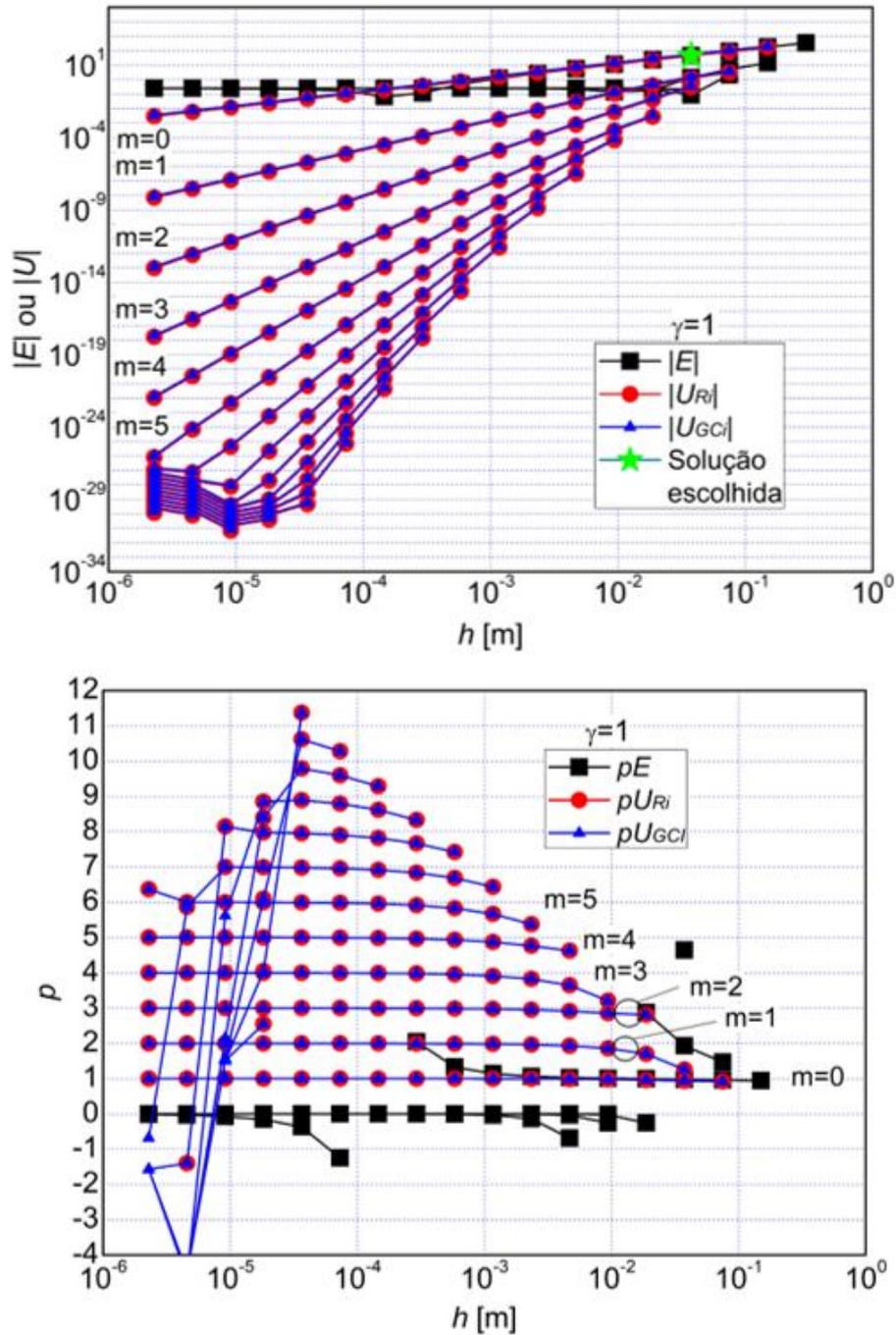
<i>Variável</i>	$\phi [Wm^{-2}sr^{-1} \text{ ou } Wm^{-2}]$	$U_{GCI}(\phi)$
$I_e(\mu = 0,5)$	1,90102E + 03	7,9E - 01
q_e''	4,1222E + 03	2,5E + 00
H_e	5,9723E + 03	2,5E + 00
$G_{L/2}$	2,518E + 04	8,6E + 02

Fonte: O Autor (2020)

Primeiramente se observa que os resultados numéricos da TABELA 6.11 e TABELA 6.12 apresentam acurácia limitada por conta da malha escolhida. Embora essa limitação seja produzida neste trabalho por conta da acurácia relativamente reduzida da solução analítica, vale comentar que em problemas práticos da engenharia essa limitação geralmente se deve à complexidade do modelo matemático. Entretanto, mesmo para os resultados obtidos com $\gamma =$

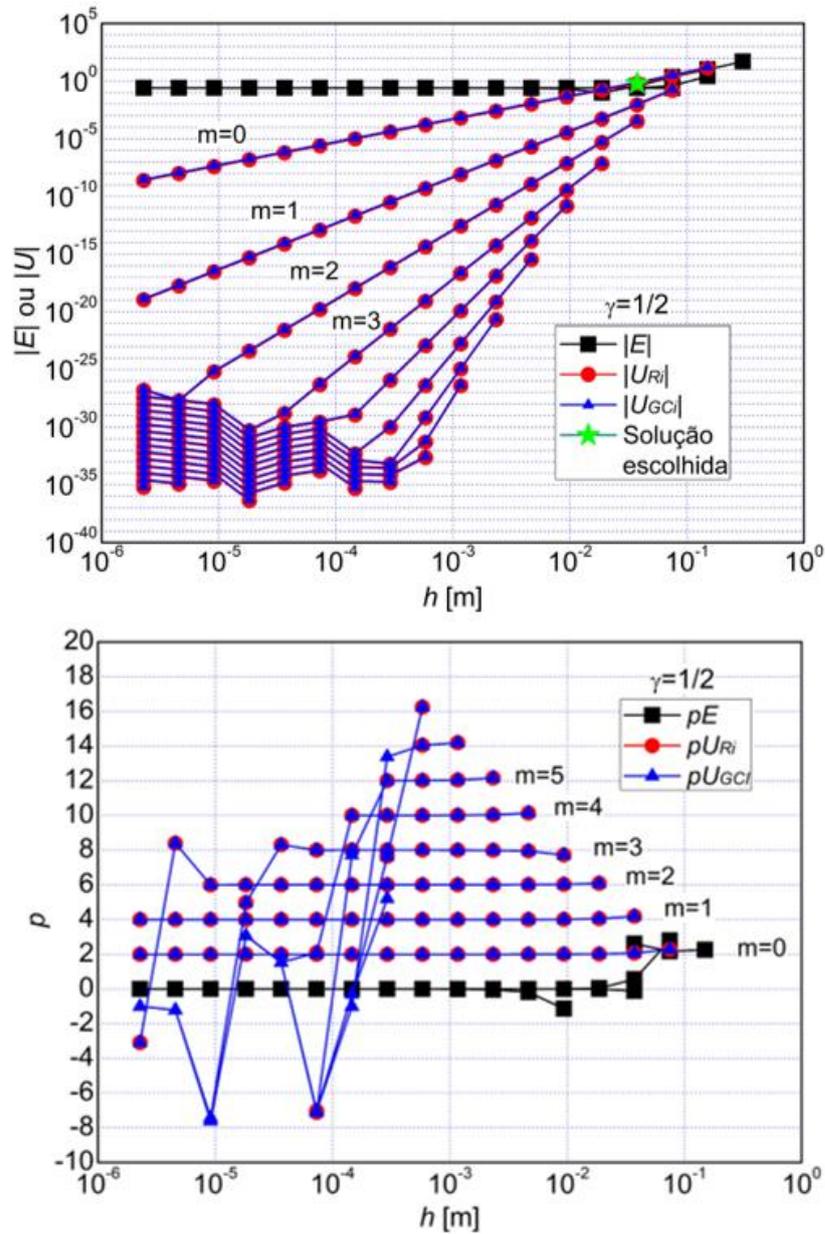
1, a estimativa do erro segundo o estimador GCI está, no pior caso, 8,4% da solução numérica obtida.

FIGURA 6.25 – ERRO, ESTIMATIVAS DE ERRO E ORDENS PARA $I_e(\mu = 0,5)$ E $\gamma = 1$ NO PROBLEMA 5



Fonte: O Autor (2020)

FIGURA 6.26 – ERROS, ESTIMATIVAS DE ERROS E ORDENS PARA $I_e(\mu = 0,5)$ E $\gamma = 1/2$ NO PROBLEMA 5

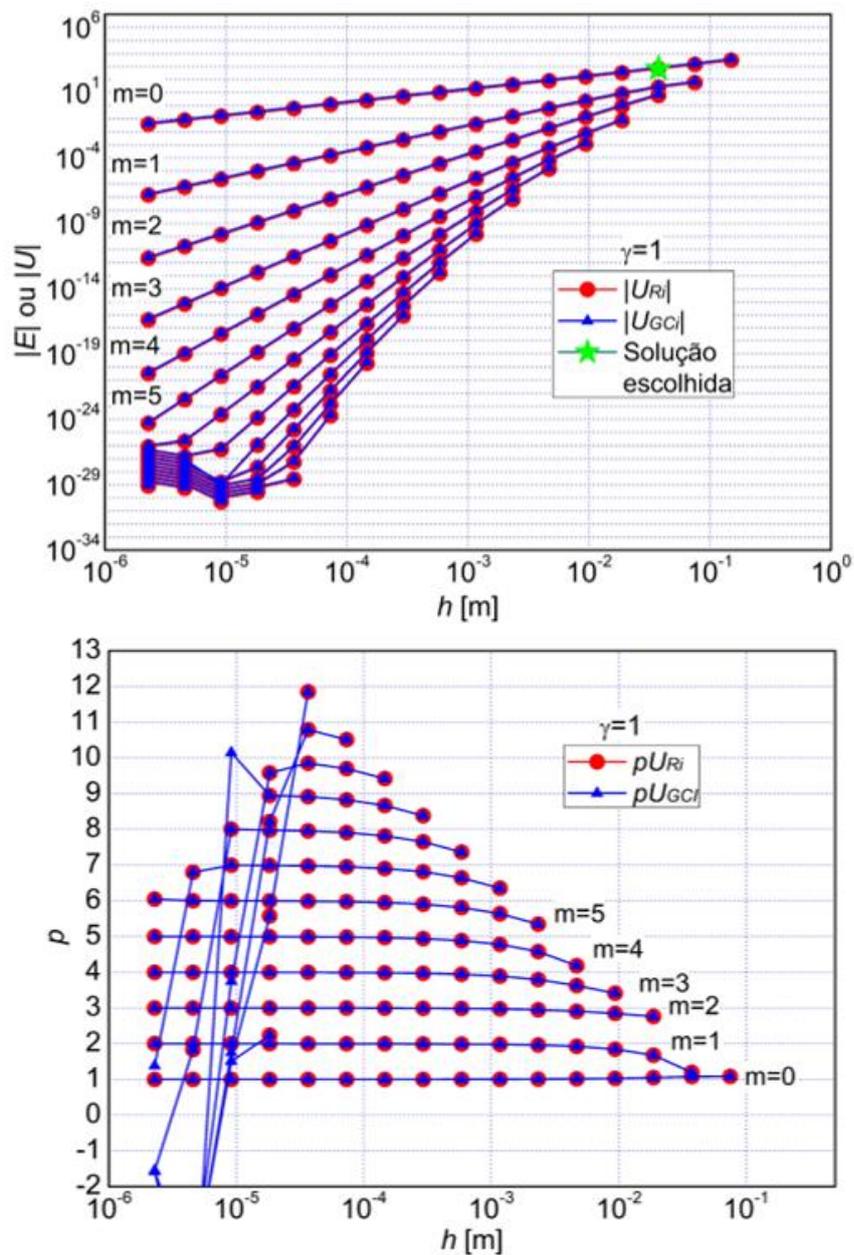


Fonte: O Autor (2020)

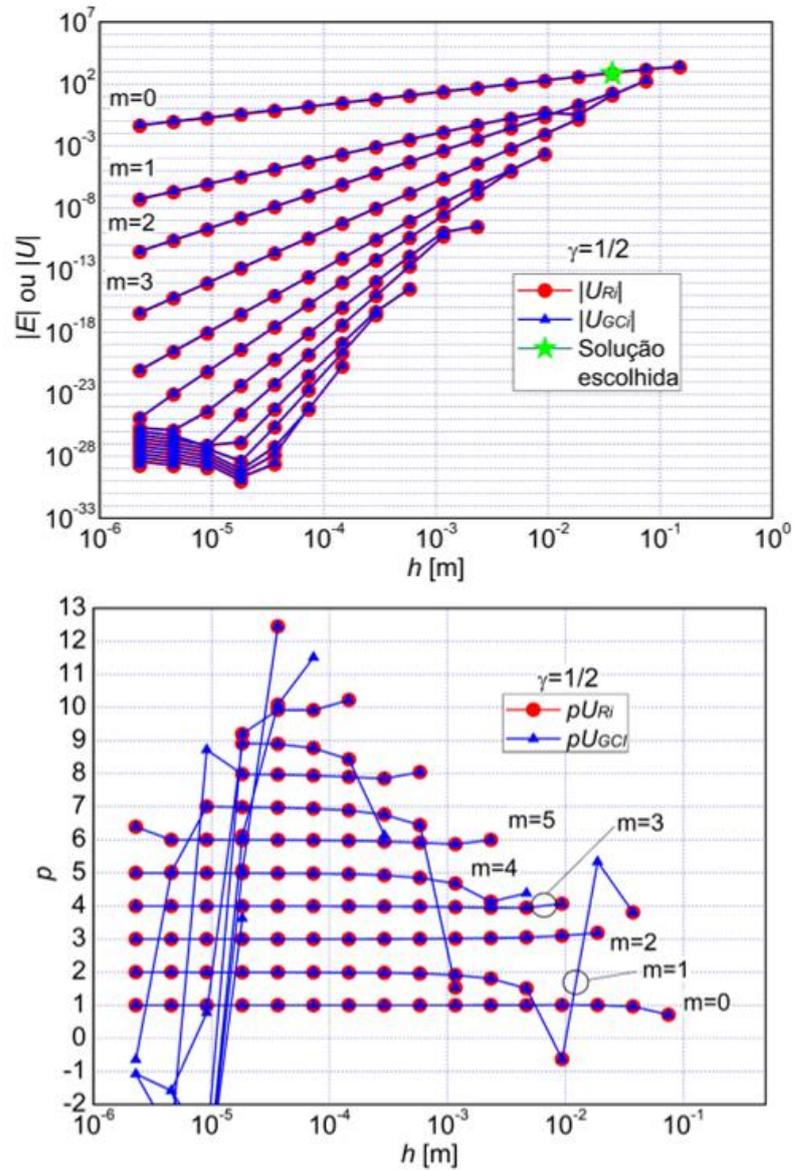
Partindo agora para a análise de MER e desconsiderando a questão da limitação de acurácia da solução analítica discutida no parágrafo anterior, nota-se na FIGURA 6.25 e FIGURA 6.26 que as ordens efetivas para a intensidade direcional coincidem com as ordens previstas *a priori* no Capítulo 4. Entretanto, uma das variáveis analisadas: a radiação incidente no meio do domínio $G_{L/2}$ mostra degeneração de ordem quando é usado o esquema Diamante $\gamma = 1/2$. Conforme mostrado na FIGURA 6.28, as ordens verdadeiras observadas na prática são $p_V = 1, 2, 3, \dots$, sendo que as ordens previstas (considerando o caso do meio com

temperatura constante) são $p_V = 2,4,6, \dots$, conforme mostrado na seção anterior. Enquanto os resultados relativos ao esquema Diamante sofrem degeneração de ordem, os resultados obtidos com o esquema Degrau não apresentam essa anomalia, conforme pode-se ver na FIGURA 6.27.

FIGURA 6.27 – ESTIMATIVAS DO ERRO E ORDENS PARA $G_{L/2}$ COM $\gamma = 1$ NO PROBLEMA 5



Fonte: O Autor (2020)

FIGURA 6.28 – ESTIMATIVAS DO ERRO E ORDENS PARA $G_{L/2}$ COM $\gamma = 1/2$ NO PROBLEMA 5

Fonte: O Autor (2020)

Embora não selecionado para constar nesta tese, o problema em que a temperatura do meio é dada por um polinômio de primeiro grau foi também analisado e o comportamento observado foi o mesmo do problema da seção anterior, indicando que a integração do termo fonte afeta o erro de truncamento, provavelmente de acordo com a Eq. (4.44), já que nela aparece a derivada segunda da função que está sendo integrada com a Regra do Retângulo.

Analisar o erro de truncamento na integração do termo fonte \hat{I} na Eq. (4.5) é uma sugestão de estudo futuro. Entretanto a explicação do parágrafo acima não explica porque as demais variáveis não apresentaram degeneração de ordem para o esquema Diamante.

6.2.3 PROBLEMA 6: RADIAÇÃO EM MEIO COM ESPALHAMENTO ISOTRÓPICO

Conforme exposto na Seção 5.2.3, não se obteve solução analítica para o problema desta seção, portanto apenas as estimativas do erro e suas respectivas ordens verdadeiras são avaliadas. A verificação do código no que concerne à problemas com espalhamento é feita para o problema descrito na próxima seção.

O problema é o mesmo da Seção 6.2.1, onde o meio participante tem temperatura constante $T = 2000 K$, paredes negras com temperatura $T_0 = T_L = 400 K$ e espessura da camada de meio participante $L = 0,5 m$.

Nesta seção pretende-se analisar dois casos. No primeiro o meio emite, absorve e espalha isotropicamente a radiação. Suas propriedades são $\kappa = 2,0 m^{-1}$, $\sigma_s = 2,0 m^{-1}$ ($\omega = 0,5$), portanto mesma espessura óptica do problema da Seção 6.2.1. No segundo caso o meio apresenta espalhamento puro, sendo $\sigma_s = 4,0 m^{-1}$ ($\omega = 1$), portanto também mesma espessura óptica. Empregou-se a aproximação S_6 em 14 malhas, com tamanhos dos elementos variando de $h = 0,25 m$ até $h \approx 3,1 \times 10^{-5} m$. As soluções numéricas do primeiro caso estão listadas na TABELA 6.13 e TABELA 6.14.

TABELA 6.13 – RESULTADOS NUMÉRICOS DO PROBLEMA 6 PARA O 1° CASO COM $\gamma = 1, g = 14, m = 9$

Variável	$\phi [Wm^{-2}sr^{-1} \text{ ou } Wm^{-2}]$	$U_{GCI}(\phi)$
$I_e(\mu \approx 0,18)$	$2,179308438823772503647850E + 05$	$1,7E - 18$
$I_e(\mu \approx 0,97)$	$2,03780130646619903353584988E + 05$	$6,4E - 20$
q_e''	$6,7572700735956458939671754E + 05$	$6,3E - 19$
H_e	$6,7717862131156458939671754E + 05$	$6,4E - 19$
$G_{L/2}$	$2,6000973512087181156549329E + 06$	$6,3E - 18$

Fonte: O Autor (2020)

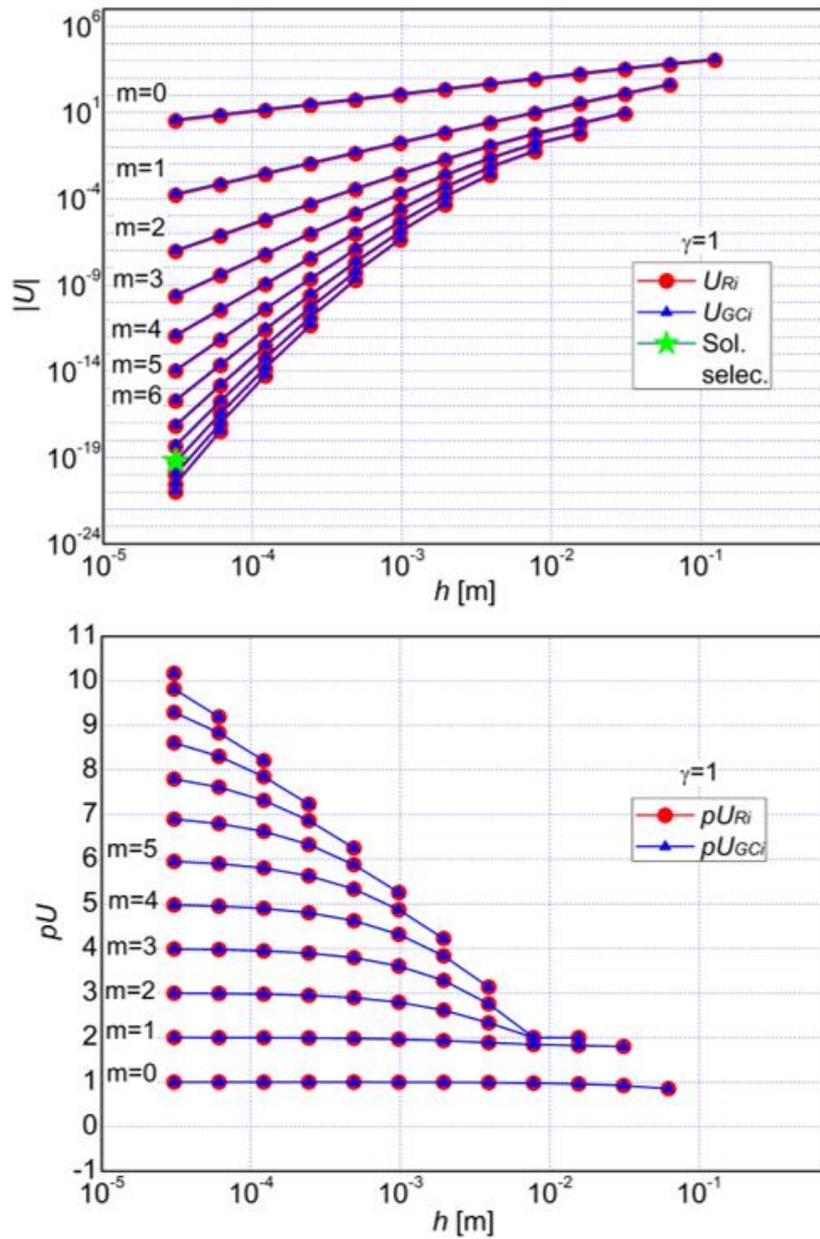
TABELA 6.14 – RESULTADOS NUMÉRICOS DO PROBLEMA 6 PARA O 1° CASO COM $\gamma = 1/2, g = 14, m = 3$

Variável	$\phi [Wm^{-2}sr^{-1} \text{ ou } Wm^{-2}]$	$U_{GCI}(\phi)$
$I_e(\mu \approx 0,18)$	$2,1793084388237725036478318050177E + 05$	$1,2E - 24$
$I_e(\mu \approx 0,97)$	$2,0378013064661990335358505568313E + 05$	$4,3E - 26$
q_e''	$6,7572700735956458939671687501792E + 05$	$4,3E - 25$
H_e	$6,7717862131156458939671687501792E + 05$	$4,3E - 25$
$G_{L/2}$	$2,60009735120871811565494009976E + 06$	$1,1E - 22$

Fonte: O Autor (2020)

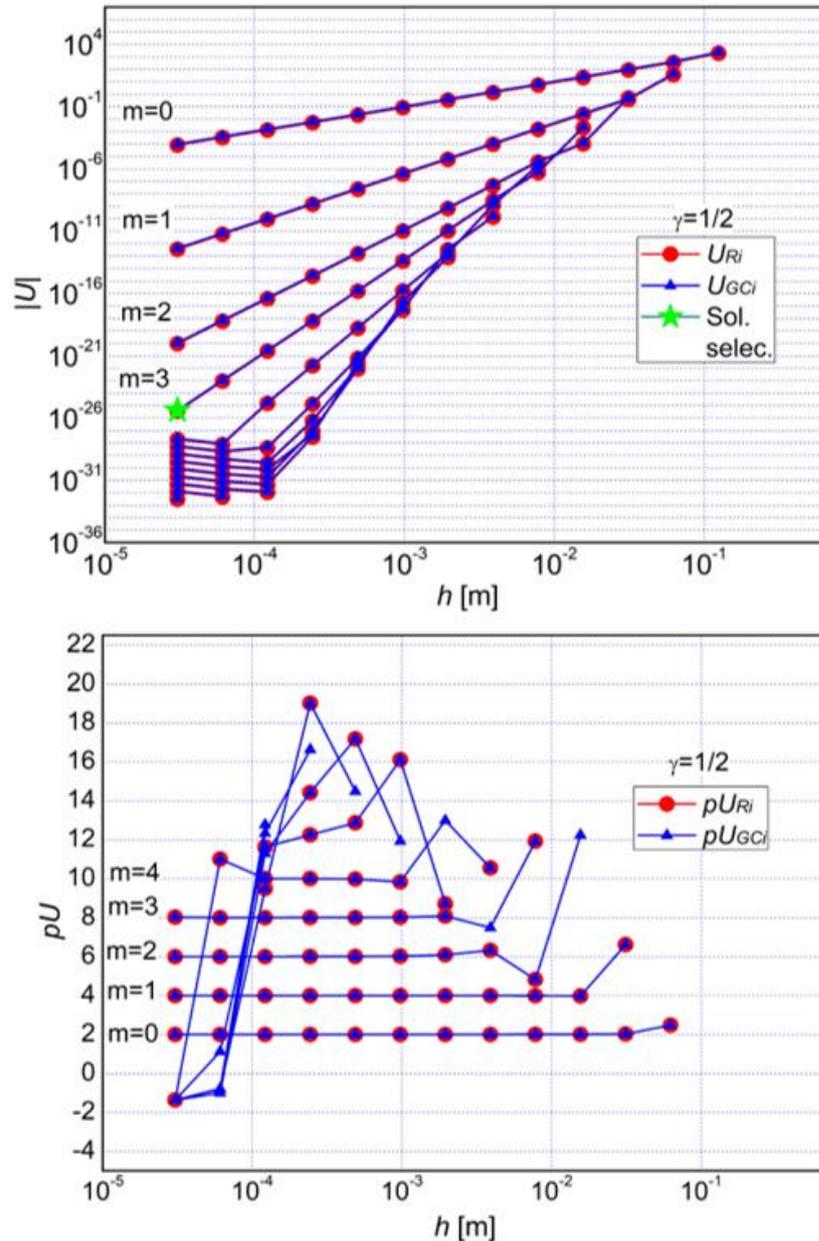
Para mostrar o comportamento das estimativas de erro e das ordens são mostrados a seguir os gráficos de duas variáveis. A intensidade direcional (na direção menos inclinada em relação ao eixo x) $I_e(\mu \approx 0,97)$ é mostrada na FIGURA 6.29 e na FIGURA 6.30 enquanto a radiação incidente no meio do domínio $G_{L/2}$ é mostrada na FIGURA 6.31 e na FIGURA 6.32.

FIGURA 6.29 – ESTIMATIVA DO ERRO E ORDENS DE $I_e(\mu \approx 0,97)$ COM $\gamma = 1$ NO 1º CASO DO PROBLEMA 6



Fonte: O Autor (2020)

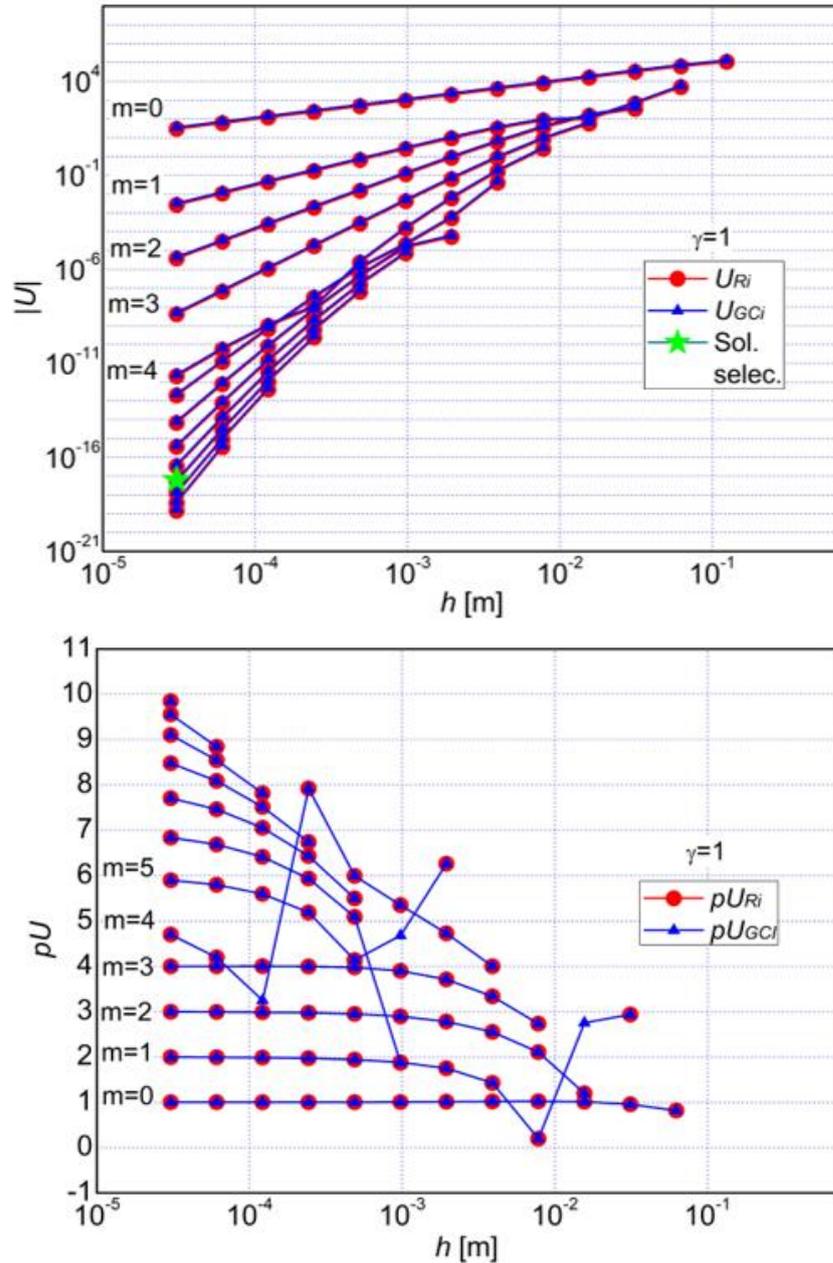
FIGURA 6.30 – ESTIMATIVA DO ERRO E ORDENS DE $I_e(\mu \approx 0,97)$ COM $\gamma = 1/2$ NO 1º CASO DO PROBLEMA 6



Fonte: O Autor (2020)

Os gráficos das demais variáveis analisadas no primeiro caso são similares aos mostrados aqui. Observa-se que as ordens verdadeiras são aquelas previstas no Capítulo 4, indicando que, em princípio, a adição do espalhamento isotrópico no modelo matemático não afeta as ordens verdadeiras. Entretanto, vale a ressalva que a temperatura do meio participante foi considerada constante, de forma que nada impede de ocorrer degeneração de ordem em um problema com espalhamento, caso o perfil de temperatura do meio seja descrito por um polinômio de ordem maior que dois, semelhante ao observado no problema da Seção 6.2.2.

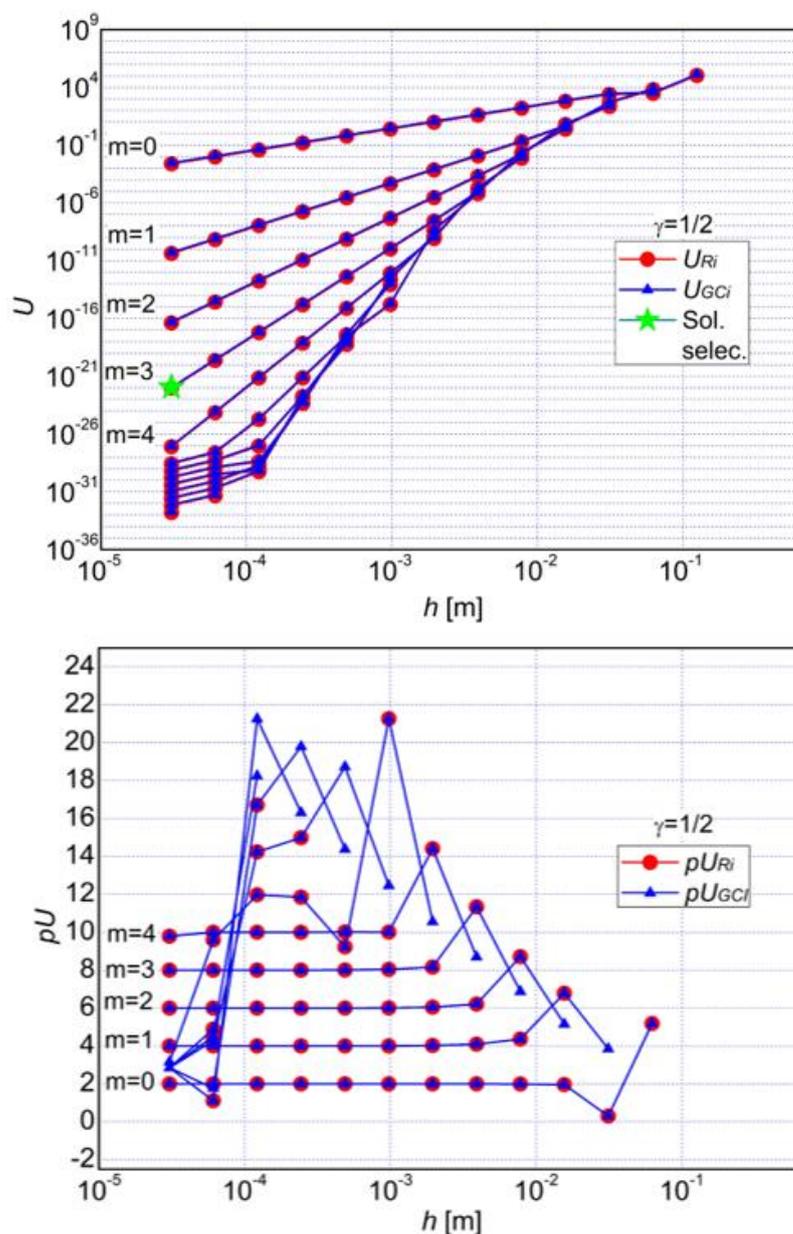
FIGURA 6.31 – ESTIMATIVAS DE ERRO E ORDENS DE $G_{L/2}$ COM $\gamma = 1$ NO 1º CASO DO PROBLEMA 6



Fonte: O Autor (2020)

Passando à análise do segundo caso do problema dessa seção, onde ocorre espalhamento puro. As soluções numéricas obtidas para todas as variáveis analisadas estão apresentadas na TABELA 6.15 e na TABELA 6.16 com um número de algarismos significativos compatível com as estimativas de erro de discretização associadas (ABNT, 1997; ISO, 1993).

FIGURA 6.32 – ESTIMATIVA DE ERRO E ORDENS DE $G_{L/2}$ COM $\gamma = 1/2$ NO 1º CASO DO PROBLEMA 6



Fonte: O Autor (2020)

TABELA 6.15 – RESULTADOS NUMÉRICOS DO PROBLEMA 6 PARA O 2º CASO COM $\gamma = 1, g = 14, m = 5$

Variável	ϕ [$Wm^{-2}sr^{-1}$ ou Wm^{-2}]	$U_{GCI}(\phi)$
$I_e(\mu \approx 0,18)$	$4,6206249490291065312874650E + 02$	$9,7E - 22$
$I_e(\mu \approx 0,97)$	$4,6206247238253199946455491E + 02$	$1,6E - 22$
q_e''	$-2,52308064586049812084124895E - 03$	$6,6E - 28$
H_e	$1,4516114289193541395018791587510E + 03$	$6,6E - 28$
$G_{L/2}$	$5,80644572241661905442234723E + 03$	$8,7E - 22$

Fonte: O Autor (2020)

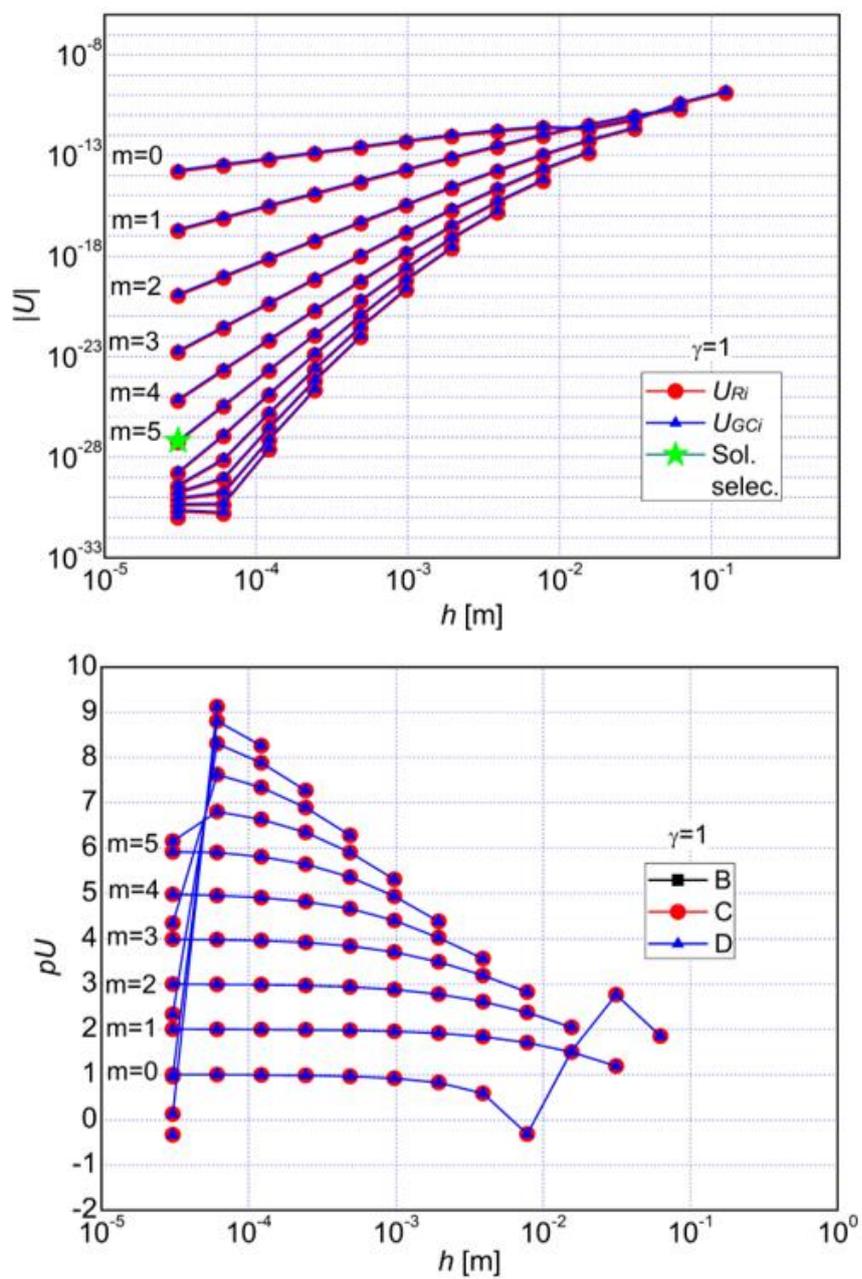
TABELA 6.16 – RESULTADOS NUMÉRICOS DO PROBLEMA 6 PARA O 2° CASO COM $\gamma = 1/2, g = 12, m = 2$

<i>Variável</i>	ϕ [$Wm^{-2}sr^{-1}$ ou Wm^{-2}]	$U_{GCI}(\phi)$
$I_e(\mu \approx 0,18)$	4,620624949029106531287472835E + 02	1,3E - 24
$I_e(\mu \approx 0,97)$	4,6206247238253199946455477244E + 02	2,5E - 25
q_e''	-2,52308064586049812084124923998E - 03	9,2E - 31
H_e	1,4516114289193541395018791587508E + 03 ¹	9,2E - 31
$G_{L/2}$	5,80644572241661905442234610E + 03	5,2E - 22

¹ Faltaram 4 algarismos significativos à direita do número para representar a solução numérica

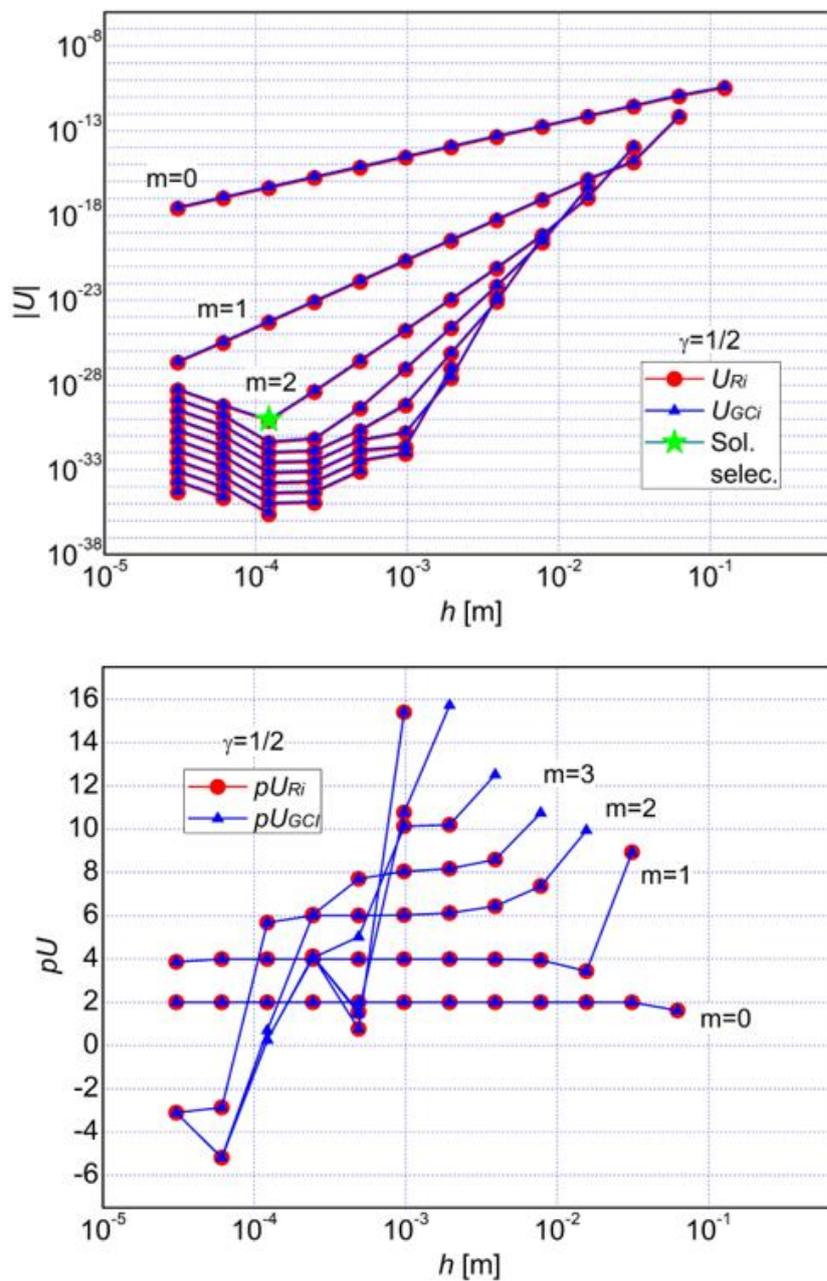
Fonte: O Autor (2020)

Da FIGURA 6.33 até a FIGURA 6.36 são mostrados os gráficos da estimativa do erro e suas respectivas ordens para a irradiação sobre a fronteira da direita H_e e a radiação incidente no meio do domínio $G_{L/2}$. Como não se obteve solução analítica para nenhuma das variáveis analisadas nesta seção, tanto o erro como a ordem efetiva não aparecem em nenhuma das figuras. Nos gráficos de estimativa do erro estão destacadas as soluções numéricas escolhidas para serem escritas na TABELA 6.15 e TABELA 6.16, denominadas “Sol. selec.”. Assim como no 1° caso, as ordens previstas no Capítulo 4 também são observadas neste problema onde o meio participa apenas espalhando a radiação térmica.

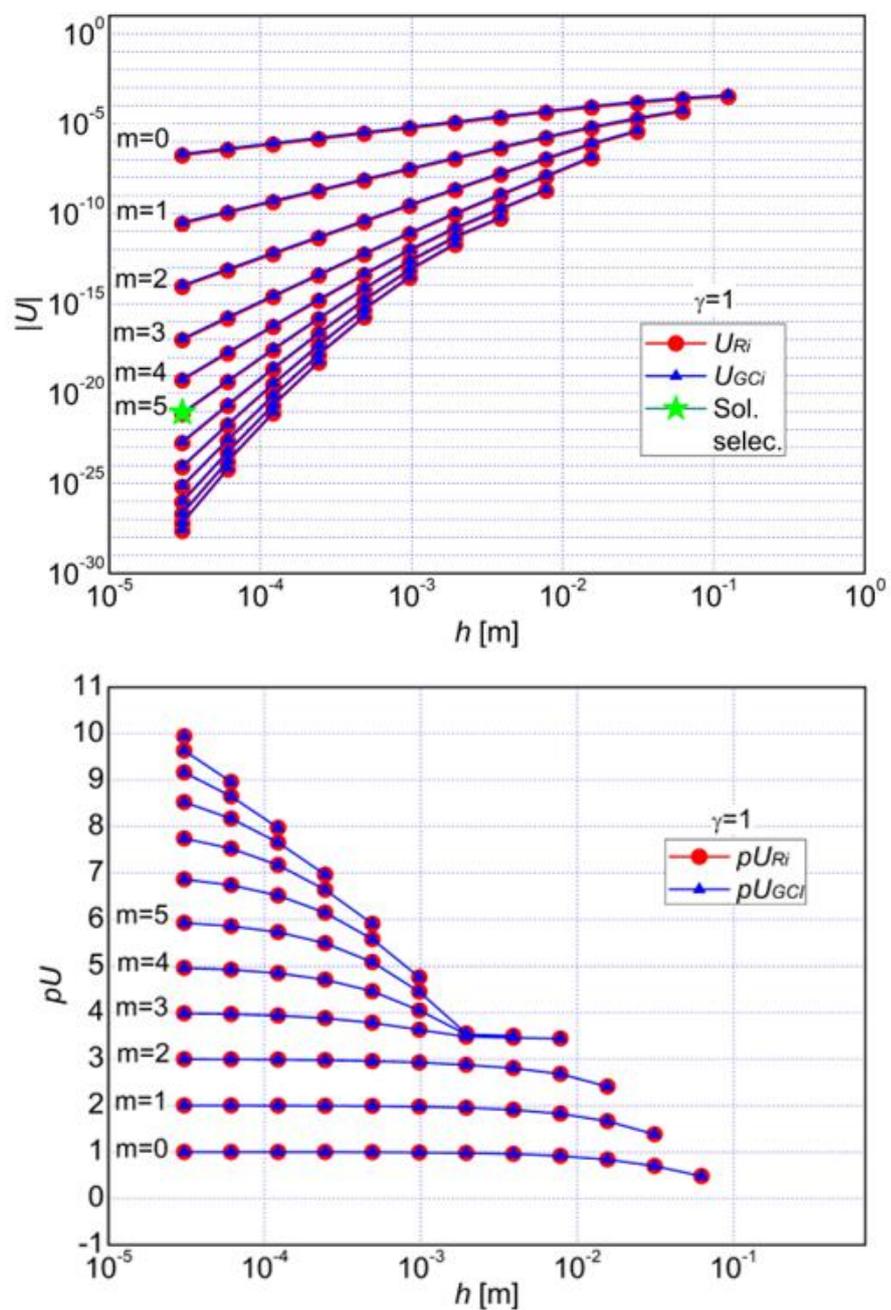
FIGURA 6.33 – ESTIMATIVA DO ERRO E ORDENS DE H_e COM $\gamma = 1$ NO 2º CASO DO PROBLEMA 6

Fonte: O Autor (2020)

FIGURA 6.34 – ESTIMATIVA DO ERRO E ORDENS DE H_e COM $\gamma = 1/2$ NO 2º CASO DO PROBLEMA

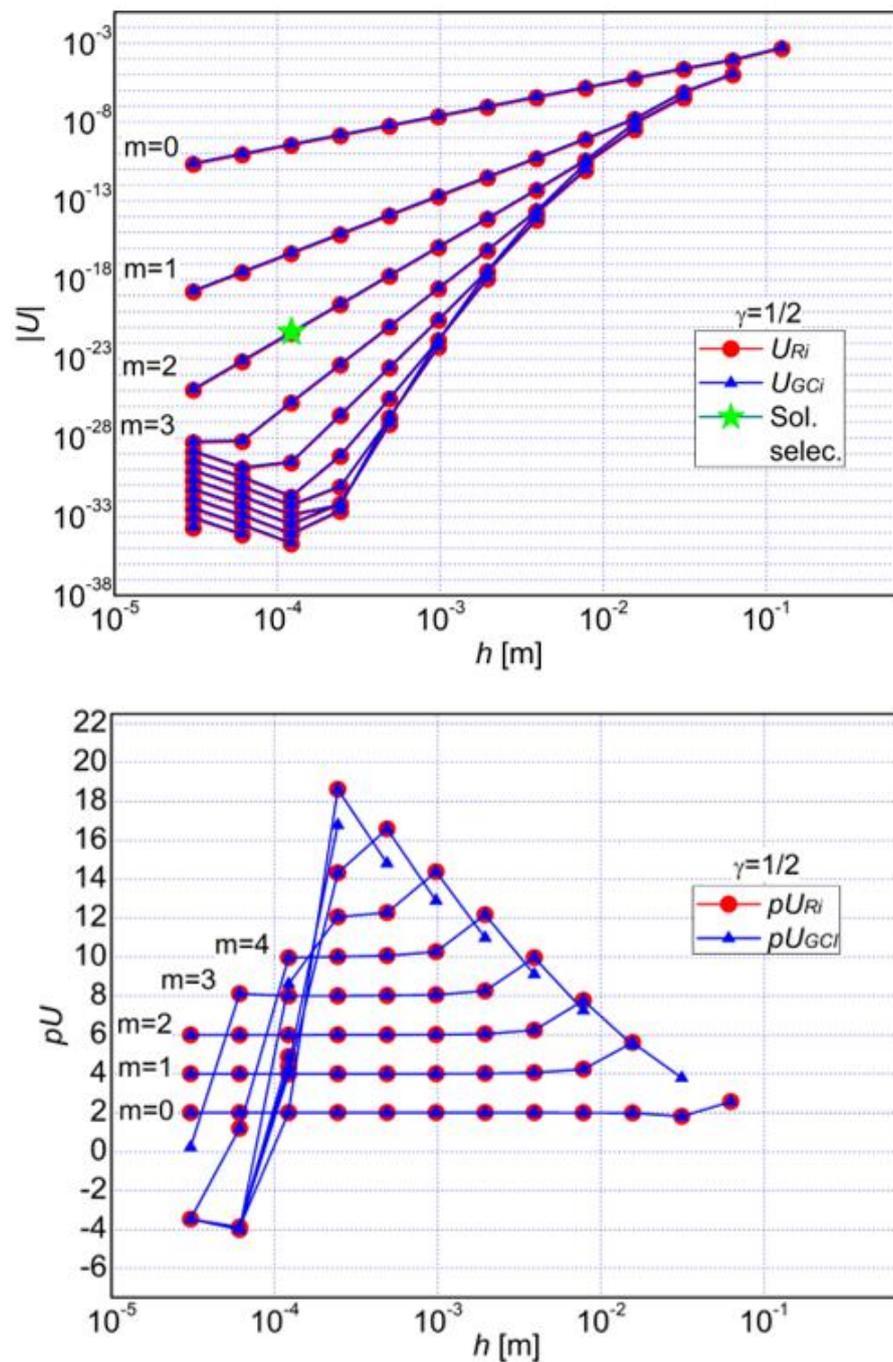


Fonte: O Autor (2020)

FIGURA 6.35 – ESTIMATIVA DO ERRO E ORDENS DE $G_{L/2}$ COM $\gamma = 1$ NO 2º CASO DO PROBLEMA 6

Fonte: O Autor (2020)

FIGURA 6.36 – ESTIMATIVA DO ERRO E ORDENS DE $G_{L/2}$ COM $\gamma = 1/2$ NO 2º CASO DO PROBLEMA 6



Fonte: O Autor (2020)

6.2.4 PROBLEMA 7: RADIAÇÃO EM MEIO EM EQUILÍBRIO RADIATIVO

Esta seção tem por objetivo analisar o comportamento do erro de discretização em um problema em que o meio participante está em equilíbrio radiativo. A temperatura da parede situada na origem é $T_0 = 500 K$ e a temperatura da parede oposta $T_L = 1000 K$. O coeficiente de absorção e de espalhamento do meio participante são, respectivamente, $\kappa = 0,9 m^{-1}$ e $\sigma_s = 0,4 m^{-1}$ ($\beta = 1,3 m^{-1}$) e sua temperatura em função da posição é a principal incógnita do problema, mais especificamente seu valor no centro do domínio $T_{L/2}$. A distância entre as fronteiras é $L = 1,3 m$, portanto $\tau_L = 1,69$ e $\omega \cong 0,31$.

Foi escolhida a aproximação S_4 para resolver o problema em 12 malhas, que compreendem elementos de volume com tamanhos que vão de $h = 0,65 m$ até $h \approx 3,17 \times 10^{-4} m$, portanto dentro da região de convergência monotônica. Como a temperatura do meio é desconhecida *a priori*, então é necessário que o DOM opere recursivamente. Como esperado, o critério de parada afeta o tempo de processamento e a acurácia da solução numérica.

Embora não forneça a solução analítica exata da temperatura de equilíbrio radiativo, a Eq. (2.58) é suficientemente acurada na porção central do domínio para fornecer uma solução analítica viável para a análise do erro de discretização. A FIGURA 6.37 mostra o perfil de temperatura calculado com esta equação e a solução numérica com a aproximação S_4 , sendo que o valor de $T_{L/2}$ é mostrado na TABELA 6.17 com 10 algarismos significativos, uma quantidade compatível com a estimativa do erro, como será visto a seguir (ABNT, 1997).

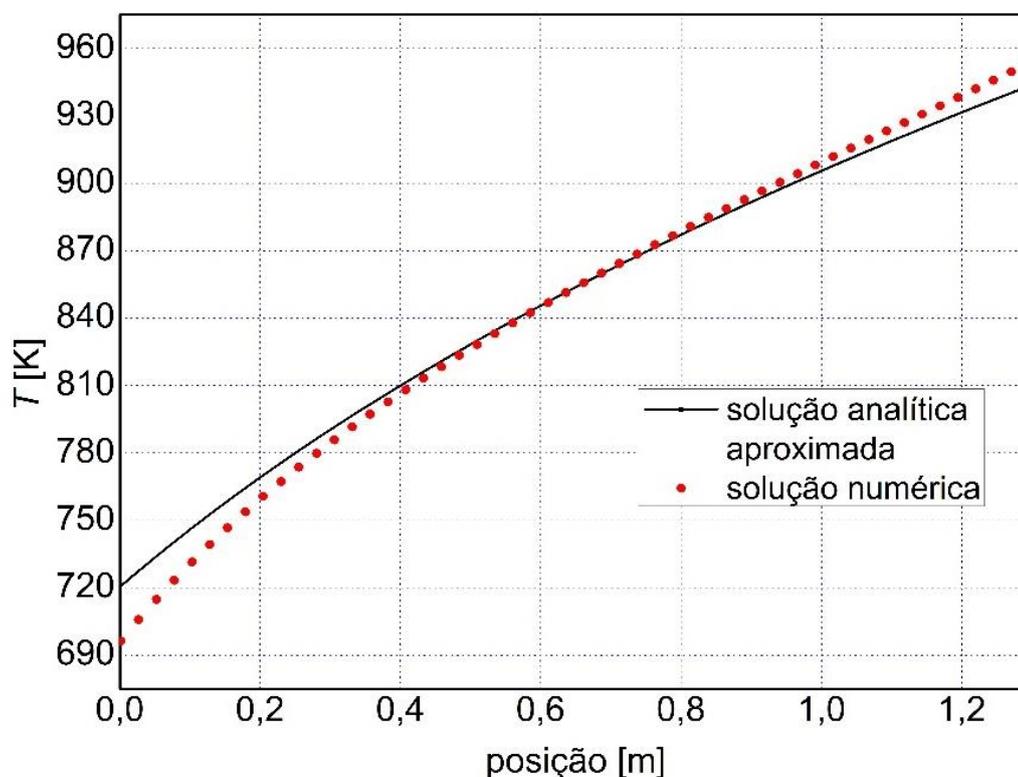
Os resultados numéricos apresentados nesta seção são obtidos considerando uma tolerância $tol = 1 \times 10^{-30}$, o que requer 388 iterações para a convergência da solução considerando os valores de κ e σ_s informados. Ressalta-se que o número de iterações depende destes parâmetros. Por exemplo: considerando espalhamento puro, mesmas τ_L e tol , a simulação requer apenas 183 iterações. Já a simulação do problema equivalente sem espalhamento e com $\kappa = 1,3 m^{-1}$ requer 484 iterações.

TABELA 6.17 – SOLUÇÃO ANALÍTICA DA TEMPERATURA EM $L/2$ PARA O PROBLEMA 7

Variável	Φ
$T_{L/2} [K]$	8,537382426E+02

Fonte: O Autor (2020)

FIGURA 6.37 – PERFIL DE TEMPERATURAS ANALÍTICA E NUMÉRICA DO PROBLEMA 7

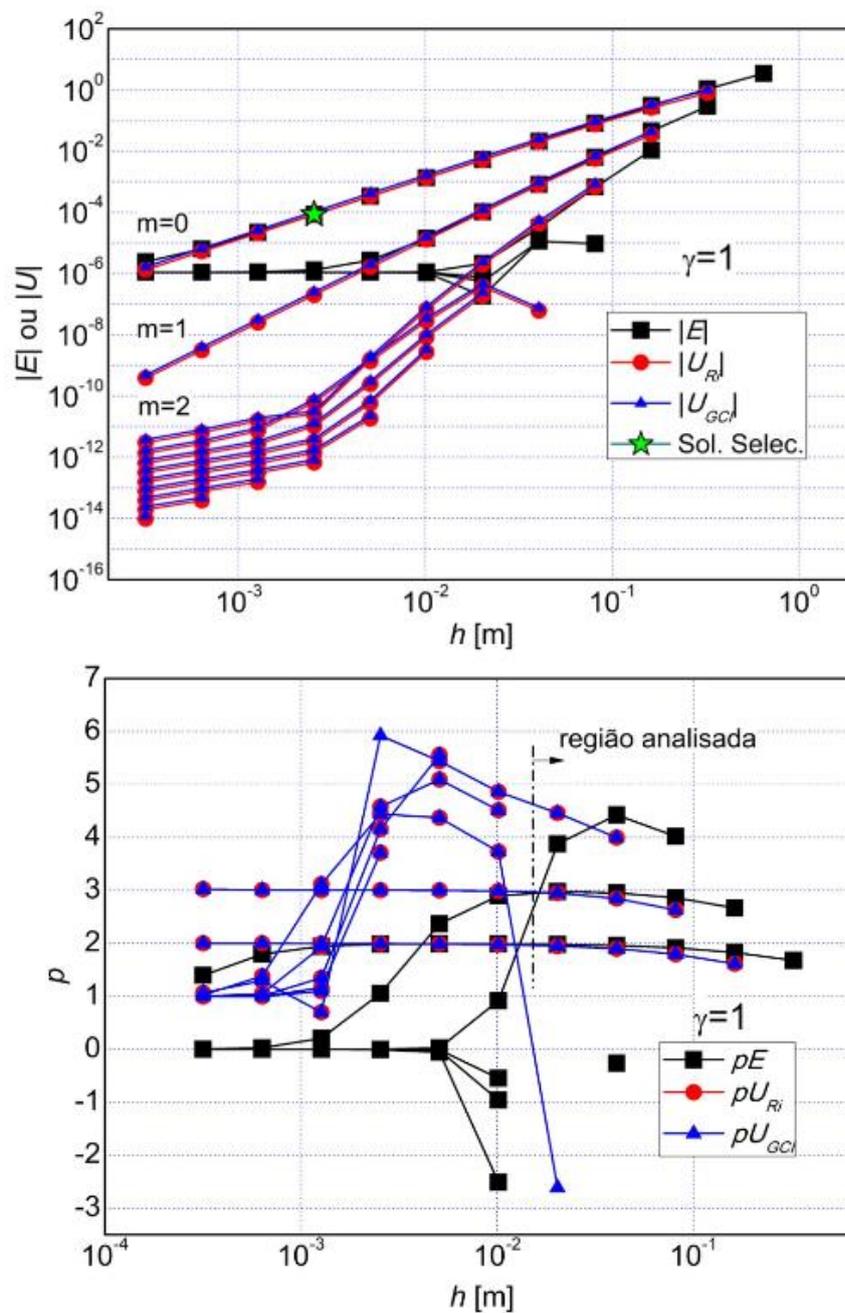


Fonte: O Autor (2020)

O gráfico de cima na FIGURA 6.38 apresenta os erros e sua estimativa em função do tamanho do elemento de volume, enquanto o de baixo mostra as respectivas ordens efetiva e aparente, ambas obtidas com o esquema Degrau. Já a FIGURA 6.39 apresenta resultados similares para o esquema Diamante.

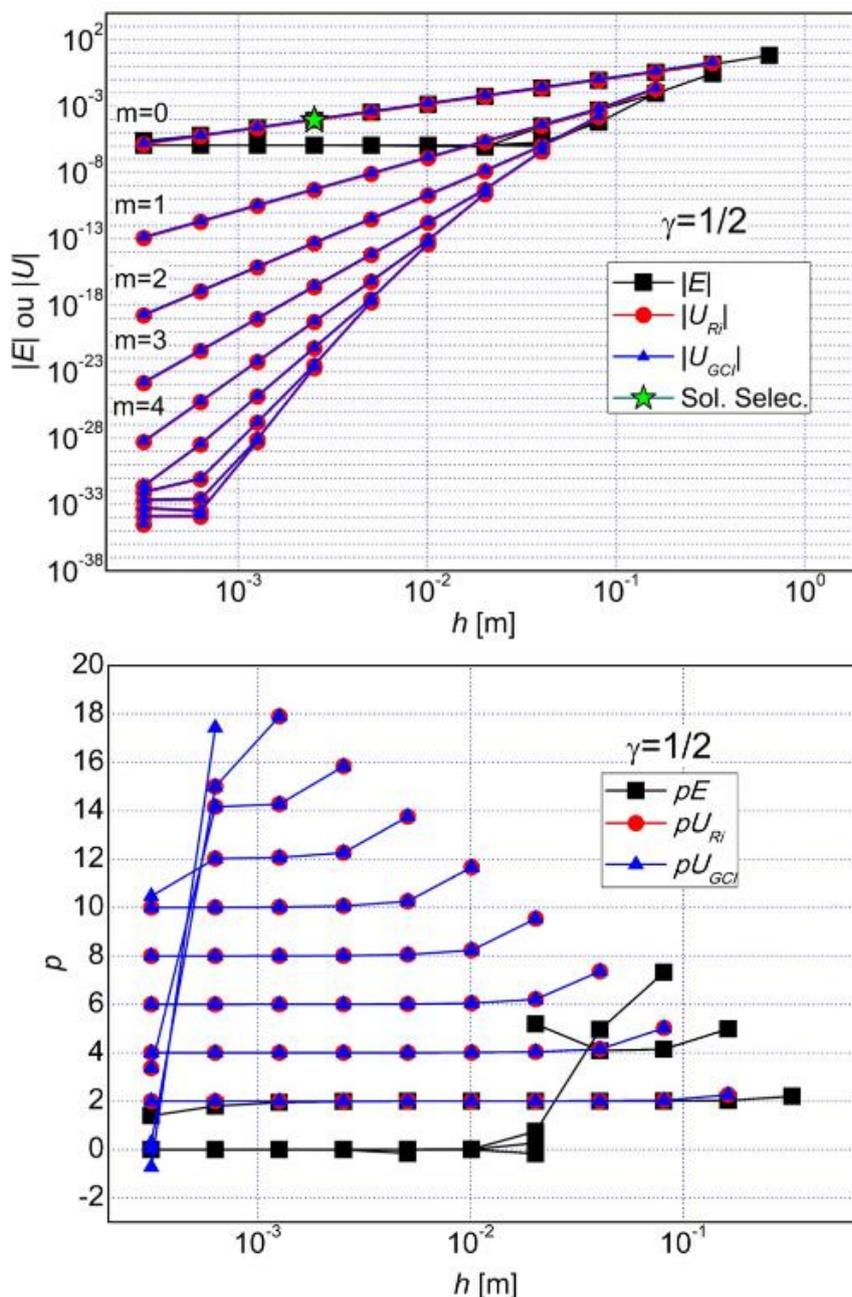
A primeira observação importante a fazer é que os erros não são reduzidos abaixo da ordem 10^{-6} à medida que o refinamento da malha e as extrapolações progridem, portanto apenas os erros nas malhas mais grossas são compatíveis com as respectivas estimativas do erro. Há dois motivos para isso ocorrer: a) a solução analítica, Eq. (2.58), é aproximada; b) a temperatura numérica, calculada com a Eq. (5.35), depende do cálculo da radiação incidente, que por sua vez é obtida com a quadratura numérica S_N , neste caso $N = 4$, logo há uma parcela de erro devida à discretização angular.

FIGURA 6.38 – ERROS, ESTIMATIVA DO ERRO, ORDENS EFETIVA E APARENTE PARA $T_{L/2}$ E $\gamma = 1$ NO PROBLEMA 7



Fonte: O Autor (2020)

FIGURA 6.39 - ERROS, ESTIMATIVA DO ERRO, ORDENS EFETIVA E APARENTE PARA $T_{L/2}$ COM $\gamma = 1/2$ NO PROBLEMA 7



Fonte: O Autor (2020)

Por conta desta limitação de acurácia são escolhidos para serem tabelados os resultados obtidos na quinta malha ($g = 9$) sem extrapolação ($m = 0$). As estimativas de erro relativas às soluções numéricas escolhidas aparecem destacadas na FIGURA 6.38 e FIGURA 6.39. As soluções numéricas estão escritas na TABELA 6.18 juntamente com as respectivas estimativas de erro obtidas com o *GCI*, apresentadas com dois algarismos significativos.

TABELA 6.18 – RESULTADOS NUMÉRICOS DO PROBLEMA 7 PARA $T_{L/2}$ EM $g = 9, m = 0$

$\gamma = 1$		$\gamma = 1/2$	
$\phi[K]$	$U_{GCI}(\phi)$	$\phi[K]$	$U_{GCI}(\phi)$
8,5373816E + 02	1,0E - 04	8,5373816E + 02	1,1E - 04

Fonte: O autor (2020)

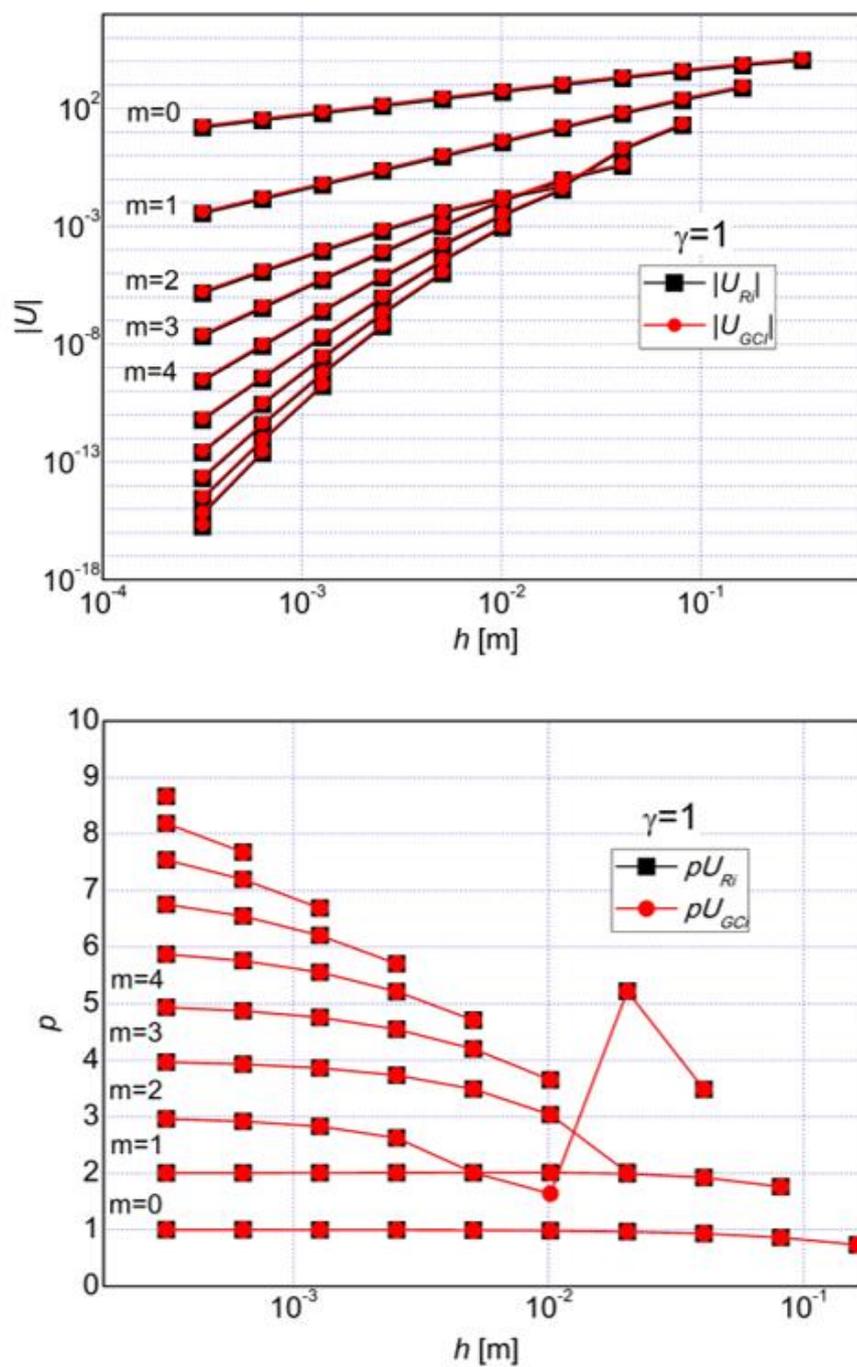
A segunda observação sobre as duas figuras supracitadas é que enquanto os resultados do esquema Diamante apresentam ordens verdadeiras esperadas $p_V = 2,4,6, \dots$, o esquema Degrau apresentou ordens aparentes $p_V = 2,3, (?), \dots$, ou seja, a ordem assintótica observada é 2 e não 1. Adicionalmente se observa que as ordens mais elevadas não são claramente identificadas, dando a impressão que MER não consegue ser efetiva além da segunda extrapolação (as ordens superiores parecem tender à um a partir de $h \approx 10^{-3}$ m).

Embora não apresentados aqui, os gráficos das demais variáveis programadas na versão 2.1 do “DOM_1D” (as mesmas do problema da Seção 6.2.1, listadas na TABELA 6.7) não apresentam essas anomalias, exceto pela radiação incidente no centro do domínio $G_{L/2}$, justamente a variável usada no problema desta seção para atualizar o campo de temperaturas através da Eq. (5.35).

A estimativa de erro e as ordens aparentes de $G_{L/2}$ em função do tamanho do elemento de volume para os esquemas Degrau e Diamante são mostrados na FIGURA 6.40 e FIGURA 6.41, respectivamente. Diferentemente de $T_{L/2}$, os resultados para $G_{L/2}$ apresentam as ordens verdadeiras esperadas considerando a dedução do Capítulo 4 apenas quando o esquema Degrau é empregado, enquanto cada uma das ordens verdadeiras do esquema Diamante degeneram uma unidade, ou seja, as ordens verdadeiras encontradas são $p_V = 1,3,5, \dots$ ao invés de $p_V = 2,4,6, \dots$ como se pode ver na FIGURA 6.41.

Este comportamento inesperado da radiação incidente não pode ser explicado com a teoria desenvolvida no Capítulo 4. Pelo menos não até onde o estudo se aprofundou. Uma hipótese que pode explicar esse comportamento imprevisto é que a temperatura de equilíbrio radiativo apresenta um perfil parabólico, caso em que ocorre erro de truncamento durante a integração do termo fonte pelo DOM. Entretanto, na Seção 6.2.2 onde este efeito foi investigado e ocorreu degeneração de ordem, as ordens verdadeiras observadas para $\gamma = 1/2$ foram $p_V = 1,2,3, \dots$, ou seja, degeneram-se a ordem assintótica e também o intervalo entre as ordens.

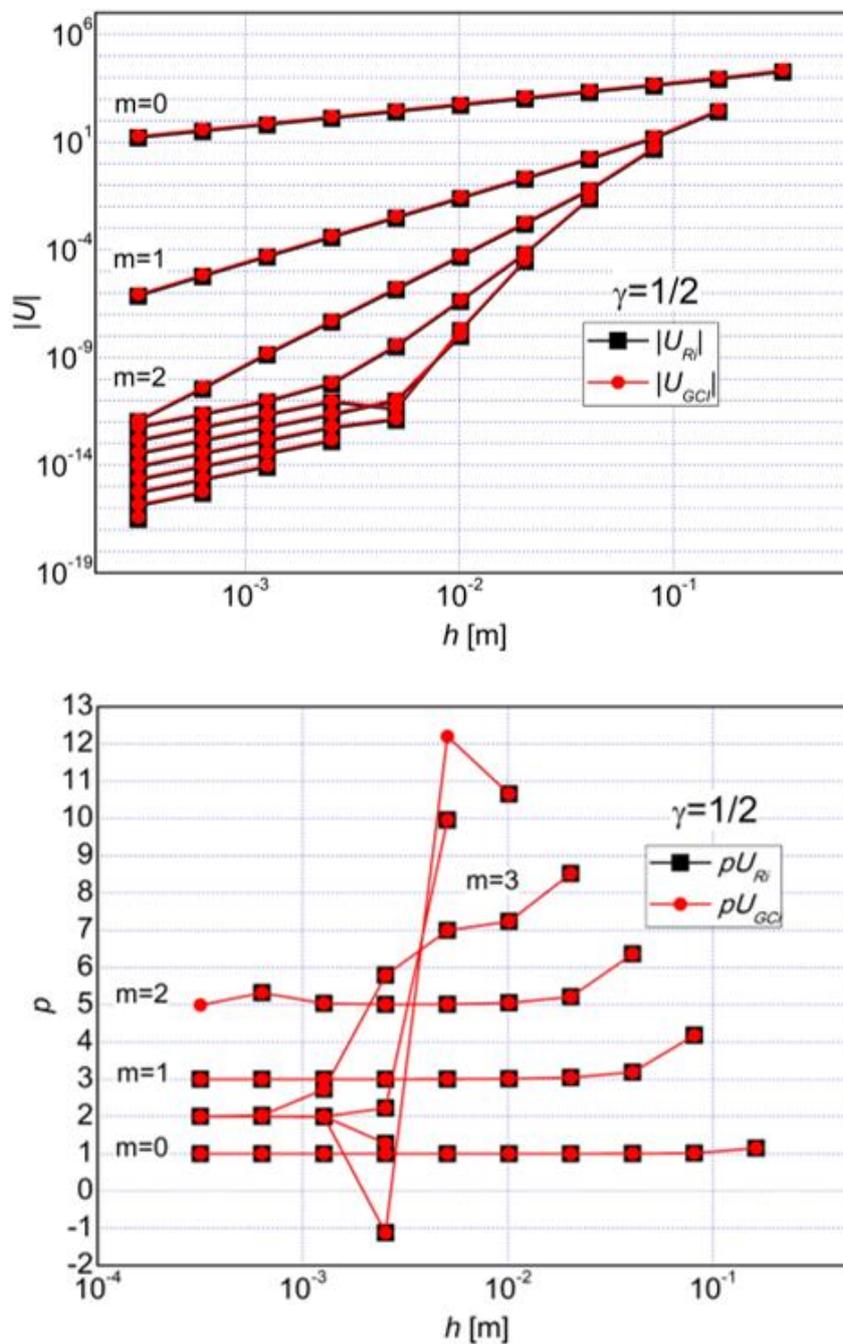
FIGURA 6.40 – ESTIMATIVA DO ERRO E ORDENS APARENTES PARA $G_{L/2}$ COM $\gamma = 1$ NO PROBLEMA 7



Fonte: O Autor (2020)

Por fim, vale apontar que para $m > 2$ e $h \lesssim 10^{-2}$ as ordens verdadeiras assumem inclinação de ordem 2 antes de atingir o erro de arredondamento, uma constatação facilmente perceptível na FIGURA 6.41.

FIGURA 6.41 – ESTIMATIVA DO ERRO E ORDENS APARENTES PARA $G_{L/2}$ COM $\gamma = 1/2$ NO PROBLEMA 7



Fonte: O Autor (2020)

6.2.5 RESUMO DE RESULTADOS DOS PROBLEMAS EM MEIOS PARTICIPANTES

Os quatro problemas da Seção 6.2 mostraram que as estimativas de erro calculadas com o *GCI* e o estimador de Richardson estão de acordo com os respectivos erros para todas as variáveis com solução analítica conhecida. Desta forma, recomenda-se que estes estimadores

sejam empregados na verificação de soluções numéricas nesta importante classe de problemas. Entretanto, algumas variáveis mostraram, em especial a radiação incidente no centro do domínio $G_{L/2}$, que as ordens esperadas ficam alteradas para alguns problemas. Por isso, estes resultados são mostrados na TABELA 6.19 a fim de resumir para o leitor o comportamento das ordens verdadeiras em cada problema.

TABELA 6.19 – RESUMO DAS ORDENS DAS VARIÁVEIS NOS 4 PROBLEMAS DE MEIOS PARTICIPANTES ESTUDADOS

<i>Tipo de problema</i>	$\gamma = 1$	$\gamma = 1/2$	<i>Exceções</i>
$T = C, \kappa \neq 0, \sigma_s = 0$ ¹	1, 2, 3, ...	2, 4, 6, ...	–
$T = f(x^2), \kappa \neq 0, \sigma_s = 0$	1, 2, 3, ...	2, 4, 6, ...	$G_{L/2}$, para $\gamma = 1/2, p_V = 1, 2, 3, \dots$
$T = C, \sigma_s \neq 0$ e $\kappa \neq 0$ ¹ <i>até espalhamento puro</i>	1, 2, 3, ...	2, 4, 6, ...	–
<i>Equilíbrio Radiativo</i>	1, 2, 3, ...	2, 4, 6, ...	$T_{L/2}$, para $\gamma = 1, p_V = 2, 3, ?, \dots$ $G_{L/2}$, para $\gamma = 1/2, p_V = 1, 3, 5, \dots$

¹ C significa constante diferente de zero.

Fonte: O Autor (2020)

7 CONCLUSÃO

Do ponto de vista matemático, esta tese trata basicamente da solução de equações integrais de Fredholm (meios não participantes) e da Equação da Transferência Radiativa (RTE), que é uma equação integro-diferencial em seu caso mais geral. Portanto as conclusões sobre cada classe de problema são apresentadas em seções separadas.

7.1 CONCLUSÕES ACERCA DA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS E SISTEMAS DE EQUAÇÕES INTEGRAIS

A solução numérica das equações integrais estudadas nesta tese foi feita substituindo o termo integral por uma regra de integração numérica. Foram estudadas a Regra do Trapézio e a Regra 1/3 de Simpson. Esta abordagem relativamente simples produz sistemas lineares de equações algébricas cuja matriz de coeficientes é cheia.

Embora pareça que esta estratégia gera dificuldades em termos de memória e processamento, o uso da técnica de pós processamento denominada Múltiplas Extrapolações de Richardson possibilita a obtenção de soluções consideravelmente acuradas a partir de soluções numéricas obtidas em malhas relativamente grosseiras. A solução numérica seguida da aplicação de MER dispense alguns minutos de tempo de processamento em uma arquitetura computacional de um computador pessoal (ver especificação de *hardware* no início do Capítulo 5). Foram usados os estimadores de Richardson e *GCI*, sendo que ambos se mostraram adequados para estimar o erro de discretização dentro da região de convergência monotônica.

A equação do erro de truncamento da Regra 1/3 de Simpson é desenvolvida e em seguida comprovada por meio de testes envolvendo a integração de polinômios e das funções exponencial e seno.

Tanto a Regra do Trapézio quanto a Regra de Simpson se mostram adequadas à solução das equações integrais e sistema de equações integrais aplicadas nos três problemas estudados. Como esperado, a Regra 1/3 de Simpson é de ordem 4 enquanto a Regra do trapézio é de ordem 2. Entretanto, além da ordem assintótica, esta tese mostra também quais ordens superiores à assintótica estão presentes quando as propriedades são calculadas com base nos valores que assumem nos pontos nodais (técnica da expansão em Série de Taylor) e não com base em um único valor dentro do intervalo de integração cuja posição é desconhecida (CHAPRA; CANALE, 2015, p.618).

A Regra do Trapézio possui ordens verdadeiras $p_V = 2, 4, 6 \dots$ (ver Eq. (3.3)) e determinou-se que as ordens verdadeiras da Regra 1/3 de Simpson são $p_V = 4, 6, 8, \dots$ (ver Eq. (3.89)). Desta forma, ao se aplicar MER nos resultados numéricos desta regra o erro numérico e a sua estimativa também são consideravelmente reduzidos mesmo em malhas relativamente grosseiras.

Dos três problemas estudados, o uso de MER combinado com as soluções obtidas com a Regra 1/3 de Simpson só não se mostra mais vantajoso que aplicar MER sobre a solução obtida com a Regra do trapézio no problema da determinação da temperatura na superfície lateral interna de um tubo submetido a um fluxo de calor constante em sua área lateral. Os testes conduzidos mostraram que neste caso a função núcleo da integral possui derivada descontínua, então ao aplicar MER o erro é reduzido, porém sem aumentar progressivamente a ordem das extrapolações (ver FIGURA 6.8).

Esta constatação é importante já que muitos dos fatores de forma catalogados, por exemplo em Howell (2019), são funções definidas por partes, como o módulo da distância entre os elementos de área infinitesimais. Portanto, nestes casos em que se deseja utilizar MER como forma de reduzir o erro e a estimativa do erro, recomenda-se o uso da Regra do Trapézio.

A Regra do Trapézio tem como intervalo de integração básico um intervalo discreto apenas, porém a Regra de Simpson tem dois, ou seja, ela corre o domínio de dois em dois intervalos discretos. Testes com a função núcleo do problema supracitado mostraram que as derivadas do integrando nem sempre são contínuas em ambos os intervalos discretos da Regra de Simpson. Já a regra do Trapézio tem um único intervalo discreto, portanto, as derivadas são sempre contínuas no intervalo de integração básico. Os testes realizados no final da Seção 6.1.2 suportam esta afirmação.

7.2 CONCLUSÕES ACERCA DA SOLUÇÃO DA RTE

Já nos problemas de meios participantes são analisadas as contribuições de duas fontes de erro de truncamento decorrentes da discretização espacial da RTE: uma devida à integração da intensidade direcional com a Regra do Retângulo e a outra devida à aplicação do esquema de Ponderação Variável no termo da derivada da intensidade. Esta última é escrita em função do fator de ponderação γ e mostra concordância com a literatura: o esquema Degrau possui ordem assintótica $p_0 = 1$ e ordens verdadeiras $p_V = 1, 2, 3, \dots$, enquanto o esquema Diamante possui ordem assintótica $p_0 = 2$ e ordens verdadeiras $p_V = 2, 4, 6 \dots$

A Regra do Retângulo aplicada a um único elemento de volume possui ordens efetivas $p_V = 3, 5, 7, \dots$, porém ao ser combinada com o erro de truncamento devido a ponderação variável formando a equação do erro de discretização, resulta que as ordens verdadeiras são $p_V = 1, 2, 3, \dots$ para o esquema Degrau e $p_V = 2, 4, 6, \dots$ para o esquema Diamante.

O erro de discretização se manifesta em dois passos distintos: no primeiro o erro de discretização aparece quando é calculada a intensidade direcional no centro do elemento de volume com base na intensidade que nele entrou. Em um segundo passo é feita a extrapolação da intensidade do centro para a face de saída do volume. Esta intensidade que sai será a intensidade que entra no volume seguinte, sendo, portanto, uma forma pela qual o erro de discretização pode se propagar à jusante, seguindo a direção ordenada.

A primeira constatação com os testes conduzidos na Seção 4.4 é que a magnitude do erro de truncamento combinado (*i.e.* erro de discretização) é maior no centro do elemento de volume e, após a extrapolação para a face de saída, sua magnitude volta a reduzir, embora não se anule.

A segunda constatação é que embora o que foi descrito no parágrafo anterior dá a entender que o erro de discretização aumenta seguindo a direção ordenada, na verdade seu valor parece ser mais dependente do valor das derivadas da intensidade nos pontos onde é calculado, ou seja, o erro de discretização parece ser uma variável primordialmente local, embora com os testes aqui reportados não é possível dizer que um dado volume não sofre influência do erro de discretização da região à montante.

Por último, faz-se aqui comentários sobre os quatro problemas analisados na Seção 6.2 sobre meios participantes. Para todas as variáveis dos problemas analisados que possuem solução analítica foi possível confirmar que as soluções analíticas recaem dentro das faixas de estimativa de erro aplicadas sobre as respectivas soluções numéricas, tanto usando o estimador de Richardson como o *GCI*. No caso em que a temperatura do meio é dada como função quadrática da posição a solução analítica foi obtida numericamente, fornecendo valor aproximado, o que limitou, porém não inviabilizou a confirmação das ordens verdadeiras. Ainda neste problema, a radiação incidente no meio do domínio $G_{L/2}$ apresentou, no caso do esquema Diamante, degeneração das ordens verdadeiras, resultando em $p_V = 1, 2, 3, \dots$. Já no problema de equilíbrio radiativo, embora ambas as variáveis que puderam ser comparadas com soluções analíticas: $T_{L/2}$ e $G_{L/2}$, apresentaram estimativas do erro ligeiramente maiores que o erro (estimativas confiáveis e acuradas), houve degeneração nas ordens. No caso da temperatura no meio do domínio $T_{L/2}$ resolvida com o esquema Degrau se obteve $p_V = 2, 3, (?), \dots$ e não

$p_V = 1, 2, 3, \dots$. Já no caso de $G_{L/2}$ resolvida com o esquema Diamante se obteve $p_V = 1, 3, 5, \dots$ e não $p_V = 2, 4, 6, \dots$

7.3 CONTRIBUIÇÕES

As contribuições desta tese para problemas de meios não participantes são:

- a) Deduzida a equação do erro de truncamento para a integração numérica utilizando a Regra 1/3 de Simpson baseada em expansões em Série de Taylor usando o Método das Diferenças Finitas (MDF). Com isso demonstrou-se que as ordens verdadeiras constituem a progressão aritmética $p_V = 4, 6, 8, \dots$;
- b) Resultados da integração de polinômios mostraram o que se chamou nesta tese de “ordens fantasmas”, que ocorrem quando são usados os valores da ordem aparente calculados a partir de soluções numéricas para se obter soluções numéricas extrapoladas de ordem mais elevada;
- c) Mostrou-se que tanto a Regra do trapézio como a de Simpson apresentam ordens verdadeiras em acordo com a análise *a priori*, ou seja, $p_V = 2, 4, 6, \dots$ no caso da Regra do Trapézio e $p_V = 4, 6, 8, \dots$ no caso da Regra de Simpson, quando aplicadas na obtenção de soluções acuradas de equações integrais e de sistemas de equações integrais de Fredholm do segundo tipo. Uma constatação não reportada em outros trabalhos é que no caso em que uma das derivadas do integrando (fator de forma) é descontínua, a ordem efetiva tende a zero e as ordens aparentes obtidas são $p_U = 2, 2, 2, \dots$ quando a Regra de Simpson é usada. No caso da Regra do Trapézio essa degeneração das ordens aparentes não ocorreu. Concluiu-se que pelo fato da Regra de Simpson ser aplicada de dois em dois intervalos discretos, no caso em que o integrando ou uma das suas derivadas é descontínua, a dedução da equação do erro de truncamento apresentada na Seção 3.2 perde a validade. Neste caso recomenda-se o uso da Regra do Trapézio, que efetua a integração em cada elemento discreto;
- d) Gerada uma tabela com as funções integrais exponenciais $E_n(x)$ em que $1 \leq n \leq 6$ com 15 algarismos significativos e para valores dentro do intervalo $0,0 \leq x \leq 10,0$.

As contribuições desta tese para problemas em meios participantes são:

- a) Deduzidas equações que permitem calcular o erro de discretização que ocorre em problemas unidimensionais com simetria azimutal utilizando o Método das

Ordenadas Discretas (DOM) e discretização espacial com o Método dos Volumes Finitos (MVF). As equações foram deduzidas para a intensidade direcional e no caso de meio absorvedor e emissor (sem espalhamento) e com coeficiente de absorção e temperatura do meio participante constantes. Embora as equações sejam válidas para casos em que as paredes são não negras, apenas problemas com paredes negras foram testados;

- b) Concluiu-se que usando a discretização espacial clássica do DOM, que emprega o processo de marcha no espaço, as fontes de erros de truncamento são: a) o erro devido ao Esquema de Ponderação Variável; b) o erro devido à integração com a Regra do Retângulo (usando a formulação de Volumes Finitos) e; c) o que foi chamado nesta tese de erro de truncamento devido ao processo de marcha, sendo que este último aparece como uma combinação dos dois primeiros que acaba por passar para o volume seguinte seguindo a direção ordenada que está sendo resolvida;
- c) A análise *a priori* mostrou que o esquema Degrau apresenta ordens verdadeiras $p_V = 1, 2, 3, \dots$ e o esquema Diamante, ordens verdadeiras $p_V = 2, 4, 6, \dots$. Estas ordens são observadas em todas as variáveis analisadas nos experimentos numéricos condizentes com a dedução das equações do erro de discretização, ou seja, aqueles problemas onde não há espalhamento e a temperatura do meio é constante.
- d) Quando aplicadas em problemas com espalhamento e onde o meio apresenta perfil de temperaturas parabólico, a maioria das variáveis analisadas mostrou ordens efetivas e aparentes condizentes com a dedução feita *a priori*. As exceções são a radiação incidente no centro do domínio $G_{L/2}$ no problema onde a temperatura tem perfil parabólico e a tanto a radiação incidente como a temperatura, ambas no centro do domínio, $G_{L/2}$ e $T_{L/2}$ no caso do problema de equilíbrio radiativo.

7.4 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Como nesta tese é empregado o Método das Diferenças Finitas na solução de equações integrais, então o número de nós da malha é sempre igual ao número de elementos discretos mais um. Como potências de dois foram usadas para produzir malhas com grau de refinamento progressivo, então apenas malhas com número de nós ímpares foram usadas e por isso apenas a Regra 1/3 de Simpson teve sua equação do erro de truncamento deduzida.

Em verdade a Regra 3/8 de Simpson foi programada e testada para o caso de malhas seguindo potências de três, mostrando resultados tão promissores quanto aqueles obtidos com a regra de 1/3. Fica como sugestão de trabalho futuro deduzir a equação do erro de truncamento para a Regra 3/8 de Simpson, usada no caso em que o número de intervalos do domínio é um número par.

Referente aos problemas em meios participantes, a primeira sugestão é obter equações correspondentes à Eq. (4.18) e Eq. (4.19), porém considerando o erro de truncamento devido a integração do termo fonte na Eq. (4.5) com a Regra do Retângulo e efetuar testes numéricos, observando em especial $G_{L/2}$, pois pode explicar porque suas ordens degradam quando o esquema Diamante é usado.

Uma vez implementada a sugestão citada no parágrafo acima, talvez seja possível explicar porque tanto $G_{L/2}$ quanto $T_{L/2}$ sofrem alterações de ordens no caso do problema de equilíbrio radiativo.

Também sugere-se deduzir soluções analíticas para problemas semelhantes aos aqui reportados, mas que as paredes sejam cinza-difusas, pois permitirá avaliar se o termo $E_{e,0}$ provoca a “reflexão” do erro de discretização da radiação incidente sobre a fronteira como foi suposto no final da Seção 4.1.

Por último, sugere-se expandir as ideias apresentadas nesta tese para estudar erros de discretização devido a discretização angular. Neste caso a intensidade direcional pode ser escrita em Série de Taylor para uma função de duas variáveis independentes, a posição no espaço e a direção. Uma vez sendo estudados sistematicamente, é possível que a análise destes dois tipos de erros permita analisar melhor problemas em meios participantes em domínios bidimensionais e suas dificuldades, por exemplo o falso espalhamento.

REFERÊNCIAS

- ABBASSI, A.; KHOSHMANESH, Kh. Numerical Simulation and Experimental Analysis of an Industrial Glass Melting Furnace, **Applied Thermal Engineering**, v. 28, p. 450-459, 2008.
- ABNT. **Guia para Expressão da Incerteza de Medição**, Rio de Janeiro, Brasil, 1997. Norma Técnica.
- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. **Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables**, 10th printing. Washington D.C.: National Bureau of Standards, 1972.
- AIAA. Editorial Policy Statement on Numerical Accuracy and Experimental Uncertainty, **AIAA Journal**, v.32, n.1, p.3, 1994.
- AIAA. **Guide for the Verification and Validation of Computational Fluid Dynamics Simulations – AIAA G-077-1998**, Reston, VA, USA, 1998. Guia.
- ALMEIDA, J. S. **Measurement of Radiation in Complex Geometries and Comparison with Calculational Techniques**, 331 f. Thesis (Doctor of Philosophy), Loughborough University. England, 2000.
- ANDERSON Jr., J. D. **Fundamentals of Aerodynamics**, 3.ed. Boston: McGraw Hill, 2001.
- ANSYS, Inc. Ansys Fluent – Fluido Simulation Software. Disponível em: <https://www.ansys.com/products/fluids/ansys-fluent>. Acesso em: 04 set. 2020a.
- ANSYS, Inc. Computational Fluid Dynamics (CFD) Software Program Solutions. Disponível em: <https://www.ansys.com/products/fluids/ansys-cfx>. Acesso em: 04 set. 2020b.
- ASME. Journal of Heat Transfer Editorial Policy Statement on Numerical Accuracy, **ASME Journal of Heat Transfer**, v.116, n.4, p.797-798, 1994.
- ASME. **Guide for Verification and Validation in Computational Solid Mechanics – ASME V&V 10-2006**, 2006.
- ASME. **Standard for Verification and Validation in Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer – ASME V&V 20-2009**, New York, USA, 2009. Norma Técnica.
- ATKINSON, K. E. The Numerical Solution of the Fredholm Integral Equations of the Second Kind, **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 4, n. 3, p. 337-348, 1967.
- BARICHELLO, L. B. Explicit Formulations for Radiative Transfer Problems. In: Helcio R B Orlande; Olivier Fudyin; Denis Maillet; Renato M Cotta. (Org.). **Thermal Measurements and Inverse Techniques**. Boca Raton: CRC Press, 2011, v.1 , p. 541-562.
- BARICHELLO, L. B.; TRES, A.; PICOLOTO, C. B.; AZMY, Y. Y. Recent Studies on the Asymptotic Convergence of the Spatial Discretization for Two-Dimensional Discrete Ordinates

Solutions, **Journal of Computational and Theoretical Transport**, v. 45, n. 4, p. 299-313, 2016.

BAYAT, N.; MEHRABAN, S.; SARVARI, S. M. H. Inverse Boundary Design of a Radiant Furnace with Diffuse-Spectral Design Surface, **International Communications in Heat and Mass Transfer**, v. 37, n.1, p.103-110, 2010.

BERGMAN, T. L.; LAVINE, A. S.; INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P. **Fundamentals of Heat and Mass Transfer**, 7.ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2011.

BORGNAKKE, C.; SONNTAG, R. E. **Fundamentals of Thermodynamics**, 7.ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2009.

BRITTES, R.; CENTENO, F. R.; ZIEMNICZAK, A.; FRANÇA, F. H. R. WSGG Model Correlations to Compute Nongray Radiation from Carbon Monoxide in Combustion Applications, **Journal of Heat Transfer**, v. 139, n. 4, 2017.

BRITTES, R. **Desenvolvimento de Um Novo Modelo para Integração Espectral da RTE em Problemas Não Homogêneos e Não Isotérmicos**. 145 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, RS, 2015.

BRITTES, R.; FRANÇA, F. R.; BARICHELLO, L. B. Analytical Solution of the RTE Equation Coupled with the Weighted-Sum-of-Gray-Gases, In: 21st. BRAZILIAN CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, 24-28 outubro 2011. Natal. **Proceedings of COBEM 2011**: ABCM, 2011.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Numerical Analysis**, 9.ed. Boston: Brooks/Cole, 2011.

BYUN, D.; BAEK, S. W. Numerical Investigation of Combustion with Non-Gray Thermal Radiation and Soot Formation Effect in Liquid Rocket Engine, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 50, p. 412-422, 2007.

CAI, G. -B.; ZHU, D.; ZANG, X. -Y. Numerical Simulation of the Infrared Radiative Signatures of Liquid and Solid Rocket Plumes, **Elsevier Aerospace Science and Technology**, v.11, p. 473-480, 2007.

CARLSON, B. G. **Technical Report, LA-1599: Solution of the Transport by S_N Approximations**, Los Alamos: Los Alamos Scientific Laboratories of the University of California, 1953. 32 p. Relatório Técnico. Este relatório foi revisado em 1955 sob o número LA-1891.

CARLSON, B. G. **Technical Report, LA-4554: Transport Theory: Discrete Ordinates Quadrature Over the Unit Sphere**, Los Alamos: Los Alamos Scientific Laboratories of the University of California, 1970. 16 p. Relatório Técnico.

CARLSON, B. G.; LATHROP, K. D. **Technical Report, LA-3251-MS: Transport Theory: The Method of Discrete Ordinates**, Los Alamos: Los Alamos Scientific Laboratories of the University of California, 1965. 101 p. Relatório Técnico.

CARLSON, B. G.; LEE, C. E. **Technical Report, LAMS-2573: Mechanical Quadrature and the Transport Equation**, Los Alamos: Los Alamos Scientific Laboratories of the University of California, 1961. 13 p. Relatório Técnico.

CARNAHAN, B.; LUTHER, H. A.; WILKES, J. O. **Applied Numerical Methods**. New York: John Wiley & Sons, 1969.

CARVALHO, M. G.; COELHO, P, J. Heat Transfer in Gas Turbine Combustors, **Journal of Thermophysics and Heat Transfer**, v.3, n.2, p.123-131, 1989.

CARVALHO, M. G.; COELHO, P, J. Numerical prediction of an oil-Fired Water Tube Boiler, **Engineering Computations**, v.7, n.3, p.227-234, 1990.

CARVALHO, M. G. M. S.; DURÃO, D. F. G.; PEREIRA, J. C. F. Prediction of the Flow, Reaction and Heat Transfer in an Oxy-Fuel Glass Furnace, In: 3rd International Conference on Numerical Methods for Non-Linear Problems, 1986. **Engineering Computations** v. 1, n. 1, p. 23-34, 1987.

CARVALHO, M. G.; NOGUEIRA, M. Improvement of Energy Efficiency in Glass-Melting Furnaces, Cement Kilns and Baking Ovens, **Applied Thermal Engineering**, v. 17, n. 8-10, p.921-933, 1997.

CARVALHO, M. G.; OLIVEIRA, P; SEMIÃO, V. A Three-Dimensional Modelling of an Industrial Glass Furnace, **Journal of the Institute of Energy**, p.143-156, September 1988.

CASSOL, F.; SCHNEIDER, P. S.; FRANÇA, F. H. R.; SOUZA, F. L.; NETO, A. J. S. Multi-Objective Optimization as a New Approach to Illumination Design of Interior Spaces, **Building and Environment**, v.46, p.331-338, 2011.

CHAI, J. C.; LEE, H. S.; PATANKAR, S. V. Ray Effect and False Scattering in the Discrete Ordinates Method, **Numerical Heat Transfer, Part B**, v. 24, p. 373-389, 1993.

CHAI, J. C.; PATANKAR, S. V.; LEE, H. S. Improved Treatment of Scattering Using the Discrete Ordinates Method, **Journal of Heat Transfer**, v.116, p. 260-263, 1994.

CHANDRASEKHAR, S. **Radiative Transfer**, Oxford: Clarendon Press, 1950.

CHAPMAN, D. R.; MARK, H.; PIRTLE, M. W. Computers vs. Wind Tunnels for Aerodynamic Flow Simulations, **Astronautics and Aeronautics**, v. 13, n. 4, p. 22-30, 35, 1975.

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Numerical Methods for Engineers**, 7.ed. New York: McGraw Hill Education, 2015.

CHEONG, K. B.; SONG, T. H. Examination of Solution Methods for the Second-Order Discrete Ordinate Formulation, **Numerical Heat Transfer, Part B**, v.27, p.155-173, 1995.

CHUI, E. H.; RAITHBY, G. D.; HUGHES, P. M. J. Prediction of Radiative Transfer in Cylindrical Enclosures with the Finite-Volume Method. **Journal of Thermophysics and Heat Transfer**, v.6, n.4, p.605-611, 1992.

CODATA Internationally recommended 2018 values of the Fundamental Physical Constants. Disponível em: < <http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html> >. Acesso em 10/06/2020, 10:06.

COELHO, P. J. Numerical Simulation of the Interaction Between Turbulence and Radiation in Reactive Flows, **Progress in Energy and Combustion Science**, v. 33, p. 311-383, 2007.

COELHO, P. J. A Comparison of Spatial Discretization Schemes for Differential Solution Methods of the Radiative Transfer Equation, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, v. 109, p. 189-200, 2008.

COELHO, P. J. Advances in the Discrete Ordinates and Finite Volume Methods for the Solution of Radiative Heat Transfer Problems in Participating Media, **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, v. 145, p. 121-146, 2014.

COELHO, P. J.; CARVALHO, M. G. A Conservative Formulation of the Discrete Transfer Method, **Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer**, v. 119, p. 118-128, 1997.

CUMBER, P. S. Improvements to the Discrete Transfer Method of Calculating Radiative Heat Transfer, **Int. J. Heat Mass Transfer**, v. 38, n.12, p. 2251-2258, 1995.

FERNANDES, A. **Estudo de um Método para Solução da Equação de Transporte Monoenergética e em Geometria Tridimensional pelo Método dos Elementos Finitos e pela Expansão em Harmônicos Esféricos**, São Paulo, SP: Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares - Autarquia Associada à Universidade de São Paulo, 1991, 168f. Dissertação (Mestrado em Tecnologia Nuclear).

FERZIGER, J. H.; PERIĆ, M. **Computational Methods for Fluid Dynamics**, 3.ed. Berlin: Springer, 2002.

FIVELAND, W. A. Discrete-Ordinates Solutions of the Radiative Transport Equation for Rectangular Enclosures, **Journal of Heat Transfer**, v.106, p.699-706, 1984.

FIVELAND, W. A. Three-Dimensional Radiative Heat-Transfer Solutions by the Discrete-Ordinates Method, **Journal of Thermophysics**, v.2, n.4, p.309-316, 1988.

FIVELAND, W. A. The Selection of Discrete Ordinates Quadrature Sets for Anisotropic Scattering. **Fundamentals of Radiation Heat Transfer, ASME-HTD** New York: v. 160, p. 89-96, 1991.

FLECK Jr., J. A.; CUMMINGS Jr., J. D. An Implicit Monte Carlo Scheme for Calculating Time and Frequency Dependent Nonlinear Radiation Transport, **Journal of Computational Physics**, v.8, issue: 3, p.313-342, December 1971.

FRAGA, G. C.; CENTENO, F. R.; FRANÇA, F. H. R. Evaluation and Optimization-Based Modification of a Model for the Mean Radiative Emission in a Turbulent Non-Reacting Flow, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 114, p. 664-674, 2017.

FRAGA, G. C.; COELHO, P. J.; PETRY, A. P.; FRANÇA, F. H. R. Investigation of the Role of Turbulent Fluctuations on the Time-Averaged Radiative Emission in Large-Scale, Turbulent

Pool Fires, **Fire Safety Journal**, v. 112, mar. 2020a, DOI. 10.1016/j.firesaf.2019.102945, Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0379711219304114>> Acesso em 01/06/2020.

FRAGA, G. C.; COELHO, P. J.; PETRY, A. P.; FRANÇA, F. H. R. Development and Testing of a Model for Turbulence-Radiation Interaction Effects on the Radiative Emission, **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, v. 245, jan. 2020b, DOI. 10.1016/j.jqsrt.2020.106852. Disponível em < <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0022407319307678>>. Acesso em 01/06/2020.

FOLTRAN, A. C. **Solução Numérica da Radiação Térmica em Cavidades e Motores Foguete**, Curitiba, PR: Universidade Federal do Paraná, 2015, 129f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica).

FOLTRAN, A. C.; ARAKI, L. K. Simulation of Radiative Heat Transfer in Rocket Engines with the Discrete Transfer Method, In: CONGRESSO AEROESPACIAL BRASILEIRO, 1. 2018. Foz do Iguaçu. **Revista Plêiade – Edição Especial**, Foz do Iguaçu: Centro Universitário UniAmérica, 2018.

FREITAS, C. J. Journal of Fluids Engineering Editorial Policy Statement on the Control of Numerical Accuracy, **Journal of Fluids Engineering**, v.115, p.339-340, 1993.

FU, T.; TANG, J.; CHEN, K.; ZHANG, F. Determination of Scattering and Absorption Coefficients of Porous Silica Aerogel Composites, **Journal of Heat Transfer**, v. 138, n. 3, 2015.

GALANT, D. C.; GOORVITCH, D. Accurate Evaluation of Quantum Integrals. **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, v. 55, n. 1, p. 47-52, 1996.

GALLAGHER, P.; MARCER, R.; BERHAULT, C.; De JOUETTE, C.; RAVEN, H. C.; EÇA, L.; BROBERG, L.; JANSON, C. E.; GAO, Q. X.; TOXOPEUS, S.; ALESSANDRINI, B.; van TERWISGA, T.; HOEKSTRA, M.; STRECKWALL, H.; SALVATORE, F. **Best Practice Guidelines for the Application of Computational Fluid Dynamics in Marine Hydrodynamics**. DOI: 10.13140/RG.2.1.4642.7680: VIRTUE Project, 2009. Relatório Técnico.

GARDON, R. Calculation of Temperature Distributions in Glass Plates Undergoing Heat-Treatment. **J. Am. Ceram. Soc.**, v. 41, n. 6, p. 200-209, 1958a.

GARDON, R. Appendix to Calculation of Temperature Distributions in Glass Plates Undergoing Heat Treatment. **Mellon Institute**. Pittsburgh, PA, 1958b.

GARDON, R. A Review of Radiation Heat Transfer in Glass, **J. Am. Ceram. Soc.**, v. 44, n. 7, p. 305-312, 1961.

GASKELL, P. H.; LAU, A. K. C. Curvature-Compensated Convective Transport: SMART, A New Boundedness-Preserving Transport Algorithm, **International Journal for Numerical Methods in Fluid**, v. 8, p. 617-641, 1988.

GÖEBEL, F.; KNIESNER, B.; FREY, M.; KNAB, O.; MUNDT, C. **Radiative Heat Transfer Analysis in Modern Rocket Combustion Chambers**, Trabalho apresentado na: 5th European Conference for Aeronautics and Space Science, Munique, 1-5 julho, 2013.

GREENBERG, M. D. **Ordinary Differential Equations**, 1.ed. Hoboken: John Wiley & Sons Inc., 2012.

GRESHO, P. M.; TAYLOR, C. Editorial. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v.19, n.12, 1994.

HARTEN, A. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. **Journal of Computational Physics**, v. 49, p. 357-393, 1983.

HEASLET, M. A.; WARMING, R. F. Radiative Transport and Wall Temperature Slip in an Absorbing Planar Medium. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 8, p. 979-994, 1965.

HENSON, J. C. Numerical Simulation of Spark Ignition Engines with Special Emphasis on Radiative Heat Transfer. 1998. 308f. Thesis (Doctorate in Philosophy) – Loughborough University, Loughborough, 1998. Disponível em: <https://repository.lboro.ac.uk/articles/Numerical_simulation_of_spark_ignition_engines_with_special_emphasis_on_radiative_heat_transfer/9525788> ,Acesso em: 05 mar. 2020.

HEYWOOD, J. B. **Internal Combustion Engine Fundamentals**, New York: McGraw-Hill Inc., 1988.

HEUGANG, S. A. N.; KAMDEM, H. T. T.; PELAP, F. B. A Discrete Transfer Method for Radiative Transfer through Anisotropically Scattering Media, **American Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 3, n. 6, p. 396-422, 2016.

HILDEBRAND, F. B. **Methods of Applied Mathematics**, 2.ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall Inc., 1965.

HOWELL, J. R. **The Monte Carlo Method in Radiative Heat Transfer**, Journal of Heat Transfer, v.120, p.547-560, 1998.

HOWELL, J. R. **A Catalog of Radiation Configuration Factors**. Austin, 2019. Disponível em: <<http://www.thermalradiation.net/indexCat.html>>. Acesso em: 02 out 2019.

HOWELL, J. R. ;SIEGEL, R.; MENGÜÇ, M. P. **Thermal Radiation Heat Transfer**, 5.ed. Boca Raton: Taylor & Francis Group, 2011.

HOWELL, J. R.; STRITE, M. K.; RENKEL, H. E. **Technical Report, TR R-220: Analysis of Heat-Transfer Effects in Rocket Nozzles Operating With Very High-Temperature Hydrogen**, Cleveland: NASA, Lewis Research Center, 1965a. 32 p. Relatório Técnico.

HOWELL, J. R.; STRITE, M. K.; RENKEL, H. E. Heat-Transfer Analysis of Rocket Nozzles Using High Temperature Propellants. **AIAA Journal**, v. 3, n. 4, p. 669-673, 1965b.

ISO. **Guide to the Expression of the Uncertainty in Measurement**, 1993. Norma Técnica.

JESSEE, J. P.; FIVELAND, W. A. An Adaptive Mesh Refinement Algorithm for the Discrete Ordinates Method, In: National Heat Transfer, 1996.

JESSEE, J. P.; FIVELAND, W. A. Bounded, High Resolution Differencing Schemes Applied to the Discrete Ordinates Method, **Journal of Thermophysics and Heat Transfer**, v.11, n.4, p.540-548, 1997.

JOSEPH, D.; EL HAFI, M.; FOURNIER, R.; CUENOT, B. Comparison of Three Spatial Differencing Schemes in Discrete Ordinates Method Using Three-Dimensional Unstructured Meshes, **International Journal of Thermal Sciences**, v. 44, p.851-864, 2005.

KAPLAN, E. L. **Monte Carlo Methods for Equilibrium Solutions in Neutron Multiplication - UCRL-5275-T**, Lawrence Radiation Laboratory, University of California, 1958. Relatório Técnico.

KHALIL, E. E.; TRUELOVE, J. S. Calculation of Radiative Heat Transfer in a Large Gas Fired Furnace. **Letters in Heat and Mass Transfer**, v. 4, n. 5, p. 353–365, 1977.

KIM, M. Y. Assessment of the Axisymmetric Radiative Heat Transfer in a Cylindrical Enclosure with the Finite Volume Method. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 51, p. 5144-5153, 2008.

KIM, M. Y.; BAEK, S. W. Radiative Heat Transfer in a Body-Fitted Axisymmetric Cylindrical Enclosure. **Journal of Thermophysics and Heat Transfer**, v. 12, n. 4, p. 596-599, 1998.

KIM, M. Y.; BAEK, S. W. Modelling of Radiative Heat Transfer in an Axisymmetric Cylindrical Enclosure with Participating Media. **Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer**, v. 90, p. 337-388, 2005.

KNIRK, D. L. Accurate and Efficient Quadrature for Volterra Integral Equations. **Journal of Computational Physics**, v. 21, p. 371-399, 1976.

KNUPP, P. M.; SALARI, K. **Verification of Computer Codes in Computational Science and Engineering**, Boca Raton: Chapman & Hall / CRC, 2003.

KOCH, R.; KREBS, W.; WITTIG, S.; VISKANTA, R. Discrete Ordinates Quadrature Schemes for Multidimensional Radiative Transfer, **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Heat Transfer**, v. 53, n. 4, p. 353-372, 1995.

KOCH, R.; BECKER, R. Evaluation of Quadrature Schemes for the Discrete Ordinates Method, **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Heat Transfer**, v. 84, p. 423-435, 2004.

KOSHEV, N.; BEILINA, L. An Adaptive Finite Element Method for Fredholm Integral Equations of the First Kind and its Verification on Experimental Data. **Central European Journal of Mathematics**, v. 11, n. 8, p. 1489-1509, 2013.

KOURGANOFF, V. **Methods in Transfer Problems**, New York: Dover, 1963.

LARSEN, E. D.; WOLLABER, A. B. A Quantitative Theory of Angular Truncation Errors in 3-D Discrete Ordinates Calculations. **Mathematics and Computations and Supercomputing in Nuclear Applications. Joint International Topical Meeting**, v.1, p.287-304, 2007.

LATHROP, K. D. Use of Discrete-Ordinates Methods for Solution of Photon Transport Problems, **Nuclear Science and Engineering**, v.24, p.381-388, 1966.

LATHROP, K. D. Ray Effects in Discrete Ordinate Equations, **Nuclear Science and Engineering**, v. 32, p. 357-369, 1968.

LATHROP, K. D. Spatial Differencing of the Transport Equation: Positivity vs. Accuracy, **Journal of Computational Physics**, v.4, p.475-498, 1969.

LATHROP, K.; CARLSON, B. Numerical Solution of the Boltzmann Transport Equation, **Journal of Computational Physics**, v. 2, p. 173-197, 1967.

LECOCQ, G.; POITOU, D.; HERNÁNDEZ, I.; DUCHAINE, F.; RIBER, E.; CUENOT, B. A Methodology for Soot Prediction Including Thermal Radiation in Complex Industrial Burners, **Flow, Turbulence and Combustion**, v. 92, p.947-970, 2014.

LEE, S. N.; BAEK, S. W. Analysis of Radiative Heat Flux for Nozzle Flow. **Applied Mechanics and Materials**, v. 110-116, p. 3025-3030, 2012.

LEMOS, L. D.; BRITTES, R.; FRANÇA, F. H. R. **Inverse Design of Radiative Enclosure with Heaters in Filament**. Trabalho apresentado no: 15th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering, Belém, Brasil, November 10-13, 2014.

LEONARD, B. P. Simple High-Accuracy Resolution Program for Convective Modelling of Discontinuities. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 8, p. 1291-1318, 1988

LEONARD, B. P. Comparison of Truncation Error of Finite-Difference and Finite-Volume Formulations of Convection Terms. **App. Math. Modelling**, v. 18, p. 46-50, janeiro 1994

LEONARD, B. P. Order of Accuracy of QUICK and related Convection-Diffusion Schemes. **App. Math. Modelling**, v. 19, p. 640-653, novembro 1995

LOCKWOOD, F. C.; SHAH, N. G. A New Radiation Solution Method for Incorporation in General Combustion Prediction Procedures. In: 18th Symposium (Inst.) on Combustion. **The Combustion Institute**, Pittsburg, p. 1405-1414, 1981.

LOPES, R.; MOURA, L. M.; BAILLIS, D.; SACADURA, J. F. Directional Spectral Emittance of a Packet Bed: Correlations Between Theoretical Prediction and Experimental Data. **Journal of Heat Transfer**, v. 123, n. 2, p. 240-248, 2001.

LUDWIG, C. B.; MALKMUS, W.; REARDON, J. E.; THOMSON, J. A. L. **Handbook of Infrared Radiation from Combustion Gases – NASA SP-3080**, Washington, DC: National Aeronautics and Space Administration, NASA, 1973.

MALALASEKERA, W.; VERSTEEG, H. K.; HENSON, J. C.; JONES, J. C. Calculation of Radiative Heat Transfer in Combustion Systems. In: Fifth International Conference on Technologies and Combustion for a Clean Environment. **The Combustion Institute**, Lisbon, Portugal, v. 2, (Portuguese section) p.1001-1015, 1999.

MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**, 2.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

MARCHI, C. H. **Verificação de Soluções Numéricas Unidimensionais em Dinâmica dos Fluidos**, 289 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2001.

MARCHI, C. H.; SILVA, A. F. C. Unidimensional Numerical Solution Error Estimation for Convergent Apparent Order. **Numerical Heat Transfer – Part B**, v.42, p.167-188, 2002.

MARCHI, C. H.; SUERO, R.; ARAKI, L. K. The Lid-Driven Square Cavity Flow: Numerical Solution with a 1024 x 1024 Grid. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v.31, n.3, p.186-198, 2009.

MARCHI, C. H.; NOVAK, L. A.; SANTIAGO, C. D.; VARGAS, A. P. S. Highly Accurate Numerical Solutions with Repeated Richardson Extrapolation for 2D Laplace Equation, **Applied Mathematical Modelling**, v. 37, p.7386-7397, 2013.

MARTIN, W. R.; DUDERSTADT, J. J. Finite Element Solutions of the Neutron Transport Equation with Applications to Strong Heterogeneities. **Nuclear Science and Engineering**, v.62, p.371-390, 1977.

MARTINS, M. A. **Multiextrapolação de Richardson com Interpolação para Reduzir o Erro de Discretização em CFD**, 198 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2013.

MAURENTE, A.; BRUNO, A. B.; FRANÇA, F. H. R.; HOWELL, J. R. Non-Dimensional Wavenumber in Full-Spectrum k-Distribution Computations With and Without a Reference State, **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, v. 196, p. 222-229, 2017.

MISHRA, S. C.; ROY, H. K.; MISRA, N. Discrete Ordinate Method with a New and a Simple Quadrature Scheme, **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer**, v. 101, p. 249-262, 2006.

MODEST, M. F. **Radiative Heat Transfer**, 2.ed. London: Academic Press, 2003.

MONAHAN, S. P.; FILIPPONE, W. L. An Integral S_N Method for Large-Memory Supercomputers, **Nuclear Science and Engineering**, v. 107, p. 201-216, 1991

MOURA, L. M. Identification des Propriétés Radiatives des Matériaux Semi-Transparents Diffusants em Situation de non-Symetrie Azimutale du Champ Radiatif. 1998. 212 f. Thèse (Doctorale en Science Thermique et Energétique), L'Institute National des Sciences Appliquées de Lyon, Lyon, 1998. Disponível em: < <http://www.theses.fr/1998ISAL0059> >. Acesso em: 05 mar. 2020.

MOURA, L. M.; BAILLIS, D.; SACADURA, J. F. Analysis of the Discrete Ordinates Method: Angular Discretization. In: 14th Brazilian Congress of Mechanical Engineering. **Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas – ABCM**, December 8-12th, Bauru, São Paulo, Brazil, 1997.

MOURA, L. M.; BAILLIS, D.; SACADURA, J. F. Análise do Método de Ordenadas Discretas: Discretização Espacial. In: ENCIT98. **Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas – ABCM**, December 8-12th, Bauru, São Paulo, Brazil, 1998.

OBA, R.; POSSAMAI, T. S.; NICOLAU, V. P. Thermal Analysis of a Tunnel Kiln Used to Produce Roof Tiles, **Applied Thermal Engineering**, v. 63, n. 1, p.59-65, 2014.

OBERKAMPF, W. L.; TRUCANO, T. G. **Verification and Validation in Computational Fluid Dynamics**, Albuquerque: Sandia National Laboratories, 2002.

OBERKAMPF, W. L.; ROY, C. J. **Verification and Validation in Scientific Computing**, Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

OGUNLARAN, O. M.; AKINLOTAN, O. F. A Computational Method for System of Linear Fredholm Integral Equations, **Mathematical Theory and Modeling**, v.3, n.4, p.1-6, 2013.

PAUTZ, S. D. **Report LA-UR-01-1487: Verification of Transport Codes by the Method of Manufactured Solutions: The ATTLA Experience**, Los Alamos National Laboratory, 2001. Relatório Técnico.

POLYANIN, A. D.; MANZHIROV, A. V. **Handbook of Integral Equations**, 2.ed. Boca Raton: Chapman & Hall / CRC, 2008.

RAITHBY, G. D. Evaluation of Discretization Errors in Finite-Volume Radiant Heat Transfer Predictions, **Numerical Heat Transfer, Part B**, v. 36, p.241-264, 1999.

RICHARDSON, L. F. The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems involving Differential Equations, with an Application to the Stresses in a Mansory Dam, **Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A**, v.210, p.307-357, 1910.

RICHARDSON, L. F.; GAUNT, J. A. The Deferred Approach to the Limit. **Philosophical Proceedings of the Royal Society of London Serial A**, v.226, p.299-361, 1927.

RIDER, W.; WITKOWSKI, W.; KAMM, J. R.; WILDEY, T. Robust Verification Analysis. **Journal of Computational Physics**, v. 307, p. 146-163, 2016.

ROACHE, P. J. **Verification and Validation in Computational Science and Engineering**, 1.ed. Albuquerque: Hermosa, 1998.

ROACHE, P. J. **Fundamentals of Verification and Validation**, 2.ed. Socorro: Hermosa, 2009.

ROACHE, P. J.; GHIA, K. N.; WHITE, F. M. Editorial Policy Statement on the Control of Numerical Accuracy. **ASME Journal of Fluids Engineering**, v. 108, p.2, 1986.

ROACHE, J. P.; GHIA, K. N.; WHITE, F. M. Editorial Policy Statement on Control of Numerical Accuracy. **Journal of Fluids Engineering**, v. 130, p. 1, 2008.

ROACHE, P. J.; KNUPP, P. M. Complete Richardson Extrapolation. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v.9, n.5, p.365-374, 1993.

ROBBINS, W. H. **Technical Note, TN D-586: An Analysis of Thermal Radiation Heat Transfer in a Nuclear-Rocket Nozzle**, NASA, 1961. Relatório Técnico.

ROGER, M.; SILVA, C. B. da; COELHO, P. J. Analysis of Turbulence-Radiation Interactions for Large Eddy Simulation of Turbulent Flows, **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 52, p. 2243-2254, 2009.

RUKOLAINEN, S. A.; YUFEREV, V. S. Discrete Ordinates Quadrature Schemes Based on the Angular Interpolation of Radiative Intensity, **Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Heat Transfer**, v. 69, p. 257-275, 2001.

SALARI, K.; KNUPP, P. **Sandia Report SAN2000-1444: Code Verification by the Method of Manufactured Solutions**, Sandia National Laboratories, 2000. Relatório Técnico.

SANTOS, R. G.; LECANU, M.; DUCRUIX, S.; GICQUEL, O.; IACONA, E.; VEYNANTE, D., Coupled Large Eddy Simulations of Turbulent Combustion and Radiative Heat Transfer, **Combustions and Flame**, v.152, p.387-400, 2008.

SIDI, A. **Practical Extrapolation Methods – Theory and Applications**. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

SIEMENS PLM SOFTWARE. Simcenter STAR-CCM+. Disponível em: <https://www.plm.automation.siemens.com/global/en/products/simcenter/STAR-CCM.html>. Acesso em: 04 set. 2020.

SONDOW, J.; ZUDILIN, W. Euler's constant, q-logarithms, and formulas of Ramanujan and Gosper. **The Ramajujan Journal**, v. 12, n.2, p.225-244, 2006.

SPARROW, E. M.; CESS, R. D. **Radiation Heat Transfer**, Augmented Edition. Washington: Hemisphere Publishing Corporation, 1978.

SVENITITSKIY, A. **Numerical Simulation of Infrared Radiation from Aircraft Engine Exhaust Plumes**. 148 f. Tese (Doutorado em Engenharia). Universität der Bundeswehr, München, 2017.

THURGOOD, C. P.; POLLARD, A.; BECKER, H. A. The T_N Quadrature Set for the Discrete Ordinates Method, **Transactions of the ASME, Journal of Heat Transfer**, v. 117, v. 4, p. 1068-1070, 1995.

USISKIN, C. M.; SIEGEL, R. Thermal Radiation from a Cylindrical Enclosure with Specified Wall Heat Flux. **J. Heat Transfer**, v.82, n.4, p.369-374, 1960.

van LEER, B. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. II. Monotonicity and Conservation Combined in a Second-Order Scheme, **Journal of Computational Physics**, v. 14, p. 361-370, 1974.

van LEER, B. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method, **Journal of Computational Physics**, v. 32, p. 101-136, 1979.

VARGAS, A. P. S. **Multiextrapolação de Richardson e Esquemas de 1ª e 2ª Ordens, Mistos e Crank-Nicolson sobre as Equações 2D de Advecção-Difusão de Fourier**, 188 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2013.

VARGAS, J. V. C.; ORDONEZ, J. C.; DILAY, E.; PARISE, J. A. R. Modelling, Simulation and Optimization of a Solar Collector Driven Water Heating and Absorption Cooling Plant, **Solar Energy**, v. 38, p.1232-1244, 2009.

VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **Computational Fluid Dynamics**, 2.ed. Harlow: Prentice Hall, 2007.

WICK, G. C. Über Ebene Diffusionsprobleme, **Zeitschrift für Physik**, v. 121, issue 11-12, p.702-718, 1943.

YAN, Z.; LIU, Z.; RUI, Y.; CHEN, J.; YU, X.; CHEUNG, C. S. Simulation of In-Cylinder Radiative Heat Transfer of Diesel Engine with Monte-Carlo Method, **Journal of Zhejiang University – SCIENCE A, Applied Physics & Engineering**, v.1, issue 3, p.306-310, 2000.

ZHANG, X. -Y.; CAI, G. -B. Investigation of the Infrared Characteristics of the Rocket Nozzle, **IEEE A&E Systems Magazine**, agosto 2009.

APÊNDICE A – CÁLCULO DA FUNÇÃO INTEGRAL EXPONENCIAL COM 32 ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS

Para fazer uma análise de erros em múltiplas malhas e observar as ordens verdadeiras é importante que a acurácia da solução analítica seja superior à das soluções numéricas nas diversas malhas, ou seja, o número de algarismos significativos da solução analítica deve ser maior que o das soluções numéricas. Do contrário, a análise da ordem efetiva não é possível porque seu valor tenderá ao zero e não à ordem da aproximação numérica correspondente à aproximação numérica.

Nos problemas de radiação em meio absorvedor e emissor entre duas placas negras, planas e paralelas (domínio unidimensional) é necessário calcular uma ou mais funções integrais exponenciais, particularmente a primeira, segunda e terceira. Preferencialmente, devem ser calculadas com mais de 15 significativos ao utilizá-la em programas que fornecem resultados numéricos com precisão dupla na análise de erro de discretização e 32 significativos para programas onde os resultados são de precisão quádrupla. Para suprir a demanda desta tese, foi escrito em linguagem FORTRAN 95 o programa “Integral_Exponencial”, que utiliza todas as variáveis reais com precisão quádrupla.

A n -ésima Função Integral Exponencial $E_n(z)$ é definida por (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1972, p.228)

$$E_n(z) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-zt}}{t^n} dt, \quad (n = 0, 1, 2, \dots; \Re z > 0), \quad (\text{A.1})$$

onde $\Re z$ indica a parte real do argumento complexo z , a qual será representada daqui em diante por x . Por meio da transformação $\mu = \frac{1}{t}$ a Eq. (A.1) assume a forma ⁹

$$E_n(x) = \int_0^1 \mu^{n-2} e^{\left(\frac{-x}{\mu}\right)} d\mu, \quad (n = 0, 1, 2, \dots; x > 0), \quad (\text{A.2})$$

recorrente em soluções analíticas de problemas de radiação em meios participantes onde há simetria azimutal (problemas unidimensionais).

⁹ Transformação apresentada ao autor na disciplina Radiação em Meios Semitransparentes, lecionada pelo professor Luís Mauro Moura no curso de 2018 no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

Para o caso especial $x = 0$, a função integral exponencial é dada por

$$E_n(0) = \frac{1}{n-1}, \quad (n > 1). \quad (\text{A.3})$$

De acordo com Howell, Siegel e Mengüç (2011, p.889-891) e Abramowitz e Stegun, (1972, p.229) a Eq. (A2) pode ser expandida em série

$$E_n(x) = \frac{(-x)^{n-1}}{(n-1)!} [\psi(n) - \ln x] - \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n-1}}^{\infty} \frac{(-x)^m}{(m-n+1)m!}, \quad (\text{A.4})$$

sendo $\psi(n)$ dado por

$$\psi(n) = \begin{cases} -\gamma, & n = 1 \\ -\gamma + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m}, & n \geq 2 \end{cases}. \quad (\text{A.5})$$

Na Eq. (A.5), $\gamma = 0,577215664901532860606512090082402$ é a constante de Euler, obtida em Sondow e Zudilin (2006) e aqui representada com 33 algarismos significativos a fim de ser utilizada para gerar soluções suficientemente acuradas para o problema. Também se nota nesta equação que este procedimento não vale para $E_0(x)$, portanto embora a função $E_0(x)$ apareça em alguns problemas de radiação térmica, apenas funções com $n \geq 1$ podem ser calculadas com o procedimento descrito nesta seção.

Observando a equação (A.4), vê-se que em termos práticos é necessário truncar o somatório após um determinado número de termos m , de preferência suficientemente grande a ponto de não produzir variação no resultado de E_n considerando um dado número de algarismos significativos.

Nos testes com o programa “Integral_Exponencial” se verificou que para o intervalo $0,1 \leq x \leq 2,0$ são necessários, como regra geral, 65 termos no somatório da Eq. (A4) a fim de garantir 32 algarismos significativos nos resultados de todas as funções ($1 \leq n \leq 6$), exceto para $E_1(2,0)$ que apresenta 31 significativos. Neste caso, notou-se que aumentar o número de termos não melhora significativamente o resultado, de forma que se recomenda o uso de 65 termos mesmo para $E_1(2,0)$.

Também se verificou que para argumentos maiores que 2,0, por exemplo $x = 10,0$, são necessários 80 termos no somatório e mesmo assim apenas 23 algarismos significativos são

obtidos. Desta forma, quando o meio participante é muito espesso, os erros nas funções integrais exponenciais embutidos na solução analítica do problema podem afetar sua precisão, sendo necessário avaliá-la quando da verificação do código ou da solução numérica ou então resolver um problema similar, porém com espessura óptica menor.

A recomendação de usar 65 termos no somatório da Eq. (A.4) não é estritamente necessária, mas sim uma regra geral prática. A TABELA A 1 abaixo mostra os resultados de E_3 para diversos valores de x e a quantidade aproximada de iterações necessárias para obter o resultado com 32 algarismos significativos.

É válido reportar aqui que pela primeira vez que se implementou o código “Integral_Exponencial” a variável inteira m era declarada como variável inteira de precisão dupla (integer*8), porém o número máximo de termos atingidos era $m = 66$, uma vez que os cálculos envolvendo o fatorial de 66 produzia um resultado maior que a capacidade de armazenamento da variável declarada para armazenar o resultado intermediário.

Outro problema observado na antiga versão foi a propagação de erros de arredondamento quando aumentado progressivamente o número de termos do somatório até atingir $m = 65$. Em um primeiro momento, ao aumentar o número de termos do somatório na Eq. (A.4), um ganho progressivo no número de algarismos significativos era observado, porém isso ocorria até certo ponto, a partir do qual a solução começava a reduzir o número de significativos, chegando mesmo a inviabilizar o resultado.

TABELA A 1 – RESULTADOS PARA A TERCEIRA INTEGRAL EXPONENCIAL E QUANTIDADE DE ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS OBTIDOS

x	E_3	Número aprox. de termos p/ atingir 32 algarismos significativos ⁽¹⁾
0,1	4,16291457908278761254316645042356E-01	20
0,2	3,51945312114870605234669654999104E-01	30
0,5	2,21604364275178457369299376162181E-01	30
1,0	1,09691967197760136838581887730061E-01	30
1,5	5,67394901703542761563278897096221E-02	40
2,0	3,01333797978158931874799229698568E-02	40
2,5	1,62953693766688270466910325077851E-02	50
3,0	8,93064655602272537691094057884078E-03	50

⁽¹⁾ Foram testados números de iterações de 10 em 10, portanto os valores apresentados são aproximados.

Este comportamento motivou a programação do código “Terceira Integral Exponencial”, equivalente ao “Integral_Exponencial” porém escrito na linguagem Maple 17, cuja mantissa dos números reais e inteiros pode ser especificada pelo usuário.

Utilizando 50 algarismos significativos (inclusive para γ), as soluções obtidas para todos os argumentos da função que foram testados, não apresentaram o erro de arredondamento descrito parágrafos acima. Assim, retornou-se ao programa “Integral_Exponencial” e trocou-se todas as variáveis inteiras de precisão dupla (integer*8) por variáveis reais de precisão quádrupla (real*16). Quando isto foi feito, o erro de arredondamento não mais apareceu.

Especula-se se este tipo de limitação na obtenção de soluções numéricas da função integral exponencial (não apenas da terceira, mas também das demais) fez com que a tabela D.1 em Kourganoff (1963 apud HOWELL; SIEGEL; MENGÜÇ, 2011, p. 892) fosse limitada à cinco algarismos significativos. Dado o ano da sua publicação e da capacidade limitada dos computadores da época, esta hipótese parece bastante provável.

A TABELA A2 a seguir apresenta as seis primeiras ordens da função integral exponencial para alguns valores, sendo que para valores de $x = 0$ foi feita uma análise assintótica, ou seja, considerando $\lim_{x \rightarrow 0} E_n(x)$, pois em $x = 0$ o procedimento descrito nesta seção apresenta singularidade. Como há pouco espaço, a tabela é apresentada em formato “paisagem” e apenas 15 dos 32 algarismos significativos obtidos são apresentados, ou seja, ainda assim mais acurada que as comumente encontradas na literatura.

TABELA A2 – SOLUÇÃO DAS FUNÇÕES INTEGRAIS EXPONENCIAIS

x	$E_1(x)$	$E_2(x)$	$E_3(x)$	$E_4(x)$	$E_5(x)$	$E_6(x)$
0,000	∞	1,00000000000000E+00	5,00000000000000E-01	3,33333333333333E-01	2,50000000000000E-01	2,00000000000000E-01
0,002	5,63939143396493E+00	9,86723215799403E-01	4,98014276117867E-01	3,32335323371699E-01	2,49334332005147E-01	1,99500666000664E-01
0,004	4,94824125651360E+00	9,76215024317937E-01	4,96051564623359E-01	3,31341261028499E-01	2,48670656074969E-01	1,99002661343938E-01
0,006	4,54477115683906E+00	9,66749337112900E-01	4,94108734015628E-01	3,30351103883280E-01	2,48008964357658E-01	1,98505982053557E-01
0,008	4,25908210080260E+00	9,57959258030639E-01	4,92184120386407E-01	3,29364813957989E-01	2,47349249081349E-01	1,98010624168881E-01
0,010	4,03792957653811E+00	9,49670537983786E-01	4,90276564184665E-01	3,28382356035773E-01	2,46691502547202E-01	1,97516583744739E-01
0,020	3,35470778330970E+00	9,13104517640561E-01	4,80968291476972E-01	3,23526435825738E-01	2,43432036147560E-01	1,95066006516760E-01
0,030	2,95911872402128E+00	8,81671971827869E-01	4,71997687196836E-01	3,18761867644201E-01	2,40220669379795E-01	1,92647782693422E-01
0,040	2,68126368902527E+00	8,53538891591312E-01	4,63323941744335E-01	3,14085493827516E-01	2,37056504849805E-01	1,90261435791666E-01
0,050	2,46789848850997E+00	8,27834500075215E-01	4,54918849748476E-01	3,09494494004430E-01	2,33938674950123E-01	1,87906498150641E-01
0,060	2,29530691814378E+00	8,04046118495621E-01	4,46760883237255E-01	3,04986293530004E-01	2,30866338993112E-01	1,85582510648932E-01
0,070	2,15083818025679E+00	7,81835147287972E-01	4,38832679797895E-01	3,00558510773365E-01	2,27838681037953E-01	1,83289022446658E-01
0,080	2,02694100258574E+00	7,60961066179776E-01	4,31119730546126E-01	2,96208922647648E-01	2,24854908143705E-01	1,81025590747027E-01
0,090	1,91874477003266E+00	7,41244155968288E-01	4,23609605617041E-01	2,91935440255231E-01	2,21914248912064E-01	1,78791780573828E-01
0,100	1,82292395841939E+00	7,22545022194020E-01	4,16291457908278E-01	2,87736090748377E-01	2,19015952240280E-01	1,76587164562386E-01
0,150	1,46446167052027E+00	6,41038725847016E-01	3,82276083774002E-01	2,67788854619652E-01	2,05134912058027E-01	1,65987547923270E-01
0,200	1,22265054418389E+00	5,74200644241203E-01	3,51945312114870E-01	2,49447230218335E-01	1,92210326758578E-01	1,56057737545253E-01
0,250	1,04428263444373E+00	5,17730124460470E-01	3,24684125978143E-01	2,32543250525622E-01	1,80166242609999E-01	1,46751844483780E-01
0,300	9,05676651675846E-01	4,69115225178963E-01	3,00041826564014E-01	2,16935224237504E-01	1,68934413352616E-01	1,38027579335186E-01
0,350	7,94215434620835E-01	4,26712687601420E-01	2,77669324529108E-01	2,02501275377841E-01	1,58453160834117E-01	1,29845896685354E-01

0,400	7,02380118865662E-01	3,89367998489374E-01	2,57286423319944E-01	1,89135158902553E-01	1,48666495618654E-01	1,22170689557635E-01
0,450	6,25331316323269E-01	3,56229059276302E-01	2,38662537473718E-01	1,76743336586199E-01	1,39523412539495E-01	1,14968523195800E-01
0,500	5,59773594776160E-01	3,26643862324553E-01	2,21604364275178E-01	1,65242825858348E-01	1,30977311695864E-01	1,08208400772940E-01
0,600	4,54379503189402E-01	2,76183934180385E-01	1,91550637792897E-01	1,44627084472762E-01	1,15508846352592E-01	9,59012656564942E-02
0,700	3,73768843233509E-01	2,34947113527953E-01	1,66061162160921E-01	1,26780830092921E-01	1,01959680681591E-01	8,50427054628591E-02
0,800	3,10596578545543E-01	2,00851701280787E-01	1,44323801546295E-01	1,11289974293394E-01	9,00742461706264E-02	7,54539134361440E-02
0,900	2,60183939325999E-01	1,72404114347199E-01	1,25702978414059E-01	9,78123263893150E-02	7,96346414975538E-02	6,69796964785601E-02
1,000	2,19383934395520E-01	1,48495506775922E-01	1,09691967197760E-01	8,60624913245607E-02	7,04542374617203E-02	5,94850407419443E-02
1,100	1,85990904536040E-01	1,28281088708435E-01	9,58809430594003E-02	7,58006821109130E-02	6,23725833440187E-02	5,28522484039317E-02
1,200	1,58408436851462E-01	1,11104087690447E-01	8,39346533418328E-02	6,68242093006675E-02	5,52512901878502E-02	4,69785327373563E-02
1,300	1,35450957849129E-01	9,64455478301447E-02	7,35762904274122E-02	5,89608718261255E-02	4,89706649150123E-02	4,17739857288993E-02
1,400	1,16219312571357E-01	8,38899263417054E-02	6,45755335316094E-02	5,20637389991177E-02	4,34269323357104E-02	3,71598517343223E-02
1,500	1,00019582406632E-01	7,31007865384808E-02	5,67394901703542E-02	4,60069749642994E-02	3,85299244254951E-02	3,30670547020374E-02
1,600	8,63083336975397E-02	6,38031840785917E-02	4,99057117344543E-02	4,06824597398428E-02	3,42011456027267E-02	2,94349370060585E-02
1,700	7,46546444012530E-02	5,57706285706044E-02	4,39367277413535E-02	3,59970289641445E-02	3,03721437034222E-02	2,62101759513833E-02
1,800	6,47131293638688E-02	4,88152553666225E-02	3,87157142808329E-02	3,18702008386957E-02	2,69831316779835E-02	2,33458502402432E-02
1,900	5,62043781745348E-02	4,27803006910188E-02	3,41430239548496E-02	2,82322912361402E-02	2,39818164684921E-02	2,08006335864999E-02
2,000	4,89005107080611E-02	3,75342618204904E-02	3,01333797978158E-02	2,50228412136603E-02	2,13224002023230E-02	1,85380965663933E-02
2,500	2,49149178702697E-02	1,97977039482244E-02	1,62953693766688E-02	1,37821917274089E-02	1,19073798263441E-02	1,04633098116076E-02
3,000	1,30483810941970E-02	1,06419250852728E-02	8,93064655602272E-03	7,66504289993192E-03	6,69798491701704E-03	5,93862272336256E-03
3,500	6,97013985754839E-03	5,80189392089912E-03	4,94537734958578E-03	4,29618756625608E-03	3,79018173510554E-03	3,38634946988981E-03
4,000	3,77935240984890E-03	3,19822924933855E-03	2,76136094568998E-03	2,42339836865808E-03	2,15551135352546E-03	1,93871869492646E-03

4,500	2,07340075471461E-03	1,77869314202654E-03	1,55243869956143E-03	1,37434079673861E-03	1,23111573822963E-03	1,11379514324179E-03
5,000	1,14829559127532E-03	9,96469042708838E-04	8,77800892770638E-04	7,82980845077425E-04	7,05760693424585E-04	6,41828706392508E-04
5,500	6,40926049865762E-04	5,61678164202372E-04	4,98770767675509E-04	4,47844072082922E-04	4,05907260501998E-04	3,70856301140614E-04
6,000	3,60082452162658E-04	3,18257463690406E-04	2,84603697261959E-04	2,57043331031533E-04	2,34123047619289E-04	2,14802778190123E-04
6,500	2,03429866839398E-04	1,81145058521484E-04	1,62998156293962E-04	1,47983725688938E-04	1,35386243999868E-04	1,24685721395685E-04
7,000	1,15481731610338E-04	1,03509844282148E-04	9,36565277897376E-05	8,54287570087841E-05	7,84701666232567E-05	7,25181598383437E-05
7,500	6,58308932670802E-05	5,93526706447318E-05	5,39696701561723E-05	4,94372813255136E-05	4,55761900516202E-05	4,22525889521363E-05
8,000	3,76656228439249E-05	3,41376451511126E-05	3,11807333468054E-05	2,86722537093561E-05	2,65211495569156E-05	2,46586862894373E-05
8,500	2,16211210434833E-05	1,96888401410355E-05	1,80566139059211E-05	1,66623836034381E-05	1,54595270953550E-05	1,44124777400252E-05
9,000	1,24473541780062E-05	1,13836164846231E-05	1,04786278625358E-05	9,70071777461904E-06	9,02583602877702E-06	8,43545596553725E-06
9,500	7,18477469238483E-06	6,59647031004470E-06	6,09268097113795E-06	5,65712022063000E-06	5,27729694792887E-06	4,94350177647525E-06
10,00	4,15696892968532E-06	3,83024046563160E-06	3,54876255308438E-06	3,30410141054701E-06	3,08972891425368E-06	2,90052812398959E-06

FONTE: O Autor (2020)

APÊNDICE B – SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA DA CAVIDADE ESFÉRICA DIVIDIDA EM DUAS CALOTAS E DUAS ZONAS ESFÉRICAS

Nesta seção é apresentada a solução analítica da Eq. (5.24) do problema da troca de radiação no interior de uma cavidade esférica onde duas superfícies tem fluxo de calor especificado e outras duas apresentam temperatura prescrita. Na Seção 5.1.3 é apresentado o modelo matemático, que se resume à Eq. (5.24), reproduzida a seguir como Eq. (B.1). Como as variáveis E_2 e E_3 aparecem dentro e fora das integrais, então elas constituem um sistema de duas equações integrais de Fredholm do segundo tipo.

$$\begin{cases} E_2 - \frac{1}{2} \int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2} E_2 \sin(\theta) d\theta - \frac{1}{2} \int_{\theta=\pi/2}^{3\pi/4} E_3 \sin(\theta) d\theta = q_2'' + (E_1 + E_4) \frac{(2 - \sqrt{2})}{4} \\ E_3 - \frac{1}{2} \int_{\theta=\pi/2}^{3\pi/4} E_3 \sin(\theta) d\theta - \frac{1}{2} \int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2} E_2 \sin(\theta) d\theta = q_3'' + (E_1 + E_4) \frac{(2 - \sqrt{2})}{4} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Um procedimento que permite resolver este sistema linear é transformá-lo em uma única equação integral de Fredholm. Para isso faz-se o uso da função de Heaviside ou função degrau H (GREENBERG, 2012, p.347)

$$H(t - a) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < a \\ 1, & \text{se } t > a \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Com a Eq. (B.2) pode-se combinar E_2 e E_3 em uma única função E e combinar q_2'' e q_3'' e em uma única função q''

$$\begin{aligned} E = E_2 H(\theta - \pi/4) + (E_3 - E_2) H(\theta - \pi/2) \\ - E_3 H(\theta - 3\pi/4), \quad 0 < \theta < \infty, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} q'' = q_2'' H(\theta - \pi/4) + (q_3'' - q_2'') H(\theta - \pi/2) \\ - q_3'' H(\theta - 3\pi/4), \quad 0 < \theta < \infty. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Com a Eq. (B.3) e Eq. (B.4) substituídas no sistema de Eq. (B.1) tem-se a única equação integral

$$E - \frac{1}{2} \int_{\theta=\pi/4}^{3\pi/4} E \sin(\theta) d\theta = q'' + (E_1 + E_4) \frac{(2 - \sqrt{2})}{4}. \quad (\text{B.5})$$

A Eq. (B.5) é da forma $y(x) - \lambda \int_a^b g(x)h(t)y(t)dt = F(x)$, onde $\lambda = 1/2$, $g(x) = 1$, $h(x) = \sin(x)$ e $F(x)$ é o lado direito da Eq. (B.5). A solução da Eq. (B.5) é apresentada em Polyanin e Manzhirov (2008, p.357)

$$y(x) = F(x) + \lambda k g(x), \quad (\text{B.6})$$

onde

$$k = \left(1 - \lambda \int_a^b g(t)h(t)dt\right)^{-1} \int_a^b h(t)F(t)dt, \quad k \neq \left(\int_a^b g(t)h(t)dt\right)^{-1}. \quad (\text{B.7})$$

O cálculo de k resulta em

$$\begin{aligned} k = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-1} & \left[\int_{\pi/4}^{3\pi/4} q_2'' H(\theta - \pi/4) \sin \theta d\theta \right. \\ & + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (q_3'' - q_2'') H(\theta - \pi/2) \sin \theta d\theta \\ & - \int_{\pi/4}^{3\pi/4} q_3'' H(\theta - 3\pi/4) \sin \theta d\theta \\ & \left. + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (E_1 + E_4) \frac{(2 - \sqrt{2})}{4} \sin \theta d\theta \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Como k resulta nulo para $\theta < \pi/4$, então pode-se escrever e Eq. (B.8) alterando os limites de integração dos termos que contém a função de Heaviside como integrando

$$\begin{aligned}
k = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-1} & \left[\int_0^{3\pi/4} q_2'' H(\theta - \pi/4) \sin \theta \, d\theta \right. \\
& + \int_0^{3\pi/4} (q_3'' - q_2'') H(\theta - \pi/2) \sin \theta \, d\theta \\
& - \int_0^{3\pi/4} q_3'' H(\theta - 3\pi/4) \sin \theta \, d\theta \\
& \left. + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (E_1 + E_4) \frac{(2 - \sqrt{2})}{4} \sin \theta \, d\theta \right].
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Aplicando a propriedade (GREENBERG, 2012, p.365)

$$\int_0^t H(t-a) f(\tau) d\tau = H(t-a) \int_a^t f(\tau) d\tau, \tag{B.10}$$

na Eq. (B.9) tem-se

$$k = \frac{2\sqrt{2}}{(2 - \sqrt{2})} \left[\frac{(q_3'' + q_2'')}{2} + (E_1 + E_4) \frac{(2 - \sqrt{2})}{4} \right]. \tag{B.11}$$

Conferindo a condição de existência de k na Eq. (B.7) se vê que esta é satisfeita, portanto substituindo a Eq. (B.11) na solução, Eq. (B.6), resulta em

$$\begin{aligned}
E(\theta) = & q_2'' H(\theta - \pi/4) + (q_3'' - q_2'') H(\theta - \pi/2) - q_3'' H(\theta - 3\pi/4) \\
& + \frac{\sqrt{2}}{(2 - \sqrt{2})} \left[\frac{(q_3'' + q_2'')}{2} + (E_1 + E_4) \frac{(2 - \sqrt{2})}{4} \right],
\end{aligned} \tag{B.12}$$

que combinando os termos assume a forma

$$E(\theta) \begin{cases} q_2'' + S, & \pi/4 < \theta < \pi/2 \\ q_3'' + S, & \pi/2 < \theta < 3\pi/4 \end{cases}, \tag{B.13}$$

onde

$$S = \frac{(q_3'' + q_2'')}{2} \frac{\sqrt{2}}{(2 - \sqrt{2})} + (E_1 + E_4) \frac{(2 - \sqrt{2})}{4} \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{(2 - \sqrt{2})} \right]. \quad (\text{B.14})$$

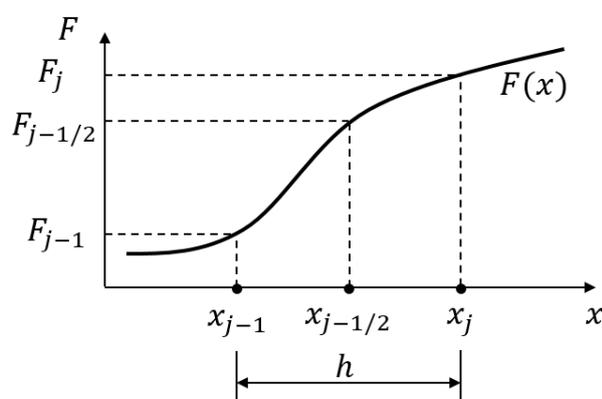
As equações Eq. (B.13) e Eq. (B.14) representam a solução analítica do problema da Seção 5.1.3 da tese.

O cálculo das temperaturas T_2 e T_3 é feito a partir deste resultado, usando a definição do poder emissivo.

ANEXO A – ERRO DE TRUNCAMENTO DA REGRA DO TRAPÉZIO E SUAS ORDENS VERDADEIRAS USANDO O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS¹⁰

Dada uma função $F(x)$ conhecida nos nós da malha 1D uniforme, ela pode ser aproximada pelo Método das Diferenças Finitas (MDF) segundo a aproximação com um ponto à montante, UDS (da terminologia em língua inglesa *Upwind Differencing Scheme*), conforme mostrado na FIGURA A 1.

FIGURA A 1 – MALHA 1D UNIFORME DISCRETIZADA COM A APROXIMAÇÃO UDS



FONTE: O Autor (2020)

onde $F(x)$ é a função a ser integrada (e.g. fator de forma infinitesimal), contínua em x e infinitamente derivável. A variável x_j é a posição do nó em estudo, x_{j-1} a posição do nó à montante e $x_{j-1/2}$ a posição intermediária, utilizada no desenvolvimento da fórmula do erro de truncamento.

O espaçamento entre os nós da malha h é dado por

$$h = \frac{L}{N}, \quad (\text{A.1})$$

onde L é o comprimento do domínio e N o número de elementos discretos da malha sobre o domínio. Desta forma a posição x_j de um ponto qualquer j é dada por

¹⁰ A dedução apresentada nesta seção foi feita por Carlos Henrique Marchi e apresentada ao autor enquanto cursava a disciplina Verificação e Validação em CFD, ofertada no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFPR.

$$x_j = jh, \quad j = (0, 1, 2, \dots). \quad (\text{A.2})$$

Integral de Um Intervalo:

Em Chapra e Canale (2015, p.608) é apresentada a fórmula da aproximação da integral feita pela Regra do Trapézio para um par consecutivo de nós, reproduzida pela equação (A.3)

$$I_{[j-1,j]}^{Num} = \frac{(F_{j-1} + F_j)}{2} h, \quad (\text{A.3a})$$

cujo erro em relação à solução analítica é da ordem de

$$E_{[j-1,j]}^{Num} = \frac{-F_{\xi}^{ii}}{12} h^3, \quad (\text{A.3b})$$

onde F_{ξ}^{ii} significa a terceira derivada da função F avaliada no ponto x_{ξ} tal que $x_{j-1} \leq x_{\xi} \leq x_j$.

A equação (A.3b) fora obtida com polinômio interpolador de Newton-Gregory, portanto o que se obtém é a ordem assintótica do erro de discretização. Quando é empregada a expansão em Série de Taylor a função F_{ξ}^{ii} não aparece, mas sim $F_{j-1/2}^{ii}$, que é possível de ser avaliada numericamente, porém em vez de um único termo, a equação (A.3b) se apresentará na forma de série. Nesta seção será feita a obtenção da equação do erro de discretização utilizando a expansão em Série de Taylor em torno do ponto médio $x_{j-1/2}$

$$\begin{aligned} F(x) = & F_{j-1/2} + F_{j-1/2}^i (x - x_{j-1/2}) + \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{2} (x - x_{j-1/2})^2 \\ & + \frac{F_{j-1/2}^{iii}}{6} (x - x_{j-1/2})^3 + \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{24} (x - x_{j-1/2})^4 \\ & + \frac{F_{j-1/2}^v}{120} (x - x_{j-1/2})^5 + \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{720} (x - x_{j-1/2})^6 + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

O valor exato da integral $I_{[j-1/2,j]}^{exata}$ no semi-intervalo $[x_{j-1/2}, x_j]$ é

$$I_{[j-1/2,j]}^{exata} = \int_{x_{j-1/2}}^{x_j} F(x) dx, \quad (\text{A.5})$$

que expandida em Série de Taylor assume a forma

$$\begin{aligned}
 I_{[j-1/2,j]}^{exata} &= \int_{x_{j-1/2}}^{x_j} F_{j-1/2} dx + \int_{x_{j-1/2}}^{x_j} F_{j-1/2}^i (x - x_{j-1/2}) dx \\
 &+ \int_{x_{j-1/2}}^{x_j} \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{2} (x - x_{j-1/2})^2 dx \\
 &+ \int_{x_{j-1/2}}^{x_j} \frac{F_{j-1/2}^{iii}}{6} (x - x_{j-1/2})^3 dx \\
 &+ \int_{x_{j-1/2}}^{x_j} \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{24} (x - x_{j-1/2})^4 dx \\
 &+ \int_{x_{j-1/2}}^{x_j} \frac{F_{j-1/2}^v}{120} (x - x_{j-1/2})^5 dx \\
 &+ \int_{x_{j-1/2}}^{x_j} \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{720} (x - x_{j-1/2})^6 dx + \dots
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

Definindo uma variável auxiliar z para aplicar como limites de integração inferior e superior têm-se

$$z = x - x_{j-1/2}, \tag{A.7}$$

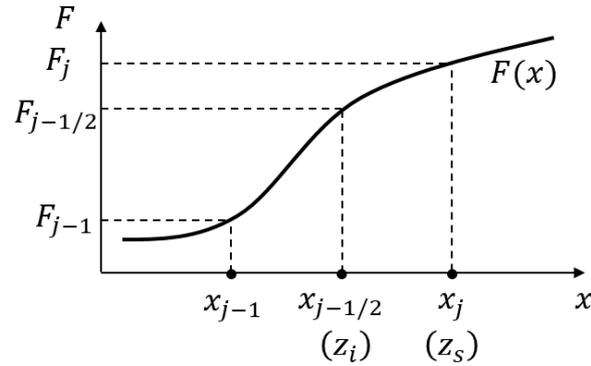
$$dz = dx, \tag{A.8}$$

$$z_i = x_{j-1/2} - x_{j-1/2} = 0, \tag{A.9}$$

$$z_f = x_j - x_{j-1/2} = \frac{h}{2}. \tag{A.10}$$

Em forma gráfica as variáveis z_i e z_f ficam conforme a FIGURA A 2. Substituindo as equações (A.7-A.10) em cada termo da equação (A.6) obtém-se

$$\int_{x_{j-1/2}}^{x_j} F_{j-1/2} dx = F_{j-1/2} \int_{z_i}^{z_f} dz = F_{j-1/2} z \Big|_0^{h/2} = F_{j-1/2} \frac{h}{2}, \tag{A.11}$$

FIGURA A 2 – VARIÁVEL AUXILIAR z CONSIDERANDO OS NÓS $x_{j-1/2}$ e j 

FONTE: O Autor (2020)

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1/2}}^{x_j} F_{j-1/2}^i (x - x_{j-1/2}) dx &= F_{j-1/2}^i \int_{z_i}^{z_f} z dz = F_{j-1/2}^i \frac{z^2}{2} \Big|_0^{h/2} \\ &= \frac{F_{j-1/2}^i}{2} \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{F_{j-1/2}^i}{8} h^2, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1/2}}^{x_j} \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{2} (x - x_{j-1/2})^2 dx &= \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{2} \int_{z_i}^{z_f} z^2 dz = \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{2} \frac{z^3}{3} \Big|_0^{h/2} \\ &= \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{6} \left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{48} h^3, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1/2}}^{x_j} \frac{F_{j-1/2}^{iii}}{6} (x - x_{j-1/2})^3 dx &= \frac{F_{j-1/2}^{iii}}{6} \int_{z_i}^{z_f} z^3 dz = \frac{F_{j-1/2}^{iii}}{6} \frac{z^4}{4} \Big|_0^{h/2} \\ &= \frac{F_{j-1/2}^{iii}}{24} \left(\frac{h}{2}\right)^4 = \frac{F_{j-1/2}^{iii}}{384} h^4, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1/2}}^{x_j} \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{24} (x - x_{j-1/2})^4 dx &= \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{24} \int_{z_i}^{z_f} z^4 dz = \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{24} \frac{z^5}{5} \Big|_0^{h/2} \\ &= \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{120} \left(\frac{h}{2}\right)^5 = \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{3840} h^5, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1/2}}^{x_j} \frac{F_{j-1/2}^v}{120} (x - x_{j-1/2})^5 dx &= \frac{F_{j-1/2}^v}{120} \int_{z_i}^{z_f} z^5 dz = \frac{F_{j-1/2}^v}{120} \frac{z^6}{6} \Big|_0^{h/2} \\ &= \frac{F_{j-1/2}^v}{720} \left(\frac{h}{2}\right)^6 = \frac{F_{j-1/2}^v}{46080} h^6, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1/2}}^{x_j} \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{720} (x - x_{j-1/2})^6 dx &= \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{720} \int_{z_i}^{z_f} z^6 dz = \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{720} \frac{z^7}{7} \Big|_0^{h/2} = \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{5040} \left(\frac{h}{2}\right)^7 \\ &= \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{645120} h^7. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Substituindo as equações (A.11-A.17) na equação (A.6) tem-se

$$\begin{aligned} I_{[j-1/2,j]}^{exata} &= F_{j-1/2} \frac{h}{2} + \frac{F_{j-1/2}^i}{8} h^2 + \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{48} h^3 + \frac{F_{j-1/2}^{iii}}{384} h^4 + \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{3840} h^5 \\ &\quad + \frac{F_{j-1/2}^v}{46080} h^6 + \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{645120} h^7 + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Fazendo um desenvolvimento similar para avaliar a integral de $F(x)$ no semi-intervalo $[x_{j-1}, x_{j-1/2}]$

$$I_{[j-1,j-1/2]}^{exata} = \int_{x_{j-1}}^{x_{j-1/2}} F(x) dx, \quad (\text{A.19})$$

que expandida em Série de Taylor assume a forma

$$\begin{aligned}
I_{[j-1, j-1/2]}^{exata} = & \int_{x_{j-1}}^{x_{j-1/2}} F_{j-1/2} dx + \int_{x_{j-1}}^{x_{j-1/2}} F_{j-1/2}^i (x - x_{j-1/2}) dx \\
& + \int_{x_{j-1}}^{x_{j-1/2}} \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{2} (x - x_{j-1/2})^2 dx \\
& + \int_{x_{j-1}}^{x_{j-1/2}} \frac{F_{j-1/2}^{iii}}{6} (x - x_{j-1/2})^3 dx \\
& + \int_{x_{j-1}}^{x_{j-1/2}} \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{24} (x - x_{j-1/2})^4 dx \\
& + \int_{x_{j-1}}^{x_{j-1/2}} \frac{F_{j-1/2}^v}{120} (x - x_{j-1/2})^5 dx \\
& + \int_{x_{j-1}}^{x_{j-1/2}} \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{720} (x - x_{j-1/2})^6 dx + \dots
\end{aligned} \tag{A.20}$$

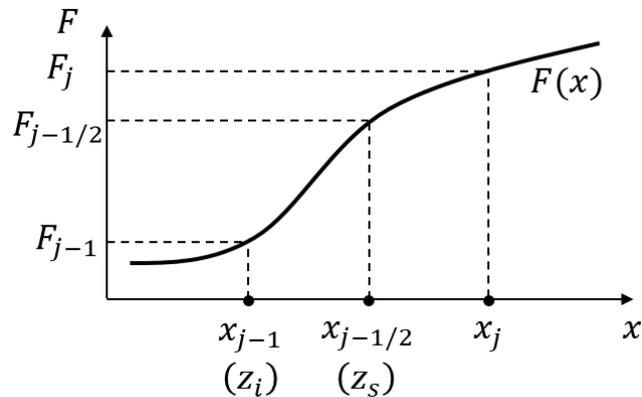
Desta forma as equações (A.9) e (A.10) assumem a forma

$$z_i = x_{j-1} - x_{j-1/2} = -\frac{h}{2}, \tag{A.21}$$

$$z_f = x_{j-1/2} - x_{j-1/2} = 0, \tag{A.22}$$

onde as variáveis z_i e z_f são mostradas na FIGURA A 3 abaixo

FIGURA A 3 – VARIÁVEL AUXILIAR z CONSIDERANDO OS NÓS $j - 1$ e $j - 1/2$



FONTE: O Autor (2020)

Então os termos da integral da equação (A20) ficam

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1}}^{x_{j-1/2}} F_{j-1/2} dx &= F_{j-1/2} \int_{z_i}^{z_f} dz = F_{j-1/2} z \Big|_{-h/2}^0 = F_{j-1/2} \left[0 - \left(\frac{-h}{2} \right) \right] \\ &= F_{j-1/2} \frac{h}{2}, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1}}^{x_{j-1/2}} F_{j-1/2}^i (x - x_{j-1/2}) dx &= F_{j-1/2}^i \int_{z_i}^{z_f} z dz = F_{j-1/2}^i \frac{z^2}{2} \Big|_{-h/2}^0 \\ &= \frac{F_{j-1/2}^i}{2} \left[0 - \left(\frac{-h}{2} \right)^2 \right] = -\frac{F_{j-1/2}^i}{8} h^2, \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1}}^{x_{j-1/2}} \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{2} (x - x_{j-1/2})^2 dx &= \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{2} \int_{z_i}^{z_f} z^2 dz = \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{2} \frac{z^3}{3} \Big|_{-h/2}^0 \\ &= \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{6} \left[0 - \left(\frac{-h}{2} \right)^3 \right] = \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{48} h^3, \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1}}^{x_{j-1/2}} \frac{F_{j-1/2}^{iii}}{6} (x - x_{j-1/2})^3 dx &= \frac{F_{j-1/2}^{iii}}{6} \int_{z_i}^{z_f} z^3 dz = \frac{F_{j-1/2}^{iii}}{6} \frac{z^4}{4} \Big|_{-h/2}^0 \\ &= \frac{F_{j-1/2}^{iii}}{24} \left[0 - \left(\frac{-h}{2} \right)^4 \right] = -\frac{F_{j-1/2}^{iii}}{384} h^4, \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1}}^{x_{j-1/2}} \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{24} (x - x_{j-1/2})^4 dx &= \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{24} \int_{z_i}^{z_f} z^4 dz = \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{24} \frac{z^5}{5} \Big|_{-h/2}^0 \\ &= \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{120} \left[0 - \left(\frac{-h}{2} \right)^5 \right] = \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{3840} h^5, \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1}}^{x_{j-1/2}} \frac{F_{j-1/2}^v}{120} (x - x_{j-1/2})^5 dx &= \frac{F_{j-1/2}^v}{120} \int_{z_i}^{z_f} z^5 dz = \frac{F_{j-1/2}^v}{120} \frac{z^6}{6} \Big|_{-h/2}^0 \\ &= \frac{F_{j-1/2}^v}{720} \left[0 - \left(\frac{-h}{2} \right)^6 \right] = -\frac{F_{j-1/2}^v}{46080} h^6, \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

$$\int_{x_{j-1}}^{x_{j-1/2}} \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{720} (x - x_{j-1/2})^6 dx = \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{720} \int_{z_i}^{z_f} z^6 dz = \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{720} \frac{z^7}{7} \Big|_{-h/2}^0$$

$$= \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{5040} \left[0 - \left(\frac{-h}{2} \right)^7 \right] = \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{645120} h^7. \quad (\text{A.29})$$

As equações (A.23-A.29) substituídas na equação (A.20) resulta em

$$I_{[j-1, j-1/2]}^{exata} = F_{j-1/2} \frac{h}{2} - \frac{F_{j-1/2}^i}{8} h^2 + \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{48} h^3 - \frac{F_{j-1/2}^{iii}}{384} h^4 + \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{3840} h^5$$

$$- \frac{F_{j-1/2}^v}{46080} h^6 + \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{645120} h^7 - \dots \quad (\text{A.30})$$

Integral Exata entre x_{j-1} e x_j .

Para se obter a integral exata no intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ é necessário aproximar numericamente $F_{j-1/2}$, pois seu valor não está disponível numericamente. Fazendo $x = x_{j-1}$ na Série de Taylor, equação (A.4), tem-se

$$F_{j-1} = F_{j-1/2} - \frac{F_{j-1/2}^i}{2} h + \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{8} h^2 - \frac{F_{j-1/2}^{iii}}{48} h^3 + \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{384} h^4 - \frac{F_{j-1/2}^v}{3840} h^5$$

$$+ \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{46080} h^6 - \dots \quad (\text{A.31})$$

Com $x = x_j$ na equação (A.4), tem-se:

$$F_j = F_{j-1/2} + \frac{F_{j-1/2}^i}{2} h + \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{8} h^2 + \frac{F_{j-1/2}^{iii}}{48} h^3 + \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{384} h^4 + \frac{F_{j-1/2}^v}{3840} h^5$$

$$+ \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{46080} h^6 + \dots \quad (\text{A.32})$$

Quando somadas, estas equações resultam em

$$F_j + F_{j-1} = 2F_{j-1/2} + 2 \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{8} h^2 + 2 \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{384} h^4 + 2 \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{46080} h^6 + \dots \quad (\text{A.33})$$

Isolando $F_{j-1/2}$ obtém-se

$$F_{j-1/2} = \frac{(F_j + F_{j-1})}{2} - \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{8} h^2 - \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{384} h^4 - \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{46080} h^6 - \dots \quad (\text{A.34})$$

Somando-se as equações (A.18) e (A.30) tem-se a integral em todo o intervalo, porém ainda em função de $F_{j-1/2}$

$$I_{[j-1,j]}^{exata} = F_{j-1/2} h + \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{24} h^3 + \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{1920} h^5 + \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{322560} h^7 + \dots \quad (\text{A.35})$$

Substituindo a equação (A.34) na equação (A.35) tem-se a integral sobre um intervalo $[x_{j-1}, x_j]$ dado pela Regra do Trapézio

$$I_{[j-1,j]}^{exata} = \frac{(F_j + F_{j-1})}{2} h - \frac{F_{j-1/2}^{ii}}{12} h^3 - \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{480} h^5 - \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{53760} h^7 - \dots \quad (\text{A.36})$$

Erro de Truncamento em Um Intervalo

Definindo o erro por

$$E_{[j-1,j]} = I_{[j-1,j]}^{exata} - I_{[j-1,j]}^{num} \quad (\text{A.37})$$

Substituindo as equações (A.3a) e (A.36) na equação (A.37) tem-se o erro de truncamento em um intervalo $[x_{j-1}, x_j]$

$$E_{[j-1,j]} = -\frac{F_{j-1/2}^{ii}}{12} h^3 - \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{480} h^5 - \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{53760} h^7 - \dots \quad (\text{A.38})$$

Portanto, as ordens verdadeiras do erro para a integral de um intervalo são

$$p_V = 3, 5, 7, \dots \quad (\text{A.39})$$

Integral sobre o Domínio Completo.

Segundo Chapra e Canale (2015, p. 609) o valor da integral de alguma variável (*i.e.* taxa de transferência de calor de uma superfície) dada pela Regra do Trapézio é

$$I^{num} = \frac{h}{2} \left[F_0 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} F_j + F_N \right] = \frac{h}{2} \sum_{j=1}^N (F_{j-1} + F_j). \quad (\text{A.40})$$

Algumas variáveis globais de superfícies (*i.e.* taxa de transferência de calor são obtidas com o cálculo da média de variáveis locais como o fluxo de calor por radiação). Para uma malha uniforme em um domínio unidimensional de tamanho L tem-se que a integral numérica é dada por

$$I_L^{num} = \frac{h}{2} \sum_{j=1}^N (F_{j-1} + F_j). \quad (\text{A.41})$$

O valor da integral analítica é dado por

$$I_L^{exata} = \int_0^L F(x) dx. \quad (\text{A.42})$$

O erro de truncamento no domínio é dado por

$$E_L = \sum_{j=1}^N E_{[j-1,j]}. \quad (\text{A.43})$$

Substituindo a equação (38) na equação (43)

$$E_L = \sum_{j=1}^N \left(-\frac{F_{j-1/2}^{ii}}{12} h^3 - \frac{F_{j-1/2}^{iv}}{480} h^5 - \frac{F_{j-1/2}^{vi}}{53760} h^7 - \dots \right). \quad (\text{A.44})$$

Como haverá um valor para a derivada de segunda ordem $F_{j-1/2}^{ii}$ associado a cada nó j no somatório da equação (A.44), então pode-se definir um valor médio dessa variável $\overline{F^{ii}}$ ao longo de todo o domínio, definido

$$\overline{F^{ii}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F_{j-1/2}^{ii}. \quad (\text{A.45})$$

onde o subíndice $j - 1/2$ em $\overline{F^{ii}}$ foi retirado para evidenciar ser um valor global. De forma semelhante os somatórios das demais derivadas na equação (A.44) são

$$\overline{F^{iv}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F_{j-1/2}^{iv}. \quad (\text{A.46})$$

$$\overline{F^{vi}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F_{j-1/2}^{vi}. \quad (\text{A.47})$$

Substituindo as equações (A.45-A.47) na equação (A.44) e organizando os termos tem-se

$$E_L = \left(-\frac{\overline{F^{ii}}}{12} Nh^3 - \frac{\overline{F^{iv}}}{480} Nh^5 - \frac{\overline{F^{vi}}}{53760} Nh^7 - \dots \right). \quad (\text{A.48})$$

Evidenciando N e um h de cada termo e tendo em mente que $L = Nh$, então

$$E_L = L \left(-\frac{\overline{F^{ii}}}{12} h^2 - \frac{\overline{F^{iv}}}{480} h^4 - \frac{\overline{F^{vi}}}{53760} h^6 - \dots \right). \quad (\text{A.49})$$

Portanto as ordens verdadeiras para a integração no domínio são

$$p_V = 2, 4, 6, \dots \quad (\text{A.50})$$

Comparando com as ordens verdadeiras para a integral em um intervalo, Eq. (A.39), vê-se que quando a integração é realizada sobre todo o domínio, as ordens reduzem-se em uma unidade. Assim, conclui-se que a Regra do Trapézio produz uma aproximação de segunda ordem, pois no regime assintótico, seu termo mais significativo é o primeiro termo à direita da Eq. (A.49), ou seja, a ordem assintótica é $p_L = 2$. As ordens subsequentes formam uma progressão aritmética de razão 2.

ANEXO B – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DO ERRO DE TRUNCAMENTO PARA A APLICAÇÃO DA REGRA DO RETÂNGULO USANDO O MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS¹¹

O objetivo desta seção é encontrar o erro de truncamento $E_{RR,P}$ decorrente da integração numérica usando a Regra do Retângulo

$$\int_{x_w}^{x_e} I dx = I_P h + E_{RR,P} . \quad (B.1)$$

Como nas demais deduções de erros de truncamento do DOM, é interessante que a expansão em Série de Taylor esteja escrita em termos do fator de ponderação γ , portanto usando a expansão no entorno do ponto x_γ tem-se

$$\begin{aligned} I(x) = I_{x_\gamma} + I_{x_\gamma}^i (x - x_\gamma) + \frac{I_{x_\gamma}^{ii}}{2} (x - x_\gamma)^2 + \frac{I_{x_\gamma}^{iii}}{6} (x - x_\gamma)^3 \\ + \frac{I_{x_\gamma}^{iv}}{24} (x - x_\gamma)^4 + \frac{I_{x_\gamma}^v}{120} (x - x_\gamma)^5 + \frac{I_{x_\gamma}^{vi}}{720} (x - x_\gamma)^6 + \dots \end{aligned} \quad (B.2)$$

O valor exato da integral $I_{[w,e]}^{exata}$ no intervalo $[x_w, x_e]$ é

$$I_{[w,e]}^{exata} = \int_{x_w}^{x_e} I dx. \quad (B.3)$$

Definindo uma variável auxiliar z

$$z = x - x_\gamma , \quad (B.4)$$

$$dz = dx . \quad (B.5)$$

Os limites inferior z_i e superior z_s de integração são

¹¹ Dedução baseada na dedução da regra convencional, feita por Carlos Henrique Marchi e apresentada ao autor enquanto cursava a disciplina Verificação e Validação em CFD, ofertada pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFPR.

$$z_w = x_w - x_\gamma = -\gamma h, \quad (\text{B.6})$$

$$z_e = x_e - x_\gamma = (1 - \gamma)h. \quad (\text{B.7})$$

Substituindo as Eq. (B.2), Eq. (B.4) até Eq. (B.7) na Eq. (B.3) e resolvendo tem-se

$$\begin{aligned} I_{[w,e]}^{exata} = & I_{x_\gamma} h + \frac{I_{x_\gamma}^i}{2} [(1 - \gamma)^2 h^2 - \gamma^2 h^2] + \frac{I_{x_\gamma}^{ii}}{6} [(1 - \gamma)^3 h^3 + \gamma^3 h^3] \\ & + \frac{I_{x_\gamma}^{iii}}{24} [(1 - \gamma)^4 h^4 - \gamma^4 h^4] + \frac{I_{x_\gamma}^{iv}}{120} [(1 - \gamma)^5 h^5 + \gamma^5 h^5] \\ & + \frac{I_{x_\gamma}^v}{720} [(1 - \gamma)^6 h^6 - \gamma^6 h^6] + \dots . \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Substituindo as Eq. (4.25) até a Eq. (4.31) faz com que I_{x_γ} e as suas derivadas passem a ser avaliadas em x_p , porém mantém os demais termos contendo h ainda dependentes de γ . Em seguida, simplifica-se a equação, chegando em

$$\begin{aligned}
I_{[w,e]}^{exata} = & I_P h + I_P^i \left\{ (\gamma - 1/2) + \frac{1}{2} [(1 - \gamma)^2 - \gamma^2] \right\} h^2 \\
& + I_P^{ii} \left\{ \frac{(\gamma - 1/2)^2}{2} + \frac{(\gamma - 1/2)}{2} [(1 - \gamma)^2 - \gamma^2] \right. \\
& \left. + \frac{1}{6} [(1 - \gamma)^3 + \gamma^3] \right\} h^3 \\
& + I_P^{iii} \left\{ \frac{(\gamma - 1/2)^3}{6} + \frac{(\gamma - 1/2)^2}{4} [(1 - \gamma)^2 - \gamma^2] \right. \\
& \left. + \frac{(\gamma - 1/2)}{6} [(1 - \gamma)^3 + \gamma^3] + \frac{1}{24} [(1 - \gamma)^4 - \gamma^4] \right\} h^4 \\
& + I_P^{iv} \left\{ \frac{(\gamma - 1/2)^4}{24} + \frac{(\gamma - 1/2)^3}{12} [(1 - \gamma)^2 - \gamma^2] \right. \\
& \left. + \frac{(\gamma - 1/2)^2}{12} [(1 - \gamma)^3 + \gamma^3] + \frac{(\gamma - 1/2)}{24} [(1 - \gamma)^4 - \gamma^4] \right. \\
& \left. + \frac{1}{120} [(1 - \gamma)^5 + \gamma^5] \right\} h^5 \\
& + I_P^v \left\{ \frac{(\gamma - 1/2)^5}{120} + \frac{(\gamma - 1/2)^4}{48} [(1 - \gamma)^2 - \gamma^2] \right. \\
& \left. + \frac{(\gamma - 1/2)^3}{36} [(1 - \gamma)^3 + \gamma^3] + \frac{(\gamma - 1/2)^2}{48} [(1 - \gamma)^4 - \gamma^4] \right. \\
& \left. + \frac{(\gamma - 1/2)}{120} [(1 - \gamma)^5 + \gamma^5] + \frac{1}{720} [(1 - \gamma)^6 - \gamma^6] \right\} h^6 \\
& + \dots .
\end{aligned} \tag{B.9}$$

O primeiro termo do lado direito constitui a aproximação numérica da Regra do Retângulo

$$I_{[w,e]}^{num} = I_P h , \tag{B.10}$$

enquanto os demais termos do lado direito constituem o erro de truncamento, denominado $E_{RR,P}$ na Seção 4.1.

$$\begin{aligned}
E_{RR,P}^{num} = & I_P^i \left\{ (\gamma - 1/2) + \frac{1}{2} [(1 - \gamma)^2 - \gamma^2] \right\} h^2 \\
& + I_P^{ii} \left\{ \frac{(\gamma - 1/2)^2}{2} + \frac{(\gamma - 1/2)}{2} [(1 - \gamma)^2 - \gamma^2] \right. \\
& \left. + \frac{1}{6} [(1 - \gamma)^3 + \gamma^3] \right\} h^3 \\
& + I_P^{iii} \left\{ \frac{(\gamma - 1/2)^3}{6} + \frac{(\gamma - 1/2)^2}{4} [(1 - \gamma)^2 - \gamma^2] \right. \\
& \left. + \frac{(\gamma - 1/2)}{6} [(1 - \gamma)^3 + \gamma^3] + \frac{1}{24} [(1 - \gamma)^4 - \gamma^4] \right\} h^4 \\
& + I_P^{iv} \left\{ \frac{(\gamma - 1/2)^4}{24} + \frac{(\gamma - 1/2)^3}{12} [(1 - \gamma)^2 - \gamma^2] \right. \\
& \left. + \frac{(\gamma - 1/2)^2}{12} [(1 - \gamma)^3 + \gamma^3] + \frac{(\gamma - 1/2)}{24} [(1 - \gamma)^4 - \gamma^4] \right. \\
& \left. + \frac{1}{120} [(1 - \gamma)^5 + \gamma^5] \right\} h^5 \\
& + I_P^v \left\{ \frac{(\gamma - 1/2)^5}{120} + \frac{(\gamma - 1/2)^4}{48} [(1 - \gamma)^2 - \gamma^2] \right. \\
& \left. + \frac{(\gamma - 1/2)^3}{36} [(1 - \gamma)^3 + \gamma^3] + \frac{(\gamma - 1/2)^2}{48} [(1 - \gamma)^4 - \gamma^4] \right. \\
& \left. + \frac{(\gamma - 1/2)}{120} [(1 - \gamma)^5 + \gamma^5] + \frac{1}{720} [(1 - \gamma)^6 - \gamma^6] \right\} h^6 \\
& + \dots .
\end{aligned} \tag{B.11}$$

É interessante notar que independente do valor de γ dentro do intervalo $[0,1]$ os termos de ordem par resultam nulos, enquanto que os de ordem ímpar resultam sempre nos mesmos coeficientes, portanto o erro de truncamento da Regra do Retângulo independente do fator de ponderação γ , resultando em

$$E_{RR,P}^{num} = \frac{I_P^{ii}}{24} h^3 + \frac{I_P^{iv}}{1920} h^5 + \frac{I_P^{vi}}{322.560} h^7 + \dots \tag{B.12}$$

ANEXO C – SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA DA RADIAÇÃO NO INTERIOR DE UM TUBO DE SEÇÃO TRANSVERSAL CIRCULAR E COMPRIMENTO FINITO

Obtida em Usiskin e Siegel (1960) usando o método variacional, a solução analítica aproximada do poder emissivo da superfície interna do tubo E_2 (*i.e.* área lateral cilíndrica) é dada por:

1) Caso $T_1 > T_3$, tem-se

$$E_2(X_2) = q_2'' \left[\frac{M}{P} + \frac{N}{P} (X_2 L - X_2^2) \right] + (\sigma T_1^4 - \sigma T_3^4) (D + E X_2) + \sigma T_3^4; \quad (\text{C.1a})$$

2) Caso $T_3 > T_1$ tem-se

$$E_2(X_2) = q_2'' \left[\frac{M}{P} + \frac{N}{P} (X_2 L - X_2^2) \right] + (\sigma T_3^4 - \sigma T_1^4) [D + E(L - X_2)] + \sigma T_1^4. \quad (\text{C.1b})$$

As variáveis presentes na Eq. (C.1) e que não foram descritas na Seção 5.1.2 são dadas a seguir

$$M = \frac{2}{3} L^4 + \frac{1}{2} L^2 \sqrt{L^2 + 1} - (L^3 + \frac{1}{2} L) \ln [L + \sqrt{L^2 + 1}], \quad (\text{C.2})$$

$$N = -4L^2 + 3L \ln [L + \sqrt{L^2 + 1}] + L^2 \sqrt{L^2 + 1}, \quad (\text{C.3})$$

$$\begin{aligned} P = & \frac{1}{6} L^6 + \frac{7}{12} L^4 - \frac{11}{12} L^2 + \left(-\frac{1}{6} L^5 - \frac{1}{2} L^3 + \frac{2}{3} L^2 \right) \sqrt{L^2 + 1} \\ & + \left(\frac{1}{2} L^4 + \frac{1}{2} L^2 + 2L \right) \ln (L + \sqrt{L^2 + 1}) \\ & - \left(\frac{1}{2} L^3 + L \right) \sqrt{L^2 + 1} \ln (L + \sqrt{L^2 + 1}) \\ & - \frac{3}{4} \left[\ln (L + \sqrt{L^2 + 1}) \right]^2, \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned}
D = & \left\{ -4L^5 + 5L^3 + 4L^2 + 7L + (4L^4 - 7L^2 - 4L)\sqrt{L^2 + 1} \right. \\
& \left. + 3(L - \sqrt{L^2 + 1}) \ln(L + \sqrt{L^2 + 1}) \right\} \\
& / \left\{ 6 \left[L^3 + L - L^2\sqrt{L^2 + 1} \right. \right. \\
& \left. \left. + (L - \sqrt{L^2 + 1}) \ln(L + \sqrt{L^2 + 1}) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{C.5}$$

$$E = \frac{2}{3} \frac{[-L^3 + 2 + (L^2 - 2)\sqrt{L^2 + 1}]}{[L\sqrt{L^2 + 1} - \ln(L + \sqrt{L^2 + 1})]}. \tag{C.6}$$