

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

CAROLINE DALL'AGNOL

**PROPOSTA DE UM PROCEDIMENTO HÍBRIDO PARA ESTIMAR E
REDUZIR O ERRO DE ITERAÇÃO EM PROBLEMAS DE
TRANSFERÊNCIA DE CALOR**

CURITIBA

2020

CAROLINE DALL'AGNOL

**PROPOSTA DE UM PROCEDIMENTO HÍBRIDO PARA ESTIMAR E
REDUZIR O ERRO DE ITERAÇÃO EM PROBLEMAS DE
TRANSFERÊNCIA DE CALOR**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, do Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Henrique Marchi
Coorientador: Prof. Dr. Diego Fernando Moro

CURITIBA

2020

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

D144p

Dall'Agnol, Caroline

Proposta de um procedimento híbrido para estimar e reduzir o erro de iteração em problemas de transferência de calor [recurso eletrônico] / Caroline Dall'Agnol. – Curitiba, 2020.

Tese - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2020.

Orientadora: Carlos Henrique Marchi.

Coorientador: Diego Fernando Moro.

1. Diferenças finitas. 2. Fluidodinâmica computacional. I. Universidade Federal do Paraná. II. Marchi, Carlos Henrique. III. Moro, Diego Fernando. IV. Título.

CDD: 515.62

Bibliotecária: Vanusa Maciel CRB- 9/1928



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO ENGENHARIA
MECÂNICA - 40001016040P5

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA MECÂNICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **CAROLINE DALL' AGNOL** intitulada: **PROPOSTA DE UM PROCEDIMENTO HÍBRIDO PARA ESTIMAR E REDUZIR O ERRO DE ITERAÇÃO EM PROBLEMAS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR**, sob orientação do Prof. Dr. CARLOS HENRIQUE MARCHI, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua aprovação no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 29 de Julho de 2020.

CARLOS HENRIQUE MARCHI
Presidente da Banca Examinadora

SILVIO LUIZ DE MELLO JUNQUEIRA
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO
PARANÁ)

SAULO POMPONET OLIVEIRA
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

VIVIANA COCCO MARIANI
Avaliador Externo (PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO
PARANÁ)

Dedico esse trabalho à minha família.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à minha família por todo apoio, amor e compreensão demonstrados durante esse período. Esse suporte foi essencial para que esse sonho fosse realizado. Pai Flavio, mãe Lilia, irmãos Ramon e Renan: vocês são sensacionais, agradeço a Deus por tê-los em minha vida.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Carlos Henrique Marchi, e ao meu coorientador, prof. Dr. Diego Fernando Moro, por todos os ensinamentos, contribuições e por todo o conhecimento demonstrado e repassado. Com eles aprendi lições que não se resumem apenas à vida profissional/acadêmica e que foram determinantes para o meu crescimento pessoal.

Agradeço aos meus colegas e amigos do Laboratório de Experimentação Numérica (LENA), pela ajuda e pelo companheirismo reforçados a cada dificuldade enfrentada. Com eles aprendi a importância da cooperação e da perseverança.

Agradeço a todos os meus amigos e amigas por todo incentivo recebido. Para comemorar as pequenas vitórias ou para chorar os tropeços, sua presença foi fundamental para que eu continuasse acreditando que seria possível chegar ao final dessa longa caminhada.

Agradeço aos membros da banca, pelo tempo dedicado e pela disponibilidade em contribuir com esse trabalho.

Finalmente, agradeço à Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR - Câmpus Dois Vizinhos pelo afastamento e apoio financeiro concedidos e à Universidade Federal do Paraná - UFPR, em especial ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - PGMec, pela estrutura física e pela oportunidade de cursar o doutorado em uma instituição reconhecida e renomada.

"You cannot hope to build a better world without improving the individuals. To that end, each of us must work for our own improvement and, at the same time, share a general responsibility for all humanity (...)"
(Marie Curie)

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal aperfeiçoar as técnicas de estimativas de erros de iteração em problemas de transferência de calor. Primeiro, propõe-se um novo estimador para erros de iteração e, a partir das estimativas obtidas, propõe-se um método para melhorar as previsões de erros de iteração em faixas de iterações em que o estimador não apresenta resultados acurados. O estimador proposto fornece previsões dos erros de iteração baseadas na taxa de convergência da variável de interesse. Seu desempenho foi testado em duas equações unidimensionais: equação de Poisson e equação de advecção-difusão, e uma bidimensional: equação de Laplace. As equações foram discretizadas por meio do Método das Diferenças Finitas (MDF) e resolvidas em malhas uniformes. Os sistemas de equações resultantes das discretizações foram resolvidos pelos *solvers* TriDiagonal Matrix Algorithm (TDMA), PentaDiagonal Matrix Algorithm (PDMA) e Gauss-Seidel (GS). O *solver* TDMA foi utilizado para obtenção da solução direta das equações unidimensionais, o *solver* PDMA para obtenção da solução de referência da equação bidimensional e o *solver* GS para estimar os erros a cada iteração. A equação de Laplace foi resolvida com/sem o método *multigrid* associado ao GS para aceleração da convergência. As variáveis escolhidas para análise dos resultados foram: o valor da função no ponto central do domínio (local), derivadas nos contornos (local) e valor médio da função (global). Os códigos foram implementados na linguagem Fortran 95, com precisão quádrupla, no ambiente Microsoft Visual Studio 2013. O estimador proposto foi avaliado com relação à sua acurácia e confiabilidade e comparado aos principais estimadores de erros de iteração presentes na literatura e observou-se que, para todos os problemas e variáveis analisadas, os estimadores possuem resultados semelhantes. As faixas iniciais e as faixas finais de iterações foram as que apresentaram as estimativas menos acuradas. Assim, a fim de melhorar as estimativas da faixa inicial, primeiramente, foram delimitadas, para cada variável, as faixas de iterações em que o estimador apresenta as melhores estimativas de erros. Para isso, os critérios utilizados foram: convergência da série geométrica que representa o estimador proposto, convergência monotônica da taxa de convergência e a interferência dos erros de arredondamento. Após identificado o intervalo com as melhores estimativas, essas mesmas estimativas foram utilizadas para se obter soluções com erros reduzidos de iteração, chamadas de soluções corrigidas. A última solução corrigida do melhor intervalo de estimativas foi utilizada para recalcular as previsões. Por meio desse método foi possível melhorar as estimativas da faixa inicial de iterações. Combinando-se as previsões de erro obtidas com o estimador e as previsões melhoradas por meio do método proposto, obtém-se um procedimento híbrido para estimativa do erro de iteração em todo o ciclo iterativo.

Palavras-chave: Erro de iteração. Método de diferenças finitas. Transferência de calor computacional. Verificação.

ABSTRACT

This study aims to improve the techniques for estimates of iteration errors in heat transfer problems. First, a new estimator of iteration error is proposed and, based on the estimates obtained, a method is proposed to improve the iteration error predictions in ranges of iterations where the estimator does not present accurate results. The proposed estimator is an empirical estimator that provides iteration errors estimates based on interest variables convergence rate. Its performance was tested in two one-dimensional equations: Poisson's equation and advection-diffusion equation, and in a two-dimensional equation: Laplace's equation. All equations were discretized using the Finite Difference Method (FDM) in uniform meshes. The systems of equations resulting from the discretizations were solved by the TriDiagonal Matrix Algorithm solver (TDMA), PentaDiagonal Matrix Algorithm solver (PDMA) and Gauss-Seidel solver (GS). The TDMA solver was used to obtain the one-dimensional equations direct solution, the PDMA solver to obtain the bidimensional equation reference solution and the GS solver to estimate errors at each iteration. The Laplace equation was solved with and without the *multigrid* method associated with GS to accelerate convergence. The variables chosen to evaluate the results were: the function value at the central point of the domain (local), the derivative at the right boundary (local) and the function mean value (global). The codes were implemented in Fortran 95 language, with quadruple precision, in the Microsoft Visual Studio Community 2013. The proposed estimator was evaluated with respect to its accuracy and reliability and was compared to the main iteration error estimators found in the literature and it was observed that, for all problems and variables, the estimators have similar results. The iterations initial ranges and the final ranges were those that presented the least accurate estimates. Thus, in order to improve the estimates obtained, first it was delimited, for each variable, the iterations ranges in which the estimator presents the best error estimates. To that end, the criteria were: geometric series convergence that represents the proposed estimator, monotonic convergence and the interference of round-off errors. After identifying the interval with the best estimates, these same estimates were used to obtain solutions with reduced iteration errors. The best estimate range last solution with reduced iteration errors was used to recalculate the predictions. Through this procedure it was possible to improve the iteration initial range estimates. Combining the error estimates with the estimator and those improved by the proposed method, a hybrid procedure is obtained to estimate the iteration error throughout the iterative cycle.

Keywords: Iteration error. Finite difference method. Computational heat transfer. Verification.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1	–	COMPORTAMENTO APRESENTADO PELOS ERROS DE ITERAÇÃO AO LONGO DO CICLO ITERATIVO.	54
FIGURA 2	–	COMPORTAMENTO APRESENTADO PELO ERRO DE ITERAÇÃO E PELAS ESTIMATIVAS DO ERRO DE ITERAÇÃO OBTIDAS POR MEIO DO ESTIMADOR EMPÍRICO DE MARTINS E MARCHI (2008) E DO ESTIMADOR DE FERZIGER E PERIĆ (1996) NO INÍCIO DO PROCESSO ITERATIVO. . .	56
FIGURA 3	–	NORMAS DO ERRO DE ITERAÇÃO, SUA ESTIMATIVA, DIFERENÇA ENTRE AS SOLUÇÕES EM DUAS ITERAÇÕES E RESÍDUO PARA A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE POR MEIO DO <i>SOLVER</i> SOR, COM $\omega = 1,6$ E MALHA 40×40	62
FIGURA 4	–	NORMAS DO ERRO DE ITERAÇÃO, SUA ESTIMATIVA, DIFERENÇA ENTRE DUAS ITERAÇÕES E RESÍDUO PARA A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE POR MEIO DO <i>SOLVER</i> SOR, COM $\omega = 1,9$ E MALHA 20×20	63
FIGURA 5	–	ERRO DE CONVERGÊNCIA DO FLUXO DE CALOR NA SUPERFÍCIE PARA O MODELO DE SPALART-ALLMARAS EM $x = 2,14892m$	66
FIGURA 6	–	LOGARITMO DO MÓDULO DO ERRO (E_k) E DA ESTIMATIVA DO ERRO (U_k) PELO NÚMERO DE ITERAÇÕES, A INCLINAÇÃO DO GRÁFICO REPRESENTA p_U	67
FIGURA 7	–	ERRO E ESTIMATIVA DO ERRO DE ITERAÇÃO NO PONTO CENTRAL DO DOMÍNIO DE CÁLCULO DA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE EM UMA MALHA DE 65×65	68
FIGURA 8	–	MALHA 1D UNIFORME.	69
FIGURA 9	–	MALHA 2D UNIFORME EM CADA DIREÇÃO.	70
FIGURA 10	–	EXEMPLO DE CICLO V.	79
FIGURA 11	–	ERROS ENVOLVIDOS NOS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ENGENHARIA.	81
FIGURA 12	–	EFEITO DA ORDEM ASSINTÓTICA p_L SOBRE O DECAIMENTO DO ERRO DE DISCRETIZAÇÃO.	83
FIGURA 13	–	DELIMITAÇÃO DOS 3 PRIMEIROS INTERVALOS PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, CONSIDERANDO-SE OS INTERVALOS CONVERGENTES/DIVERGENTES DE ψ	99

FIGURA 14	– INFLUÊNCIA DAS VARIAÇÕES DE ψ NAS ESTIMATIVAS DOS ERROS DE ITERAÇÃO.	100
FIGURA 15	– DELIMITAÇÃO DO INTERVALO IV, COM AS MELHORES ESTIMATIVAS PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1.	101
FIGURA 16	– ESTIMATIVAS DOS ERROS DE ITERAÇÃO NO INTERVALO DE CONVERGÊNCIA MONOTÔNICA DE ψ	101
FIGURA 17	– DELIMITAÇÃO DO INTERVALO V, COM ERROS DE ARREDONDAMENTO MAIS SIGNIFICATIVOS PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, CONSIDERANDO-SE A TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ	102
FIGURA 18	– DELIMITAÇÃO DO INTERVALO V, COM ERROS DE ARREDONDAMENTO MAIS SIGNIFICATIVOS PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, CONSIDERANDO-SE $ Ui_k - Ei_k $	103
FIGURA 19	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES.	109
FIGURA 20	– TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES.	110
FIGURA 21	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO I.	110
FIGURA 22	– TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO I.	111
FIGURA 23	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO II.	111
FIGURA 24	– TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO II.	112
FIGURA 25	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO III.	113

FIGURA 26	– TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO III.	113
FIGURA 27	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NOS INTERVALOS I A III.	114
FIGURA 28	– TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NOS INTERVALOS I A III.	114
FIGURA 29	– SOLUÇÕES NUMÉRICAS CALCULADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NOS INTERVALOS I A III.	115
FIGURA 30	– ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NOS INTERVALOS I A III.	115
FIGURA 31	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO IV.	116
FIGURA 32	– TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO IV.	117
FIGURA 33	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO V.	117
FIGURA 34	– MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR PROPOSTO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO V.	118
FIGURA 35	– TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO V.	118
FIGURA 36	– SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	119
FIGURA 37	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	120

FIGURA 38	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NOS INTERVALOS I A III.	120
FIGURA 39	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO IV.	121
FIGURA 40	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO V.	122
FIGURA 41	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	122
FIGURA 42	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES.	124
FIGURA 43	– TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES.	124
FIGURA 44	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL, $grad T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO I.	125
FIGURA 45	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO II.	126
FIGURA 46	– MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR PROPOSTO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO II.	126
FIGURA 47	– SOLUÇÃO COM GS E SOLUÇÃO CORRIGIDA PARA A VARIÁVEL $grad T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES.	127
FIGURA 48	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES.	128
FIGURA 49	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO I.	128

FIGURA 50	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO II.	129
FIGURA 51	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	129
FIGURA 52	– TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES.	131
FIGURA 53	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES.	132
FIGURA 54	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 3, NOS INTERVALOS I E II.	132
FIGURA 55	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO III.	133
FIGURA 56	– SOLUÇÕES COM GS E SOLUÇÕES CORRIGIDAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES.	133
FIGURA 57	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES.	134
FIGURA 58	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 3, NOS INTERVALOS I E II.	135
FIGURA 59	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO IV.	135
FIGURA 60	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 3, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	136
FIGURA 61	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES.	139

FIGURA 62	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, NO INTERVALO I.	139
FIGURA 63	– SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	140
FIGURA 64	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES. . .	141
FIGURA 65	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, NO INTERVALO I.	141
FIGURA 66	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, NO INTERVALO III.	142
FIGURA 67	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, EM TODOS OS INTERVALOS. .	142
FIGURA 68	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3. .	144
FIGURA 69	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, NO INTERVALO I.	144
FIGURA 70	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, NO INTERVALO II.	145
FIGURA 71	– SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	146
FIGURA 72	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES. . .	146
FIGURA 73	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, NO INTERVALO I.	147

FIGURA 74	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, NO INTERVALO II.	148
FIGURA 75	– MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR PROPOSTO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, NO INTERVALO II.	148
FIGURA 76	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, EM TODOS OS INTERVALOS.	149
FIGURA 77	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 3.	150
FIGURA 78	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 3, NO INTERVALO II.	151
FIGURA 79	– SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 3, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	152
FIGURA 80	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES.	152
FIGURA 81	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 3, NO INTERVALO II.	153
FIGURA 82	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 3, NO INTERVALO I.	154
FIGURA 83	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 3, EM TODOS OS INTERVALOS.	154
FIGURA 84	– TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, NO INTERVALO I, <i>SINGLEGRID</i>	156
FIGURA 85	– TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES, <i>SINGLEGRID</i>	157

FIGURA 86	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, NO INTERVALO I, <i>SINGLEGRID</i>	158
FIGURA 87	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, NO INTERVALO II, <i>SINGLEGRID</i>	158
FIGURA 88	– TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, NO INTERVALO II, <i>SINGLEGRID</i>	159
FIGURA 89	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES, <i>SINGLEGRID</i>	159
FIGURA 90	– SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES, <i>SINGLEGRID</i>	160
FIGURA 91	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES, <i>SINGLEGRID</i>	161
FIGURA 92	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, NO INTERVALO I, <i>SINGLEGRID</i>	161
FIGURA 93	– MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR PROPOSTO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, NO INTERVALO III, <i>SINGLEGRID</i>	162
FIGURA 94	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, NO INTERVALO III, <i>SINGLEGRID</i>	162
FIGURA 95	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODOS OS INTERVALOS, <i>SINGLEGRID</i>	163
FIGURA 96	– TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1, y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES, <i>SINGLEGRID</i>	164

FIGURA 97	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES, <i>SINGLEGRID</i>	165
FIGURA 98	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, NO INTERVALO I, <i>SINGLEGRID</i>	166
FIGURA 99	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, NO INTERVALO III, <i>SINGLEGRID</i>	166
FIGURA 100	– TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, NO INTERVALO III, <i>SINGLEGRID</i>	167
FIGURA 101	– SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES, <i>SINGLEGRID</i>	167
FIGURA 102	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES, <i>SINGLEGRID</i>	168
FIGURA 103	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, NOS INTERVALOS I E II, <i>SINGLEGRID</i>	168
FIGURA 104	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODOS OS INTERVALOS, <i>SINGLEGRID</i>	169
FIGURA 105	– TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES, <i>SINGLEGRID</i>	170
FIGURA 106	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES, <i>SINGLEGRID</i>	171
FIGURA 107	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, NOS INTERVALOS I E II, <i>SINGLEGRID</i>	172

FIGURA 108	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, NO INTERVALO III, <i>SINGLEGRID</i>	172
FIGURA 109	– TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, NO INTERVALO III, <i>SINGLEGRID</i>	173
FIGURA 110	– SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES, <i>SINGLEGRID</i>	173
FIGURA 111	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES, <i>SINGLEGRID</i>	174
FIGURA 112	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, NOS INTERVALOS I E II, <i>SINGLEGRID</i>	174
FIGURA 113	– MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR PROPOSTO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, NO INTERVALO IV, <i>SINGLEGRID</i>	175
FIGURA 114	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, NO INTERVALO IV, <i>SINGLEGRID</i>	175
FIGURA 115	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODOS OS INTERVALOS, <i>SINGLEGRID</i>	176
FIGURA 116	– TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 3, COM <i>MULTIGRID</i>	177
FIGURA 117	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES, COM <i>MULTIGRID</i>	178
FIGURA 118	– SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS ASSOCIADO AO <i>MULTIGRID</i> E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 3, PARA TODAS AS ITERAÇÕES, COM <i>MULTIGRID</i>	179

FIGURA 119	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES, COM <i>MULTIGRID</i>	180
FIGURA 120	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 3, EM TODOS OS INTERVALOS, COM <i>MULTIGRID</i>	180
FIGURA 121	– TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1, y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES, COM <i>MULTIGRID</i>	182
FIGURA 122	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1, y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES, COM <i>MULTIGRID</i>	182
FIGURA 123	– SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS ASSOCIADO AO <i>MULTIGRID</i> E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1, y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 3, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	183
FIGURA 124	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1, y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES, COM <i>MULTIGRID</i>	184
FIGURA 125	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1, y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 3, EM TODOS OS INTERVALOS, COM <i>MULTIGRID</i>	184
FIGURA 126	– TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 3, COM <i>MULTIGRID</i> .	185
FIGURA 127	– ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES, COM <i>MULTIGRID</i>	186
FIGURA 128	– SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS ASSOCIADO AO <i>MULTIGRID</i> E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 3, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	187
FIGURA 129	– ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES, COM <i>MULTIGRID</i>	188

FIGURA 130 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 3, EM TODOS OS INTERVALOS, COM <i>MULTIGRID</i>	188
FIGURA B.1 – INTERVALO REAL DE CONVERGÊNCIA PARA A SÉRIE.	199
FIGURA D.2 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	203
FIGURA D.3 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	204
FIGURA D.4 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO I.	204
FIGURA D.5 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO I.	205
FIGURA D.6 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO II.	205
FIGURA D.7 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO II.	206
FIGURA D.8 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO III.	206
FIGURA D.9 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO III.	207
FIGURA D.10 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NOS INTERVALOS I A III.	207
FIGURA D.11 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NOS INTERVALOS I A III.	208
FIGURA D.12 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS CALCULADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NOS INTERVALOS I A III.	208

FIGURA D.13 – ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NOS INTERVALOS I A III.	209
FIGURA D.14 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO IV.	209
FIGURA D.15 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO IV.	210
FIGURA D.16 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO V.	210
FIGURA D.17 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO V.	211
FIGURA D.18 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO V. . . .	211
FIGURA D.19 – SOLUÇÕES COM GS E SOLUÇÕES CORRIGIDAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES.	212
FIGURA D.20 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	212
FIGURA D.21 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NOS INTERVALOS I A III.	213
FIGURA D.22 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO IV.	213
FIGURA D.23 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO V.	214
FIGURA D.24 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	214

FIGURA D.25 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	215
FIGURA D.26 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	216
FIGURA D.27 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO I.	216
FIGURA D.28 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO I.	217
FIGURA D.29 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO II.	217
FIGURA D.30 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO II.	218
FIGURA D.31 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO III.	218
FIGURA D.32 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO III.	219
FIGURA D.33 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NOS INTERVALOS I A III.	219
FIGURA D.34 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NOS INTERVALOS I A III.	220
FIGURA D.35 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS CALCULADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NOS INTERVALOS I A III.	220
FIGURA D.36 – ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NOS INTERVALOS I A III.	221
FIGURA D.37 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO IV.	221

FIGURA D.38 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO IV.	222
FIGURA D.39 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO V.	222
FIGURA D.40 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO V.	223
FIGURA D.41 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO V. . . .	223
FIGURA D.42 – SOLUÇÕES COM GS E SOLUÇÕES CORRIGIDAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES.	224
FIGURA D.43 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	224
FIGURA D.44 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NOS INTERVALOS I A III.	225
FIGURA D.45 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO IV.	225
FIGURA D.46 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO V.	226
FIGURA D.47 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	226
FIGURA D.48 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	227
FIGURA D.49 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	228

FIGURA D.50 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO I.	228
FIGURA D.51 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO I.	229
FIGURA D.52 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO II.	229
FIGURA D.53 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO II.	230
FIGURA D.54 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO II. . .	230
FIGURA D.55 – SOLUÇÕES COM GS E SOLUÇÕES CORRIGIDAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES.	231
FIGURA D.56 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES. . .	231
FIGURA D.57 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO I.	232
FIGURA D.58 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO II.	232
FIGURA D.59 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES. . .	233
FIGURA D.60 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	234
FIGURA D.61 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	235

FIGURA D.62 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO I.	235
FIGURA D.63 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO I.	236
FIGURA D.64 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO II.	236
FIGURA D.65 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO II.	237
FIGURA D.66 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO II. . .	237
FIGURA D.67 – SOLUÇÕES COM GS E SOLUÇÕES CORRIGIDAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES.	238
FIGURA D.68 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES. . .	238
FIGURA D.69 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO I.	239
FIGURA D.70 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO II.	239
FIGURA D.71 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	240
FIGURA D.72 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	241
FIGURA D.73 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO IV.	242

FIGURA D.74 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	242
FIGURA D.75 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 1, NOS INTERVALOS I E II.	243
FIGURA D.76 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO III.	243
FIGURA D.77 – SOLUÇÕES COM GS E SOLUÇÕES CORRIGIDAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES.	244
FIGURA D.78 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES. . .	244
FIGURA D.79 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 1, NOS INTERVALOS I E II.	245
FIGURA D.80 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO IV.	245
FIGURA D.81 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	246
FIGURA D.82 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	247
FIGURA D.83 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO IV.	248
FIGURA D.84 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	248
FIGURA D.85 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 2, NOS INTERVALOS I E II.	249

FIGURA D.86 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO III.	249
FIGURA D.87 – SOLUÇÕES COM GS E SOLUÇÕES CORRIGIDAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES.	250
FIGURA D.88 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES. . .	250
FIGURA D.89 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 2, NOS INTERVALOS I E II.	251
FIGURA D.90 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO IV.	251
FIGURA D.91 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	252
FIGURA E.92 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	253
FIGURA E.93 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, NOS INTERVALOS I E II.	254
FIGURA E.94 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	254
FIGURA E.95 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES. . .	255
FIGURA E.96 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, NOS INTERVALOS I E II.	255
FIGURA E.97 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, NO INTERVALO III.	256

FIGURA E.98 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, EM TODOS OS INTERVALOS.	256
FIGURA E.99 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	257
FIGURA E.100 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, NOS INTERVALOS I E II.	258
FIGURA E.101 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	258
FIGURA E.102 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES.	259
FIGURA E.103 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, NOS INTERVALOS I E II.	259
FIGURA E.104 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, NO INTERVALO III.	260
FIGURA E.105 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, EM TODOS OS INTERVALOS.	260
FIGURA E.106 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	261
FIGURA E.107 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, NO INTERVALO I.	262
FIGURA E.108 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, NO INTERVALO II.	262
FIGURA E.109 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	263

FIGURA E.110 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES. . .	263
FIGURA E.111 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, NO INTERVALO I.	264
FIGURA E.112 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, NO INTERVALO II.	264
FIGURA E.113 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, NO INTERVALO II. . .	265
FIGURA E.114 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\frac{dT}{dx} \big _{x=1}$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, EM TODOS OS INTERVALOS. .	265
FIGURA E.115 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	266
FIGURA E.116 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, NO INTERVALO I.	267
FIGURA E.117 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, NO INTERVALO II.	267
FIGURA E.118 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	268
FIGURA E.119 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES. . .	268
FIGURA E.120 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, NO INTERVALO I.	269
FIGURA E.121 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, NO INTERVALO II.	269

FIGURA E.122 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, NO INTERVALO II. . .	270
FIGURA E.123 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, EM TODOS OS INTERVALOS. . .	270
FIGURA E.124 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	271
FIGURA E.125 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 1, NO INTERVALO II.	272
FIGURA E.126 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES. . .	272
FIGURA E.127 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 1, NO INTERVALO I.	273
FIGURA E.128 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 1, NO INTERVALO II.	273
FIGURA E.129 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 1, EM TODOS OS INTERVALOS. . .	274
FIGURA E.130 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	275
FIGURA E.131 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 2, NO INTERVALO II.	276
FIGURA E.132 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES. . .	276
FIGURA E.133 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 2, NO INTERVALO I.	277

FIGURA E.134 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 2, NO INTERVALO II.	277
FIGURA E.135 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 2, EM TODOS OS INTERVALOS.	278
FIGURA F.136 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES.	279
FIGURA F.137 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, NOS INTERVALOS I E II.	280
FIGURA F.138 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, NO INTERVALO II.	280
FIGURA F.139 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, NO INTERVALO III.	281
FIGURA F.140 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	281
FIGURA F.141 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, INTERVALOS I E II.	282
FIGURA F.142 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, INTERVALO II.	282
FIGURA F.143 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS CALCULADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, NO INTERVALO II.	283
FIGURA F.144 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, NO INTERVALO III.	283
FIGURA F.145 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	284

FIGURA F.146 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES. . .	284
FIGURA F.147 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, NOS INTERVALOS I E II.	285
FIGURA F.148 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, NO INTERVALO III.	285
FIGURA F.149 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	286
FIGURA F.150 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1, y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1.	287
FIGURA F.151 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1, y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, NO INTERVALO I.	288
FIGURA F.152 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1, y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, NO INTERVALO III.	288
FIGURA F.153 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1, y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, NOS INTERVALOS I A III.	289
FIGURA F.154 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1, y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	289
FIGURA F.155 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1, y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, INTERVALOS I A III.	290
FIGURA F.156 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1, y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, INTERVALO III.	290
FIGURA F.157 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1, y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	291
FIGURA F.158 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1, y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES. . .	291

FIGURA F.159 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, NOS INTERVALOS I A III.	292
FIGURA F.160 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, NO INTERVALO IV.	292
FIGURA F.161 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	293
FIGURA F.162 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	294
FIGURA F.163 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, NOS INTERVALOS I A III.	295
FIGURA F.164 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, NO INTERVALO III.	295
FIGURA F.165 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, NO INTERVALO IV.	296
FIGURA F.166 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	296
FIGURA F.167 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, NOS INTERVALOS I A III.	297
FIGURA F.168 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, NO INTERVALO III.	297
FIGURA F.169 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	298
FIGURA F.170 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES.	298
FIGURA F.171 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, NOS INTERVALOS I A III.	299

FIGURA F.172 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, NO INTERVALO IV.	299
FIGURA F.173 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, NO INTERVALO IV.	300
FIGURA F.174 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES. . .	300
FIGURA G.175 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1. . . .	301
FIGURA G.176 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1.	302
FIGURA G.177 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	302
FIGURA G.178 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS ASSOCIADO AO <i>MULTIGRID</i> E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	303
FIGURA G.179 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES. . .	303
FIGURA G.180 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, EM TODOS OS INTERVALOS. .	304
FIGURA G.181 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2. . . .	305
FIGURA G.182 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2.	306
FIGURA G.183 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	306

FIGURA G.184 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS ASSOCIADO AO <i>MULTIGRID</i> E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	307
FIGURA G.185 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES. . .	307
FIGURA G.186 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODOS OS INTERVALOS. .	308
FIGURA G.187 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1, y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1.	309
FIGURA G.188 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1, y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1.	310
FIGURA G.189 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1, y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	310
FIGURA G.190 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS ASSOCIADO AO <i>MULTIGRID</i> E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1, y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	311
FIGURA G.191 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1, y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES. . .	311
FIGURA G.192 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1, y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, EM TODOS OS INTERVALOS. .	312
FIGURA G.193 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1, y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2.	313
FIGURA G.194 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1, y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2.	314
FIGURA G.195 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1, y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	314

FIGURA G.196 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS ASSOCIADO AO <i>MULTIGRID</i> E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	315
FIGURA G.197 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES. . .	315
FIGURA G.198 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODOS OS INTERVALOS. .	316
FIGURA G.199 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1.	317
FIGURA G.200 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1.	318
FIGURA G.201 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	318
FIGURA G.202 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS ASSOCIADO AO <i>MULTIGRID</i> E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	319
FIGURA G.203 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES. . .	319
FIGURA G.204 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, EM TODOS OS INTERVALOS. .	320
FIGURA G.205 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2.	321
FIGURA G.206 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2.	322
FIGURA G.207 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	322

FIGURA G.208 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS ASSOCIADO AO <i>MULTIGRID</i> E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.	323
FIGURA G.209 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS ME- LHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES. . .	323
FIGURA G.210 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS ME- LHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODOS OS INTERVALOS. .	324

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – CASOS DOS PROBLEMAS A SEREM RESOLVIDOS.	97
TABELA 2 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS DOS CASOS DO PROBLEMA 1, PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$	107
TABELA 3 – ERROS NUMÉRICOS DOS CASOS DO PROBLEMA 1 PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$	108
TABELA 4 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VA- RIÁVEL $T(1/2)$, PROBLEMA 1, CASO 3.	109
TABELA 5 – VALORES DAS SOLUÇÕES NA ÚLTIMA ITERAÇÃO DO IN- TERVALO IV DE CADA CASO DO PROBLEMA 1, VARIÁVEL $T(1/2)$	119
TABELA 6 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS DOS CASOS DO PROBLEMA 1 PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$	123
TABELA 7 – ERROS NUMÉRICOS DOS CASOS DO PROBLEMA 1 PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$	123
TABELA 8 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VA- RIÁVEL T_m , PROBLEMA 1, CASO 3.	125
TABELA 9 – VALORES DAS SOLUÇÕES NA ÚLTIMA ITERAÇÃO DO IN- TERVALO I DE CADA CASO DO PROBLEMA 1, VARIÁVEL $grad\ T(1)$	127
TABELA 10 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS DOS CASOS DO PROBLEMA 1 PARA A VARIÁVEL T_m	130
TABELA 11 – ERROS NUMÉRICOS DOS CASOS DO PROBLEMA 1 PARA A VARIÁVEL T_m	130
TABELA 12 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VA- RIÁVEL T_m , PROBLEMA 1, CASO 3.	131
TABELA 13 – VALORES DAS SOLUÇÕES NA ÚLTIMA ITERAÇÃO DO IN- TERVALO III DE CADA CASO DO PROBLEMA 1, VARIÁVEL T_m	134
TABELA 14 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS DOS CASOS DO PROBLEMA 2 PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$	137
TABELA 15 – ERROS NUMÉRICOS DOS CASOS DO PROBLEMA 2 PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$	137

TABELA 16 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$, PROBLEMA 2, CASO 3.	138
TABELA 17 – VALORES DAS SOLUÇÕES NA ÚLTIMA ITERAÇÃO DO INTERVALO II DE CADA CASO DO PROBLEMA 2, VARIÁVEL $T(1/2)$	140
TABELA 18 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS DOS CASOS DO PROBLEMA 2 PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$	143
TABELA 19 – ERROS NUMÉRICOS DOS CASOS DO PROBLEMA 2 PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$	143
TABELA 20 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA AS VARIÁVEIS T_m E $grad\ T(1)$, PROBLEMA 2.	145
TABELA 21 – VALORES DAS SOLUÇÕES NA ÚLTIMA ITERAÇÃO DO INTERVALO I DE CADA CASO DO PROBLEMA 2, VARIÁVEL $grad\ T(1)$	147
TABELA 22 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS DOS CASOS DO PROBLEMA 2 PARA A VARIÁVEL T_m	149
TABELA 23 – ERROS NUMÉRICOS DOS CASOS DO PROBLEMA 2 PARA A VARIÁVEL T_m	150
TABELA 24 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL T_m , PROBLEMA 2.	151
TABELA 25 – VALORES DAS SOLUÇÕES NA ÚLTIMA ITERAÇÃO DO INTERVALO I DE CADA CASO DO PROBLEMA 2, VARIÁVEL T_m	151
TABELA 26 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS DOS CASOS DO PROBLEMA 3 PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, <i>SINGLEGRID</i>	155
TABELA 27 – ERROS NUMÉRICOS DOS CASOS DO PROBLEMA 3 PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, <i>SINGLEGRID</i>	155
TABELA 28 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, PROBLEMA 3, CASO 3, <i>SINGLEGRID</i>	156
TABELA 29 – VALORES DAS SOLUÇÕES NA ÚLTIMA ITERAÇÃO DO INTERVALO II DE CADA CASO DO PROBLEMA 3, VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, <i>SINGLEGRID</i>	160
TABELA 30 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS DOS CASOS DO PROBLEMA 3 PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1,y)$, <i>SINGLEGRID</i>	163

TABELA 31 – ERROS NUMÉRICOS DOS CASOS DO PROBLEMA 3 PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$, <i>SINGLEGRID</i>	164
TABELA 32 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$, PROBLEMA 3, CASO 2, <i>SINGLEGRID</i> . . .	164
TABELA 33 – VALORES DAS SOLUÇÕES NA ÚLTIMA ITERAÇÃO DO INTERVALO II DE CADA CASO DO PROBLEMA 3, VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$, <i>SINGLEGRID</i>	165
TABELA 34 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS DOS CASOS DO PROBLEMA 3 PARA A VARIÁVEL T_m , <i>SINGLEGRID</i>	169
TABELA 35 – ERROS NUMÉRICOS DOS CASOS DO PROBLEMA 3 PARA A VARIÁVEL T_m , <i>SINGLEGRID</i>	170
TABELA 36 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL T_m , PROBLEMA 3, CASO 2, <i>SINGLEGRID</i>	170
TABELA 37 – VALORES DAS SOLUÇÕES NA ÚLTIMA ITERAÇÃO DO INTERVALO II DE CADA CASO DO PROBLEMA 3, VARIÁVEL T_m , <i>SINGLEGRID</i>	171
TABELA 38 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS DOS CASOS DO PROBLEMA 3 PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, COM <i>MULTIGRID</i>	177
TABELA 39 – ERROS NUMÉRICOS DOS CASOS DO PROBLEMA 3 PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, COM <i>MULTIGRID</i>	177
TABELA 40 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, PROBLEMA 3, CASO 3, COM <i>MULTIGRID</i> . . .	178
TABELA 41 – VALORES DAS SOLUÇÕES NA ÚLTIMA ITERAÇÃO DO INTERVALO II DE CADA CASO DO PROBLEMA 3, VARIÁVEL $T(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, COM <i>MULTIGRID</i>	179
TABELA 42 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS DOS CASOS DO PROBLEMA 3 PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$, COM <i>MULTIGRID</i>	181
TABELA 43 – ERROS NUMÉRICOS DOS CASOS DO PROBLEMA 3 PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$, COM <i>MULTIGRID</i>	181
TABELA 44 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$, PROBLEMA 3, COM <i>MULTIGRID</i>	181
TABELA 45 – VALORES DAS SOLUÇÕES NA ÚLTIMA ITERAÇÃO DO INTERVALO II DE CADA CASO DO PROBLEMA 3, VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$, COM <i>MULTIGRID</i>	183

TABELA 46 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS DOS CASOS DO PROBLEMA 3 PARA A VARIÁVEL T_m , COM <i>MULTIGRID</i>	185
TABELA 47 – ERROS NUMÉRICOS DOS CASOS DO PROBLEMA 3 PARA A VARIÁVEL T_m , COM <i>MULTIGRID</i>	185
TABELA 48 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL T_m , PROBLEMA 3, COM <i>MULTIGRID</i>	186
TABELA 49 – VALORES DAS SOLUÇÕES NA ÚLTIMA ITERAÇÃO DO INTERVALO II DE CADA CASO DO PROBLEMA 3, VARIÁVEL T_m , COM <i>MULTIGRID</i>	187
TABELA D.1–INTERVALOS DE VARIAÇÃO DE ψ PARA O CASO 1 DO PROBLEMA 1, VARIÁVEL $T(1/2)$	203
TABELA D.2–INTERVALOS DE VARIAÇÃO DE ψ PARA O CASO 2 DO PROBLEMA 1, VARIÁVEL $T(1/2)$	215
TABELA D.3–INTERVALOS DE VARIAÇÃO DE ψ PARA O CASO 1 DO PROBLEMA 1, VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$	227
TABELA D.4–INTERVALOS DE VARIAÇÃO DE ψ PARA O CASO 2 DO PROBLEMA 1, VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$	234
TABELA D.5–INTERVALOS DE VARIAÇÃO DE ψ PARA O CASO 1 DO PROBLEMA 1, VARIÁVEL T_m	241
TABELA D.6–INTERVALOS DE VARIAÇÃO DE ψ PARA O CASO 2 DO PROBLEMA 1, VARIÁVEL T_m	247
TABELA E.7–INTERVALOS DE VARIAÇÃO DE ψ PARA O CASO 1 DO PROBLEMA 2, VARIÁVEL $T(1/2)$	253
TABELA E.8–INTERVALOS DE VARIAÇÃO DE ψ PARA O CASO 2 DO PROBLEMA 2, VARIÁVEL $T(1/2)$	257
TABELA E.9–INTERVALOS DE VARIAÇÃO DE ψ PARA O CASO 1 DO PROBLEMA 2, VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$	261
TABELA E.10–INTERVALOS DE VARIAÇÃO DE ψ PARA O CASO 2 DO PROBLEMA 2, VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$	266
TABELA E.11–INTERVALOS DE VARIAÇÃO DE ψ PARA O CASO 1 DO PROBLEMA 2, VARIÁVEL T_m	271
TABELA E.12–INTERVALOS DE VARIAÇÃO DE ψ PARA O CASO 2 DO PROBLEMA 2, VARIÁVEL T_m	275
TABELA F.13–INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, PROBLEMA 3.	279

TABELA F.14—INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VA- RIÁVEL $T(\frac{1}{2})$, PROBLEMA 3.	287
TABELA F.15—INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VA- RIÁVEL T_m , PROBLEMA 3.	294
TABELA G.16—INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VA- RIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, PROBLEMA 3, COM <i>MULTIGRID</i>	301
TABELA G.17—INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VA- RIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, PROBLEMA 3, COM <i>MULTIGRID</i>	305
TABELA G.18—INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VA- RIÁVEL $grad\ T(1, y)$, PROBLEMA 3, COM <i>MULTIGRID</i>	309
TABELA G.19—INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VA- RIÁVEL $grad\ T(1, y)$, PROBLEMA 3, COM <i>MULTIGRID</i>	313
TABELA G.20—INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VA- RIÁVEL T_m , PROBLEMA 3, COM <i>MULTIGRID</i>	317
TABELA G.21—INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VA- RIÁVEL T_m , PROBLEMA 3, COM <i>MULTIGRID</i>	321

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ASME	<i>American Society of Mechanical Engineers</i>
CDS	<i>Central Differencing Scheme</i>
CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i>
CS	<i>Correction Scheme</i>
DDS	<i>Downstream Differencing Scheme</i>
FAS	<i>Full Approximation Scheme</i>
FMG	<i>Full Multigrid</i>
FP	Estimador de Ferziger e Peric
GS	Gauss-Seidel <i>solver</i>
LU	<i>Lower and Upper</i>
MDF	Método das Diferenças Finitas
MER	Múltiplas Extrapolações de Richardson
MSIP	<i>Modified Strongly Implicit Procedure</i>
PDMA	<i>Pentadiagonal Matrix Algorithm</i>
RE	Richardson <i>Extrapolation</i>
SIMPLEC	<i>Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations-Consistent</i>
SOR	<i>Successive Over-Relaxation</i>
TDMA	<i>Tridiagonal Matrix Algorithm solver</i>
UDS	<i>Upstream Differencing Scheme</i>
V&V	<i>Verification and Validation</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Matriz de coeficientes de um sistema de equações
a_n	Coefficientes generalizados de Fourier
b	Termo independente de um sistema de equações
c_P	Calor específico à pressão constante $[J/(kg.K)]$
D	Máxima diferença absoluta entre elementos correspondentes de vetores sucessivos
E_π	Erro de arredondamento
E_h	Erro de discretização
E_x	Erro experimental
E_k	Erro de iteração
E_m	Erro de modelagem
E_n	Erro numérico
E_p	Erro de programação
$E^{(k)}$	Erro relativo entre duas iterações
h	Espaçamento da malha unidimensional $[m]$
h_x	Espaçamento da malha bidimensional na direção x $[m]$
h_y	Espaçamento da malha bidimensional na direção y $[m]$
k	Iteração atual
k	Condutividade térmica do material $[W/(m.K)]$
L	Comprimento do domínio unidimensional $[m]$
L_{max}	Número máximo de níveis de malhas possíveis no <i>multigrid</i>
L_x	Comprimento do domínio bidimensional na direção x $[m]$
L_y	Comprimento do domínio bidimensional na direção y $[m]$
l	Magnitude do autovalor de uma matriz
N	Número de elementos da malha unidimensional

N_x	Número de elementos da malha bidimensional na direção x
N_y	Número de elementos da malha bidimensional na direção y
p_L	Ordem assintótica do erro de discretização
p_E^*	Ordem efetiva equivalente do erro de iteração
$p_{E_h}^*$	Ordem efetiva equivalente do erro de discretização
p_U	Ordem aparente do erro de iteração
p_U^*	Ordem aparente equivalente do erro de iteração
$p_{U_h}^*$	Ordem aparente equivalente do erro de discretização
p_V	Ordens verdadeiras do erro de discretização
Pe	Número de Péclet
$\dot{q}$	Taxa de geração de energia
R_k	Resíduo na k-ésima iteração
Re	Número de Reynolds
S	Termo fonte
T	Temperatura [$^{\circ}C$]
T_m	Temperatura média [$^{\circ}C$]
U	Estimativa do erro da solução numérica
$\mathbf{x}$	Vetor solução
$\mathbf{x}_j$	J-ésima componente do vetor solução
$\mathbf{x}^{(k)}$	Vetor solução na k-ésima iteração

Legras Gregas

α	difusividade térmica [m^2/s]
ε	Erro de truncamento
θ	Efetividade de uma estimativa de erro

Λ	Função contínua que representa a solução analítica exata da variável dependente
$\Lambda^{(n)}$	N-ésima derivada da solução analítica exata
Λ_m	Solução analítica exata do valor médio de Λ
λ	Solução numérica da variável dependente
λ_1	Raio espectral da matriz de iteração (autovalor de maior magnitude)
λ_n	Autovalores da matriz A
$\lambda_{UDS}^{(1)}$	Solução numérica da primeira derivada da variável dependente obtida com um ponto a montante
$\lambda_{DDS}^{(1)}$	Solução numérica da primeira derivada da variável dependente obtida com um ponto a jusante
$\lambda_{CDS-2}^{(1)}$	Solução numérica da primeira derivada da variável dependente obtida com diferença central de dois pontos
$\lambda_{UDS-2}^{(1)}$	Solução numérica da primeira derivada da variável dependente obtida com dois pontos a montante
$\lambda_{DDS-2}^{(1)}$	Solução numérica da primeira derivada da variável dependente obtida com dois pontos a jusante
$\lambda_{CDS-2}^{(2)}$	Solução numérica da segunda derivada da variável dependente obtida com diferença central de dois pontos
λ_m	Solução numérica do valor médio de λ
μ	Viscosidade do fluido [$Pa.s$]
ρ	Massa específica [kg/m^3]
Φ	Solução numérica de uma variável de interesse obtida diretamente
Φ_a	Solução analítica de uma variável de interesse
ϕ_∞	Solução estimada de uma variável de interesse
ϕ_k	Solução numérica de uma variável de interesse na iteração atual k
$(\phi_\infty)_k$	Solução corrigida de uma variável de interesse na iteração atual k
ϕ_{it2}	Solução numérica de uma variável de interesse na última iteração do melhor intervalo para estimativas

χ_k	Diferença entre duas iterações sucessivas
ψ	Razão de convergência
ψ_n	Autovetores da matriz A
σ	Número de iterações internas para o <i>solver</i> GS no <i>multigrid</i>
Ω	Domínio de cálculo
ω	Parâmetro de relaxação

Subscritos

i	Nó de referência na direção do eixo x
$i + 1$	Nó à direita do nó de referência i
$i - 1$	Nó à esquerda do nó de referência i
j	Nó de referência na direção do eixo y
$j + 1$	Nó acima do nó de referência j
$j - 1$	Nó abaixo do nó de referência j

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	52
1.1	Delimitação do problema	53
1.2	Importância do trabalho	54
1.3	Objetivos	55
1.4	Estrutura do trabalho	56
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	58
2.1	Verificação e validação	58
2.2	Estimadores de erros de iteração	59
2.2.1	O estimador de Ferziger e Perić	60
2.2.2	O estimador de Roy e Blottner	64
2.2.3	O estimador empírico de Martins e Marchi	65
2.3	Fechamento do capítulo 2	68
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	69
3.1	Método de discretização: diferenças finitas	69
3.1.1	Aproximações para a variável local	70
3.1.2	Aproximação para a variável global	73
3.2	<i>Solvers</i>	74
3.2.1	<i>Tridiagonal Matrix Algorithm</i> - TDMA	76
3.2.2	Gauss-Seidel	76
3.3	Convergência	77
3.4	Método <i>multigrid</i>	79
3.5	Fontes de erros numéricos	81
3.5.1	Erro de discretização (E_h)	82
3.5.2	Erro de arredondamento (E_π)	84
3.5.3	Erro de programação (E_p)	84
3.5.4	Erro de iteração (E_k)	85
3.6	Fechamento do capítulo 3	85
4	METODOLOGIA	86
4.1	Modelos matemáticos	86
4.1.1	Problema 1: equação de Poisson 1D	86
4.1.2	Problema 2: equação de advecção-difusão 1D	88
4.1.3	Problema 3: equação de Laplace 2D	89
4.2	Modelos numéricos	90
4.2.1	Problema 1: equação de Poisson 1D	90

4.2.2	Problema 2: Equação de Advecção-Difusão 1D	91
4.2.3	Problema 3: Equação de Laplace 2D	91
4.3	Dedução do estimador proposto	93
4.3.1	Comparações entre o estimador proposto e os principais estimadores presentes na literatura	95
4.4	Parâmetros numéricos e ambiente computacional	96
4.5	Intervalos para análise do comportamento do erro de iteração .	98
4.6	Pós-processamento: redução no erro de iteração e melhoria das suas estimativas	103
4.7	Procedimentos para usuários	104
4.7.1	Procedimento prático para obtenção de estimativas	104
4.7.2	Procedimento para estimativa e redução de erros de iteração	105
4.7.3	Procedimento para estimativa de erros de iteração mais acuradas	105
4.7.4	Procedimento completo para pesquisa em erros de iteração	105
4.8	Fechamento do capítulo 4	106
5	PROBLEMA 1: EQUAÇÃO DE POISSON	107
5.1	Variável 1: valor da função (temperatura) no ponto central do domínio de cálculo $T(1/2)$	107
5.2	Variável 2: gradiente no contorno leste (direito) do domínio de cálculo $grad T(1)$	123
5.3	Variável 3: valor médio da função (temperatura média) T_m . . .	130
5.4	Fechamento do capítulo 5	136
6	PROBLEMA 2: EQUAÇÃO DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO . .	137
6.1	Variável 1: valor da função (temperatura) no ponto central do domínio de cálculo $T(1/2)$	137
6.2	Variável 2: gradiente no contorno leste (direito) do domínio de cálculo $grad T(1)$	143
6.3	Variável 3: valor médio da função (temperatura média) T_m . . .	149
6.4	Fechamento do capítulo 6	153
7	PROBLEMA 3: EQUAÇÃO DE LAPLACE	155
7.1	Resultados com <i>singlegrid</i>	155
7.1.1	Variável 1: valor da função (temperatura) no ponto central do domínio de cálculo $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	155
7.1.2	Variável 2: gradiente no contorno leste (direito) do domínio de cálculo $grad T(1, y)$	163
7.1.3	Variável 3: valor médio da função (temperatura média) T_m	169
7.2	Resultados com <i>multigrid</i>	176

7.2.1	Variável 1: valor da função (temperatura) no ponto central do domínio de cálculo $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	176
7.2.2	Variável 2: gradiente no contorno leste (direito) do domínio de cálculo $grad T(1, y)$	181
7.2.3	Variável 3: valor médio da função (temperatura média) T_m	185
7.3	Fechamento do capítulo 7	189
8	CONCLUSÃO	190
8.1	Contribuições	191
8.2	Trabalhos futuros	191
	REFERÊNCIAS	193
	APÊNDICES	196
	APÊNDICE A – DEDUÇÕES DE p_E E p_E^*	197
	APÊNDICE B – SÉRIE GEOMÉTRICA	199
	APÊNDICE C – RELAÇÕES ENTRE ψ E p_U E p_U^*	201
	APÊNDICE D – RESULTADOS DO PROBLEMA 1, CASOS	
	1 E 2	203
D.1	Variável 1: valor da função (temperatura) no ponto central do domínio de cálculo $T(1/2)$	203
D.1.1	Caso 1	203
D.1.2	Caso 2	215
D.2	Variável 2: gradiente no contorno leste (direito) do domínio de cálculo $grad T(1)$	227
D.2.1	Caso 1	227
D.2.2	Caso 2	234
D.3	Variável 3: valor médio da função (temperatura média) T_m	241
D.3.1	Caso 1	241
D.3.2	Caso 2	247
	APÊNDICE E – RESULTADOS DO PROBLEMA 2, CASOS	
	1 E 2	253
E.1	Variável 1: valor da função (temperatura) no ponto central do domínio de cálculo $T(1/2)$	253
E.1.1	Caso 1	253

E.1.2	Caso 2	257
E.2	Variável 2: gradiente no contorno leste (direito) do domínio de cálculo $\text{grad } T(1)$	261
E.2.1	Caso 1	261
E.2.2	Caso 2	266
E.3	Variável 3: valor médio da função (temperatura média) T_m . . .	271
E.3.1	Caso 1	271
E.3.2	Caso 2	275
 APÊNDICE F – RESULTADOS DO PROBLEMA 3, CASO 1		279
F.1	Variável 1: valor da função (temperatura) no ponto central do domínio de cálculo $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, sem <i>multigrid</i>	279
F.1.1	Caso 1	279
F.2	Variável 2: gradiente no contorno leste (direito) do domínio de cálculo $\text{grad } T(1, y)$, sem <i>multigrid</i>	287
F.2.1	Caso 1	287
F.3	Variável 3: valor médio da função (temperatura média) T_m, sem <i>multigrid</i>	294
F.3.1	Caso 1	294
 APÊNDICE G – RESULTADOS DO PROBLEMA 3 COM MG,		
CASOS 1 E 2		301
G.1	Variável 1: valor da função (temperatura) no ponto central do domínio de cálculo $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, com <i>multigrid</i>	301
G.1.1	Caso 1	301
G.1.2	Caso 2	305
G.2	Variável 2: gradiente no contorno leste (direito) do domínio de cálculo $\text{grad } T(1, y)$, com <i>multigrid</i>	309
G.2.1	Caso 1	309
G.2.2	Caso 2	313
G.3	Variável 3: valor médio da função (temperatura média) T_m . . .	317
G.3.1	Caso 1	317
G.3.2	Caso 2	321

1 INTRODUÇÃO

A resolução da maioria dos problemas de engenharia usa uma abordagem com duas vertentes, a resolução por métodos experimentais e a resolução por métodos teóricos.

Os métodos experimentais modernos tiveram início com os trabalhos de Galileu Galilei no século XVII. Esses métodos trabalham com o fenômeno físico real, reproduzindo-o em laboratório com o uso de modelos em escala reduzida, ou até mesmo em campo, em escala real. Equipamentos de medição são usados para mensurar as grandezas de interesse. Esses métodos estão sujeitos a erros experimentais.

Os métodos teóricos tiveram início também no século XVII com o livro *Principia* (1687) de Isaac Newton e utilizam modelos matemáticos para representar os fenômenos físicos. Muitos dos princípios ou leis que regem o comportamento do mundo físico são proposições ou relações envolvendo a taxa segundo a qual determinado fenômeno acontece. Expressas em linguagem matemática, essas relações são equações e as taxas são derivadas. Equações contendo derivadas são chamadas de equações diferenciais (BOYCE; DIPRIMA, 2015). Portanto, para compreender e investigar problemas envolvendo fenômenos como: o movimento de fluidos, o fluxo de corrente elétrica, a dissipação de calor em sólidos, a propagação e detecção de ondas sísmicas, entre outros, é necessário resolver essas equações.

Um modelo matemático que descreve um fenômeno físico é composto por equações diferenciais, chamadas equações governantes, e suas condições iniciais e de contorno. Esse modelo é obtido por meio de uma abordagem chamada modelagem matemática, que, de acordo com Hoffmann (2015), pode ser dividida em quatro estágios. O primeiro estágio é a formulação do modelo: dada uma situação real, adota-se um número de hipóteses simplificadoras para que o problema possa ser formulado matematicamente, identificam-se as variáveis responsáveis pela variação do sistema e incluem-se quaisquer leis empíricas aplicáveis ao sistema (ZILL, 2012). Essas leis podem ser conhecidas ou até mesmo especulativas.

O segundo passo consiste em utilizar métodos matemáticos para resolver o modelo. Esses métodos podem ser analíticos ou numéricos e serão especificados a seguir. Depois de formular e resolver o modelo matemático é o momento de interpretar os resultados obtidos e analisar se o modelo reflete corretamente a realidade. Nesse terceiro estágio pode-se fazer uma análise de sensibilidade, alterando-se os valores das variáveis para observar o comportamento do modelo proposto. No último e quarto estágio, de posse de novos dados vindos de novas observações do fenômeno, por exemplo, testa-se o modelo a fim de averiguar se os resultados da análise de sensibilidade refletem o comportamento do fenômeno real. Se isso não ocorrer, as hipóteses do modelo são modificadas e o processo de modelagem é repetido. Mais informações a respeito de análise de sensibilidade podem ser encontradas em ASME (2009).

Quanto aos métodos matemáticos que podem ser utilizados para resolver o modelo, podemos separá-los em analíticos e numéricos. Os métodos analíticos consistem em técnicas de integração, expansões em séries, transformadas, entre outros, dos quais obtém-se soluções analíticas exatas que são contínuas sobre o domínio de cálculo e em forma fechada. Esses métodos apresentam erros de modelagem e aplicam-se apenas a problemas com hipóteses e condições de contorno simplificadas, que não condizem com os problemas reais. Para resolver problemas mais realísticos, com maior número de equações, presença de não linearidades e geometrias complicadas, por exemplo, são utilizados métodos numéricos aproximados (CHAPRA; CANALE, 2008).

Para Roache (2009), o precursor dos métodos numéricos modernos é Richardson (1910), que resolveu, entre outras, a equação de Laplace bidimensional utilizando cálculos manuais, com a ajuda de computadores humanos. Os métodos numéricos são ferramentas pelas quais os problemas matemáticos são formulados de modo que possam ser resolvidos com operações aritméticas (CHAPRA; CANALE, 2008). Com o emprego de computadores são obtidas soluções discretas, isto é, restritas a pontos específicos do domínio de cálculo, ou coeficientes de expansões em séries truncadas. Esses métodos, por sua vez, apresentam erros de modelagem e erros numéricos.

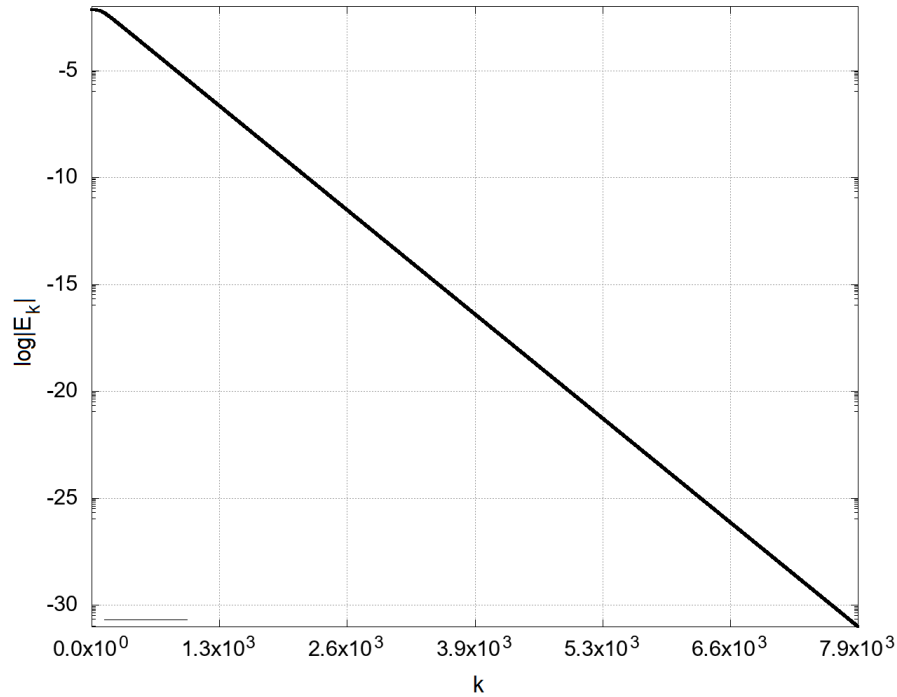
1.1 Delimitação do problema

A simulação numérica, como é chamada a implementação dos códigos computacionais para resolver problemas, começou a se desenvolver na década de 40, com o advento do computador digital e surgiu como uma alternativa para a análise do movimento dos fluidos. Essa área recebeu o nome de Dinâmica dos Fluidos Computacional (em inglês, *Computational Fluid Dynamics* - CFD) e estuda métodos computacionais para a simulação de fenômenos que envolvem fluidos em movimento com ou sem troca de calor. Isso inclui tanto o movimento dos fluidos ao redor de um corpo, por exemplo, um avião ou um submarino, como dentro de tubulações ou turbinas (FORTUNA, 2000). As simulações retornam distribuições de velocidades, pressões e temperaturas na região do escoamento, úteis para otimizar projetos, reduzindo custos operacionais e melhorando o desempenho de sistemas.

Porém, como as soluções numéricas podem ser afetadas por erros numéricos, sejam eles de truncamento, iteração, arredondamento e até mesmo de programação, buscam-se alternativas para estimá-los e reduzi-los. Nesta tese, é apresentado um procedimento híbrido para redução e estimativa do erro de iteração (E_k). Esse tipo de erro surge ao empregar-se métodos iterativos para resolver os sistemas de equações resultantes dos problemas discretizados e é definido por Ferziger e Perić (2002) como a diferença entre a solução direta das equações discretizadas e a solução numérica em determinada iteração (Eq. (2.4) da seção ??). Espera-se que, no decorrer das iterações (k), o erro de iteração

(E_k) diminua, como representado na FIGURA 1. Contudo, só é possível calculá-lo quando o problema possui solução analítica conhecida, nos demais casos é necessário estimá-lo.

FIGURA 1 – COMPORTAMENTO APRESENTADO PELOS ERROS DE ITERAÇÃO AO LONGO DO CICLO ITERATIVO.



Fonte: a autora (2020).

Outras fontes de erros iterativos são a utilização de métodos *multigrid* e a resolução, de forma segregada, de sistemas de equações acopladas.

1.2 Importância do trabalho

Considerando-se que são poucos os casos em que é possível resolver as equações diferenciais que representam um problema de engenharia exatamente, faz-se necessário o uso de métodos numéricos para resolvê-los. Sabe-se que todo método numérico produz soluções aproximadas, pois várias aproximações são feitas a fim de obter o sistema discretizado de equações a ser resolvido com o auxílio de um computador. Para resolução desses sistemas são utilizados, geralmente, métodos iterativos. Todo o processo está sujeito a erros numéricos de vários tipos, sejam eles de discretização, iteração, programação e arredondamento.

Assim, como toda solução numérica contém erros, é importante saber a magnitude desses erros e qual o nível aceitável de erro em cada aplicação particular. Para Ferziger e Perić (2002), é tão importante saber o quão adequada é a solução para uma determinada aplicação particular quanto obter essa solução.

A quantificação dos erros numéricos faz-se por meio do uso de estimadores de erros. Segundo Martins (2002), a utilização de estimadores faz-se necessária em CFD devido à grande precisão exigida nos cálculos.

De acordo com Marchi (2001), é importante estimar os erros numéricos pois, quando o erro é maior que o aceitável, a confiabilidade da solução numérica fica comprometida; e, quando o erro é menor que o necessário, recursos computacionais como tempo de processamento e quantidade de memória, são desperdiçados. As estimativas de erros também são importantes nos processos de validação de códigos, otimização do uso da malha (domínio computacional) e para evitar interpretações errôneas de resultados numéricos.

Sabe-se que, quando se faz uso de métodos iterativos para a resolução de sistemas, a solução numérica está sujeita a erros iterativos. Esses métodos ainda necessitam de um critério adequado de parada. Ferziger e Perić (2002) afirmam que, saber quando parar um processo iterativo é crucial do ponto de vista da eficiência computacional, e, como regra, os erros de iteração devem ser uma ordem de magnitude menores que os erros de discretização. Um erro comum é olhar a magnitude da diferença entre duas iterações sucessivas e parar a simulação quando elas diferirem em um certo número pequeno. Essa diferença pode até ser pequena, mas isso pode ocorrer porque as iterações estão convergindo devagar enquanto que o erro de iteração pode ser enorme. Também é importante saber que, em malhas grossas, nas quais o erro de discretização é grande, são permitidos erros de iteração também grandes; e em malhas mais finas, a tolerância para erros é menor.

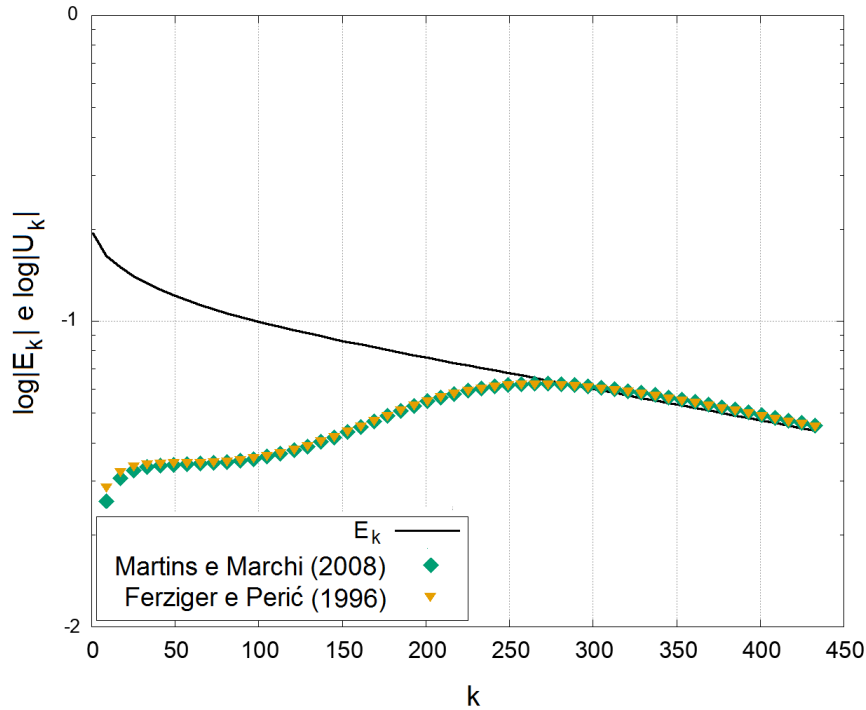
No desenvolvimento de estimadores de erros de iteração destacam-se os trabalhos de Ferziger e Perić (1996), Kim, Anand e Rhode (1998), Roy e Blottner (2001) e Martins e Marchi (2008). Em todos os trabalhos mencionados os estimadores não possuem um bom desempenho na faixa inicial das iterações, isto é, apresentam discordância entre a estimativa obtida (U_k) e o erro verdadeiro (E_k) de iteração. Pode-se observar esse comportamento na FIGURA 2.

Assim, nesse trabalho, propõe-se o aperfeiçoamento das técnicas existentes para se estimar erros envolvidos em processos iterativos, melhorando-se as estimativas dessa primeira faixa de iterações. Para isso, as estimativas obtidas por meio do estimador proposto são utilizadas no cálculo de soluções corrigidas, com erros de iteração reduzidos. Essas soluções corrigidas, por sua vez, são utilizadas para recalculas as estimativas de erros de iteração, melhorando a sua acurácia.

1.3 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é aperfeiçoar as técnicas já existentes para estimativas de erros em processos iterativos na resolução de problemas de transferência de calor. Para isso, os objetivos específicos são:

FIGURA 2 – COMPORTAMENTO APRESENTADO PELO ERRO DE ITERAÇÃO E PELAS ESTIMATIVAS DO ERRO DE ITERAÇÃO OBTIDAS POR MEIO DO ESTIMADOR EMPÍRICO DE MARTINS E MARCHI (2008) E DO ESTIMADOR DE FERZIGER E PERIĆ (1996) NO INÍCIO DO PROCESSO ITERATIVO.



Fonte: a autora (2020).

- apresentar um novo estimador de erros de iteração, baseado no estimador de Martins e Marchi (2008);
- estabelecer uma metodologia adequada para o uso desse novo estimador;
- analisar o desempenho do estimador proposto nas diferentes fases do processo iterativo;
- utilizar as estimativas obtidas para calcular soluções corrigidas, com reduzidos erros de iteração; e
- com base nas soluções recalculadas, obter novas e mais acuradas estimativas para as faixas iniciais de iterações do processo iterativo.

1.4 Estrutura do trabalho

O presente trabalho está estruturado da seguinte maneira: no capítulo 2 é feita uma revisão do estado da arte, começando-se por um histórico das técnicas de Verificação e Validação, seguido pela apresentação dos principais estimadores de erros de iteração presentes na literatura. No capítulo 3 são descritos os métodos de discretização, os *solvers*

e critérios de convergência utilizados, bem como o método de aceleração de convergência (*multigrid*) utilizado na resolução da equação de Laplace. As fontes de erros decorrentes das simulações numéricas também são descritas nesse capítulo. No capítulo 4 são apresentados os modelos matemáticos e numéricos de cada problema proposto, a dedução do novo estimador e a metodologia empregada, as estratégias utilizadas para melhoria das soluções e, posteriormente, das estimativas e também alguns procedimentos para usuários. Nos capítulos 5, 6 e 7, constam os resultados e discussões referentes às equações de Poisson, advecção-difusão e Laplace, respectivamente. Finalmente, o capítulo 8 é dedicado à conclusão desse trabalho e à proposição de trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo é apresentado o estado da arte dos assuntos pertinentes ao trabalho. Primeiramente, diferencia-se verificação e validação, a partir da visão de seus autores mais relevantes. Na sequência, apresentam-se os principais estimadores de erro de iteração presentes na literatura e suas características.

2.1 Verificação e validação

Uma das principais preocupações em CFD é avaliar a acurácia de uma simulação computacional. Para isso, são utilizadas técnicas de Verificação e Validação (V&V). Após ser definido o modelo matemático a ser utilizado e implementá-lo de acordo com os métodos numéricos escolhidos, a simulação retorna, com um certo grau de acurácia, uma solução para as equações. Segundo Roache (2009), a determinação desse grau de acurácia é o processo de verificação. Já a validação mede o quão bem as equações resolvidas e a solução obtida representam o problema físico descrito pelas equações, ou seja, qual o grau de representatividade do modelo escolhido em relação ao mundo real (FORTUNA, 2000).

Pode-se diferenciar verificação e validação de várias outras maneiras, por exemplo, fazendo uma distinção entre a matemática e a ciência. Para Roache (2009), a matemática é uma ferramenta da ciência, frequentemente, a linguagem predominante da ciência, e a verificação é vista como uma atividade essencialmente matemática, inerente à análise numérica. Já a validação é, estrita e essencialmente, uma atividade da ciência e da engenharia, abrangendo a física, a química, a dinâmica de fluidos, entre outras.

De acordo com as normas da ASME (2009) (do inglês, *American Society of Mechanical Engineers*), a validação deve ser precedida pela verificação do código e da solução. Por meio da verificação do código se estabelece que o modelo matemático adotado é resolvido acuradamente, isto é, o código foi implementado corretamente. A verificação da solução, por sua vez, estima a acurácia numérica de um cálculo particular. Isto é, enquanto a verificação do código avalia a correção do mesmo e envolve a evolução do erro para uma solução conhecida, a verificação da solução envolve estimativa do erro, uma vez que a solução exata do problema pode ser desconhecida.

A verificação do código pode ser feita por meio de testes de convergência, utilização de soluções fabricadas (ROACHE, 2009) ou por comparações com os chamados *benchmarks*. O melhor *benchmark* é uma solução analítica exata, isto é, uma solução expressa em funções primitivas simples, como senos, cossenos, exponenciais, entre outras (ASME, 2009). Porém, para verificação de códigos de problemas mais complicados, governados por equações de Navier-Stokes, por exemplo, isso não é possível, já que soluções exatas são conhecidas apenas para problemas relativamente simples. De acordo com a ASME (2009), na atualidade,

existem abordagens baseadas em testes de convergência de malha que se mostram efetivos para avaliar a acurácia do código, como o método das soluções fabricadas proposto por Roache (2009).

Depois de concluir e documentar a verificação do código, procede-se à verificação da solução. O refinamento sistemático da malha é o pilar do processo de verificação, que, no contexto da verificação da solução proporciona uma estimativa do erro cometido. O método mais usado para obter o erro estimado é a extrapolação de Richardson (*em inglês*, *Richardson Extrapolation* - RE).

Estimativas de erros e estimativas de incertezas estão relacionadas, porém, não são equivalentes. Uma estimativa de erro fornece uma melhoria do resultado de um cálculo. Por exemplo, se o resultado de um cálculo para o coeficiente de transferência de calor usando uma malha particular é f e a estimativa de erro é ϵ , então um valor melhorado para f é $f - \epsilon$. Por outro lado, uma estimativa da incerteza $U_{x\%}$, estabelece que o intervalo $f \pm U_{x\%}$ é uma faixa de valores dentro da qual o valor verdadeiro f_v está, com probabilidade de $x\%$. Em geral, tanto para experimentos quanto para simulações computacionais trabalha-se com um grau de confiança de aproximadamente 95% (ASME, 2009).

2.2 Estimadores de erros de iteração

Para avaliar a qualidade de uma estimativa de erro, são analisadas duas características: confiabilidade e acurácia. Para Zhu e Zienkiewicz (1990), a efetividade θ de uma estimativa de erro é dada pela razão entre a estimativa (U) e o erro (E):

$$\theta = \frac{U}{E}. \quad (2.1)$$

Quando $\theta = 1$, ou seja, $U = E$, diz-se que a estimativa de erro é ideal. Nesse caso, a estimativa é confiável e tem a maior acurácia possível.

Uma estimativa de erro é dita confiável quando a magnitude da estimativa é maior que a magnitude do erro e ambas têm o mesmo sinal (MARCHI, 2001), assim:

$$\theta \geq 1. \quad (2.2)$$

Diz-se que uma estimativa não é confiável se $0 < \theta < 1$, pois, nesse caso, a estimativa subestima o erro, mas ambos possuem o mesmo sinal. Se $\theta < 0$, o que significa que estimativa e erro têm sinais opostos, tem-se a pior previsão do erro.

Quanto à acurácia, pode-se dizer que uma estimativa de erro é considerada acurada quando:

$$\theta \approx 1. \quad (2.3)$$

Assim, quanto mais próximas as magnitudes da estimativa e do erro, mais elevada é a acurácia da estimativa. Se a efetividade é muito maior que a unidade ($\theta \gg 1$), a estimativa é confiável, mas de baixa acurácia. Já se a efetividade é muito menor que a unidade ($\theta \ll 1$), a estimativa não é nem confiável, nem acurada.

2.2.1 O estimador de Ferziger e Perić

Ao se resolver um sistema de equações iterativamente, o erro de iteração ou erro de convergência (E_k) é definido por Ferziger e Perić (1996) pela diferença entre a solução direta das equações discretizadas (Φ) e a solução na iteração atual (ϕ_k):

$$E(\phi_k) = \Phi - \phi_k \quad (2.4)$$

em que k é o número da iteração atual.

Considerando-se ϕ_k o vetor que representa a solução na k -ésima iteração, A a matriz que depende do método iterativo adotado e q o termo fonte, pode-se representar qualquer esquema iterativo para resolução de um sistema linear por meio da equação:

$$\phi_{k+1} = A\phi_k + q. \quad (2.5)$$

Para Ferziger e Perić (1996), a convergência de um processo iterativo pode ser analisada com o auxílio dos autovalores (λ_n) e autovetores (ψ_n) da matriz A . Assumindo-se que A seja diagonalizável, tem-se:

$$A\psi_n = \lambda_n\psi_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2.6)$$

em que N é o número de equações. O erro inicial $E(\phi_0)$ pode ser escrito como uma combinação linear dos autovetores:

$$E(\phi_0) = \sum_{n=1}^N a_n \psi_n \quad (2.7)$$

em que a_n são coeficientes generalizados de Fourier. Depois de k iterações, tem-se:

$$E(\phi_k) = \sum_{n=1}^N a_n (\lambda_n)_k \psi_n. \quad (2.8)$$

Nesse momento deve-se analisar se o autovalor dominante (autovalor de maior magnitude) da matriz A é real ou complexo.

- Caso 1: o autovalor dominante é real.

Nesse caso, depois de muitas iterações, o erro dominante é o primeiro termo da soma (2.8). Assim, no seu limite ($k \rightarrow \infty$), combinando a Eq. (2.4) e o primeiro termo da Eq. (2.8), tem-se:

$$\phi_k \approx \Phi + a_1(\lambda_1)_k \psi_1. \quad (2.9)$$

Usando a diferença entre duas iterações sucessivas, encontra-se:

$$\chi_k = \phi_{k+1} - \phi_k \simeq a_1(\lambda_1 - 1)(\lambda_1)^k \psi_1. \quad (2.10)$$

Tomando as normas euclidianas de χ_k e χ_{k-1} , pode-se estimar o autovalor dominante λ_1 por meio da razão:

$$\lambda_1 \approx \frac{\|\chi_k\|}{\|\chi_{k-1}\|} \quad (2.11)$$

e assim, com a Eq. (2.10) pode-se estimar o erro de iteração:

$$U(\phi_k) = \Phi - \phi_k \approx a_1(\lambda_1)^k \psi_1 \approx \frac{\chi_k}{\lambda_1 - 1}. \quad (2.12)$$

Esse erro estimado pode ser obtido das iterações da solução. De acordo com Ferziger e Perić (2002), embora esse método tenha sido desenvolvido para sistemas lineares, pode ser aplicado também a sistemas não lineares.

Na FIGURA 3 está representado o comportamento das normas do erro de iteração (E_k), de sua estimativa (U_k), da diferença entre as soluções em duas iterações ($\phi_{k+1} - \phi_k$) e do resíduo a cada iteração (R_k) ao resolver a equação de Laplace, discretizada pelo Método das Diferenças Finitas, utilizando-se um esquema de diferenças centrais de segunda ordem (CDS-2) e o *solver* SOR com parâmetro de relaxação (ω) menor que o valor ótimo. Isso faz com que o autovalor dominante da matriz de iteração seja real (FERZIGER; PERIĆ, 1996).

- Caso 2: o autovalor dominante é complexo.

Nesse caso, a redução do erro não é exponencial e pode não ser monotônica. Como os autovalores complexos aparecem aos pares, o autovalor dominante terá um conjugado, representado pelo símbolo *. Assim, pode-se reescrever a Eq. (2.9) como:

$$\phi_k \approx \Phi + a_1(\lambda_1)_k \psi_1 + a_1^*(\lambda_1^*)_k \psi_1^*. \quad (2.13)$$

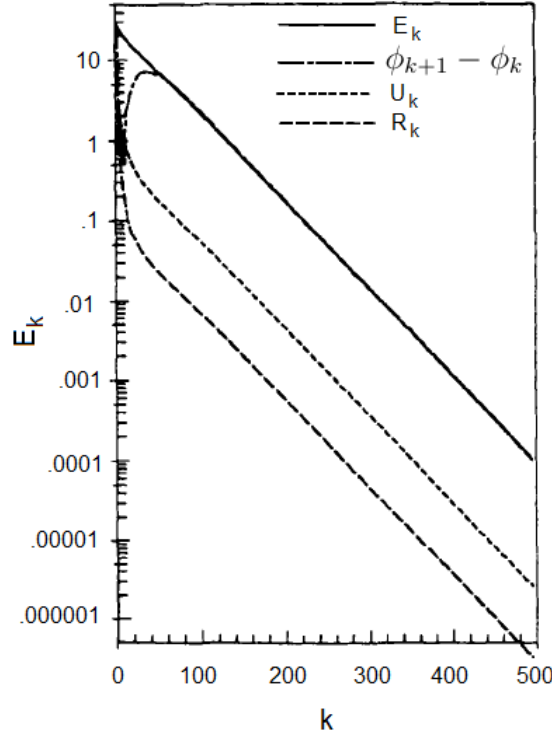
Novamente, subtraem-se duas iterações sucessivas para obter χ_k e faz-se:

$$w = (\lambda_1 - 1)a_1 \psi_1 \quad (2.14)$$

logo

$$\chi_k \approx (\lambda_1)_k w + (\lambda_1^*)_k w^* \quad (2.15)$$

FIGURA 3 – NORMAS DO ERRO DE ITERAÇÃO, SUA ESTIMATIVA, DIFERENÇA ENTRE AS SOLUÇÕES EM DUAS ITERAÇÕES E RESÍDUO PARA A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE POR MEIO DO *SOLVER* SOR, COM $\omega = 1,6$ E MALHA 40×40 .



Fonte: adaptado de Ferziger e Perić (1996).

Fazendo-se:

$$\lambda_1 = l e^{i\vartheta} \quad (2.16)$$

tem-se

$$z_k = \chi_{k-2} \cdot \chi_k - \chi_{k-1} \cdot \chi_{k-1} = 2l^{2k-2} |w|^2 [\cos(2\vartheta) - 1]. \quad (2.17)$$

Portanto, uma estimativa do quadrado da magnitude do autovalor é:

$$l^2 = \frac{z_k}{z_{k+1}}. \quad (2.18)$$

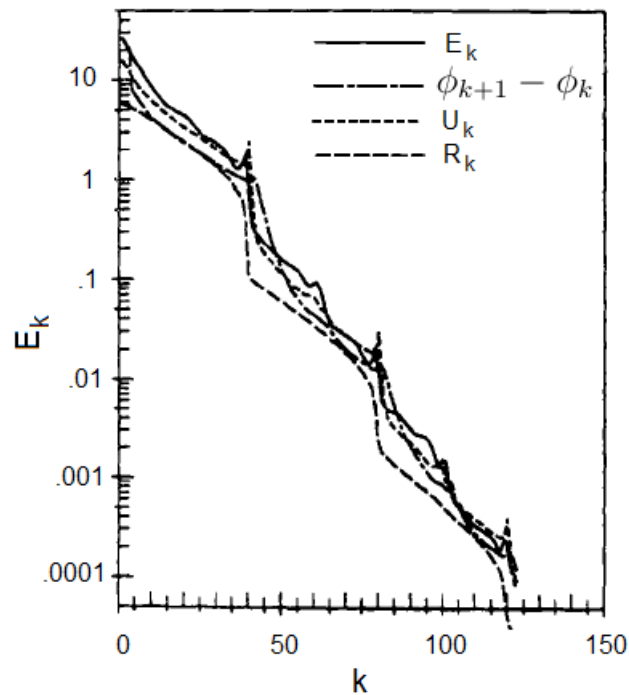
Mesmo para k grande, ou seja, grande número de iterações, os autovalores complexos causam oscilações nos erros. Para estimá-los, calculam-se as magnitudes de χ_k e l por meio das expressões já mostradas. Os resultados contêm termos proporcionais ao cosseno do ângulo de fase pois os autovalores são complexos, porém, como estamos interessados somente nas magnitudes, assume-se que esses termos são, em média, zero. Esse fato conduz a uma aproximação mais simples:

$$\|U(\phi_k)\| \approx \frac{\|\chi_k\|}{\sqrt{l^2 + 1}} \quad (2.19)$$

que é a estimativa do erro desejada. Devido às oscilações na solução, a estimativa pode não ser acurada em algumas iterações particulares, mas, em média, é boa. A fim de remover alguns dos efeitos da oscilação, pode-se fazer uma média das estimativas dos autovalores pelo número de iterações. Dependendo do problema e do número de iterações previstas, Ferziger e Perić (1996) afirmam que esse número varia de 1 a 50 (aproximadamente 1% do total do número de iterações).

Na FIGURA 4 está representado o comportamento das normas do erro de iteração, de sua estimativa, da diferença entre duas iterações e do resíduo ao resolver a equação de Laplace utilizando o *solver* SOR com parâmetro de relaxação (ω) maior que o valor ótimo, o que faz com que o autovalor dominante da matriz de iteração seja complexo (FERZIGER; PERIĆ, 1996). Nota-se que, nesse caso, o comportamento do erro de iteração é oscilante, diferentemente do comportamento monotônico da FIGURA 3.

FIGURA 4 – NORMAS DO ERRO DE ITERAÇÃO, SUA ESTIMATIVA, DIFERENÇA ENTRE DUAS ITERAÇÕES E RESÍDUO PARA A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE POR MEIO DO *SOLVER* SOR, COM $\omega = 1,9$ E MALHA 20×20 .



Fonte: adaptado de Ferziger e Perić (1996).

- Caso geral. Para determinar se o autovalor dominante λ_1 é real ou complexo, pode-se analisar a seguinte razão:

$$r = \frac{\|z_k\|}{\|\chi_k\|^2}. \quad (2.20)$$

Se r é pequeno, o autovalor provavelmente é real, se r é grande, o autovalor provavelmente é complexo. Após calcular essa razão para vários casos, observou-se que, para autovalores reais, r tende a ser menor que 10^{-2} , enquanto para autovalores complexos, $r \approx 1$. Portanto, adota-se $r = 0,1$ como um indicador do tipo de autovalor e usa-se a expressão apropriada para o erro estimado.

2.2.2 O estimador de Roy e Blottner

Roy e Blottner (2001) desenvolveram um estimador para analisar a convergência iterativa do fluxo de calor em modelos de uma e duas equações para escoamentos turbulentos de fluidos. O código implementado para resolver esses modelos é chamado de SACCARA (*Sandia Advanced Code for Compressible Aerothermodynamics Research and Analysis*) (PAYNE; HASSAN, 1998). A convergência iterativa foi inicialmente determinada plotando o fluxo de calor na parede em vários passos de iteração, assumindo que a convergência seria obtida quando não se percebessem mudanças significativas nos resultados. Porém, os resultados obtidos levaram a uma falsa impressão de convergência e uma análise mais acurada tornou-se necessária para quantificar o erro de iteração.

Considerando o erro de iteração dado pela seguinte expressão:

$$E(\phi_k) = \phi_k - \Phi \quad (2.21)$$

em que ϕ_k é a solução na iteração k e Φ é a solução direta das equações discretizadas.

Observou-se que o erro de convergência do código SACCARA teve um decréscimo exponencial no tempo, o que leva à seguinte aproximação:

$$E(\phi_k) = \alpha e^{-\beta t_k} \quad (2.22)$$

em que α e β são constantes. Combinando as equações (2.21) e (2.22), tem-se:

$$\beta t_k = \ln \alpha - \ln(\phi_k - \Phi). \quad (2.23)$$

Avaliando-se a Eq. (2.23) para três níveis de iteração diferentes, em $k - 1$, k e $k + 1$, pode-se usar as três equações para eliminar α e obter:

$$\beta(t_k - t_{k-1}) = \ln[(\phi_{k-1} - \Phi)/(\phi_k - \Phi)] \quad (2.24)$$

$$\beta(t_{k+1} - t_k) = \ln[(\phi_k - \Phi)/(\phi_{k+1} - \Phi)] \quad (2.25)$$

Se o passo no tempo é igual, então $t_k - t_{k-1} = t_{k+1} - t_k$, e as equações anteriores ficam:

$$(\phi_{k-1} - \Phi)(\phi_{k+1} - \Phi) = (\phi_k - \Phi)^2. \quad (2.26)$$

Resolvendo para Φ , tem-se:

$$\Phi = \frac{\phi_k - \Lambda_k \phi_{k-1}}{1 - \Lambda_k} \quad (2.27)$$

onde

$$\Lambda_k = \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{\phi_k - \phi_{k-1}}. \quad (2.28)$$

E o erro iterativo é aproximado por:

$$U(\phi_k) = \frac{-(\phi_{k+1} - \phi_k)}{1 - \Lambda_k}. \quad (2.29)$$

Esses resultados estão relacionados com a aproximação feita por Ferziger e Perić (1996) para determinação do erro de convergência, porém, por meio de uma abordagem distinta. No trabalho citado, o parâmetro Λ_k é o raio espectral da matriz de iteração (autovalor de maior magnitude). Roy e Blottner (2001) ainda afirmam que, se os autovalores são complexos, a abordagem de Ferziger e Perić (1996) mostra-se mais adequada que a presente.

Na FIGURA 5 apresenta-se o erro de convergência do fluxo de calor na superfície para o modelo para escoamento turbulento de Spalart-Allmaras em quatro malhas: 100×40 (malha 0-f), 200×80 (malha 1-f), 400×160 , (malha 2-f) e 800×320 (malha 3-f). Percebe-se que os resultados do estimador de Roy e Blottner são equivalentes, de modo geral, aos do estimador de Ferziger e Perić.

2.2.3 O estimador empírico de Martins e Marchi

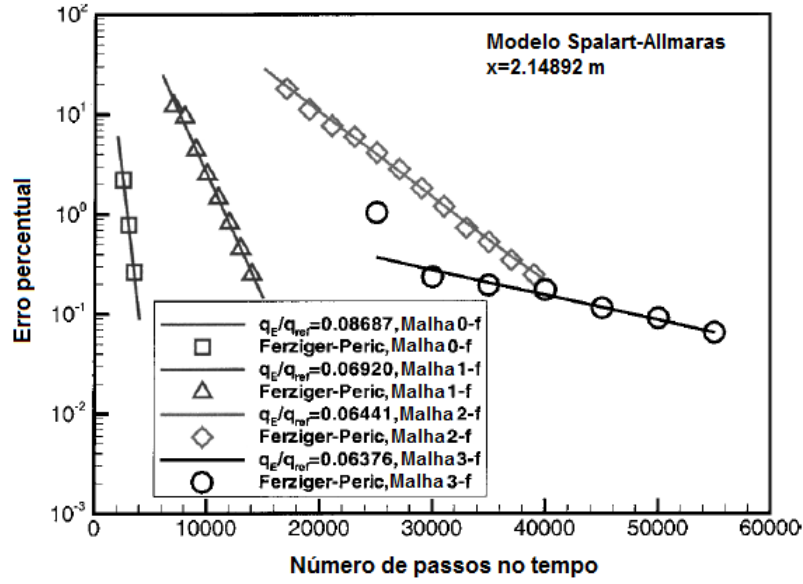
O estimador desenvolvido por Martins e Marchi (2008) fornece uma estimativa do erro de iteração com base na taxa de convergência da variável de interesse. Os testes foram feitos em sistemas de equações obtidos a partir da aplicação de métodos de diferenças finitas e volumes finitos em problemas de uma (Equação de Poisson) e duas dimensões (Equação de Laplace e Equações de Navier-Stokes).

A estimativa do erro (U_k) da solução numérica de uma variável de interesse (ϕ) é dada por:

$$U(\phi_k) = \phi_\infty - \phi_k \quad (2.30)$$

em que ϕ_∞ é a estimativa da solução exata e ϕ_k é a solução numérica na k -ésima iteração.

Nota-se que uma das principais características dos erros de iteração que apresentam taxa de convergência monotônica é que, quando o número de iterações aumenta, seu valor

FIGURA 5 – ERRO DE CONVERGÊNCIA DO FLUXO DE CALOR NA SUPERFÍCIE PARA O MODELO DE SPALART-ALLMARAS EM $x = 2,14892m$ 

Fonte: adaptado de Roy e Blottner (2001).

diminui em escala logarítmica e seu gráfico tende a uma inclinação constante. Portanto, pode-se escrever:

$$U(\phi_k) = C10^{-kp_U} \quad (2.31)$$

em que C é uma constante e p_U é a ordem aparente da estimativa que representa a inclinação local do gráfico da estimativa (U_k) versus o número de iterações (k) (FIGURA 6).

Comparando-se as equações (2.30) e (2.31) e considerando-se as iterações k_1, k_2 e k_3 , com $k_1 < k_2 < k_3$, tem-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \phi_\infty - \phi_{k_1} = C10^{-k_1 p_U} \\ \phi_\infty - \phi_{k_2} = C10^{-k_2 p_U} \\ \phi_\infty - \phi_{k_3} = C10^{-k_3 p_U} \end{cases}$$

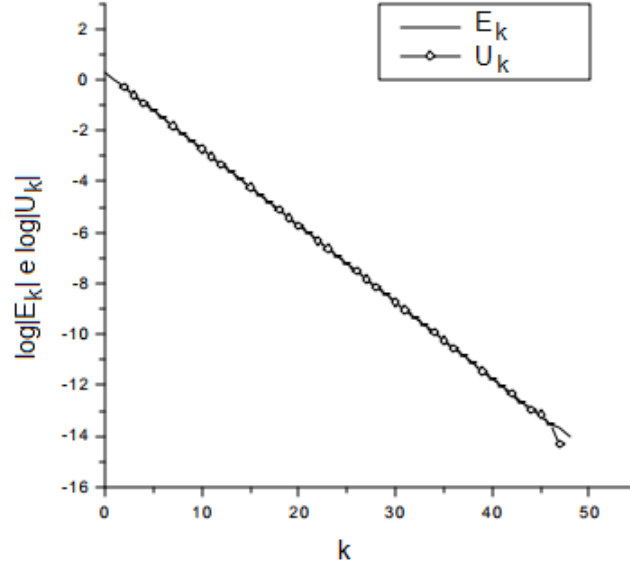
cujas incógnitas são ϕ_∞ , C e p_U . Assim, resolvendo-se para ϕ_∞ , tem-se:

$$\phi_\infty = \phi_{k_3} + \frac{\phi_{k_3} - \phi_{k_2}}{\psi - 1} \quad (2.32)$$

em que

$$\psi = \frac{\phi_{k_2} - \phi_{k_1}}{\phi_{k_3} - \phi_{k_2}}. \quad (2.33)$$

FIGURA 6 – LOGARITMO DO MÓDULO DO ERRO (E_k) E DA ESTIMATIVA DO ERRO (U_k) PELO NÚMERO DE ITERAÇÕES, A INCLINAÇÃO DO GRÁFICO REPRESENTA p_U .



Fonte: adaptado de Martins (2002).

Resolvendo-se para p_U , tem-se:

$$p_U = \frac{\log(\psi)}{\Delta k} \quad (2.34)$$

para $\Delta k = k_2 - k_1 = k_3 - k_2$.

Substituindo (2.32) em (2.30), tem-se:

$$U(\phi_{k_3}) = \frac{(\phi_{k_3} - \phi_{k_2})}{\psi - 1} \quad (2.35)$$

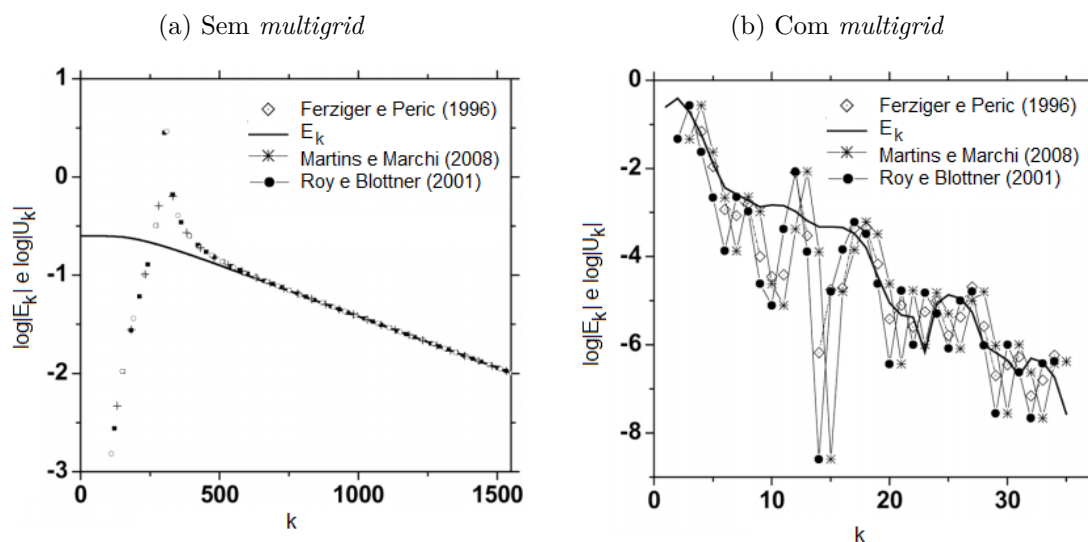
que é a expressão para o estimador empírico para erros de iteração, que, segundo Martins (2002), é válida apenas para $\psi > 1$ ou $\psi < -1$.

Os autores observaram que o desempenho desse estimador pode ser dividido em três intervalos: iterações iniciais, nas quais a acurácia é baixa; número elevado de iterações, em que os erros de arredondamento predominam sobre os erros de iteração, e ainda assim a acurácia é considerada boa; e no intervalo entre os dois extremos citados, em que a acurácia tende a melhorar à medida que aumenta o número de iterações.

Na FIGURA 7a apresenta-se o erro de iteração e suas estimativas de acordo com os estimadores de Ferziger e Peric, Roy e Blottner e o estimador empírico para a solução da equação bidimensional de Laplace, em uma malha de 65×65 , sem *multigrid*. Conclui-se que os resultados para os três estimadores são equivalentes.

Os autores também concluíram que não é recomendável utilizar esse estimador em processos iterativos que empreguem métodos *multigrid*, pois nesses casos, o erro de iteração não apresenta comportamento monotônico. O comportamento das estimativas para esse caso está representado na FIGURA 7b.

FIGURA 7 – ERRO E ESTIMATIVA DO ERRO DE ITERAÇÃO NO PONTO CENTRAL DO DOMÍNIO DE CÁLCULO DA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE EM UMA MALHA DE 65×65 .



Fonte: adaptado de Martins e Marchi (2008).

2.3 Fechamento do capítulo 2

No início desse capítulo, ressaltava-se a importância da verificação e da validação para as aplicações em CFD, sendo que a verificação, objeto de estudo desse trabalho, pode ser feita por meio de testes de convergência, uso de soluções fabricadas e de *benchmarks*.

Em seguida, apresentaram-se os três principais estimadores de erros de iteração presentes na literatura: o estimador de Ferziger e Perić (1996), o estimador de Roy e Blottner (2001) e o estimador empírico de Martins e Marchi (2008), no qual o estimador proposto baseia-se. Roy e Blottner (2001) observaram que o estimador de Roy e Blottner é semelhante ao estimador de Ferziger e Perić e que, quando o autovalor dominante da matriz de coeficientes for complexo, é recomendável utilizar o estimador de Ferziger e Perić. Já Martins e Marchi (2008) concluíram que os três estimadores são equivalentes e que não apresentam bom desempenho em aplicações com uso da técnica *multigrid*. Portanto, ao se propor um novo estimador, pretende-se melhorar as previsões dos erros de iteração nas situações em que os estimadores mencionados apresentam estimativas inaccuradas.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo consta a base teórica do presente trabalho. Primeiramente, são apresentados os métodos de discretização do domínio e das equações governantes. Em seguida, o funcionamento dos principais *solvers* e critérios de convergência são abordados. O *multigrid* também é apresentado como um acelerador de convergência seguido pela descrição das mais relevantes fontes de erros numéricos, suas causas e maneiras de detectá-los e estimá-los.

3.1 Método de discretização: diferenças finitas

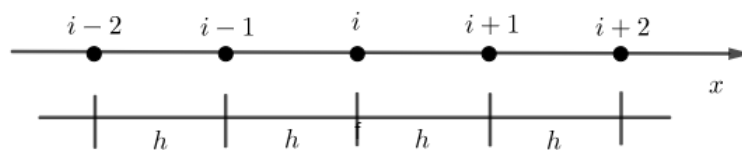
Como comentado anteriormente, os métodos analíticos de resolução são aplicados apenas a problemas envolvendo equações diferenciais com geometrias e condições de contorno simples. Para resolver problemas mais realísticos são utilizados métodos numéricos como o de diferenças finitas, volumes finitos, elementos de contorno ou elementos finitos (INCROPERA; DEWITT, 1998). Esses métodos podem ser implementados e resolvidos computacionalmente.

Para tratar um modelo matemático computacionalmente, primeiramente procede-se à discretização do domínio de cálculo. Pois, ao contrário de uma solução analítica, uma solução numérica não pode ser representada de forma contínua em qualquer ponto de interesse, ela é representada apenas em pontos discretos, que também são chamados de nós. O conjunto desses pontos discretos é chamado de malha (FORTUNA, 2000). O espaçamento de uma malha uniforme é dado pela razão entre o comprimento do domínio L e o número de elementos da malha N :

$$h = \frac{L}{N}. \quad (3.1)$$

Na FIGURA 8 tem-se um exemplo de malha de uma dimensão, com espaçamento uniforme, em que estão representados um ponto de referência i e seus vizinhos, $i + 1$ e $i + 2$ (à direita), $i - 1$ e $i - 2$ (à esquerda).

FIGURA 8 – MALHA 1D UNIFORME.



Fonte: a autora (2020).

Cada nó representa uma região do domínio de cálculo. Para obter uma solução numérica representativa de um escoamento, a geração adequada da malha é fundamental, devendo atender aspectos relacionados à geometria do domínio e à precisão desejada.

Em problemas bidimensionais, dados L_x e L_y (comprimentos do domínio nas direções x e y , respectivamente) e N_x e N_y (número de elementos da malha nas direções x e y , respectivamente) os espaçamentos da malha são dados por:

$$h_x = \frac{L_x}{N_x} \quad (3.2)$$

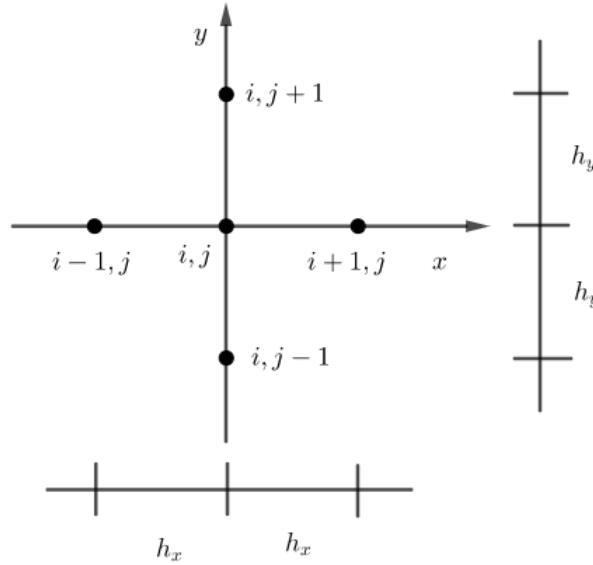
para a direção x e

$$h_y = \frac{L_y}{N_y} \quad (3.3)$$

para a direção y .

A FIGURA 9 representa uma malha uniforme bidimensional com um ponto de referência de coordenadas (i,j) e seus vizinhos norte $(i,j+1)$, sul $(i,j-1)$, leste $(i+1,j)$ e oeste $(i-1,j)$.

FIGURA 9 – MALHA 2D UNIFORME EM CADA DIREÇÃO.



Fonte: a autora (2020).

Após discretizar-se o domínio de cálculo, passa-se à discretização dos termos que aparecem nas equações, que são reescritos em função dos valores das incógnitas nos pontos discretos adjacentes.

3.1.1 Aproximações para a variável local

A aproximação por diferenças finitas é o método mais antigo de resolução numérica de equações diferenciais e o mais fácil de ser usado para geometrias simples (FERZIGER;

PERIĆ, 2002). Esse método consiste em expressar os termos da equação governante por meio de operações aritméticas para que se possa resolvê-las com a ajuda de um computador. Dessa forma, a solução encontrada é uma solução aproximada, que não é exata por estar sujeita a erros de várias fontes. Os tipos de erros serão abordados na próxima seção deste capítulo.

Considerando-se a definição da derivada de uma função Λ contínua:

$$\Lambda'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Lambda(x+h) - \Lambda(x)}{h} \quad (3.4)$$

uma aproximação por diferenças finitas para Λ' é dada simplesmente por:

$$\Lambda'(x) \approx \frac{\Lambda(x+h) - \Lambda(x)}{h} \quad (3.5)$$

ou seja, utilizando dois valores de Λ separados por uma distância finita h , a expressão (3.5) representa uma aproximação algébrica (e discreta) para a primeira derivada de Λ (FORTUNA, 2000; BURDEN; FAIRES, 2011).

As aproximações por diferenças finitas das derivadas de uma função Λ são obtidas por meio de expansões em séries de Taylor. Assim, seja Λ uma função contínua no intervalo $[a,b]$ de interesse e que possua derivadas até ordem N também contínuas nesse intervalo, usando a notação $\Lambda(x) = \Lambda_x$, tem-se:

$$\Lambda_x = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n (x - x_0)^n] \quad (3.6)$$

em que

$$a_n = \frac{1}{n!} \Lambda_{x_0}^{(n)} \quad (3.7)$$

e

$$\Lambda^{(n)} = \frac{d^n \Lambda}{dx^n}. \quad (3.8)$$

Logo, (3.6) fica:

$$\Lambda_x = \Lambda_{x_0} + \Lambda_{x_0}^{(1)} \frac{(x - x_0)}{1!} + \Lambda_{x_0}^{(2)} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \Lambda_{x_0}^{(3)} \frac{(x - x_0)^3}{3!} + \dots \quad (3.9)$$

Se forem considerados todos os termos da série de Taylor, o valor de Λ_x é exato. Tomando-se a malha da FIGURA 8 com $x_0 = i$, a Eq. (3.9) pode ser reescrita como:

$$\Lambda_x = \Lambda_i + \Lambda_i^{(1)} \frac{(x - x_0)}{1!} + \Lambda_i^{(2)} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \Lambda_i^{(3)} \frac{(x - x_0)^3}{3!} + \dots \quad (3.10)$$

Aplicando-se a Eq. (3.10) aos nós $i - 2, i - 1, i + 1$ e $i + 2$, a partir do ponto i da figura 8, tem-se expressões que relacionam o valor de Λ armazenado nesses pontos com o valor de Λ armazenado no ponto i e suas derivadas:

$$\Lambda_{i+1} = \Lambda_i + \Lambda_i^{(1)} h + \Lambda_i^{(2)} \frac{h^2}{2} + \Lambda_i^{(3)} \frac{h^3}{6} + \dots \quad (3.11)$$

$$\Lambda_{i-1} = \Lambda_i - \Lambda_i^{(1)} h + \Lambda_i^{(2)} \frac{h^2}{2} - \Lambda_i^{(3)} \frac{h^3}{6} + \dots \quad (3.12)$$

$$\Lambda_{i+2} = \Lambda_i + \Lambda_i^{(1)} 2h + \Lambda_i^{(2)} 2h^2 + \Lambda_i^{(3)} \frac{4h^3}{3} + \dots \quad (3.13)$$

$$\Lambda_{i-2} = \Lambda_i - \Lambda_i^{(1)} 2h + \Lambda_i^{(2)} 2h^2 - \Lambda_i^{(3)} \frac{4h^3}{3} + \dots \quad (3.14)$$

em que

$$h = x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i = \dots = \text{constante}. \quad (3.15)$$

Ao combinar as Eqs. (3.11) a (3.14), são obtidas aproximações para as derivadas da função Λ . A escolha das equações a serem combinadas define o tipo de esquema que será utilizado. Quanto mais pontos forem envolvidos maior será a complexibilidade da aproximação numérica.

Em problemas multidimensionais, o MDF consiste em aproximar cada termo, em cada direção, separadamente dos demais. Utilizando um procedimento análogo ao mostrado para a direção x , pode-se obter as aproximações para as demais direções.

A seguir são apresentadas as aproximações numéricas para as derivadas de primeira e segunda ordens que serão utilizadas neste trabalho, cujas deduções constam em Marchi (2001). As aproximações obtidas nas próximas seções podem ser estendidas às demais direções para problemas multidimensionais.

• Derivada de 1a. ordem

- Esquema: UDS (do inglês, *Upstream Differencing Scheme*) ou um ponto a montante;
- Aproximação:

$$(\lambda_{UDS}^{(1)})_i = \frac{(\Lambda_i - \Lambda_{i-1})}{h}. \quad (3.16)$$

- Esquema: DDS (do inglês, *Downstream Differencing Scheme*) ou um ponto a jusante;
- Aproximação:

$$(\lambda_{DDS}^{(1)})_i = \frac{(\Lambda_{i+1} - \Lambda_i)}{h}. \quad (3.17)$$

- Esquema: CDS-2 (do inglês, *Central Differencing Scheme*) ou diferença central de dois pontos;
- Aproximação:

$$(\lambda_{CDS-2}^{(1)})_i = \frac{(\Lambda_{i+1} - \Lambda_{i-1})}{2h}. \quad (3.18)$$

- Esquema: UDS-2 ou dois pontos a montante
- Aproximação ;

$$(\lambda_{UDS-2}^{(1)})_i = \frac{(3\Lambda_i - 4\Lambda_{i-1} + \Lambda_{i-2})}{2h}. \quad (3.19)$$

- Esquema: DDS-2 ou dois pontos a jusante;
- Aproximação:

$$(\lambda_{DDS-2}^{(1)})_i = \frac{(4\Lambda_{i+1} - 3\Lambda_i - \Lambda_{i+2})}{2h} \quad (3.20)$$

• Derivada de 2a. ordem

- Esquema: CDS-2 ou diferença central de três pontos;
- Aproximação:

$$(\lambda_{CDS-2}^{(2)})_i = \frac{(\Lambda_{i-1} + \Lambda_{i+1} - 2\Lambda_i)}{h^2} \quad (3.21)$$

3.1.2 Aproximação para a variável global

Por meio do Teorema do Valor Médio para Integrais, tem-se que, o valor médio de uma função Λ contínua em um intervalo $[a, b]$ é dado por (BURDEN; FAIRES, 2011):

$$\Lambda_m = \frac{1}{b-a} \int_a^b \Lambda(x) dx. \quad (3.22)$$

A integral da Eq. (3.22), quando calculada para o comprimento do domínio (L), resulta em:

$$\Lambda_m = \frac{1}{L} \int_0^L \Lambda(x) dx. \quad (3.23)$$

Se a função Λ for de duas variáveis, x e y , e o comprimento do domínio na direção x for L_x e na direção y for L_y , tem-se:

$$\Lambda_m = \frac{1}{L_x} \frac{1}{L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \Lambda(x,y) dx dy. \quad (3.24)$$

A fim de calcular numericamente as integrais das Eqs. (3.22) e (3.24), pode-se aproximar a função integrando $\Lambda(x)$ por funções polinomiais, por exemplo (CHAPRA; CANALE, 2008). A seguir estão as aproximações por polinômios de grau 1, que fornecem a regra do Trapézio.

Aproximando-se o integrando da Eq. (3.22) por um polinômio de grau 1 chega-se à regra do trapézio, e fazendo-se $b - a = L$, obtém-se (MARCHI, 2001):

$$\Lambda_m = \frac{h}{2L} \sum_{i=2}^N (\Lambda_{i-1} + \Lambda_i) - \frac{1}{L} \sum_{i=2}^N \left(\Lambda_{i-\frac{1}{2}}^{(2)} \frac{h^3}{12} + \Lambda_{i-\frac{1}{2}}^{(4)} \frac{h^5}{480} + \Lambda_{i-\frac{1}{2}}^{vi} \frac{h^7}{53760} + \dots \right) \quad (3.25)$$

Portanto, podemos reescrever a Eq. (3.25) como:

$$\Lambda_m = \lambda_m + \varepsilon(\lambda_m) \quad (3.26)$$

em que

$$\lambda_m = \frac{h}{2L} \sum_{i=2}^N (\Lambda_{i-1} + \Lambda_i) \quad (3.27)$$

é a aproximação para o valor médio da variável e

$$\varepsilon(\lambda_m) = -\frac{1}{L} \sum_{i=2}^N \left(\Lambda_{i-\frac{1}{2}}^{(2)} \frac{h^3}{12} + \Lambda_{i-\frac{1}{2}}^{(4)} \frac{h^5}{480} + \Lambda_{i-\frac{1}{2}}^{(6)} \frac{h^7}{53760} + \dots \right) \quad (3.28)$$

é o erro de truncamento com $x_w = \frac{x_W + x_P}{2}$.

De forma similar, obtém-se a aproximação para o valor médio da função integrando de duas variáveis da Eq. (3.24):

$$\lambda_m = \frac{h_x h_y}{4L_x L_y} \sum_{j=2}^{N_y} \sum_{i=2}^{N_x} (\Lambda_{i,j} + \Lambda_{i-1,j} + \Lambda_{i-1,j-1} + \Lambda_{i,j-1}). \quad (3.29)$$

3.2 Solvers

Ao discretizar equações diferenciais por meio de métodos numéricos, tais como diferenças finitas ou volumes finitos, chega-se a um sistema de equações algébricas ($\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$), lineares ou não, de acordo com a natureza das equações diferenciais discretizadas

(FERZIGER; PERIĆ, 2002). Esse sistema de equações pode ser resolvido ($\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$) por meio de métodos diretos ou iterativos, chamados de *solvers*.

Os métodos diretos são aqueles que conduzem à solução exata $\mathbf{x}$, a menos de erros de arredondamento, em um número finito e pré-determinado de operações. Porém, quando o problema é muito grande e/ou malcondicionado, tornam-se inviáveis e caros computacionalmente. São exemplos desses métodos o TDMA (do inglês, *Tridiagonal Matrix Algorithm*), a Eliminação de Gauss e a Fatoração LU (do inglês, *Lower and Upper*) (CUNHA, 2000).

Para sistemas de equações não lineares, grandes e esparsos, opta-se por métodos iterativos também chamados de métodos de relaxação (TANNEHILL; ANDERSON; PLETCHER, 1997), tais como Jacobi, SOR (do inglês, *Successive Over-Relaxation - SOR*), Gauss-Seidel, MSI (ou MSIP, do inglês, *Modified Strongly Implicit Procedure*) e PDMA (Penta Diagonal Matrix Algorithm, Moro (2018)), entre outros. De acordo com Cunha (2000), esses métodos baseiam-se na construção de sequências de aproximações, isto é, dada uma estimativa inicial $\mathbf{x}_0$ do vetor solução $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x}_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(N)}) \quad (3.30)$$

em que $x^{(j)}$ representa o j -ésimo componente do vetor-solução, e o subíndice indica o nível da iteração, contado a partir de 0, que é a aproximação inicial. A cada passo, os valores calculados anteriormente são usados para melhorar a aproximação, gerando uma sequência de valores:

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k. \quad (3.31)$$

Esse processo é repetido até que se alcance a convergência da solução. Assim, se essa sequência satisfaz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x} \quad (3.32)$$

diz-se que o método iterativo converge para a solução do sistema de equações, caso ela exista.

Uma melhor representação do vetor solução $\mathbf{x}$, é o vetor $\mathbf{x}_{k+1}$, gerado na k -ésima iteração, a partir de um vetor solução $\mathbf{x}_k$. A qualidade da aproximação, após um certo número de iterações, depende do método iterativo empregado e das propriedades da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$. O processo iterativo termina quando um critério de parada é satisfeito. Esse critério avalia o quão representativa é a solução encontrada na k -ésima iteração, em relação à solução exata. Quando o critério de parada é atingido, diz-se que a solução numérica convergiu para a solução do sistema de equações (FORTUNA, 2000). Mais detalhes sobre a convergência de um processo iterativo são abordados na próxima seção.

Os *solvers* utilizados nesse trabalho foram TDMA e Gauss-Seidel, detalhados nas subseções seguintes.

3.2.1 Tridiagonal Matrix Algorithm - TDMA

Para resolver diretamente sistemas de equações cuja matriz de coeficientes seja composta por valores constantes e seja do tipo tridiagonal, pode-se empregar o método TDMA, também chamado de algoritmo de Thomas (TANNEHILL; ANDERSON; PLETCHER, 1997). O TDMA é um caso particular da eliminação gaussiana, aplicada a matrizes tridiagonais.

$$\begin{bmatrix} d_1 & c_1 & & & 0 \\ a_2 & d_2 & c_2 & & \\ & a_3 & d_3 & & \\ & & & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & & & a_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Para aplicá-lo, são utilizadas as seguintes expressões:

$$c'_i = \begin{cases} \frac{c_i}{d_i}, & i = 1 \\ \frac{c_i}{d_i - a_i c'_{i-1}}, & i = 2, 3, \dots, n-1 \end{cases}$$

e

$$b'_i = \begin{cases} \frac{b_i}{d_i}, & i = 1 \\ \frac{b_i - a_i b'_{i-1}}{d_i - a_i c'_{i-1}}, & i = 2, 3, \dots, n. \end{cases}$$

Em seguida, obtém-se a solução final por retrossubstituição:

$$\begin{aligned} x_n &= b'_n \\ x_i &= b'_i - c'_i x_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1. \end{aligned}$$

3.2.2 Gauss-Seidel

Para Tannehill, Anderson e Pletcher (1997), o método de Gauss-Seidel é um dos mais eficientes e úteis processos iterativos para grandes sistemas de equações. Os autores também afirmam que o método é simples, porém, só converge sobre certas condições relacionadas à diagonal dominância da matriz de coeficientes resultante da discretização da equação a ser resolvida. Em geral, um ponto favorável é que a discretização de muitas equações de conservação resultam em sistemas de equações algébricas que dão origem a matrizes de coeficientes que possuem essa propriedade. Essas matrizes geralmente são esparsas, o que é mais uma vantagem para a utilização desse método.

Esse método consiste em fazer estimativas iniciais para todas as incógnitas, e, em seguida, resolver cada uma das equações do sistema usando as estimativas iniciais e os

valores mais recentes obtidos para as outras incógnitas a cada iteração. A resolução dessas equações deve ser repetida iterativamente até se atingir algum critério de convergência pré-estabelecido.

Para um sistema geral de equações $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, o esquema de Gauss-Seidel pode ser escrito como:

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^N a_{ij}x_j^k \right) \quad (3.33)$$

ou seja, no passo iterativo $k + 1$, os valores disponíveis de x^{k+1} são usados para atualizar a solução.

3.3 Convergência

A palavra convergência, em CFD, pode ter dois significados diferentes. O primeiro se refere à convergência da solução de uma equação diferencial discretizada para a solução da equação diferencial original. Já o segundo, está no contexto da utilização de métodos iterativos para resolução de sistemas lineares. Nesse trabalho, o termo convergência é utilizado para tratar apenas da segunda conotação.

De acordo com Fortuna (2000), utilizando-se dois vetores-solução $\mathbf{x}_k$ e $\mathbf{x}_{k-1}$, com N elementos cada e um valor real $\epsilon > 0$, pode-se adotar um dos seguintes critérios de parada:

1 - Máxima diferença absoluta entre elementos correspondentes de vetores sucessivos:

$$D_k = \max_{1 \leq j \leq N} |x_k^{(j)} - x_{k-1}^{(j)}| \quad (3.34)$$

2 - Erro relativo:

$$E_k = \frac{D_k}{M_k} \quad (3.35)$$

tal que

$$M_k = \max_{1 \leq j \leq N} |x_k^{(j)}| \quad (3.36)$$

3 - Soma das diferenças absolutas:

$$S_k = \sum_{j=1}^N |x_k^{(j)} - x_{k-1}^{(j)}|. \quad (3.37)$$

O método iterativo é aplicado até que dois vetores consecutivos façam com que D_k, E_k ou S_k , respectivamente, sejam menores que ϵ .

Um quarto critério de parada muito adotado é o da norma do resíduo. O resíduo é definido como:

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_k \quad (3.38)$$

ou seja, a diferença entre a solução exata do sistema e a solução encontrada na k -ésima iteração. Pode ser interpretado também como uma medida de quão falha é a aproximação $\mathbf{x}_k$ ao satisfazer o problema original $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (BRIGGS, 2000).

Uma norma, indicada pelo símbolo $\|\cdot\|$, dá origem a uma noção de distância entre os vetores (LIMA, 2011). Ela fornece um escalar positivo que representa a distância entre a solução $\mathbf{x}_k$ e a solução exata do sistema. A norma a ser adotada pode ser a norma euclidiana, também conhecida por norma 2:

$$\|\mathbf{R}_k\|_2 = \left[\sum_{j=1}^N \left(R_k^{(j)} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.39)$$

Quando $\mathbf{R} = 0$, a solução obtida é igual à solução exata. Logo, quanto menor a norma do resíduo, mais próxima da solução exata está a solução obtida pelo método iterativo, a menos que o sistema seja malcondicionado. Nesse caso, se observa a taxa de convergência do sistema.

Por meio da taxa ou razão de convergência é possível analisar o quão rápido a solução fornecida pelo método iterativo se aproxima da solução exata do sistema linear (FORTUNA, 2000). Essa taxa depende do método iterativo utilizado e também das equações a serem resolvidas. Considerando duas soluções consecutivas $\mathbf{x}_k$ e $\mathbf{x}_{k-1}$, e a solução real do sistema $\mathbf{x}_*$, suponha que exista uma constante real $\xi_k > 0$ tal que:

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*\| \leq \xi_k \|\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_*\|. \quad (3.40)$$

De acordo com Fortuna (2000), se $\xi_k < 1$ para todo k , o erro na solução numérica é reduzido de um fator ξ_k a cada iteração. Se o limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_*\|}{\|\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{x}_*\|} = \xi \quad (3.41)$$

existe, então a taxa de convergência é definida como $-\log_{10} \xi$, que representa quantos dígitos corretos ξ são obtidos em média a cada iteração. Se $\xi < 1$ o método converge, se $\xi > 1$, o método diverge. E, finalmente, se $\xi = 1$, nada se pode afirmar. Essa taxa depende do método empregado e das equações a serem resolvidas.

Uma maneira de reduzir os erros de iteração é diminuir a tolerância do critério de convergência ϵ , porém, sabe-se que isso resulta em um aumento do custo computacional. No entanto, para que fossem realizadas todas as análises propostas nesse trabalho, foi necessário reduzir a tolerância do erro de iteração ao erro de máquina.

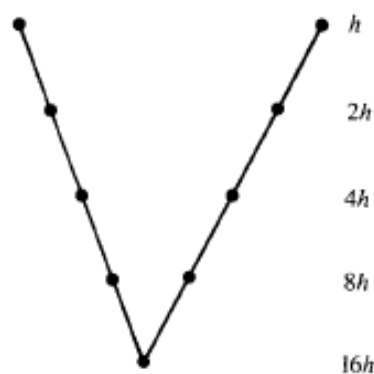
3.4 Método *multigrid*

O método *multigrid* é um dos mais eficientes métodos para aceleração da convergência de métodos iterativos conhecido atualmente. De acordo com Tannehill, Anderson e Pletcher (1997), o *multigrid* destaca-se por ser um método geral, isto é, aplicável a problemas gerais, não somente a casos específicos. Para Briggs (2000), quando os métodos iterativos são usados em conjunto com o *multigrid*, tornam-se competitivos com os rápidos métodos diretos.

O *multigrid* consiste na remoção das componentes de baixa frequência do erro, que usualmente retardam a convergência dos esquemas iterativos em uma determinada malha. Isso ocorre por meio de constantes interações com uma hierarquia de malhas mais grossas, de forma que essas malhas funcionam como malhas de correção (BRANDT, 1977). Assim, como uma componente de baixa frequência em uma malha fina torna-se uma componente de alta frequência em uma malha mais grossa, faz sentido usar malhas mais grossas para remover as componentes de baixa frequência do erro e melhorar a acurácia da solução (TANNEHILL; ANDERSON; PLETCHER, 1997).

A FIGURA 10 mostra um esquema chamado de ciclo V com 5 níveis de malhas. Para transferir dados da malha mais fina (espaçamento h) até a malha mais grossa (espaçamento $16h$), sem perda de informações, utilizam-se processos de restrição. Já para ir da malha mais grossa até a malha mais fina são utilizados processos de prolongação. Quanto mais eficientes esses processos, maior a qualidade das informações transferidas.

FIGURA 10 – EXEMPLO DE CICLO V.



Fonte: Briggs (2000)

De acordo com Wesseling (1995), o método *multigrid* teve início com Fedorenko, em 1964, que formulou um algoritmo para resolução da equação de Poisson com um esquema de diferenças finitas de cinco pontos em um domínio quadrado. Esse trabalho foi generalizado por Bachvalov, em 1966, para diferenças finitas centrais.

Os primeiros resultados práticos foram publicados por Brandt (1977), que delineou os princípios mais importantes e a utilidade prática dos métodos *multigrid*, definindo esquemas específicos para problemas lineares e não lineares. Segundo o autor, para problemas lineares, o esquema de correção CS (do inglês, *Correction Scheme*) é o mais adequado, enquanto que para problemas não lineares o FAS (do inglês, *Full Approximation Scheme*) apresenta a melhor formulação. O trabalho de Brandt (1977) é considerado uma referência na área, pois apresentou estudos sobre razões de refinamento, análise local de Fourier e taxa de convergência, o que fez com que o *multigrid* se popularizasse e fosse aplicado a diversos tipos de problemas. Aplicações do *multigrid* em problemas de CFD podem ser encontrados em Ferziger e Perić (2002) e Tannehill, Anderson e Pletcher (1997).

Outro trabalho de Brandt (1998) destacou-se por apresentar uma listagem de vários tipos de dificuldades previstas ao se resolverem problemas de CFD com a técnica *multigrid* e suas possíveis soluções. Essa listagem abrange problemas conservativos e não conservativos, de fluidos compressíveis e incompressíveis em vários números de Mach. Também são abordados problemas com recirculação de fluidos, pontos de estagnação, discretização e relaxação em ondas de choque ou próximos aos contornos, malhas com grandes razões de aspecto, resoluções em camadas-limite e malhas adaptativas.

O livro de Briggs (2000) traz um tutorial com as ideias básicas do *multigrid* geométrico, indicado para malhas estruturadas, começando por problemas modelo, passando pelos principais *solvers* iterativos e trazendo detalhes do funcionamento e implementação da técnica em problemas lineares e não lineares discretizados em diferenças finitas e elementos finitos. A obra de Trottenberg, Oosterlee e Schüller (2001) traz tanto técnicas básicas para utilização do método quanto avançadas, como *multigrid* paralelo e adaptativo. Essa obra é dedicada ao *multigrid* algébrico, indicado para malhas não estruturadas, e traz várias aplicações.

Wesseling e Oosterlee (2001) apresentaram uma visão geral do desenvolvimento do *multigrid* geométrico para problemas de CFD. Essa formulação do *multigrid* é indicada para resolução de problemas em malhas estruturadas. Os autores abordaram problemas com fluidos compressíveis e incompressíveis, malhas anisotrópicas, técnicas de semi-engrossamento e computação paralela e afirmam que o *multigrid* é um dos desenvolvimentos mais importantes em análise numérica dos últimos tempos.

Já Stüben (2001), por sua vez, traz uma revisão do estado da arte do *multigrid* algébrico, cuja utilização abrange problemas resolvidos em malhas não-estruturadas. O autor discorre sobre as principais características, ideias básicas e aplicações dessa formulação do método.

Brandt, Diskin e Thomas (2002) discorrem a respeito da eficiência da técnica *multigrid*, apresentando estratégias de linearização, reformulação e fatoração das equações

governantes, bem como técnicas de relaxação distribuída. Os autores apresentam exemplos de aplicações dessas estratégias em problemas de CFD. Mesquita e Lemos (2004) resolveram as equações da continuidade, Navier-Stokes e energia, com e sem *multigrid*. Os autores mostraram a superioridade do *multigrid* em comparação ao *singlegrid* e também concluíram que, ao aumentar-se o número de Reynolds (Re), aumenta-se também o esforço computacional requerido.

O problema da cavidade quadrada com tampa móvel foi resolvido por Kumar, Kumar e Das (2009), usando o FAS, métodos dos volumes finitos e SIMPLEC (do inglês, *Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations-Consistent*). Os pesquisadores concluíram que é possível obter soluções com alto grau de discretização e acurácia em uma malha muito fina utilizando o *multigrid*.

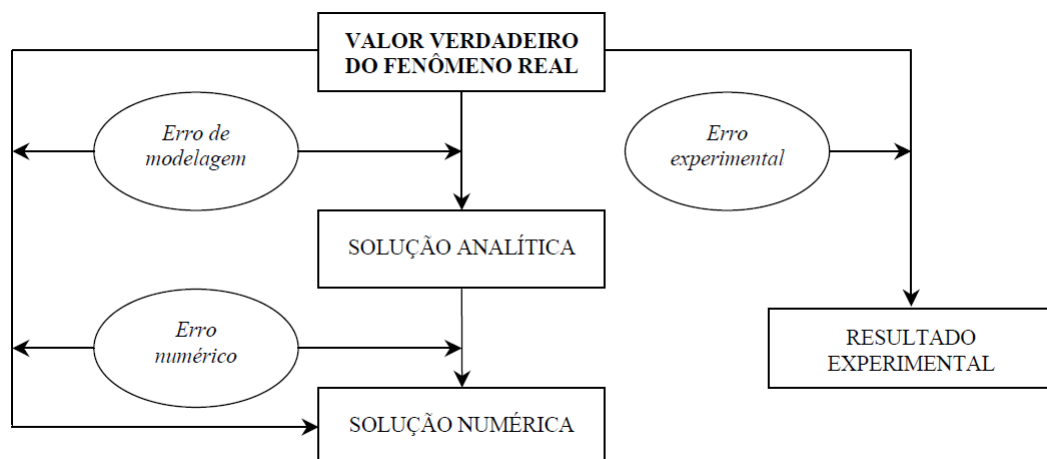
Gonçalves et al. (2013) analisaram o efeito de alguns parâmetros no desempenho do FMG (do inglês, *Full Multigrid*), tais como: número de iterações internas dos *solvers* Gauss-Seidel Lexicográfico e Gauss-Seidel Red-Black, número de malhas, número de incógnitas e operadores de prolongação na interpolação da solução entre os níveis do FMG.

As ideias do *multigrid* foram estendidas para os chamados métodos multinível que vêm sendo aplicados a problemas dependentes do tempo, processamento de imagens, otimização combinatória, mecânica estatística e eletrodinâmica quântica (BRIGGS, 2000).

3.5 Fontes de erros numéricos

Cada método de resolução de problemas de engenharia, seja experimental, analítico ou numérico, está sujeito a algum tipos de erro como pode ser observado no esquema da FIGURA 11.

FIGURA 11 – ERROS ENVOLVIDOS NOS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ENGENHARIA.



Fonte: adaptado de Marchi (2001).

A diferença entre o valor verdadeiro do fenômeno real e o resultado experimental de uma variável de interesse é chamada de erro experimental (E_x). Esse tipo de erro pode ser causado por dificuldades de controle de parâmetros e leis de similaridade que definem o experimento e também pelo uso de equipamentos de medição (MARCHI, 2001).

O erro de modelagem (E_m) é a diferença entre o valor verdadeiro e a solução analítica exata de uma variável de interesse. Esse erro é causado por simplificações feitas nas equações, nas condições de contorno e até mesmo na geometria do domínio para que o modelo possa ser resolvido analiticamente. Esses erros afetam tanto as soluções analíticas quanto as numéricas.

De acordo com Ferziger e Perić (2002), o erro numérico (E_n) é a diferença entre a solução analítica exata (Φ_a) de uma variável de interesse e sua solução numérica (ϕ):

$$E_n(\phi) = \Phi_a - \phi. \quad (3.42)$$

O erro numérico é causado por erros de discretização (E_h), iteração (E_k), arredondamento (E_π), programação (E_p), entre outras causas. Simbolicamente, pode-se escrever:

$$E_n(\phi) = E(E_h, E_k, E_\pi, E_p). \quad (3.43)$$

A magnitude aceitável do erro numérico depende da finalidade da solução numérica, dos recursos financeiros disponíveis, do tempo que se dispõe para realizar as simulações e dos recursos computacionais a que se tem acesso.

3.5.1 Erro de discretização (E_h)

Para Fortuna (2000), o erro de discretização é o erro local de truncamento que surge devido ao truncamento das séries de Taylor empregadas nas aproximações das derivadas por expressões algébricas. Logo, pode-se mostrar que (MARCHI, 2001):

$$E(\phi) = c_1 h^{p_L} + c_2 h^{p_2} + c_3 h^{p_3} + \dots \quad (3.44)$$

em que $c_1, c_2, c_3, \dots$ são coeficientes que dependem de Φ e não dependem de h ; $p_L, p_2, p_3, \dots$ são as ordens verdadeiras (p_V) de $E(\phi)$ que geralmente são números inteiros positivos que constituem uma progressão aritmética onde $1 \leq p_L < p_2 < p_3 < \dots$; o menor expoente de h , p_L , é chamado de ordem assintótica de $E(\phi)$, e representa a inclinação da curva do erro em um gráfico $\log(|E|) \times \log(h)$, para $h \rightarrow 0$.

Se ϕ contém apenas E_h , então:

$$E_h(\phi) = E_n(\phi) = \Phi_a - \phi \quad (3.45)$$

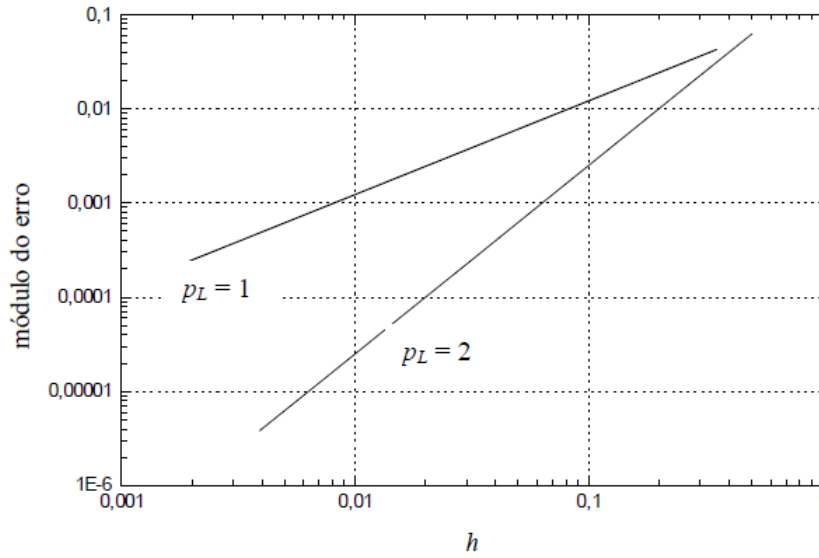
logo, define-se o erro de discretização como a diferença entre a solução analítica exata e a solução numérica (aproximação discreta) (FERZIGER; PERIĆ, 2002).

Pode-se estimar o erro de discretização de duas maneiras: a *a priori* e a *a posteriori*. Por meio de estimativas *a priori* é possível prever o comportamento assintótico do erro de discretização com relação a h e p_L . Isto é, antes de se obter qualquer solução numérica, obtêm-se as ordens assintótica e verdadeiras do erro de discretização de cada variável de interesse. Nota-se que, quando $h \rightarrow 0$, a Eq. (3.44) torna-se:

$$E_h(\phi) = c_1 h^{p_L}. \quad (3.46)$$

E o gráfico $\log(|E_h|) \times \log(h)$, para $h \rightarrow 0$ terá p_L como inclinação em relação ao eixo dos x . Logo, quanto maior p_L , maior será a taxa de redução de E_h quando $h \rightarrow 0$. Com isso, pode-se antever qual a melhor aproximação numérica a ser utilizada, bem como a sua eficiência na redução de E_h com a redução de h . Na FIGURA 12 mostram-se os efeitos das ordens assintóticas $p_L = 1$ e $p_L = 2$ sobre o decaimento do erro de discretização ao refinar-se a malha ($h \rightarrow 0$).

FIGURA 12 – EFEITO DA ORDEM ASSINTÓTICA p_L SOBRE O DECAIMENTO DO ERRO DE DISCRETIZAÇÃO.



Fonte: Marchi (2001).

Já as estimativas *a posteriori* são usadas para medir efetivamente a magnitude dos erros de discretização. Essas estimativas são baseadas em soluções numéricas obtidas em múltiplas malhas e por meio delas é possível observar se a ordem de decaimento do erro de discretização das soluções numéricas tende à ordem assintótica dos erros de truncamento.

Quando a solução analítica (Φ_a) é conhecida, pode-se calcular a ordem efetiva

equivalente ($p_{E_h}^*$) do erro de discretização. Calcula-se $p_{E_h}^*$ por meio de

$$p_{E_h}^* = \frac{\log\left(\left|\frac{\Phi_a - \phi_1}{\Phi_a - \phi_2}\right|\right)}{\log(r)} \quad (3.47)$$

em que r é a razão de refino da malha

$$r = \frac{h_1}{h_2} \quad (3.48)$$

e ϕ_1 e ϕ_2 são as soluções numéricas obtidas nas malhas h_1 (malha mais grossa) e h_2 (malha mais fina), respectivamente.

Se a solução analítica não é conhecida, pode-se calcular a ordem aparente equivalente utilizando as soluções numéricas de três malhas distintas (ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3), fazendo:

$$p_{U_h}^* = \frac{\log\left(\left|\frac{\phi_2 - \phi_1}{\phi_3 - \phi_2}\right|\right)}{\log(r)}, \quad (3.49)$$

com razão de refino constante

$$r = \frac{h_1}{h_2} = \frac{h_2}{h_3}. \quad (3.50)$$

Estimadores de erros, tais como delta, Richardson, GCI, multicoeficiente, entre outros, também podem ser utilizados para análises *a posteriori* do erro de discretização (MARCHI, 2001).

3.5.2 Erro de arredondamento (E_π)

A principal causa dos erros de arredondamento (E_π) é a representação finita dos números reais nas computações (FORTUNA, 2000). Essa representação depende da precisão utilizada pelo compilador (*software*) utilizado na simulação. Os erros de arredondamento diminuem ao aumentar-se a precisão das representações, porém, ao fazer isso, a memória computacional para o armazenamento desses números também aumenta (MARCHI, 2001).

Outro fator que pode aumentar os erros de arredondamento é a propagação dos erros causada pelo aumento do número de operações aritméticas na obtenção da solução numérica. A grosso modo, quanto menor o tamanho dos elementos da malha h (ou maior o número de elementos de malha N), maior é o valor do erro de arredondamento.

3.5.3 Erro de programação (E_p)

Para Roache (2009), os erros de programação consistem nos erros resultantes do uso incorreto de um modelo numérico na aproximação de um modelo matemático; os erros gerados na implementação do modelo numérico em um programa computacional e os erros cometidos durante a obtenção da solução numérica.

Ferziger e Perić (2002) afirmam que a melhor abordagem para localizar erros de programação é realizar testes para checar se o código converge com a taxa esperada. Também se deve conferir as condições de contorno, os dados de entrada e até mesmo a geometria da malha gerada. Por sua vez, Roache (2009) também propõe um procedimento chamado método das soluções fabricadas. Esse método consiste em fabricar uma solução analítica exata para um problema similar ao que se deseja resolver numericamente. Esse método é muito útil quando a solução analítica do problema original é desconhecida.

3.5.4 Erro de iteração (E_k)

Sabe-se que, em geral, os erros de iteração diminuem com o aumento de iterações, isto é:

$$\text{se } k \rightarrow \infty \text{ então } E(\phi_k) \rightarrow 0. \quad (3.51)$$

E, para convergência monotônica e $k \rightarrow \infty$ (ROY; BLOTTNER, 2001):

$$E(\phi_k) = \frac{C}{10^{kp_L}} \quad (3.52)$$

em que C é um coeficiente que independe de k e $p_L > 0$ é a ordem assintótica do erro de iteração de ϕ , que representa a inclinação da curva do erro de iteração num gráfico $\log(|E_k|) \times k$, para $k \rightarrow \infty$.

Utilizando-se Eq. (3.52) em duas iterações consecutivas (k e $k + 1$) pode-se fazer estimativas do erro de iteração *a priori*:

$$\frac{E(\phi_{k+1})}{E(\phi_k)} = \frac{1}{10^{p_L}}. \quad (3.53)$$

Nota-se que, quanto maior a ordem assintótica p_L , mais rapidamente o erro de iteração é reduzido com o aumento do número de iterações. Porém, p_L só é conhecido *a priori* para problemas muito simples. Para a maioria das aplicações, deve-se utilizar métodos para a estimativa dos erros *a posteriori*. Esses métodos consistem na utilização de estimadores, já mencionados no capítulo anterior.

3.6 Fechamento do capítulo 3

Neste capítulo foi apresentado o método de discretização e os esquemas numéricos utilizados nos três problemas propostos. Na sequência, foram abordados os *solvers* diretos e iterativos e também os critérios de convergência a serem adotados, que podem ser baseados na diferença entre os elementos de dois vetores-solução consecutivos ou na norma do resíduo. O método *multigrid* foi apresentado como um método de aceleração de convergência para os *solvers* iterativos. E, finalmente, discorreu-se sobre as principais fontes de erros numéricos decorrentes da resolução de problemas numericamente.

4 METODOLOGIA

Este capítulo inicia-se pela descrição dos modelos matemáticos e numéricos usados nos testes com o novo estimador, cuja dedução é apresentada na sequência. Os parâmetros numéricos para as simulações são apresentados seguidos dos procedimentos usados para análise do comportamento do erro de iteração, baseados na delimitação de intervalos para as estimativas obtidas. As estratégias utilizadas no pós-processamento, tanto para a melhoria das estimativas de erro de iteração quanto para a redução dos erros de iteração, também são descritas. Por último, apresentam-se sugestões de procedimentos para usuários dependendo do objetivo a ser alcançado nas análises.

4.1 Modelos matemáticos

Para os testes com o novo estimador serão utilizados três modelos matemáticos, sendo dois elípticos: equação de Poisson unidimensional e equação de Laplace bidimensional, e um parabólico: equação de advecção-difusão unidimensional, abrangendo, assim, efeitos advectivos e difusivos. Para todos os modelos, sendo consideradas condições de contorno de Dirichlet, têm-se solução analítica exata conhecida, o que possibilita a comparação entre as estimativas dos erros numéricos e os seus valores verdadeiros e também a análise do desempenho do novo estimador em situações controladas.

4.1.1 Problema 1: equação de Poisson 1D

A equação de Poisson é obtida a partir da equação da difusão do calor, cuja equação consta em Incropera e DeWitt (1998):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (4.1)$$

Na Eq. (4.1), T é a variável dependente, que representa a temperatura; x , y e z são as variáveis independentes, que representam as direções em coordenadas cartesianas; k é a condutividade térmica do material; $\dot{q}$ é a taxa na qual a energia é gerada, por unidade de volume do meio; e $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$ é a taxa de variação com o tempo da energia térmica do meio, por unidade de volume, nessa expressão, ρ e c_p representam a massa específica e o calor específico do meio, à pressão constante.

Considerando-se as seguintes hipóteses simplificadoras: meio contínuo, condução de calor unidimensional, regime permanente e propriedades físicas constantes, obtém-se a equação de Poisson:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = S \quad (4.2)$$

em que S representa o termo fonte, que pode ser uma constante ou uma função de x . Se $S > 0$, há geração de calor e se $S < 0$, há absorção de calor.

O domínio de cálculo é representado simbolicamente por $\Omega = [0, L]$, em que são impostas condições de contorno de Dirichlet: $T(0) = T_0$ e $T(L) = T_L$.

As variáveis de interesse escolhidas são:

1. temperatura T , que é uma variável local e primária, escolhida por representar o valor da função a cada ponto do domínio;
2. gradiente da temperatura T em $x = 1$ ($grad T(1) = \frac{dT}{dx}|_{x=1}$) que, quando multiplicado por uma constante, pode representar o fluxo de calor ou a taxa de transferência de calor; e
3. temperatura média (T_m), escolhida por ser uma variável global e secundária, obtida a partir de T .

Após se definirem as condições de contorno (T_0 e T_L) e o termo fonte (S), a solução analítica para a variável primária T pode ser obtida integrando-se ambos os lados da equação duas vezes, em relação à variável x (ZILL, 2012). A solução analítica para a variável secundária T_m é obtida por meio do teorema do valor médio para integrais (KREYSZIG, 2010):

$$T_m = \frac{1}{L} \int_0^L T(x) dx. \quad (4.3)$$

Assim, escolhendo-se $L = 1$ e o termo fonte $S = 12x^2$, a Eq. (4.2) fica:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 12x^2. \quad (4.4)$$

Considerando-se as condições de contorno de Dirichlet a seguir:

$$T(0) = 0 \quad (4.5)$$

$$T(1) = 1 \quad (4.6)$$

tem-se as seguintes soluções analíticas exatas para as variáveis de interesse:

- para a temperatura T (variável primária, local), através de simples integração:

$$T(x) = x^4; \quad (4.7)$$

- para o gradiente em $x = 1$:

$$grad T(1) = 4; \quad (4.8)$$

- e para a temperatura média T_m (variável secundária, global), por meio do teorema do valor médio (4.3):

$$T_m = \frac{1}{5}. \quad (4.9)$$

Também pode-se obter uma solução analítica para T por meio do método das soluções fabricadas proposto por Roache (2009).

4.1.2 Problema 2: equação de advecção-difusão 1D

No segundo caso considera-se a equação de advecção-difusão, para um escoamento unidimensional, em regime permanente, de um fluido incompressível, sem geração de calor e sem dissipação viscosa, com propriedades e velocidades constantes em um meio contínuo:

$$Pe \frac{dT}{dx} = \frac{d^2T}{dx^2} \quad (4.10)$$

em que Pe é o número de Péclet, dado por $Pe = LV/\alpha$, onde V e L representam uma velocidade e um comprimento de referência e α é a difusividade térmica, dada por $\alpha = k/\rho c_P$, onde k é a condutividade térmica do fluido, ρ é a massa específica e c_P é o calor específico à pressão constante do fluido (INCROPERA; DEWITT, 1998). O número de Péclet também pode ser interpretado como uma constante de proporcionalidade entre os efeitos advectivos e difusivos presentes na equação.

Assim como no problema 1, o domínio é representado por $\Omega = [0, L]$ e as condições de contorno aplicadas são as de Dirichlet.

Tomando-se $L = 1$ e as condições de contorno definidas nas equações (4.5) e (4.6), as soluções analíticas para a equação (4.10) são:

- para a temperatura T (variável primária, local), utilizando o método de separação de variáveis:

$$T(x) = \frac{e^{xPe} - 1}{e^{Pe} - 1}; \quad (4.11)$$

- para o gradiente (primeira derivada da função $T(x)$) em $x = 1$:

$$\text{grad } T(1) = \frac{e^{Pe} Pe}{e^{Pe} - 1}; \quad (4.12)$$

- e para a temperatura média T_m (variável secundária, global), por meio do teorema do valor médio (4.3):

$$T_m = \frac{e^{Pe} - Pe - 1}{Pe(e^{Pe} - 1)}. \quad (4.13)$$

4.1.3 Problema 3: equação de Laplace 2D

A equação de Laplace, assim como a equação de Poisson, também é obtida a partir da equação do calor (4.1), fazendo-se as seguintes simplificações: meio contínuo, condução de calor bidimensional, regime permanente, propriedades físicas constantes, e ausência de geração de calor. Assim, tem-se:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0. \quad (4.14)$$

O domínio de cálculo é representado por $\Omega = \{0 < x < L_x; 0 < y < L_y\}$ e serão impostas condições de Dirichlet aos contornos $T(0, y)$, $T(x, 0)$, $T(L_x, y)$ e $T(x, L_y)$.

Tomando-se $L_x = L_y = 1$ e as condições de contorno:

$$T(0, y) = 0, \quad (4.15)$$

$$T(x, 0) = 0, \quad (4.16)$$

$$T(1, y) = 0, \quad (4.17)$$

$$T(x, 1) = \text{sen}(\pi x), \quad (4.18)$$

obtêm-se as seguintes soluções analíticas para as variáveis de interesse:

- para a temperatura T (variável primária, local), utilizando o método de separação de variáveis:

$$T(x, y) = \text{sen}(\pi x) \frac{\text{senh}(\pi y)}{\text{senh}(\pi)}; \quad (4.19)$$

- para o gradiente no contorno leste, derivando-se em relação a x , em $x = 1$ e integrando-se o resultado em relação a y , de $y = 0$ a $y = 1$, tem-se:

$$\text{grad } T(1, y) = \int_{y=0}^{y=1} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=1} dy = \frac{1 - \cosh(\pi)}{\text{senh}(\pi)}; \quad (4.20)$$

- e para a temperatura média T_m (variável secundária, global), por meio do teorema do valor médio para funções de duas variáveis (KREYSZIG, 2010):

$$T_m = \frac{2(\cosh(\pi) - 1)}{\pi^2 \text{senh}(\pi)}. \quad (4.21)$$

4.2 Modelos numéricos

Os três modelos matemáticos escolhidos são discretizados utilizando o método das diferenças finitas, de acordo com as equações relacionadas na seção 3.1.1, com arranjos co-localizados das variáveis. Para todos os modelos são utilizados esquemas de ordem assintótica $p_L = 2$ para discretizar as derivadas da variável primária e a regra do trapézio, também de ordem assintótica $p_L = 2$ (MARCHI, 2001), para o cálculo do valor médio da variável.

4.2.1 Problema 1: equação de Poisson 1D

Após a discretização do domínio de cálculo, utilizando a aproximação numérica CDS-2 de diferenças finitas para derivada de segunda ordem ($\lambda_{CDS-2}^{(2)}$) dada pela Eq. (3.21), obtém-se a solução numérica da variável primária:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 12x^2 \Rightarrow \frac{(T_{i-1} + T_{i+1} - 2T_i)}{h^2} = 12x_i^2. \quad (4.22)$$

Assim:

$$T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1} = 12x_i^2 h^2 \quad (4.23)$$

ou ainda, na forma genérica:

$$a_{i-1,j}^T T_{i-1} + a_{i,j}^T T_i + a_{i+1,j}^T T_{i+1} = b_i^T. \quad (4.24)$$

A Eq. (4.23) representa a forma discretizada do modelo matemático da Eq. (4.4) para cada nó interno da malha ($P = 1, 2, \dots, N - 1$), sendo $N + 1$ o número total de pontos da malha. Isolando-se o termo $a_{i,j}^T T_i$ e comparando-se as equações (4.23) e (4.24), obtém-se os coeficientes ($a_{i-1,j}^T, a_{i,j}^T, a_{i+1,j}^T$) e os termos fontes (b_i^T) dos pontos internos da equação discretizada:

$$a_{i,j}^T = 2 \quad (4.25)$$

$$a_{i-1,j}^T = 1 \quad (4.26)$$

$$a_{i+1,j}^T = 1 \quad (4.27)$$

$$b_i^T = -12x_i^2 h^2 \quad (4.28)$$

Esses valores serão fornecidos ao *solver* para a resolução do modelo numérico.

A solução numérica da variável secundária T_m é obtida pela regra do trapézio descrita na Eq. (3.27). Já a variável gradiente é obtida utilizando a aproximação numérica UDS-2 de diferenças finitas para derivada de primeira ordem ($\lambda_{UDS-2}^{(1)}$) dada pela Eq. (3.19).

4.2.2 Problema 2: Equação de Advecção-Difusão 1D

Para discretizar o modelo do problema 2, utiliza-se o método das diferenças finitas para aproximar as derivadas. A derivada de primeira ordem é aproximada pelo esquema CDS ($\lambda_{CDS}^{(1)}$) de diferenças finitas, apresentado na Eq. (3.18), assim como a derivada de segunda ordem ($\lambda_{CDS-2}^{(2)}$), que corresponde à Eq. (3.21).

Assim, tem-se:

$$Pe \frac{(T_{i+1} - T_{i-1}))}{2h} = \frac{(T_{i-1} + T_{i+1} - 2T_i)}{h^2} \quad (4.29)$$

que na forma da Eq. (4.24), fica:

$$\left(1 + \frac{h}{2}Pe\right) T_{i-1} - 2T_i + \left(1 - \frac{h}{2}Pe\right) T_{i+1} = 0. \quad (4.30)$$

Assim como no problema 1, chega-se à forma discretizada do modelo matemático dado pela Eq. (4.10). Ao comparar-se a Eq. (4.30) com a Eq. (4.24) e isolar-se o termo $a_{i,j}^T T_i$, obtém-se os coeficientes ($a_{i-1,j}^T, a_{i,j}^T, a_{i+1,j}^T$) e os termos fontes (b_i^T) válidos para todos os pontos internos do domínio computacional:

$$a_{i,j}^T = 2 \quad (4.31)$$

$$a_{i-1,j}^T = 1 + \frac{h}{2}Pe \quad (4.32)$$

$$a_{i+1,j}^T = 1 - \frac{h}{2}Pe \quad (4.33)$$

$$b_i^T = 0 \quad (4.34)$$

Utilizam-se a regra do trapézio (Eq. 3.27) e o esquema UDS-2 (Eq. 3.19) para aproximar o valor médio da variável e o gradiente no contorno direito, respectivamente.

4.2.3 Problema 3: Equação de Laplace 2D

Como já mencionado, em problemas multidimensionais, o método das diferenças finitas consiste em aproximar cada termo, em cada direção, separadamente. No caso bidimensional as equações são discretizadas na direção x e na direção y .

Logo, utilizando novamente a aproximação CDS-2 para a derivada de segunda ordem ($\lambda_{CDS-2}^{(2)}$), tem-se:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{(T_{i-1,j} + T_{i+1,j} - 2T_{i,j})}{h_x^2} + \frac{(T_{i,j-1} + T_{i,j+1} - 2T_{i,j})}{h_y^2} = 0. \quad (4.35)$$

O espaçamento da malha nas direções x e y é dado, respectivamente, por:

$$h_x = \frac{L_1}{N_x} \text{ e} \quad (4.36)$$

$$h_y = \frac{L_2}{N_y}, \quad (4.37)$$

onde $N_x + 1$ é o número de pontos da malha na direção x e $N_y + 1$ é o número de pontos da malha na direção y .

Utilizando uma malha uniforme ($h_x = h_y = h$), a Eq. (4.35) fica:

$$\frac{(T_{i-1,j} + T_{i+1,j} - 2T_{i,j})}{h^2} + \frac{(T_{i,j-1} + T_{i,j+1} - 2T_{i,j})}{h^2} = 0. \quad (4.38)$$

Assim:

$$\frac{T_{i-1,j} + T_{i+1,j} - 4T_{i,j} + T_{i,j-1} + T_{i,j+1}}{h^2} = 0. \quad (4.39)$$

Na forma genérica, tem-se:

$$a_{i-1,j}^T T_{i-1,j} + a_{i+1,j}^T T_{i+1,j} + a_{i,j}^T T_{i,j} + a_{i,j-1}^T T_{i,j-1} + a_{i,j+1}^T T_{i,j+1} = b_{i,j}^T. \quad (4.40)$$

A Eq. (4.40) representa um sistema de equações algébricas, válido para todos os pontos internos da malha. Utilizando as condições de contorno, obtêm-se as equações para os contornos norte, sul, leste e oeste do domínio discretizado. Comparando-se as equações obtidas com a Eq. (4.40), e isolando-se $a_{i,j}^T$, obtêm-se os coeficientes ($a_{i,j}^T, a_{i-1,j}^T, a_{i+1,j}^T, a_{i,j-1}^T, a_{i,j+1}^T$) e os termos fontes ($b_{i,j}^T$) de todos os pontos da malha:

$$a_{i,j}^T = \frac{4}{h^2} \quad (4.41)$$

$$a_{i-1,j}^T = \frac{1}{h^2} \quad (4.42)$$

$$a_{i+1,j}^T = \frac{1}{h^2} \quad (4.43)$$

$$a_{i,j-1}^T = \frac{1}{h^2} \quad (4.44)$$

$$a_{i,j+1}^T = \frac{1}{h^2} \quad (4.45)$$

$$b_{i,j}^T = 0 \quad (4.46)$$

Esses valores são fornecidos ao *solver* para a resolução do modelo numérico.

Fazendo $\beta = \Delta x / \Delta y$, a equação geral para o método de Gauss-Seidel para a equação de Laplace pode ser escrita como:

$$T_{i,j}^{k+1} = \frac{T_{i+1,j}^k + T_{i-1,j}^{k+1} + \beta^2(T_{i,j+1}^k + T_{i,j-1}^{k+1})}{2(1 + \beta^2)} \quad (4.47)$$

onde k denota o nível iterativo, i é a coluna e j é a linha.

Mais uma vez, as aproximações utilizadas para o valor médio da variável e o gradiente no contorno direito são a regra do trapézio (Eq. 3.27) e o esquema UDS-2 (Eq. 3.19), respectivamente.

4.3 Dedução do estimador proposto

O estimador proposto nesse trabalho, assim como o estimador empírico de Martins e Marchi (2008), fornece uma estimativa do erro baseada na taxa de convergência (ψ) da variável de interesse, porém, com algumas modificações.

Sabe-se que a estimativa do erro de iteração de uma solução numérica pode ser dada por:

$$E(\phi_k) = \phi_\infty - \phi_k. \quad (4.48)$$

Devido ao comportamento exponencial do erro, pode-se escrever (ROY; BLOTTNER, 2001):

$$E(\phi_k) = \lambda 10^{-kp_U}. \quad (4.49)$$

Combinando-se as equações (4.48) e (4.49) e considerando-se três níveis iterativos k_1, k_2 e k_3 , com $k_1 < k_2 < k_3$ e $\Delta k = k_3 - k_2 = k_2 - k_1$, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} \phi_\infty - \phi_{k_1} = \lambda 10^{-k_1 \cdot p_U} \\ \phi_\infty - \phi_{k_2} = \lambda 10^{-k_2 \cdot p_U} \\ \phi_\infty - \phi_{k_3} = \lambda 10^{-k_3 \cdot p_U} \end{cases}$$

Da primeira equação, tem-se

$$\lambda = \frac{\phi_\infty - \phi_{k_1}}{10^{-k_1 \cdot p_U}} \quad (4.50)$$

e da segunda

$$\lambda = \frac{\phi_\infty - \phi_{k_2}}{10^{-k_2 \cdot p_U}}. \quad (4.51)$$

Logo, de (4.50) e (4.51),

$$\frac{\phi_\infty - \phi_{k_1}}{10^{-k_1 \cdot p_U}} = \frac{\phi_\infty - \phi_{k_2}}{10^{-k_2 \cdot p_U}} \quad (4.52)$$

então

$$\frac{\phi_\infty - \phi_{k_1}}{\phi_\infty - \phi_{k_2}} = \frac{10^{k_2 \cdot p_U}}{10^{k_1 \cdot p_U}} = 10^{(k_2 - k_1) \cdot p_U} \quad (4.53)$$

em que $k_2 - k_1 = \Delta k$.

Da terceira equação,

$$\lambda = \frac{\phi_\infty - \phi_{k_3}}{10^{-k_3 \cdot p_U}}, \quad (4.54)$$

logo, de (4.51) e (4.54), obtém-se, de forma análoga, que

$$\frac{\phi_\infty - \phi_{k_2}}{\phi_\infty - \phi_{k_3}} = \frac{10^{k_2 \cdot p_U}}{10^{k_1 \cdot p_U}} = 10^{(k_3 - k_2) \cdot p_U} \quad (4.55)$$

em que $k_3 - k_2 = \Delta k$.

Igualando-se (4.53) e (4.55), tem-se

$$\frac{\phi_\infty - \phi_{k_1}}{\phi_\infty - \phi_{k_2}} = \frac{\phi_\infty - \phi_{k_2}}{\phi_\infty - \phi_{k_3}} \quad (4.56)$$

então

$$(\phi_\infty - \phi_{k_2})^2 = (\phi_\infty - \phi_{k_1})(\phi_\infty - \phi_{k_3}). \quad (4.57)$$

Isolando-se ϕ_∞

$$\phi_\infty = \frac{\phi_{k_2}^2 - \phi_{k_1}\phi_{k_3}}{2\phi_{k_2} - \phi_{k_3} - \phi_{k_1}} \quad (4.58)$$

e substituindo-se (4.58) em (4.55), tem-se

$$\frac{\frac{\phi_{k_2}^2 - \phi_{k_1}\phi_{k_3}}{-\phi_{k_3} - \phi_{k_1} + 2\phi_{k_2}} - \phi_{k_2}}{\frac{\phi_{k_2}^2 - \phi_{k_1}\phi_{k_3}}{-\phi_{k_3} - \phi_{k_1} + 2\phi_{k_2}} - \phi_{k_3}} = 10^{\Delta k p_U}. \quad (4.59)$$

Agrupando-se os termos semelhantes e simplificando:

$$\frac{\phi_{k_2} - \phi_{k_1}}{\phi_{k_3} - \phi_{k_2}} = 10^{\Delta k p_U}. \quad (4.60)$$

Aplicando-se a função logaritmo de base 10 em ambos os lados, obtém-se

$$\log \left(\frac{\phi_{k_2} - \phi_{k_1}}{\phi_{k_3} - \phi_{k_2}} \right) = \Delta k p_U. \quad (4.61)$$

Definindo-se ψ por

$$\psi = \frac{\phi_{k_2} - \phi_{k_1}}{\phi_{k_3} - \phi_{k_2}}, \quad (4.62)$$

chega-se à seguinte expressão para p_U

$$p_U = \frac{\log \psi}{\Delta k}. \quad (4.63)$$

Ainda de (4.58), por meio de manipulações algébricas, é possível obter

$$\phi_\infty = \phi_{k_2} + \frac{(\phi_{k_2} - \phi_{k_1})}{\psi - 1}. \quad (4.64)$$

Substituindo-se (4.64) em (2.30) chega-se à expressão do estimador proposto:

$$U(\phi_{k_2}) = \frac{(\phi_{k_2} - \phi_{k_1})}{\psi - 1}. \quad (4.65)$$

4.3.1 Comparações entre o estimador proposto e os principais estimadores presentes na literatura

Nessa seção, o estimador proposto é comparado, matematicamente, aos principais estimadores da literatura. Para facilitar as comparações, supõe-se que os três níveis iterativos propostos pelos autores sigam a seguinte correspondência: $k_1 = k - 1$, $k_2 = k$, $k_3 = k + 1$.

- O estimador proposto e o estimador de Ferziger e Perić (1996)

Para (FERZIGER; PERIĆ, 1996), se o autovalor dominante da matriz A de coeficientes do método iterativo adotado for real, estima-se o erro de iteração por meio de:

$$U_{k_2} \approx \frac{\chi_{k_2}}{\lambda_1 - 1}. \quad (4.66)$$

Considerando-se a Eq. (2.10), tem-se:

$$U_{k_2} \approx \frac{\phi_{k_3} - \phi_{k_2}}{\lambda_1 - 1}. \quad (4.67)$$

Como

$$\lambda_1 \approx \frac{\|\chi_{k_2}\|}{\|\chi_{k_1}\|},$$

também pela Eq. (2.10), tem-se:

$$\lambda_1 \approx \frac{\|\phi_{k_3} - \phi_{k_2}\|}{\|\phi_{k_2} - \phi_{k_1}\|}. \quad (4.68)$$

Logo, ao se comparar os numeradores das Eqs. (4.67) e (4.65), nota-se um deslocamento de índice. O estimador de (FERZIGER; PERIĆ, 1996) utiliza-se da diferença entre as soluções da variável ϕ nas iterações k_3 e k_2 , enquanto o estimador proposto utiliza-se da diferença entre as soluções das iterações k_2 e k_1 . Em relação aos denominadores, observa-se que os termos ψ (Eq. (4.62)) e λ_1 (Eq. (4.68)) se relacionam da seguinte maneira:

$$\lambda_1 = \|\psi^{-1}\| \quad (4.69)$$

ou seja, λ_1 é o módulo do inverso de ψ .

- O estimador proposto e o estimador de Roy e Blottner (2001)

Roy e Blottner (2001) observaram que o erro de iteração possui um decréscimo exponencial no tempo e obtiveram a seguinte expressão para a estimativa do erro de iteração:

$$U(\phi_{k_2}) = \frac{-(\phi_{k_3} - \phi_{k_2})}{1 - \Lambda_k}, \quad (4.70)$$

$$\text{com } \Lambda_k = \frac{\phi_{k_3} - \phi_{k_2}}{\phi_{k_2} - \phi_{k_1}}. \quad (4.71)$$

Novamente, ao se comparar os numeradores, observa-se um deslocamento de índices e, nesse caso, uma mudança de sinais. Quanto aos denominadores, além da mudança de sinal, ao se comparar ψ (Eq. (4.62)) e Λ_k (Eq. 4.71) nota-se que:

$$\Lambda_k = \psi^{-1} \quad (4.72)$$

ou seja, Λ_k é o inverso de ψ .

- O estimador proposto e o estimador de Martins e Marchi (2008)

O estimador de Martins e Marchi (2008), no qual baseia-se o estimador proposto, calcula as estimativas do erro de iteração por meio da expressão:

$$U(\phi_{k_3}) = \frac{(\phi_{k_3} - \phi_{k_2})}{\psi - 1}. \quad (4.73)$$

Comparando-se as Eqs. (4.73) e (4.65), nota-se que os denominadores são iguais e que, ao comparar os numeradores, também aparece o deslocamento de índice já mencionado para os demais estimadores. Porém, outra diferença significativa é que previsão do erro calculada pelo estimador de Martins e Marchi (2008) é válida para o terceiro nível iterativo (k_3), enquanto a previsão do erro dada pelo estimador proposto é válida para o segundo nível iterativo (k_2).

4.4 Parâmetros numéricos e ambiente computacional

Definidas as variáveis de interesse:

- a temperatura no ponto central do domínio computacional: $T(\frac{1}{2})$;
- a temperatura média: T_m ; e
- o gradiente (primeira derivada da função) no contorno direito: $grad T(1)$

serão analisados:

- o resultado numérico: ϕ_k ;
- o erro de iteração: $E(\phi_k)$;
- a estimativa do erro de iteração: $U(\phi_k)$;
- a efetividade do estimador: θ ; e

- a taxa de convergência: ψ .

As soluções numéricas foram obtidas para malhas com $N = 64, 256$ e 1024 elementos para os problemas unidimensionais e $N = 64^2, 256^2$ e 1024^2 para os problemas bidimensionais. Com a variação do número de elementos de malha, foram obtidos três casos descritos na TABELA 1.

TABELA 1 – CASOS DOS PROBLEMAS A SEREM RESOLVIDOS.

Caso	Número de elementos de malha 1D	Número de elementos de malha 2D
1	64	64^2
2	256	256^2
3	1024	1024^2

Para resolver os sistemas de equações resultantes da discretização dos problemas unidimensionais, foram escolhidos os *solvers* TDMA e Gauss-Seidel. Para o problema bidimensional, foram escolhidos os *solvers* PDMA e Gauss-Seidel.

Primeiramente, fez-se a verificação de cada código implementado. Nessa etapa, as soluções numéricas obtidas foram comparadas às suas soluções analíticas. Também foram analisadas as ordens assintótica (p_L), efetiva equivalente ($p_{E_h}^*$) e aparente equivalente ($p_{U_h}^*$) do erro de discretização, dadas pelas Eqs. (3.46), (3.47) e (3.49), respectivamente.

Concluída a verificação do código, passou-se à verificação das soluções, as quais, nessa tese, são exclusivamente dedicadas aos erros de iteração. A fim de obterem-se as estimativas para os problemas unidimensionais, inicialmente, calculou-se o valor numérico da solução convergida (solução do sistema discretizado Φ) por meio do *solver* TDMA. No problema bidimensional, a solução convergida foi obtida utilizando o *solver* PDMA e executando-se o processo iterativo até que a norma do resíduo adimensionalizado desse atingisse o erro de máquina.

Em seguida, utilizando o *solver* Gauss-Seidel, foram obtidas as estimativas iteração a iteração por meio dos estimadores:

- de Ferziger e Perić (1996);
- de Martins e Marchi (2008);
- de Roy e Blottner (2001); e
- empírico psi-médio (este trabalho)

a serem comparadas ao erro de iteração verdadeiro dado por

$$E(\phi_k) = \Phi - \phi_k \quad (4.74)$$

em que k é o número da iteração e ϕ_k é a solução na iteração k .

O problema 3 também foi resolvido empregando-se o método *multigrid* associado ao *solver* GS em um esquema de correção (CS), a fim de observar o comportamento dos parâmetros numéricos nessas condições. Os parâmetros para o método *multigrid* sugeridos por Santiago, Marchi e Souza (2015) para a resolução da equação de Laplace bidimensional são: $\sigma = 2$, ou seja, 2 iterações internas para o GS e $L = L_{max}$, o que significa que o esquema percorreu todos os níveis de malhas possíveis ao longo de um ciclo V, como o da FIGURA 10.

O critério de convergência escolhido para encerrar o processo iterativo foi o erro de máquina para cada tamanho de problema. Para os problemas 1, 2 e 3, o erro de máquina ficou em torno de 1×10^{-31} para o caso 1, 1×10^{-29} para o caso 2 e 1×10^{-27} para o caso 3. Com a utilização do método *multigrid*, o erro de máquina atingido foi 1×10^{-31} para o caso 1, 1×10^{-28} para o caso 2 e 1×10^{-26} para o caso 3.

A efetividade θ , dada pela razão entre a estimativa U e o erro E (Eq. (2.1)), que é uma medida da confiabilidade dos estimadores, também foi analisada. Para Zhu e Zienkiewicz (1990), se esse valor for próximo de 1, a estimativa é dita acurada e se for maior ou igual à unidade, $\theta \geq 1$, diz-se que o estimador é considerado confiável.

Os códigos computacionais foram implementados em linguagem Fortran 95 com precisões dupla e quádrupla. Os códigos computacionais utilizados nos problemas 1 e 2 foram desenvolvidos pela autora, já o código utilizado no problema 3 pertence ao Grupo de Pesquisa em CFD da UFPR e foi adaptado pela autora. Todos os códigos foram compilados no Intel Parallel Studio XE 2015 Composer Edition for Fortran Windows, versão 15.0.0115.12. em um PC com processador de 64 bits, Intel(R) Core(TM) i7-6700, 3,40 GHz e 16 GB de memória RAM, com sistema operacional Windows 10 Pro.

4.5 Intervalos para análise do comportamento do erro de iteração

Para cada variável descrita, investiga-se em quais intervalos de iterações o estimador proposto possui melhor desempenho. Para isso, são considerados dois critérios:

- (i) os valores da razão de convergência ψ , dada pela Eq. (4.62); e
- (ii) as faixas de iterações com menor influência dos erros de arredondamento.

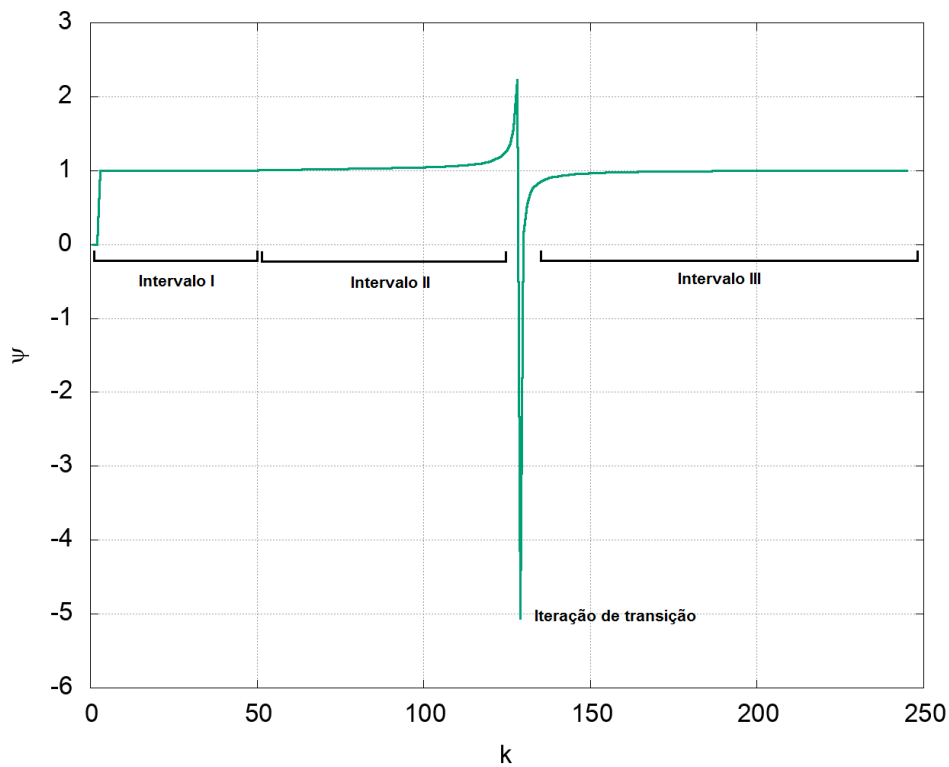
O estimador empírico psi-médio é obtido da Eq. (4.64) que pode ser escrita como resultado da soma dos termos de uma série geométrica infinita. De acordo com o demonstrado no apêndice B, para que essa série seja convergente e, consequentemente, o estimador determine a previsão do erro de iteração corretamente, deve-se ter $\left| \frac{1}{\psi} \right| < 1$. Logo, as faixas de iterações em que o estimador proposto possui melhor desempenho são as faixas em que

$$\begin{cases} \psi > 1 \text{ ou} \\ \psi < -1. \end{cases}$$

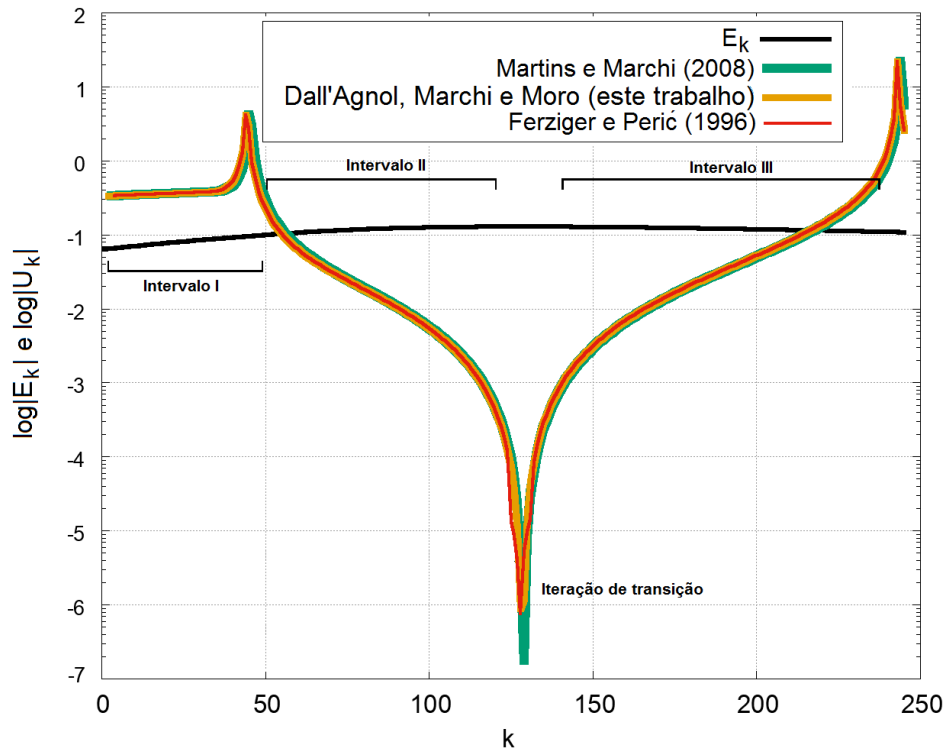
No decorrer do processo iterativo, os valores da taxa de convergência ψ variam e essas variações foram utilizadas para delimitar alguns dos intervalos de desempenho do estimador proposto. A determinação da quantidade de iterações de cada intervalo e também da quantidade de intervalos deu-se de maneira diferente para cada um dos problemas e também para cada uma das variáveis, como descrito nas subseções seguintes. Além dos intervalos, algumas variáveis apresentaram também iterações de transição, onde o sinal de ψ inverteu-se em um única iteração. Isso ocorre pois, para cada tipo de problema e de variável, a razão de convergência ψ se comporta de maneira diferente.

Para exemplificar, nas FIGURAS 13 e 14 estão representados os 3 primeiros intervalos delimitados para a variável $T(1/2)$ do problema 1, caso 1. No intervalo I tem-se $\psi \leq 1$ e nos intervalos II e III tem-se $\psi > 1$, porém, os intervalos II e III são separados por uma única iteração de transição, em que $\psi < -1$. Na FIGURA 14 estão as estimativas de erros de iteração correspondentes a cada intervalo delimitado.

FIGURA 13 – DELIMITAÇÃO DOS 3 PRIMEIROS INTERVALOS PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, CONSIDERANDO-SE OS INTERVALOS CONVERGENTES/DIVERGENTES DE ψ .



Fonte: a autora (2020).

FIGURA 14 – INFLUÊNCIA DAS VARIAÇÕES DE ψ NAS ESTIMATIVAS DOS ERROS DE ITERAÇÃO.

Fonte: a autora (2020).

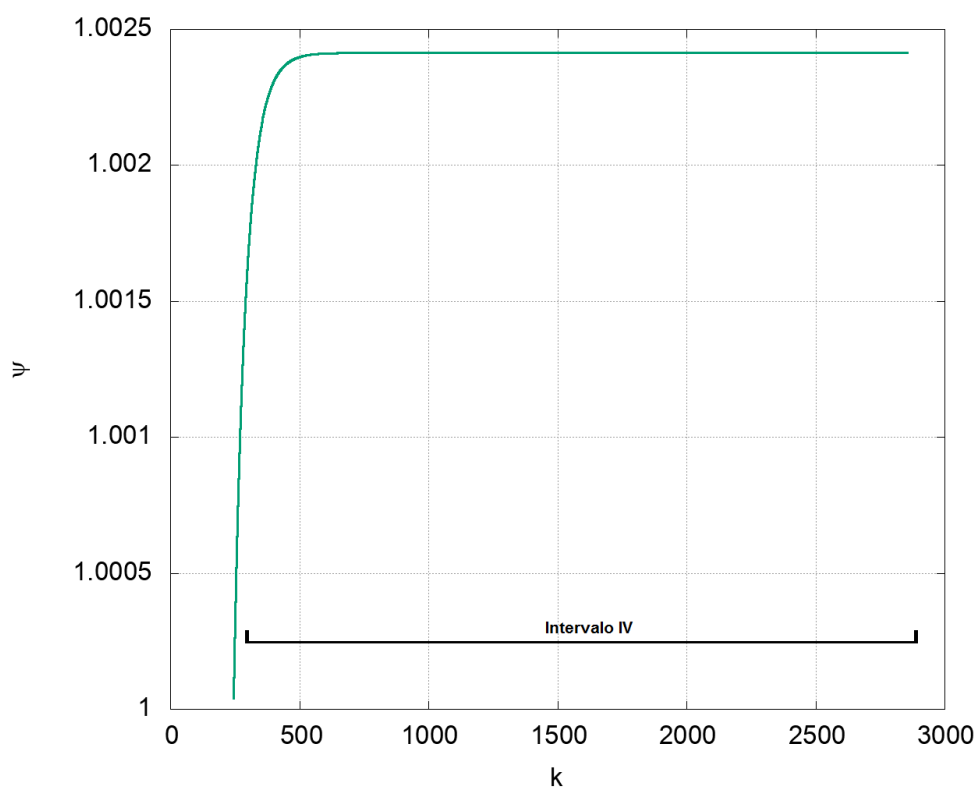
Em geral, para todos os problemas, após algumas iterações, a taxa de convergência ψ passou a convergir monotonicamente para um valor um pouco maior que 1. A ocorrência dessa convergência monotônica delimitou o início do intervalo com as melhores estimativas dos erros de iteração. Para a variável $T(1/2)$, esse intervalo está representado nas FIGURAS 15 e 16 e foi o quarto intervalo delimitado.

Porém, sabe-se que, a partir de um certo número de iterações, proporcionais ao número de elementos da malha escolhida, os erros de arredondamento passam a se fazer mais significativos, causando pequenas oscilações nas soluções numéricas e prejudicando a estimativa dos erros de iteração. Isso se deve ao grande volume de operações realizadas, que resultam na perda de algarismos do lado direito dos números e aos cancelamentos subtrativos, que causam perda de algarismos do lado esquerdo dos números (MARCHI, 2001).

A fim de averiguar a partir de qual iteração isso ocorre e delimitar o final do intervalo das melhores estimativas, monitorou-se o módulo da diferença entre o valor de ψ na iteração atual e na iteração anterior por meio de

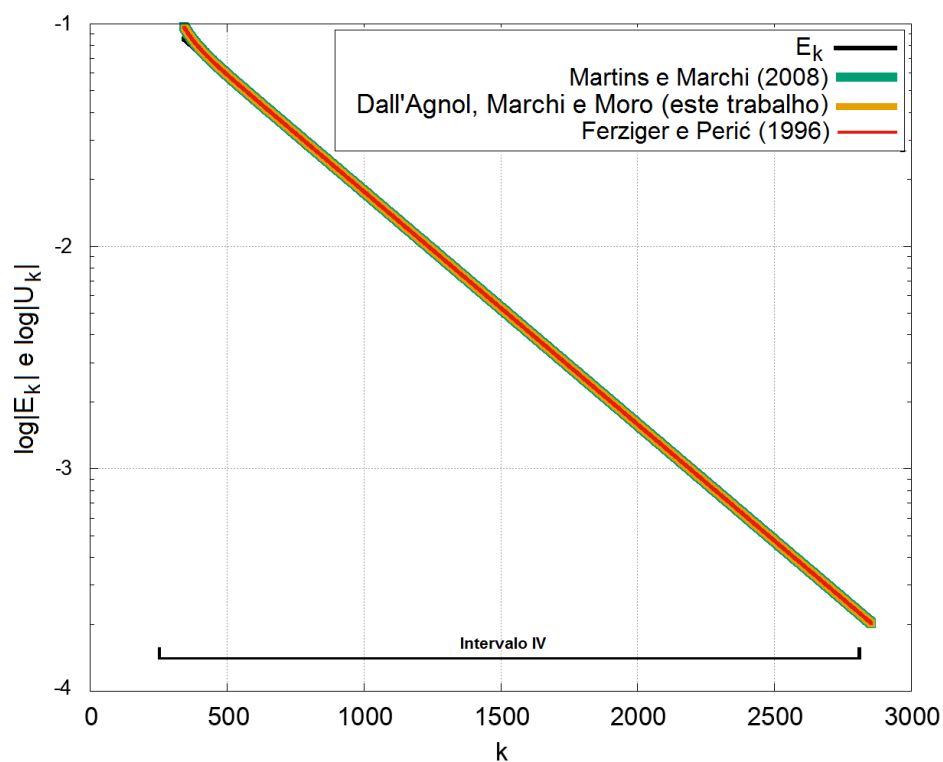
$$|\psi_k - \psi_{k-1}|. \quad (4.75)$$

FIGURA 15 – DELIMITAÇÃO DO INTERVALO IV, COM AS MELHORES ESTIMATIVAS PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA 16 – ESTIMATIVAS DOS ERROS DE ITERAÇÃO NO INTERVALO DE CONVERGÊNCIA MONOTÔNICA DE ψ .



Fonte: a autora (2020).

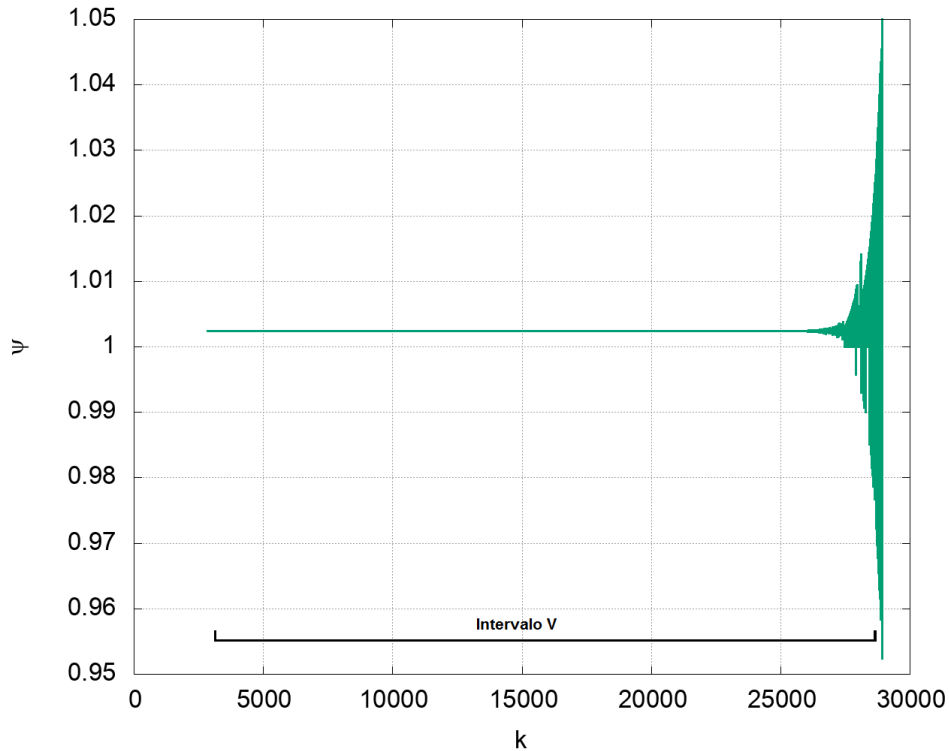
Observou-se que, em um primeiro momento, essa diferença diminui até aproximar-se do erro de máquina ($|\psi_k - \psi_{k-1}| \rightarrow 0$), ou seja, ψ_k e ψ_{k-1} estão cada vez mais próximos indicando convergência. Em seguida, essa diferença passa a aumentar, ou seja, o valor de ψ_k distancia-se de ψ_{k-1} indicando a propagação dos erros de arredondamento. A iteração em que se registrou a ocorrência do primeiro aumento dessa diferença delimitou o fim do intervalo das melhores estimativas.

Para o último intervalo restaram as iterações finais do processo iterativo, aquelas que, apesar de apresentarem $\psi > 1$, possuem erros de arredondamento significativos. Esses erros podem ser melhor identificados ao fazer-se

$$|U(\phi_k) - E(\phi_k)|. \quad (4.76)$$

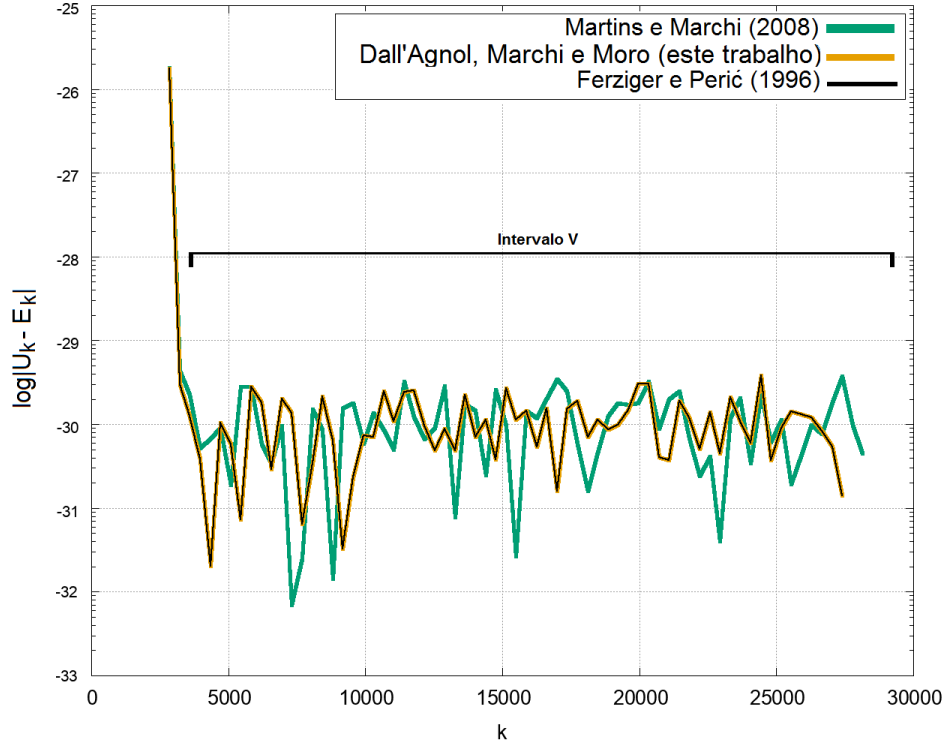
A FIGURA 17 mostra os valores de ψ para o intervalo V, enquanto a FIGURA 18 mostra a diferença $|U(\phi_k) - E(\phi_k)|$ que melhor caracteriza os erros de arredondamento presentes nesse intervalo.

FIGURA 17 – DELIMITAÇÃO DO INTERVALO V, COM ERROS DE ARREDONDAMENTO MAIS SIGNIFICATIVOS PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, CONSIDERANDO-SE A TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ .



Fonte: a autora (2020).

FIGURA 18 – DELIMITAÇÃO DO INTERVALO V, COM ERROS DE ARREDONDAMENTO MAIS SIGNIFICATIVOS PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, CONSIDERANDO-SE $|U_i_k - E_i_k|$.



Fonte: a autora (2020).

4.6 Pós-processamento: redução no erro de iteração e melhoria das suas estimativas

Após devidamente identificados os intervalos de iterações com melhor desempenho do estimador proposto, procede-se o cálculo de soluções corrigidas com reduzidos erros de iteração. Para isso, utiliza-se a Eq. (2.30), reescrevendo-a para ϕ_∞ a cada iteração:

$$(\phi_\infty)_k = U(\phi_k) + \phi_k. \quad (4.77)$$

A partir do cálculo das soluções corrigidas, são obtidas as novas estimativas de erros de iteração. Para isso, são utilizadas as soluções do melhor intervalo para as estimativas, delimitado previamente.

A princípio, optou-se por calcular a média aritmética simples dessas soluções dentro do melhor intervalo de estimativas, obtendo-se uma solução corrigida média $((\phi_\infty)_M)$:

$$(\phi_\infty)_M = \frac{1}{m} \sum_{k=it_1}^{it_2} (\phi_\infty)_k \quad (4.78)$$

considerando-se que o melhor intervalo de estimativas comece em it_1 e termine em it_2 e possua m iterações.

Porém, ao comparar-se a solução média $(\phi_\infty)_M$ à última solução obtida com a Eq. (4.77) no melhor intervalo (ϕ_{it_2}) , observou-se que essa solução é mais acurada que a média das soluções no intervalo. Assim, optou-se por considerar essa solução para os cálculos das novas estimativas, fazendo-se $(\phi_\infty)_k = \phi_{it_2}$ e isolando-se $U(\phi_k)$ na Eq. (4.77), obtém-se:

$$U(\phi_k) = \phi_{it_2} - \phi_k. \quad (4.79)$$

A Eq. (4.79) foi utilizada para recalcular as estimativas de erros de iteração para todas as iterações, obtendo-se melhores estimativas para as faixas iniciais do processo iterativo.

4.7 Procedimentos para usuários

Nesta seção são apresentados procedimentos para usuários, de acordo com os objetivos de seus estudos. Primeiramente, é proposto um procedimento para usuários que, ao resolverem problemas de CFD, desejem estimar os erros de iteração cometidos, de forma prática. O segundo procedimento foi elaborado para usuários que, além de estimarem os erros de iteração, queiram calcular soluções mais acuradas, com erros de iteração reduzidos. O terceiro procedimento foi pensado para usuários que desejem estimar os erros de iteração com maior acurácia. E o quarto e último procedimento foi formulado visando-se à pesquisa em erros de iteração. Por meio dele é possível obter análises precisas e completas desse tipo de erro, calcular soluções numéricas com erros de iteração reduzidos, bem como melhorar as estimativas obtidas.

4.7.1 Procedimento prático para obtenção de estimativas

- Passo 1:** Definir o problema a ser resolvido, as variáveis de interesse, o método de discretização e o(s) esquema(s) numérico(s) a serem utilizados, bem como o *solver* iterativo a ser empregado na resolução do problema.
- Passo 2:** A cada iteração, armazenar a solução numérica da variável de interesse escolhida;
- Passo 3:** A partir da terceira iteração, calcular a razão de convergência ψ , pela Eq. (4.62);
- Passo 4:** Utilizando-se os valores de ψ obtidos no passo anterior, calcular as estimativas do erro de iteração com o estimador empírico Psi-Médio proposto, dado pela Eq. (4.65) e informar ao usuário, a cada iteração.

Esse procedimento permite ao usuário acompanhar a evolução das estimativas de erros de iteração da variável de interesse ao longo do processo iterativo, para qualquer número de iterações. O valor das estimativas ou a precisão da variável de interesse, por exemplo, podem ser utilizados como critérios de interrupção do processo iterativo.

4.7.2 Procedimento para estimativa e redução de erros de iteração

Passo 1: Seguir o procedimento prático para obtenção de estimativas (subseção 4.7.1);

Passo 2: Calcular as soluções corrigidas, com reduzidos erros de iteração, por meio da Eq. (4.77).

Nesse procedimento, além dos critérios de parada para o processo iterativo já citados, pode-se utilizar a precisão das soluções corrigidas obtidas, por exemplo.

4.7.3 Procedimento para estimativa de erros de iteração mais acuradas

Passo 1: Seguir o procedimento para estimativa e redução de erros de iteração (subseção 4.7.2);

Passo 2: Analisar a variação de ψ , dada pela Eq. (4.75), a cada iteração. Quando esta chegar a seu valor mínimo, armazenar a solução corrigida correspondente a essa iteração;

Passo 3: Utilizar a solução corrigida obtida no passo anterior para recalculas as estimativas para todas as iterações, por meio da Eq. (4.79).

Esse procedimento visa a obtenção de estimativas de erro de iteração mais acuradas para todas as iterações.

4.7.4 Procedimento completo para pesquisa em erros de iteração

Passo 1: Seguir o procedimento prático para obtenção de estimativas (subseção 4.7.2);

Passo 2: Delimitar os intervalos de iterações em que os valores de ψ são maiores que 1 ou menores que -1 , onde é garantida a convergência da série que define o estimador empírico Psi-médio;

Passo 3: Delimitar o intervalo em que os erros de arredondamento passam a ser significativos;

Passo 4: Definir o melhor intervalo para as estimativas, de acordo com os critérios (i) e (ii) a partir do observado nos Passos 6 e 7;

Passo 5: Definir a solução corrigida mais acurada (ϕ_{it_2}) dentro do intervalo delimitado no passo 8; e

Passo 6: Calcular as novas estimativas de todas as iterações por utilizando a Eq. (4.79).

Para um estudo mais completo, recomenda-se utilizar o erro de máquina como critério de parada para o processo iterativo. Essa escolha permite observar todos os intervalos de valores de ψ e sua influência sobre os intervalos de estimativas obtidas.

4.8 Fechamento do capítulo 4

Foram definidos os modelos matemáticos e numéricos dos três problemas cujos erros de iteração são analisados. Foram apresentados os esquemas numéricos utilizados para discretizar cada um dos modelos e também a dedução do estimador empírico psi-médio que será usado para estimar os erros de iteração de cada um dos problemas.

Os parâmetros numéricos, tais como: variáveis de interesse, número de elementos das malhas 1D e 2D, *solvers* e demais estimadores a serem comparados ao estimador proposto também foram definidos, seguidos pelos intervalos de análise dos erros de iteração para cada problema e variável.

Também foi apresentado um método para melhoria das estimativas de erros de iteração nos intervalos em que o estimador proposto não apresenta resultados satisfatórios para a previsão do erro.

Por último, foram descritos procedimentos para usuários que desejem, ao resolver problemas de CFD, estimar erros de iteração, reduzi-los e/ou pesquisá-los.

5 PROBLEMA 1: EQUAÇÃO DE POISSON

Este capítulo é destinado à apresentação dos resultados obtidos ao se aplicar a metodologia proposta à equação de Poisson. Os resultados estão separados de acordo com as variáveis de interesse. Para cada variável é realizada a verificação do código, são detalhados os dados das simulações e dos parâmetros de cálculo dos estimadores e são delimitados os intervalos com as melhores estimativas de erros de iteração. Em seguida, esses intervalos são utilizados para calcular as soluções com erros de iteração reduzidos e também para melhorar as estimativas dos demais intervalos. Nesse capítulo são apresentados os resultados para o caso 3, os demais resultados constam no apêndice D.

5.1 Variável 1: valor da função (temperatura) no ponto central do domínio de cálculo $T(1/2)$

Na primeira análise constam os resultados numéricos obtidos para o valor da função no centro do domínio de cálculo considerando-se todas as iterações necessárias para que, ao calcular-se o erro de iteração verdadeiro para essa variável (por meio da Eq. (4.74)), o processo iterativo atingisse o erro de máquina. Realizou-se esse procedimento para cada caso do problema descrito na TABELA 1 da metodologia.

Assim, na segunda coluna da TABELA 2, apresentam-se os resultados das soluções numéricas convergidas (soluções dos sistemas de equações discretizados), obtidas com TDMA, sem erros de iteração. Na terceira coluna, apresentam-se as soluções numéricas obtidas com Gauss-Seidel, cujo critério de parada foi o erro de máquina, e, na coluna seguinte, o número de iterações necessárias para alcançá-lo. O valor que consta na terceira coluna da tabela mencionada é o da última iteração realizada.

TABELA 2 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS DOS CASOS DO PROBLEMA 1, PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$.

Caso	Sol. numérica com TDMA (Φ)	Sol. numérica com GS (ϕ_k)	No. de iterações
1	6,256103515625000E-002	6,256103515624999E-002	28939
2	6,250381469726562E-002	6,250381469726562E-002	432046
3	6,250023841857910E-002	6,250023841857910E-002	6421415

Como esse problema possui solução analítica conhecida dada pela Eq. (4.7), basta aplicá-la ao ponto central do domínio de cálculo $x = 1/2$, obtendo-se $T(1/2) = 6,25E-002$. Calculando-se os erros numéricos por meio da Eq. (3.42), cujos resultados estão representados na TABELA 3, nota-se que, com o refinamento sistemático da malha, os erros numéricos diminuem, ou seja, as soluções numéricas aproximam-se da solução analítica, indicando convergência.

TABELA 3 – ERROS NUMÉRICOS DOS CASOS DO PROBLEMA 1 PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$.

Caso	Erro numérico (Φ)	Erro numérico (ϕ_k)
1	6,103515625000000E-005	6,103515624999999E-005
2	3,814697265625000E-006	3,814697265624999E-006
3	2,384185791015625E-007	2,384185791015624E-007

Analisando-se a aproximação numérica escolhida para a discretização dessa equação (CDS-2), tem-se, *a priori*, a ordem assintótica do erro de discretização $p_L = 2$. Também foram calculadas as ordens efetiva ($p_{E_h}^*$) e aparente ($p_{U_h}^*$) equivalentes, e observou-se que, com o refinamento da malha, $p_{E_h}^* \rightarrow p_L$ e $p_{U_h}^* \rightarrow p_L$. Logo, o erro de discretização está decaindo com a ordem esperada.

Concluída a verificação do código, procede-se à verificação da solução, a qual, nesse trabalho, é dedicada às estimativas e à redução do erro de iteração. Para fazer as análises as iterações foram divididas em intervalos, como descrito a seguir.

Para essa variável, observou-se que as iterações dividem-se em 5 intervalos. O primeiro intervalo (I) corresponde à faixa inicial de iterações em que $-1 \leq \psi \leq 1$, ou seja, a série geométrica da qual é obtida o estimador proposto não é convergente. Esse intervalo inicia-se na terceira iteração, pois são necessários três níveis iterativos para o cálculo da taxa de convergência ψ (Eq. (4.62)).

O segundo intervalo (II) corresponde a uma faixa de iterações em que $\psi > 1$ (série convergente), com bom desempenho do estimador. Em seguida, tem-se uma única iteração de transição, em que $\psi < -1$ e inicia-se o terceiro intervalo (III), onde, novamente, tem-se $-1 \leq \psi \leq 1$ (série geometria divergente).

Finalmente, o valor de ψ estabiliza-se convergindo monotonicamente para um valor maior do que 1 (série convergente) até que o processo iterativo atinja o erro de máquina (intervalo IV). O intervalo V contém as iterações finais do processo iterativo que possuem maior interferência dos erros de arredondamento.

Um resumo desses intervalos para o caso 3 dessa variável consta na TABELA 4. Os intervalos correspondentes aos demais casos constam no apêndice D. Assim, observando-se as condições (i) e (ii) para delimitação dos intervalos proposta na metodologia, o intervalo que possui melhores estimativas de erros de iteração para essa variável é o intervalo IV.

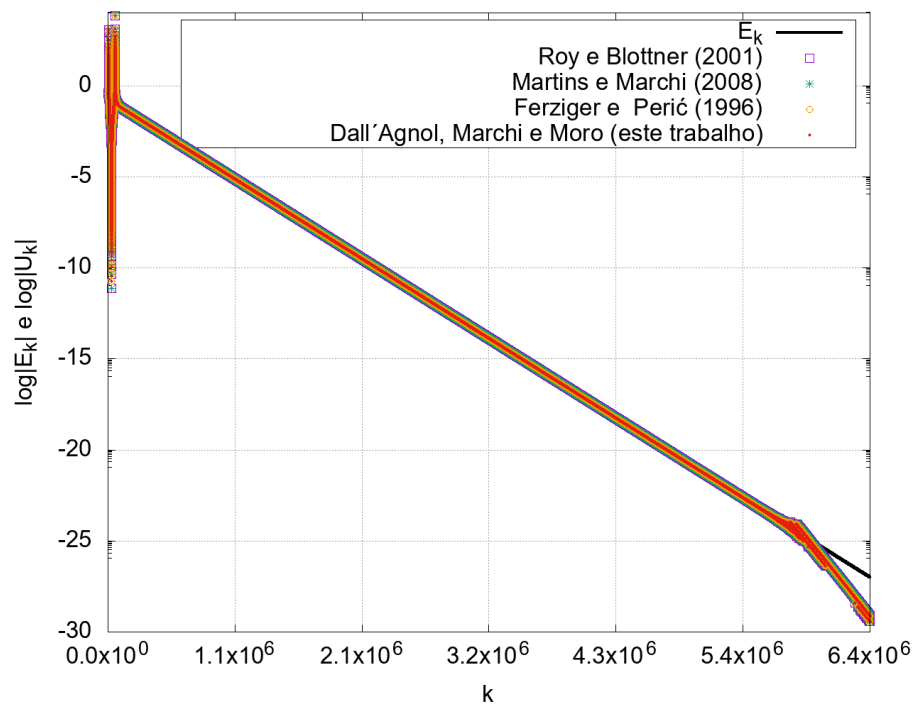
Na FIGURA 19 estão representados os módulos das estimativas de o erro de iteração em escala logarítmica e na FIGURA 20, constam os valores da taxa de convergência ψ para todas as iterações necessárias até ser alcançado o erro de máquina para o caso 3 desse problema. Devido ao grande número de iterações, não é possível visualizar nessas figuras as variações que ocorrem nas estimativas e nos valores da taxa de convergência a

TABELA 4 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$, PROBLEMA 1, CASO 3.

Intervalo	Critério	Iterações
I	$-1 \leq \psi \leq 1$	3 : 7142
II	$\psi > 1$	7143 : 29721
transição	$\psi < -1$	29722
III	$-1 \leq \psi \leq 1$	29723 : 59181
IV	$\psi > 1$ sem erros significativos de arredondamento	59182 : 457815
V	$\psi > 1$ com erros significativos de arredondamento	457816 : 6421415

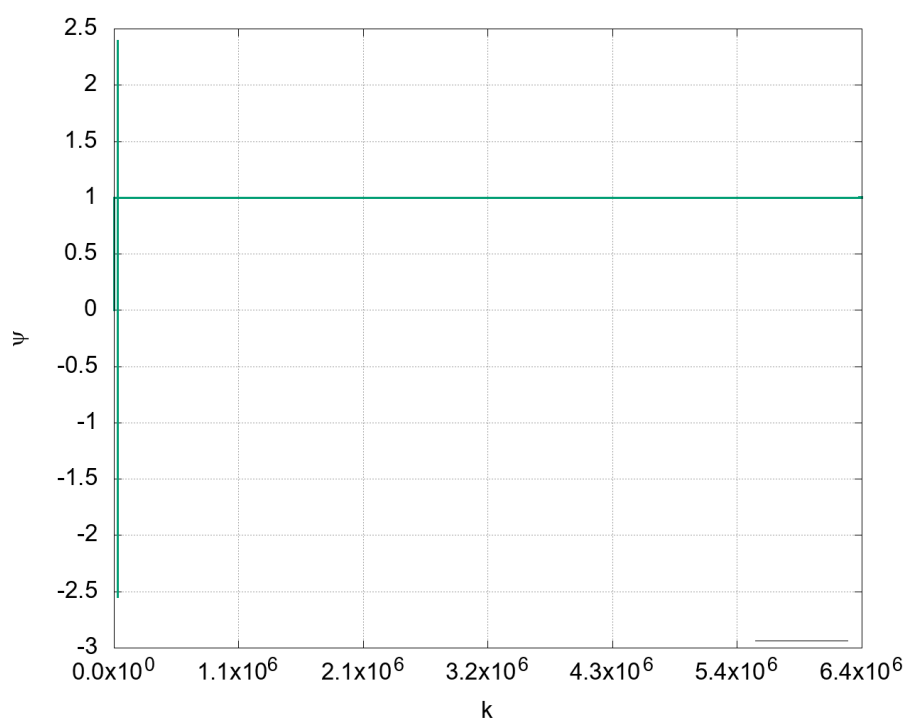
cada intervalo.

Porém, ao analisar-se a efetividade dos estimadores (Eq. (2.1)), percebe-se que, para todos os casos, os estimadores foram confiáveis em, aproximadamente, apenas 56% das iterações. Esse dado sugere que os intervalos devam ser analisados separadamente e de forma mais aprofundada. Portanto, são detalhadas a seguir as estimativas para cada um dos intervalos delimitados para o caso 3 desse problema (as figuras referentes aos demais casos estão no apêndice D).

FIGURA 19 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES.

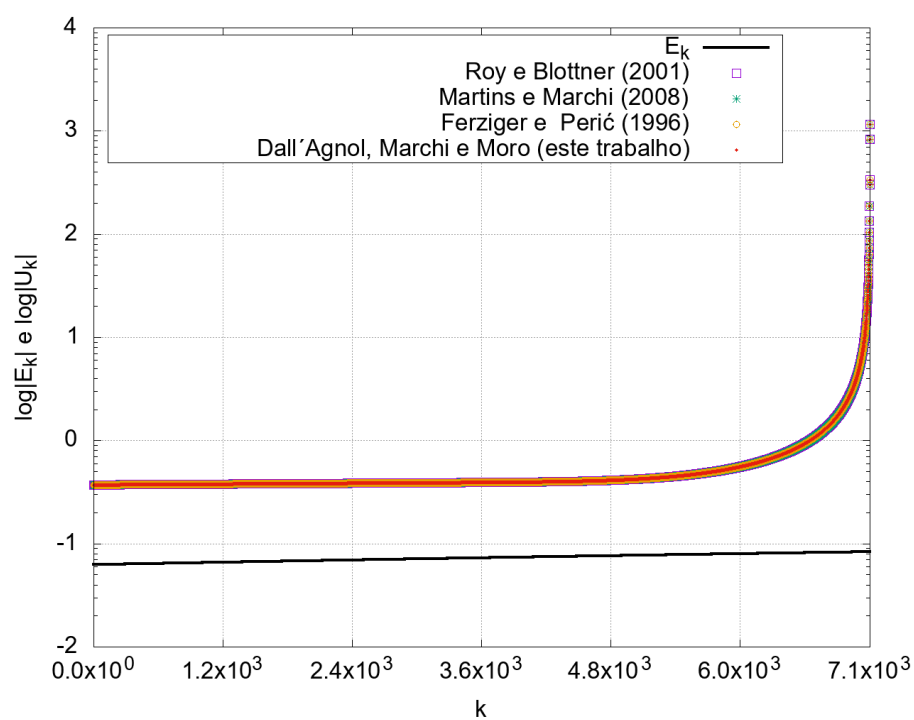
Fonte: a autora (2020).

FIGURA 20 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



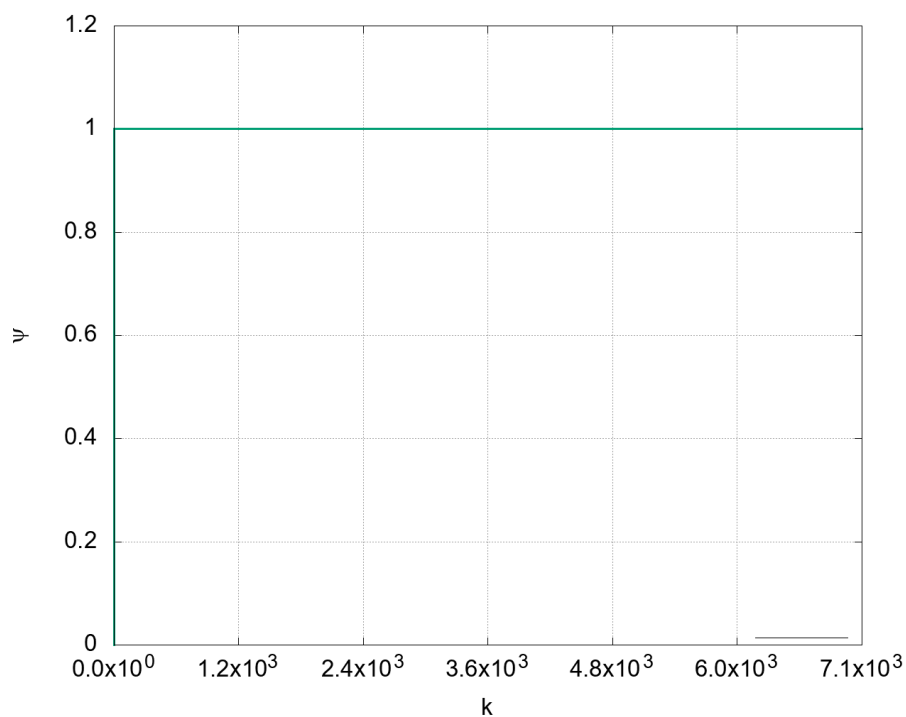
Fonte: a autora (2020).

FIGURA 21 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO I.



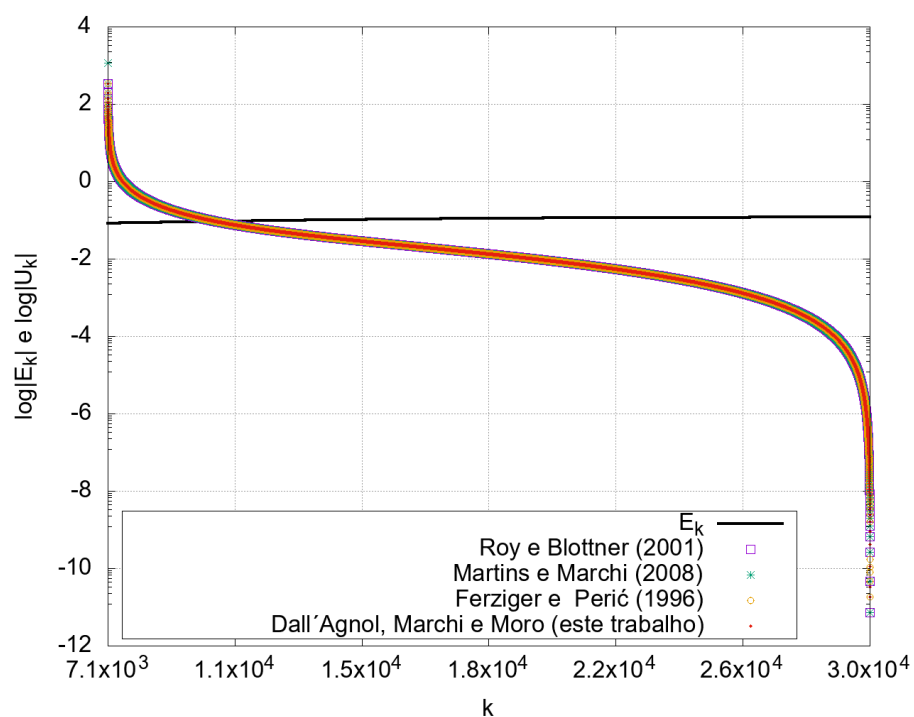
Fonte: a autora (2020).

FIGURA 22 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO I.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA 23 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO II.

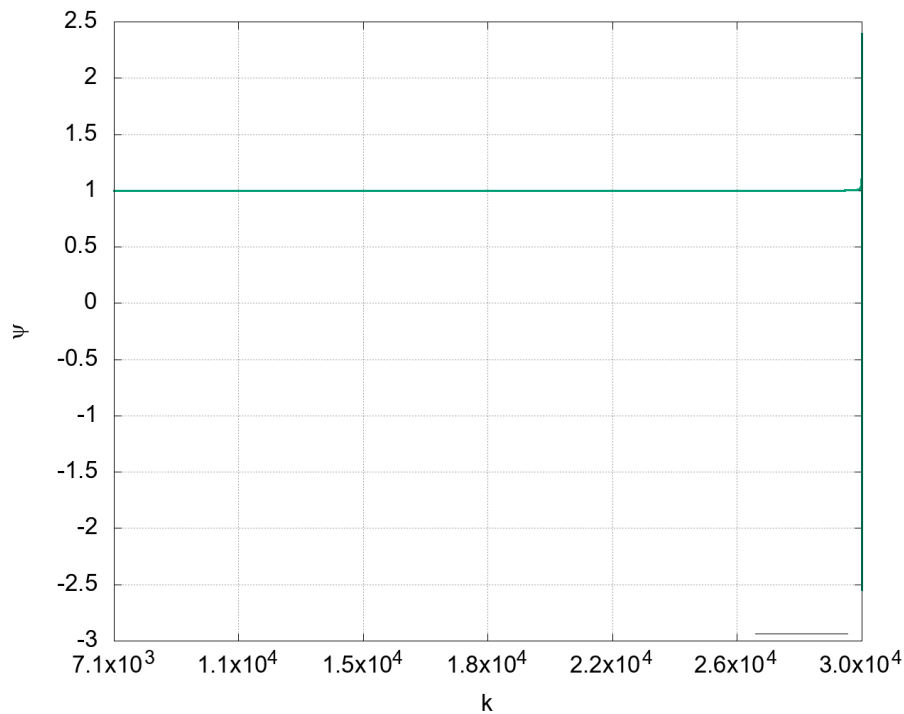


Fonte: a autora (2020).

A FIGURA 21 apresenta os resultados das estimativas de erros para o intervalo I, já a FIGURA 22 apresenta os valores de ψ correspondentes ao mesmo intervalo. Nota-se que os estimadores não possuem um bom desempenho nessa faixa de iterações, superestimando o erro de iteração. Percebe-se também que o valor de ψ aproxima-se de 1.

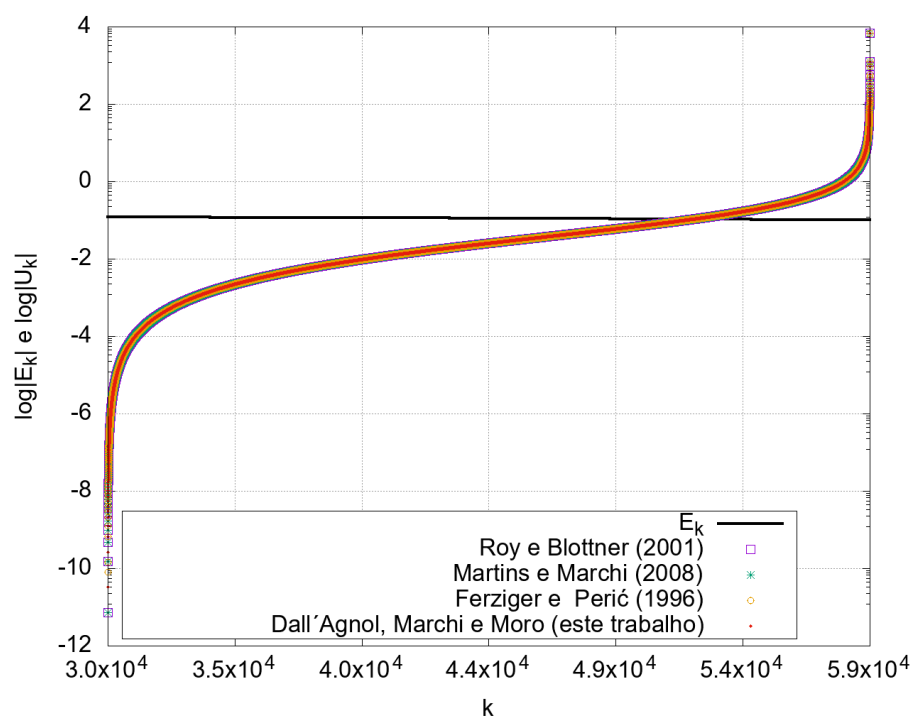
No intervalo II, representado na FIGURA 23 nota-se que as estimativas também não estão acuradas, primeiro superestimando e depois subestimando o erro de iteração. A taxa de convergência ψ , representada na FIGURA 24 possui valor crescente ao longo das iterações desse intervalo.

FIGURA 24 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO II.

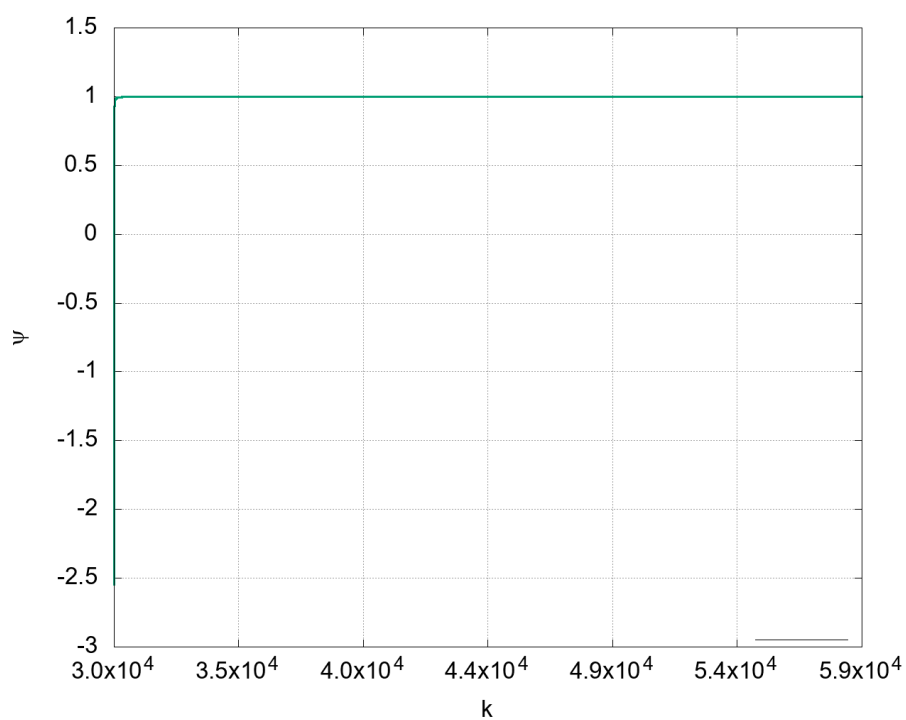


Fonte: a autora (2020).

Os intervalos II e III são separados pela iteração de transição (conforme TABELA 4). Assim, observa-se na FIGURA 25 que no intervalo III as estimativas primeiro subestimam e depois superestimam o erro de iteração, comportamento inverso ao do intervalo II. Na iteração de transição o valor de ψ é negativo, o que fica evidente na FIGURA 26.

FIGURA 25 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO III.

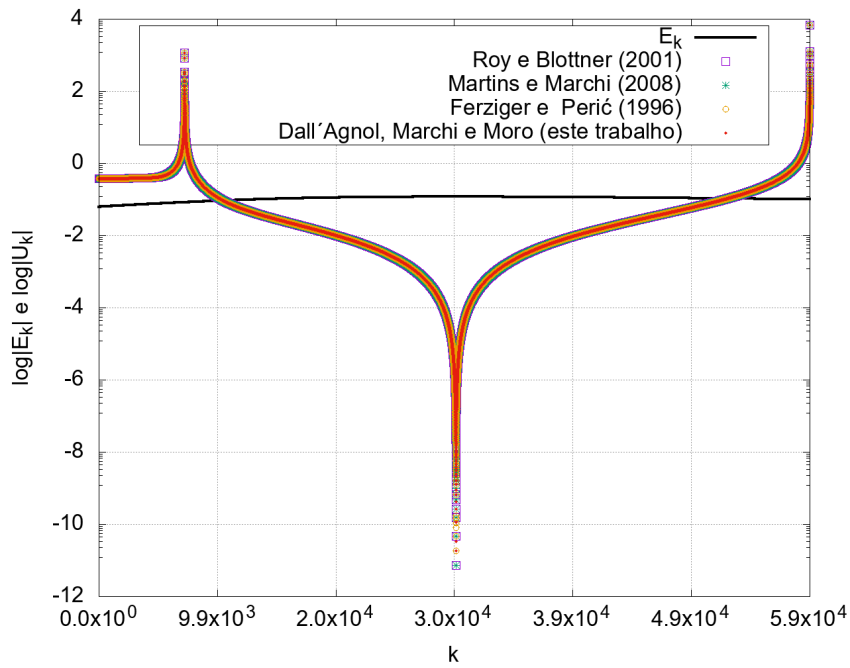
Fonte: a autora (2020).

FIGURA 26 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO III.

Fonte: a autora (2020).

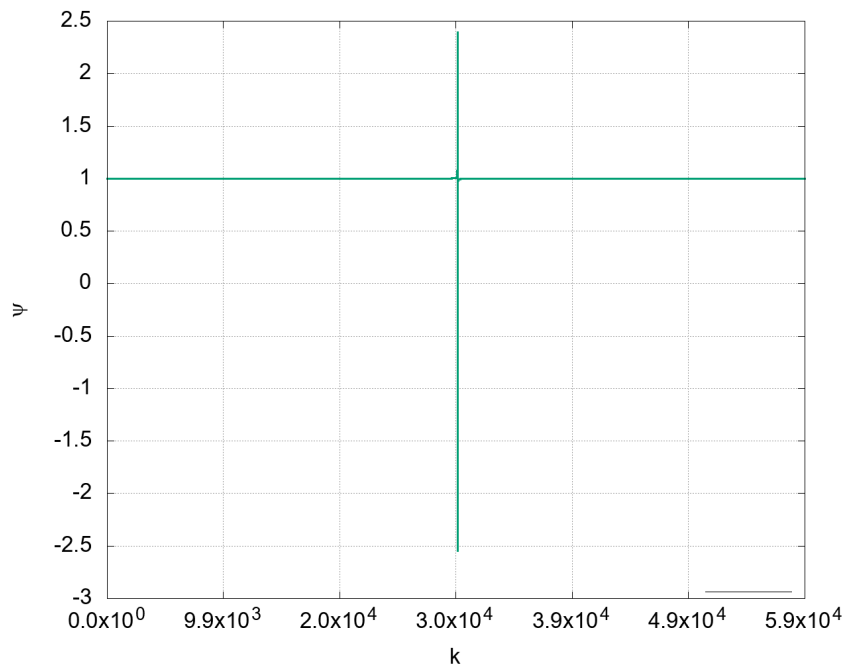
Nas FIGURAS 27 e 28 consta um resumo do comportamento das estimativas e da taxa de convergência ψ dos 3 primeiros intervalos delimitados.

FIGURA 27 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NOS INTERVALOS I A III.



Fonte: a autora (2020).

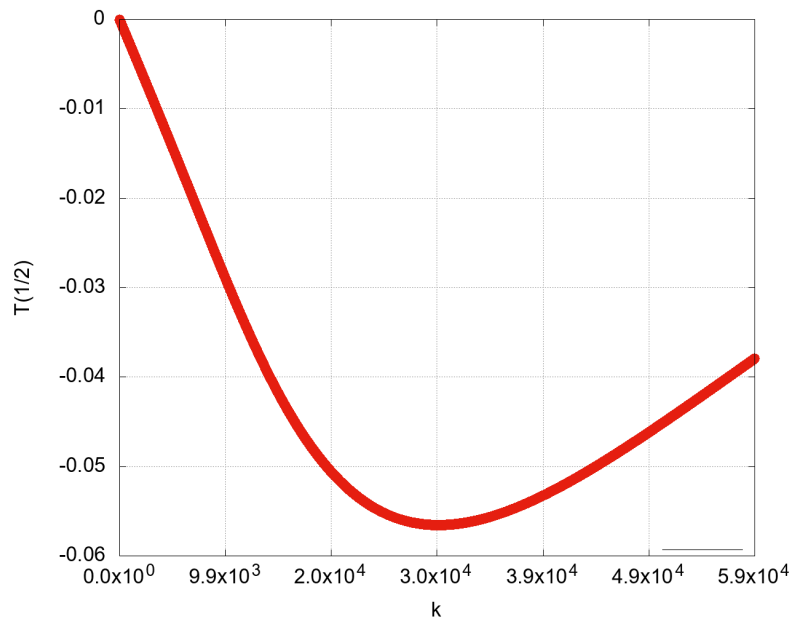
FIGURA 28 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NOS INTERVALOS I A III.



Fonte: a autora (2020).

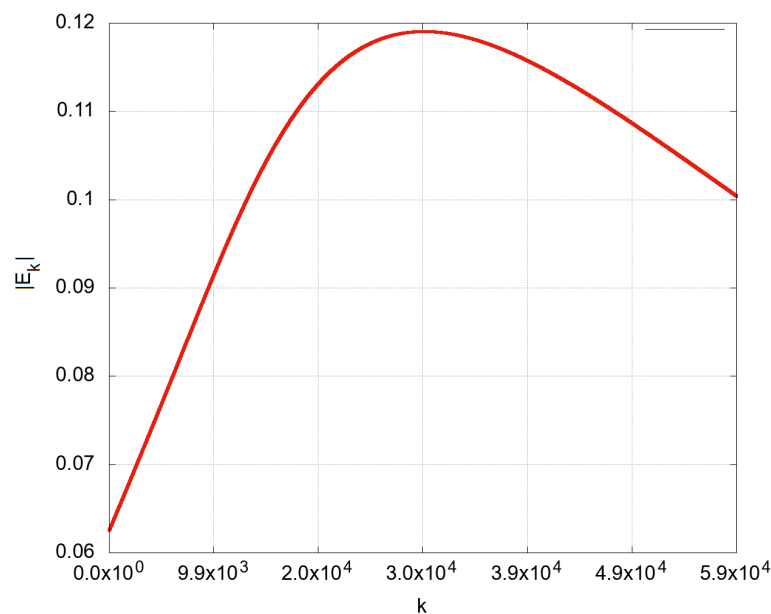
Observando-se o comportamento da solução numérica calculada e do erro verdadeiro de iteração, FIGURA 29 e FIGURA 30, respectivamente, nos 3 primeiros intervalos, nota-se que, próximo à iteração de transição, a solução numérica possui um mínimo local, enquanto o erro de iteração possui um máximo local.

FIGURA 29 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS CALCULADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NOS INTERVALOS I A III.



Fonte: a autora (2020).

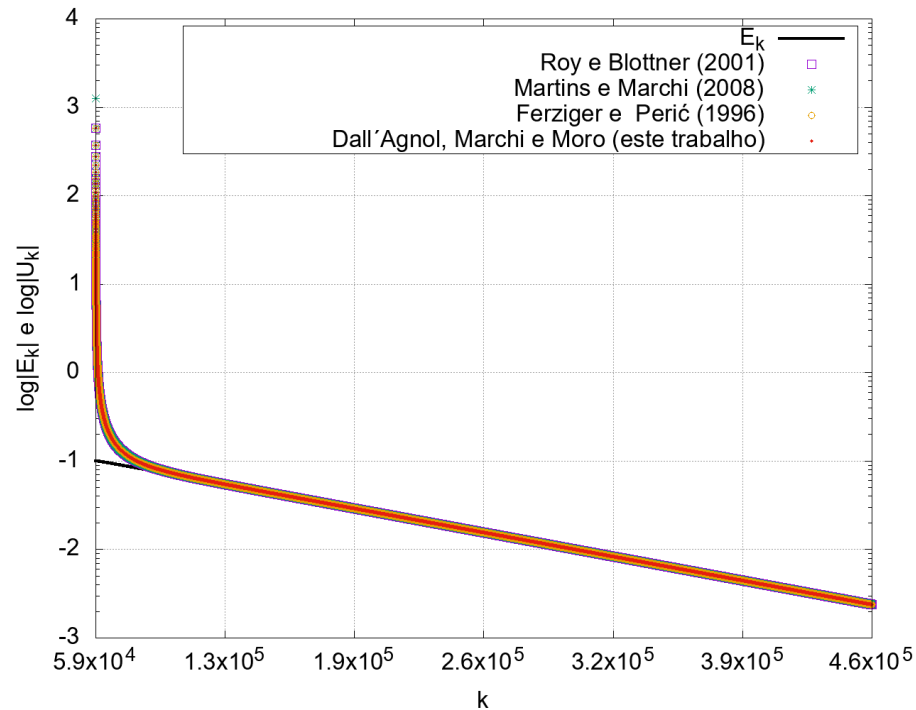
FIGURA 30 – ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NOS INTERVALOS I A III.



Fonte: a autora (2020).

Já no intervalo IV, FIGURA 31, constata-se que, com exceção das primeiras iterações, as estimativas praticamente coincidem com o erro de iteração, o que denota o bom desempenho dos estimadores nesse intervalo. O valor da taxa de convergência estabiliza-se em pouco mais de 1, como mostram as FIGURAS 32 e 35 confirmando que o estimador está no raio de convergência da série geométrica que o representa.

FIGURA 31 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO IV.

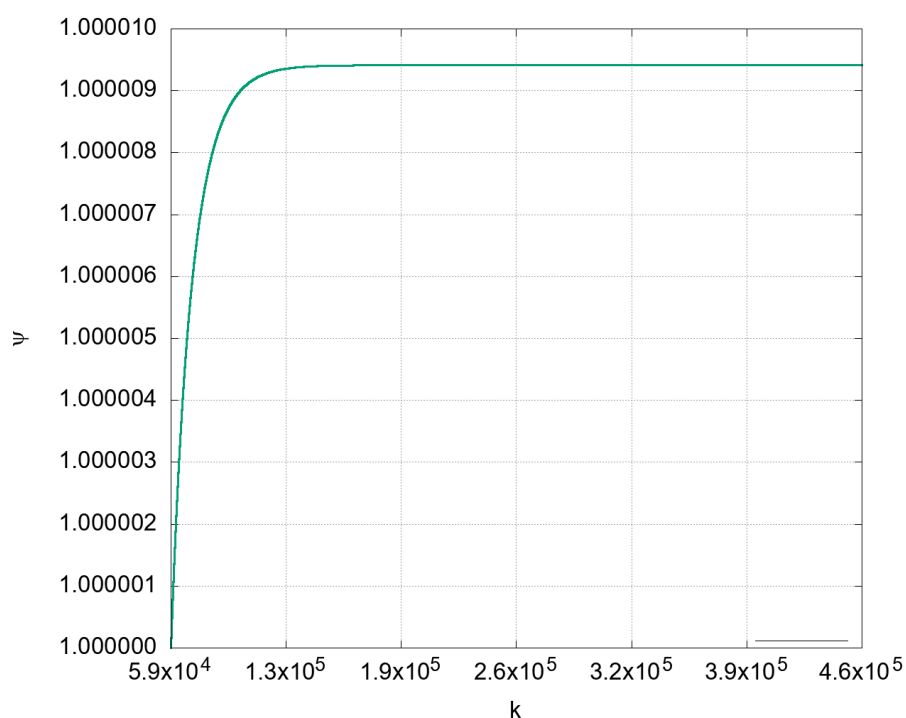


Fonte: a autora (2020).

A influência mais significativa do erro de arredondamento marca o final do intervalo IV e o início do intervalo V. Assim, as estimativas de erro do intervalo IV são acuradas até o início do intervalo V, como mostra a FIGURA 33. Porém, observando-se a FIGURA 34, que mostra o módulo da diferença entre a estimativa de erro obtida com o estimador proposto a cada iteração, nota-se a presença dos erros de arredondamento.

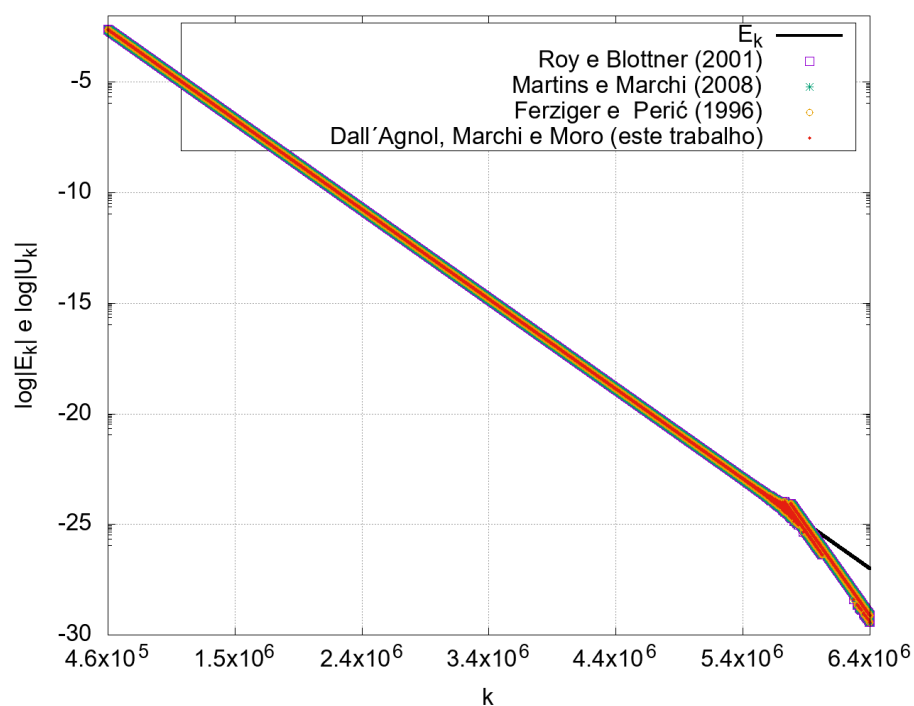
Depois de delimitado o melhor intervalo para as estimativas, utilizando a Eq. (4.77) são recalculadas as soluções em todos os intervalos, obtendo-se soluções com erros de iteração reduzidos. Essas soluções estão representadas na FIGURA 36.

FIGURA 32 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO IV.



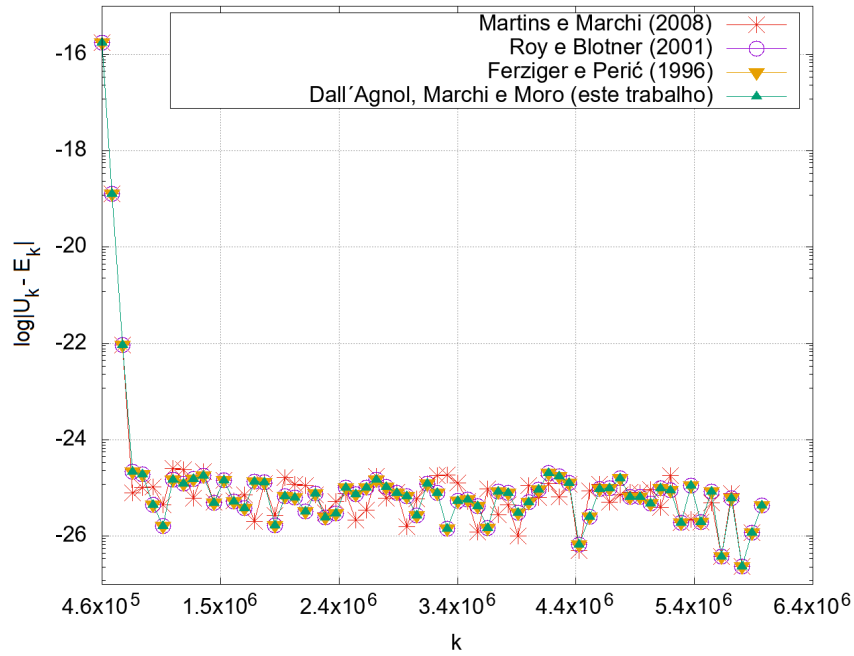
Fonte: a autora (2020).

FIGURA 33 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO V.



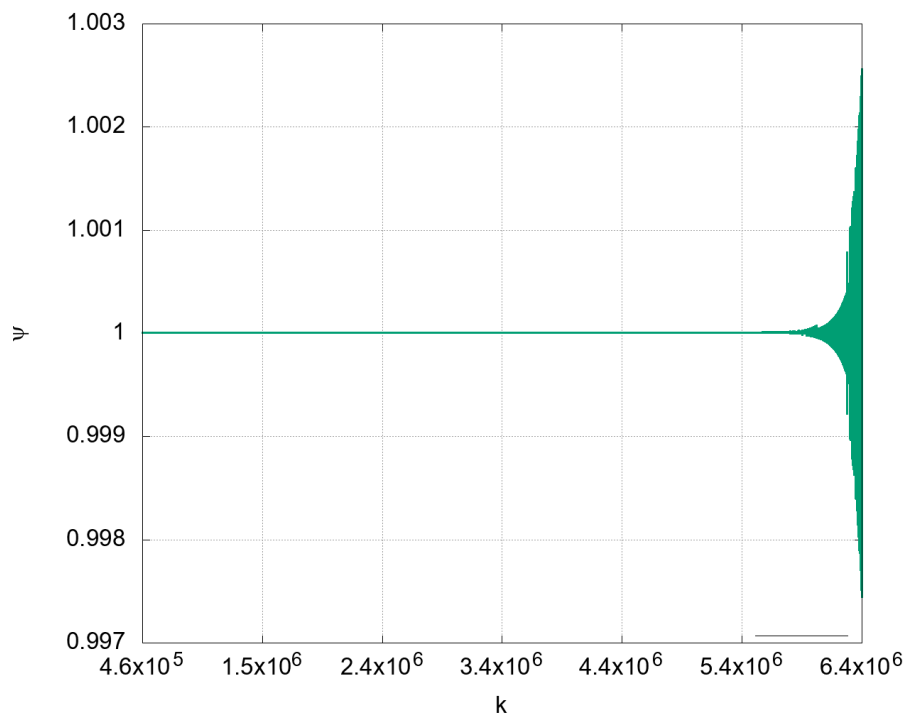
Fonte: a autora (2020).

FIGURA 34 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR PROPOSTO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO V.



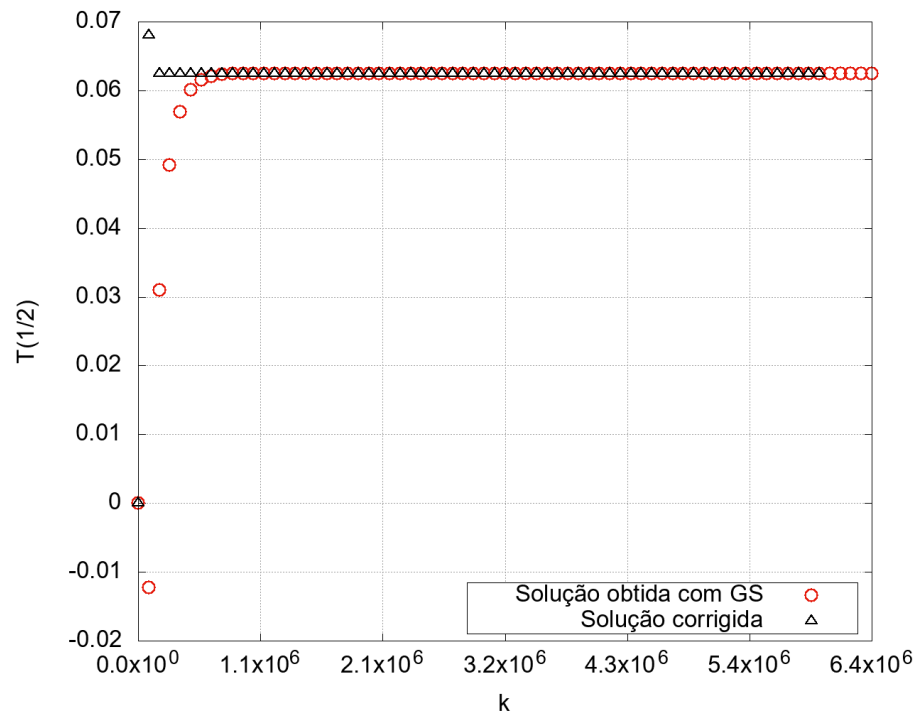
Fonte: a autora (2020).

FIGURA 35 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO V.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA 36 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

De acordo com o descrito na metodologia, a solução correspondente à última iteração do intervalo IV (ϕ_{it_2}) foi considerada a solução mais acurada e, portanto, foi aplicada à Eq. (4.79) para o cálculo das estimativas melhoradas. Na TABELA 5 constam as soluções das últimas iterações do intervalo IV para cada um dos casos do problema.

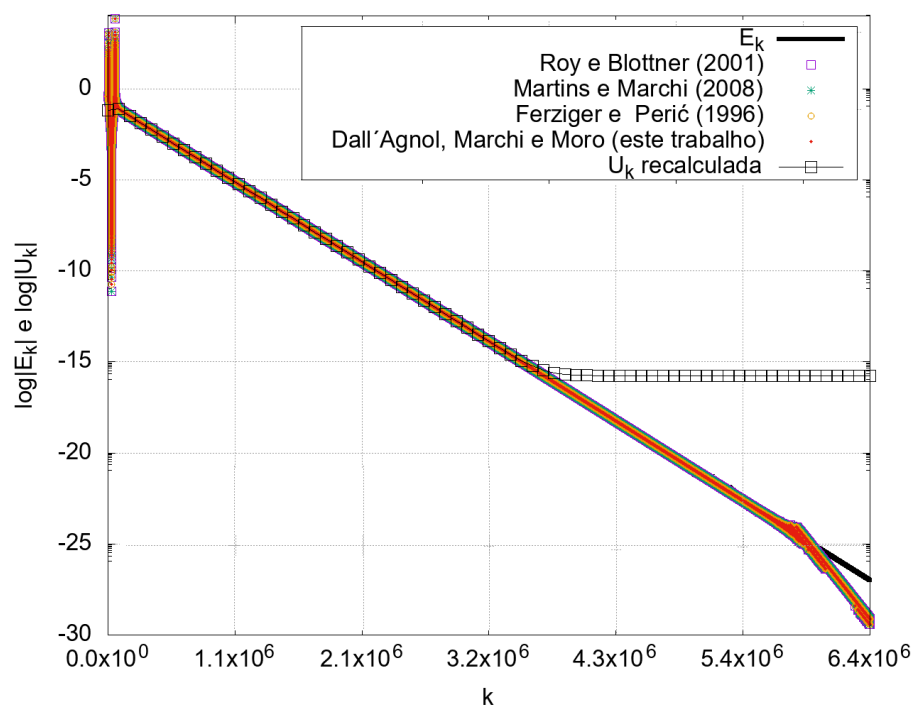
TABELA 5 – VALORES DAS SOLUÇÕES NA ÚLTIMA ITERAÇÃO DO INTERVALO IV DE CADA CASO DO PROBLEMA 1, VARIÁVEL $T(1/2)$.

Caso	Iteração	ϕ_{it_2}
1	2854	6,2561035156250000000000001853460284E-002
2	36832	6,250381469726562500267064749468580E-002
3	457815	6,250023841857927509613438506073024E-002

As novas estimativas foram calculadas e o resultado para todas as iterações consta na FIGURA 37. Aqui também serão analisados os intervalos separadamente para melhor visualização dos resultados.

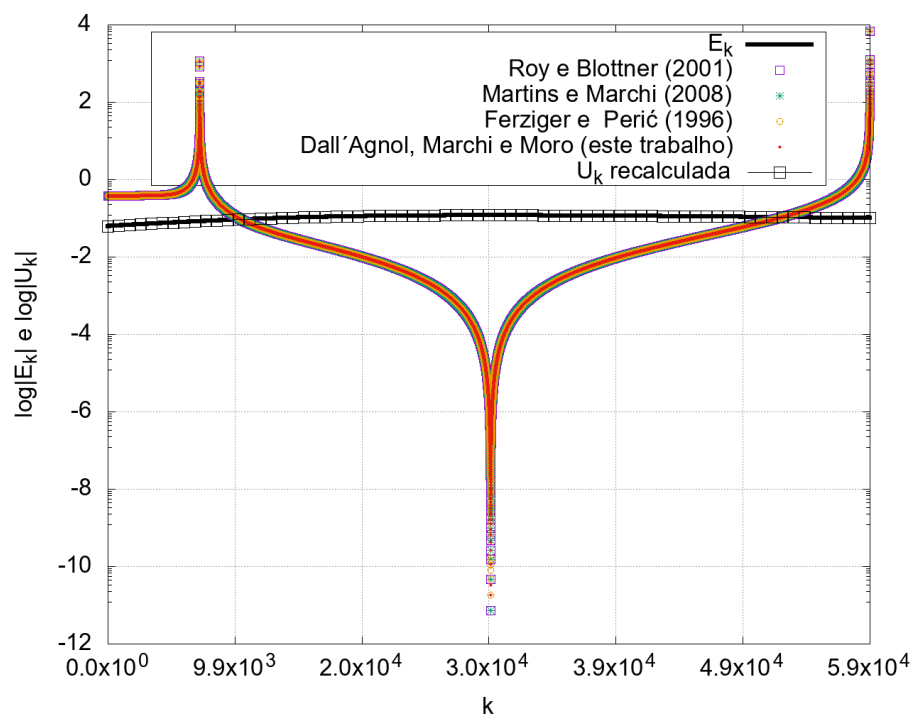
Nos intervalos I, II e III concentram-se as estimativas menos acuradas do estimador empírico-médio, assim, na FIGURA 38 constam as estimativas obtidas inicialmente e também os novos resultados calculados. Observa-se uma melhora considerável nas previsões de erro desses 3 intervalos.

FIGURA 37 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

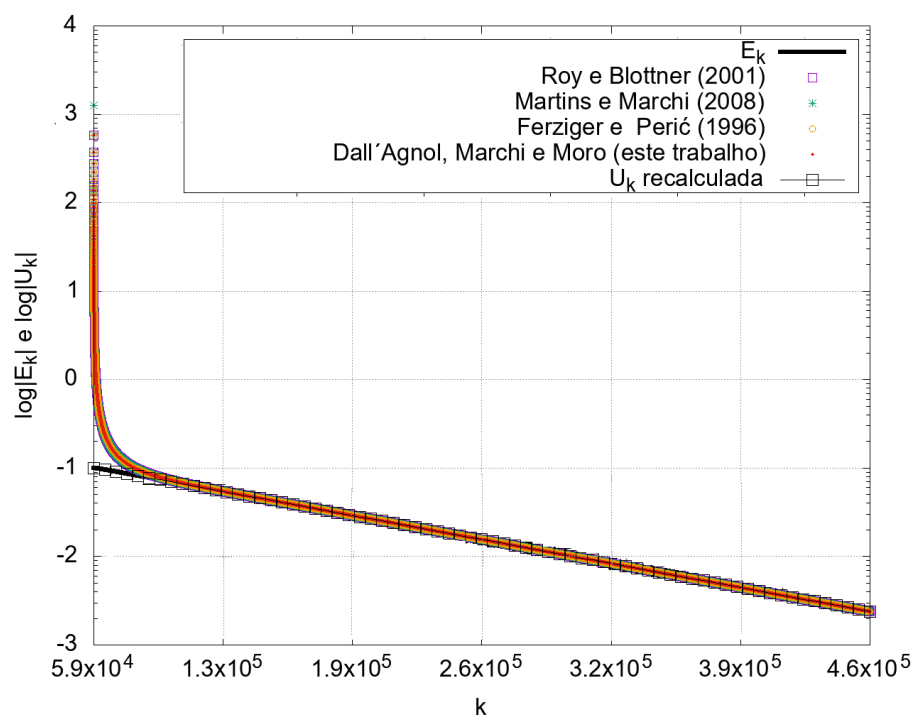
FIGURA 38 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NOS INTERVALOS I A III.



Fonte: a autora (2020).

No início do intervalo IV, algumas iterações destoavam do erro de iteração, conforme a FIGURA 31, ao se recalcularem as estimativas, esses resultados também obtiveram melhoras significativas. Esse fato é representado na FIGURA 39, que representa o intervalo IV. Nota-se que as novas estimativas obtidas são mais acuradas que as obtidas anteriormente, por meio dos estimadores.

FIGURA 39 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO IV.

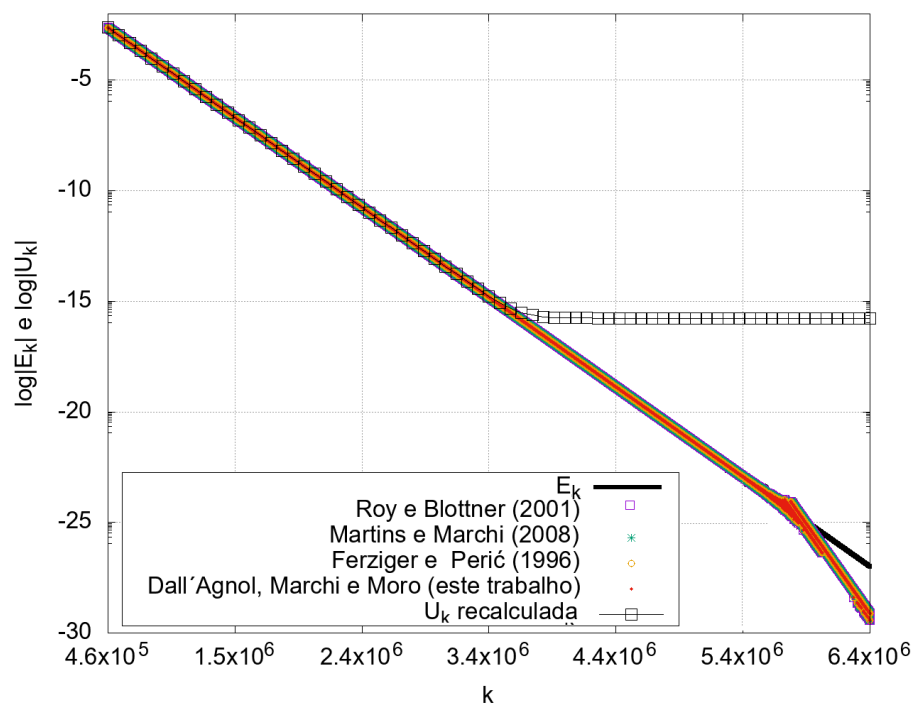


Fonte: a autora (2020).

No final do intervalo V, porém, pela presença mais expressiva dos erros de arredondamento, não foi possível ajustar todas as estimativas, como mostra a FIGURA 40.

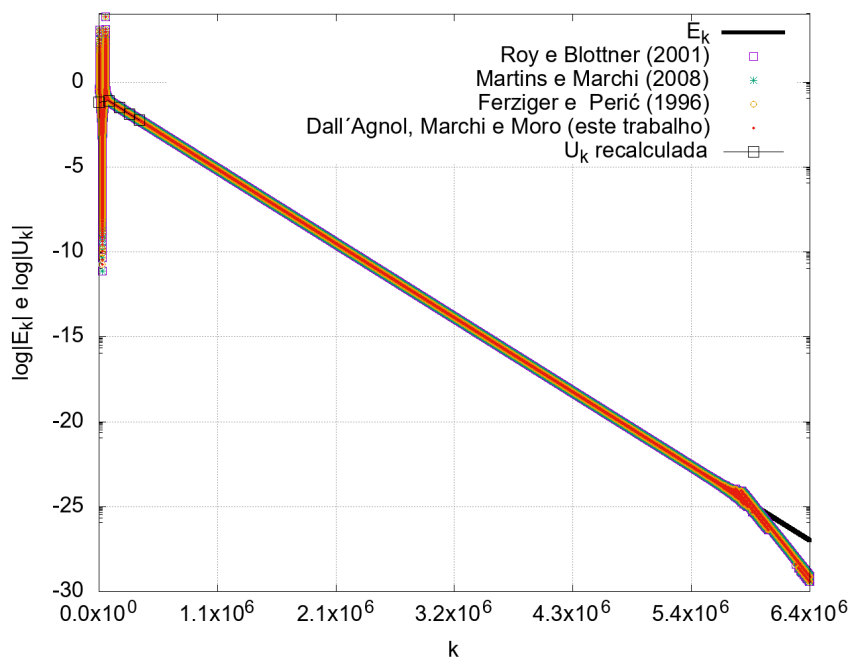
De modo geral, para todos os intervalos, foram obtidas estimativas muito mais próximas do erro de iteração verdadeiro do que as obtidas anteriormente. Porém, para o último intervalo, recomenda-se utilizar apenas o estimador, pois o procedimento de correção da solução não foi eficiente para melhorar as estimativas devido aos erros de arredondamento. Na FIGURA 41 apresenta-se a combinação dos dois procedimentos de estimativas: nos intervalos I a IV é utilizada a solução corrigida e no intervalo V é utilizado apenas o estimador.

FIGURA 40 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO V.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA 41 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

5.2 Variável 2: gradiente no contorno leste (direito) do domínio de cálculo $grad T(1)$

Calculando-se as soluções numéricas com TDMA e com Gauss-Seidel até que o processo iterativo atinja o erro de máquina para cada um dos casos descritos na TABELA 1, chega-se aos resultados da TABELA 6. Comparando-se o número de iterações necessárias para encerrar-se o processo iterativo para as variáveis 1 e 2, observa-se que a variável 2 necessitou de um número maior de iterações que a variável 1 para convergir.

TABELA 6 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS DOS CASOS DO PROBLEMA 1 PARA A VARIÁVEL $grad T(1)$.

Caso	Sol. numérica com TDMA (Φ)	Sol. numérica com GS (ϕ_k)	No. de iterações
1	3,997825622558594E+000	3,997825622558594E+000	29557
2	3,999863028526306E+000	3,999863028526306E+000	439711
3	3,999991422519088E+000	3,999991422519088E+000	6542996

A solução analítica para essa variável é dada pela Eq. (4.8), $grad T(1) = 4$. Assim, é possível obter os erros numéricos apresentados na TABELA 7.

TABELA 7 – ERROS NUMÉRICOS DOS CASOS DO PROBLEMA 1 PARA A VARIÁVEL $grad T(1)$.

Caso	Erro numérico (Φ)	Erro numérico (ϕ_k)
1	2,174377441406250E-003	2,174377441406250E-003
2	1,369714736938476E-004	1,369714736938476E-004
3	8,577480912208557E-006	8,577480912208558E-006

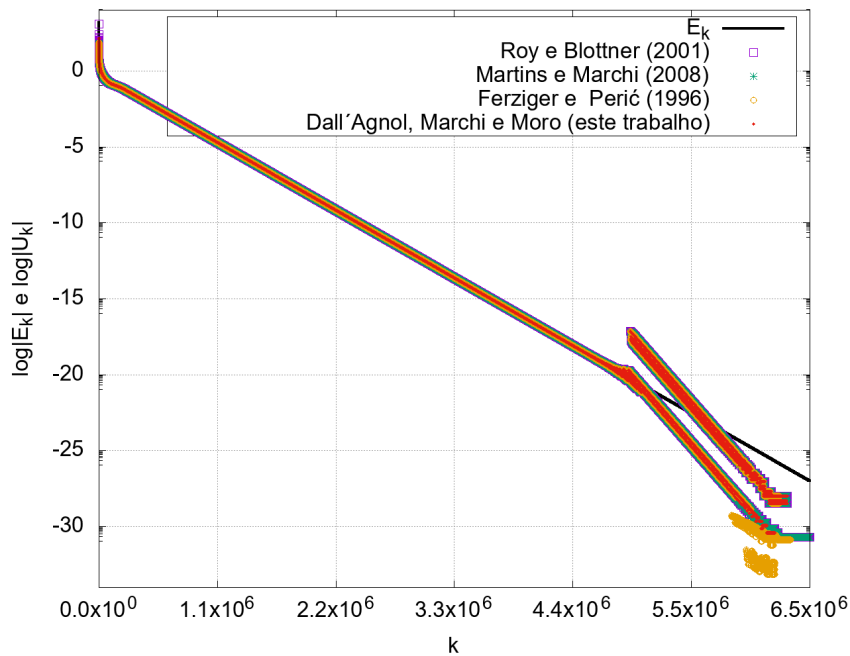
O esquema numérico utilizado para aproximar $grad T(1)$ foi UDS-2, assim, a ordem assintótica de decaimento do erro de discretização é $p_L = 2$. Com o refinamento da malha observou-se que $p_{E_h}^* \rightarrow 2$ e $p_{U_h}^* \rightarrow 2$, como esperado.

A FIGURA 42 mostra as estimativas de erros para todas as iterações necessárias até a convergência da variável para o caso 3. Observa-se que, próximo de $k = 5,6 \times 10^6$, os erros de arredondamento se tornam mais significativos, prejudicando as previsões do erro de iteração para todos os estimadores. A efetividade θ , para todos os casos, manteve-se maior que 1 em, aproximadamente, 34% das iterações. Número consideravelmente menor que para a variável anterior. Como se pode observar na FIGURA 43, o valor da taxa de convergência ψ mantém-se maior que 1 em todo o processo iterativo.

Para essa variável, tem-se $\psi > 1$ (série convergente) do início ao fim do processo iterativo (exceto pelos erros de arredondamento no final do processo). Assim, fez-se necessário delimitar apenas dois intervalos, diferenciando-os em relação à presença mais significativa de erros de arredondamento ou não. Esses intervalos, para o caso 3, estão na TABELA 8. Os demais casos estão no apêndice D. No intervalo I têm-se as estimativas

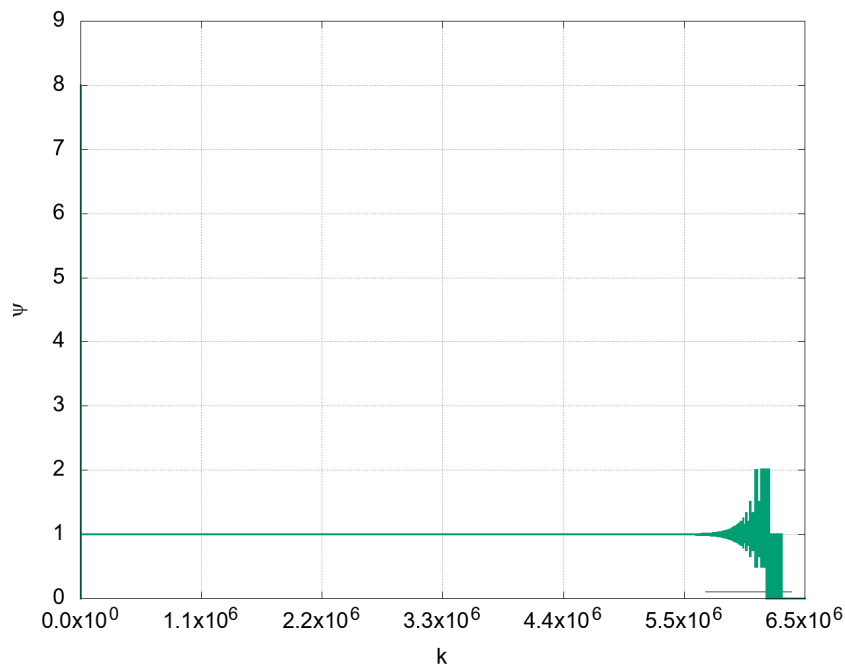
com menor influência dos erros de arredondamento, portanto, esse é o intervalo de melhor desempenho do estimador.

FIGURA 42 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA 43 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES.

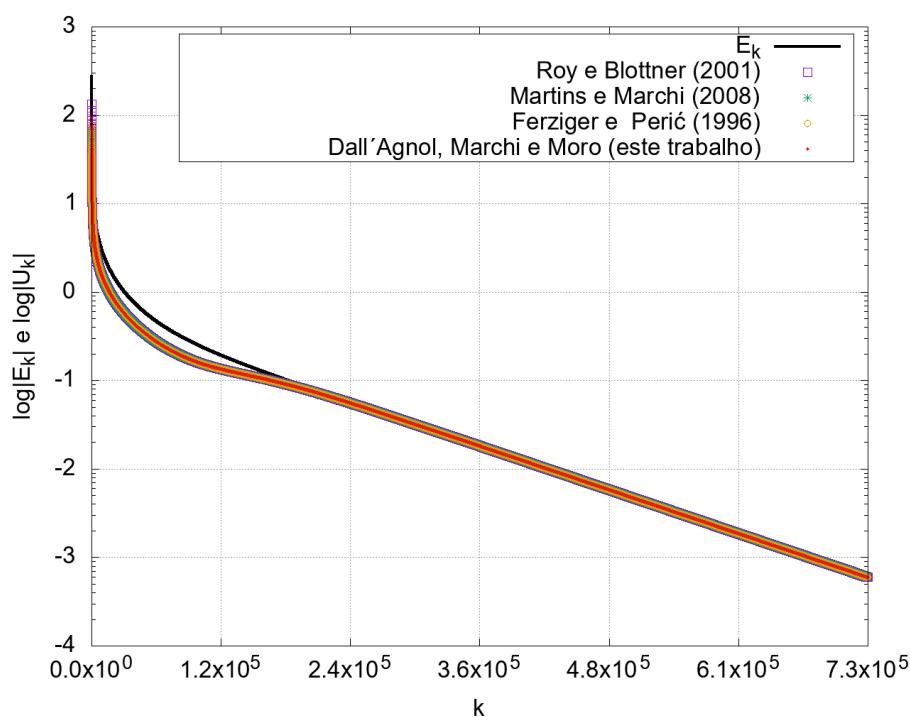


Fonte: a autora (2020).

TABELA 8 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL T_m , PROBLEMA 1, CASO 3.

Intervalo	Critério	Iterações
I	$\psi > 1$ sem erros significativos de arredondamento	3 : 726608
II	$\psi > 1$ com erros significativos de arredondamento	726609 : 6542996

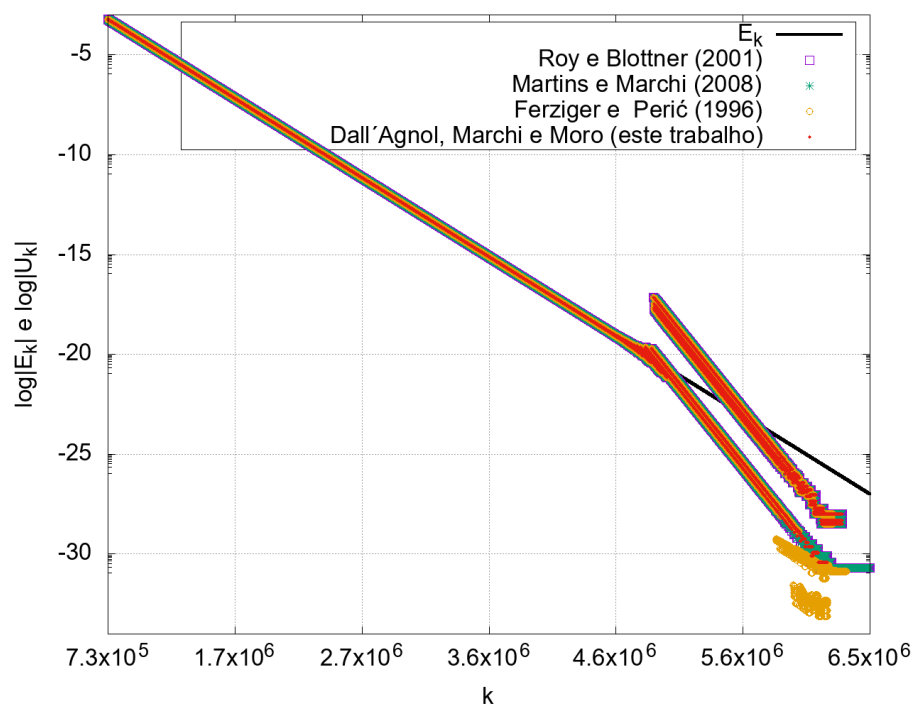
Observando-se mais atentamente as estimativas do intervalo I, nota-se que, no início desse intervalo, as estimativas subestimam o erro de iteração, como mostra a FIGURA 44.

FIGURA 44 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL, $grad T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO I.

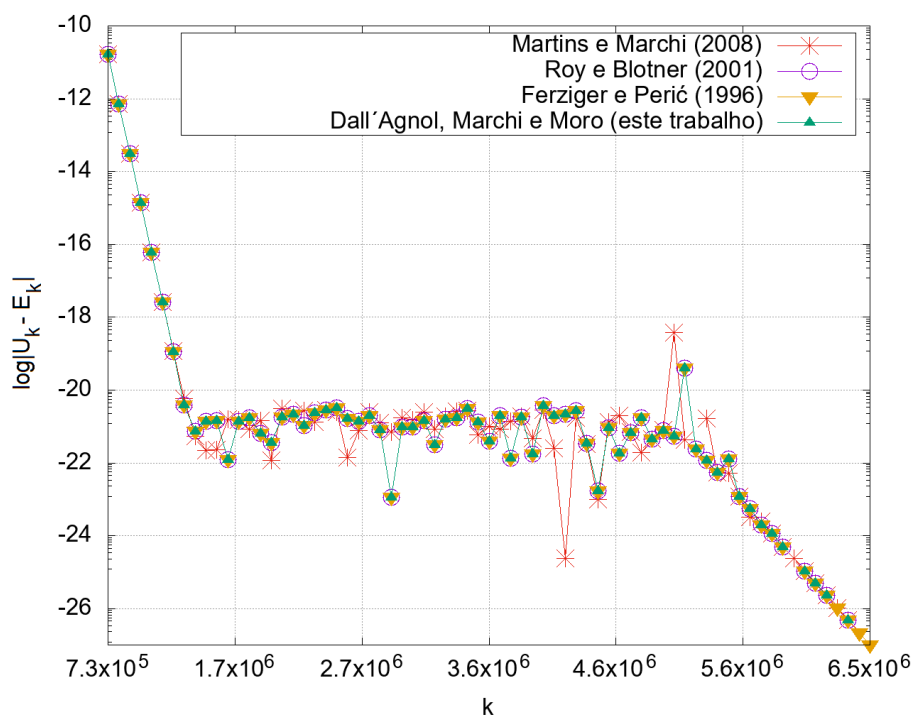
Fonte: a autora (2020).

Já no final do intervalo II (FIGURA 45) nota-se que os erros de arredondamento fazem com que as estimativas não se ajustem ao erro, ora subestimando-o e ora superestimando-o. A presença dos erros de arredondamento fica mais evidente ao analisar-se a FIGURA 46, que representa o módulo da diferença entre as estimativas e o erro de iteração no intervalo II.

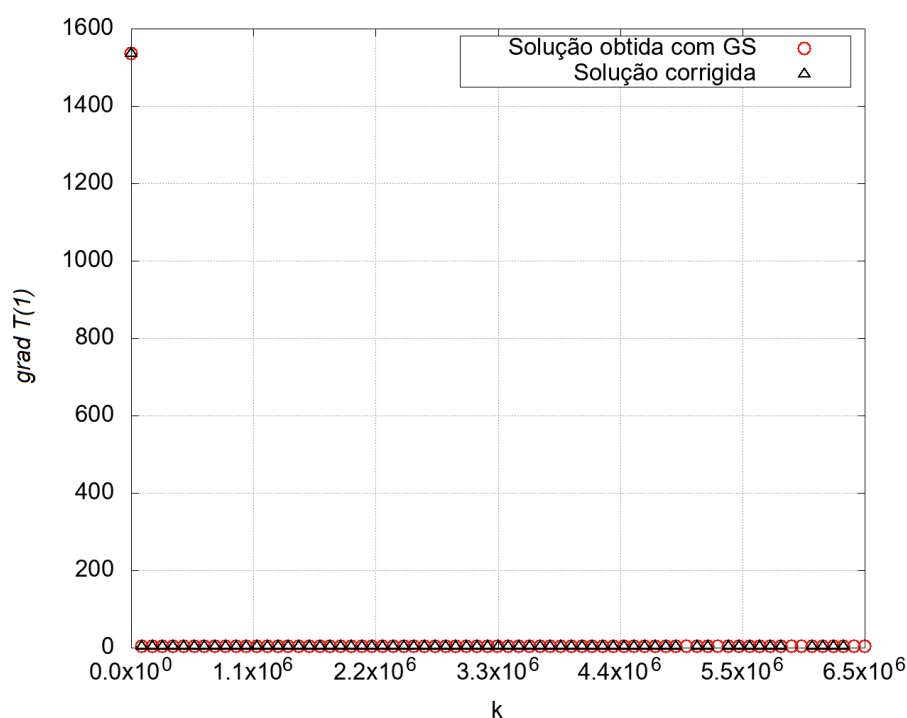
A fim de obter as soluções com erros de iteração reduzidos, por meio da Eq. (4.77), são recalculadas as soluções em todos os intervalos. Os resultados são apresentados na FIGURA 47.

FIGURA 45 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO II.

Fonte: a autora (2020).

FIGURA 46 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR PROPOSTO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO II.

Fonte: a autora (2020).

FIGURA 47 – SOLUÇÃO COM GS E SOLUÇÃO CORRIGIDA PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES.

Fonte: a autora (2020).

Em seguida, utiliza-se a solução obtida na última iteração do intervalo I para o cálculo das novas estimativas. Na TABELA 9 constam essas soluções para cada um dos casos do problema.

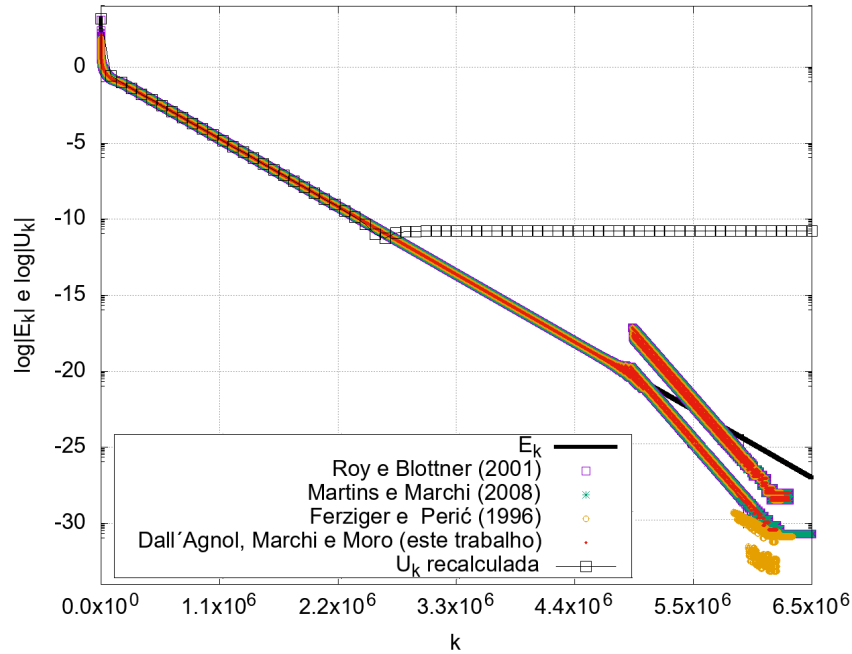
TABELA 9 – VALORES DAS SOLUÇÕES NA ÚLTIMA ITERAÇÃO DO INTERVALO I DE CADA CASO DO PROBLEMA 1, VARIÁVEL $grad\ T(1)$.

Caso	Iteração	ϕ_{it_2}
1	5480	3,997825622558593750000138601640683E+000
2	66428	3,999863028526306204874458486419853E+000
3	726608	3,999991422535594631240292697708181E+000

A Eq. (4.79) foi utilizada para recalculas as estimativas e o resultado está representado na FIGURA 48. Na FIGURA 49 constam as estimativas obtidas inicialmente e também os novos resultados calculados no intervalo I. Observa-se que, no início desse intervalo, foi obtida melhora significativa nas previsões de erro.

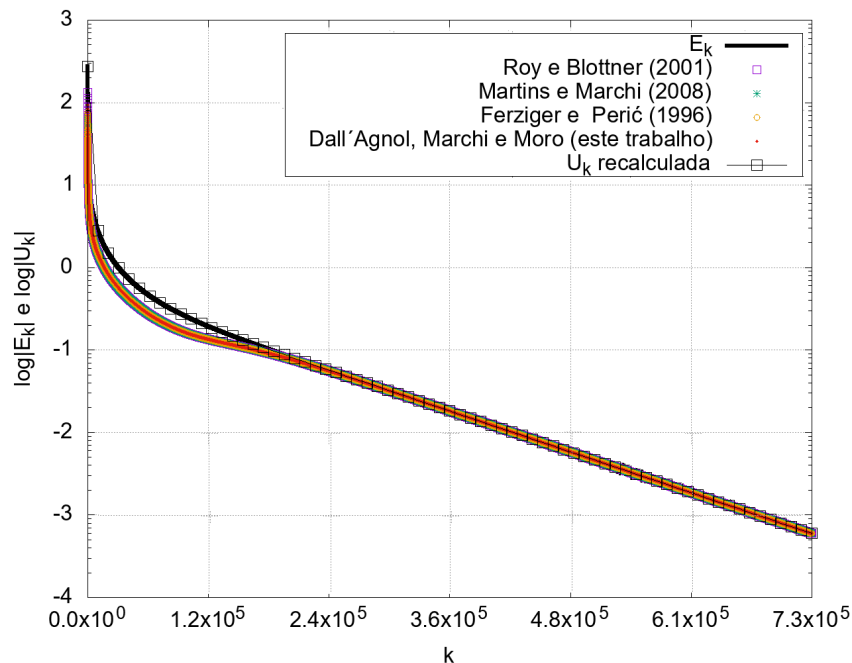
Porém, devido aos erros de arredondamento, as estimativas não apresentaram melhora significativa nas iterações finais do intervalo II, como mostra a FIGURA 50. Assim, novamente recomenda-se utilizar a solução corrigida para recalculas as estimativas dos intervalos com menor influência dos erros de arredondamento e utilizar o estimador proposto nos demais intervalos, como representado na FIGURA 51.

FIGURA 48 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



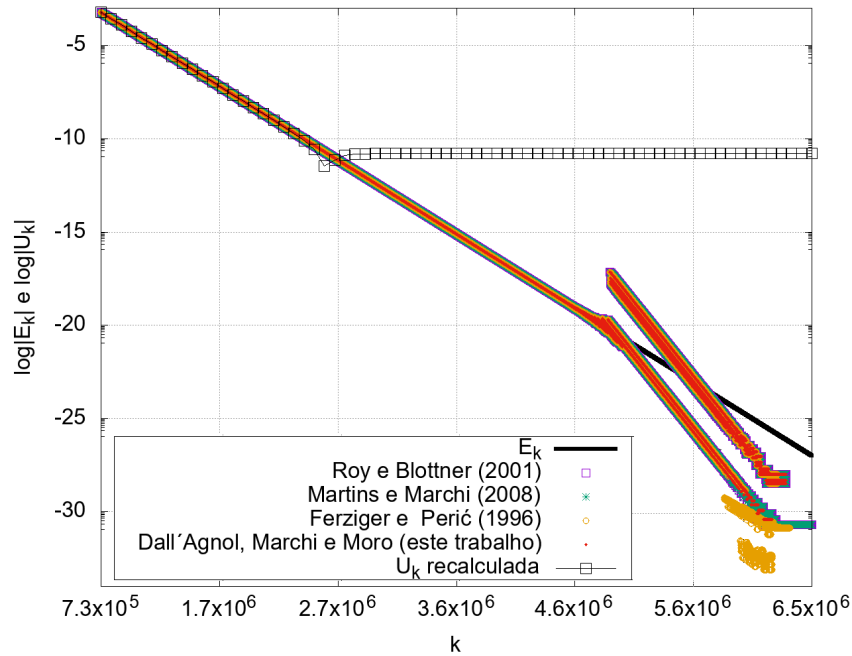
Fonte: a autora (2020).

FIGURA 49 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO I.



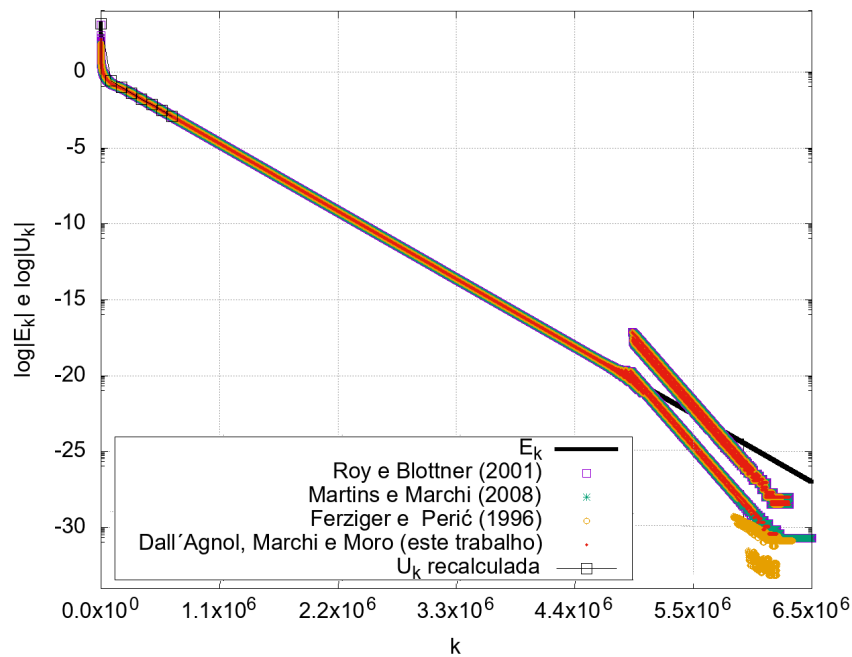
Fonte: a autora (2020).

FIGURA 50 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO II.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA 51 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 3, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

5.3 Variável 3: valor médio da função (temperatura média) T_m

As soluções numéricas obtidas com TDMA e Gauss-Seidel, bem como o número de iterações para atingir-se o erro de máquina no último método constam na TABELA 10.

TABELA 10 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS DOS CASOS DO PROBLEMA 1 PARA A VARIÁVEL T_m .

Caso	Sol. numérica com TDMA (Φ)	Sol. numérica com GS (ϕ_k)	No. de iterações
1	2,001220583915710E-001	2,001220583915710E-001	28751
2	2,000076293479651E-001	2,000076293479651E-001	429046
3	2,000004768369763E-001	2,000004768369763E-001	6373437

Na TABELA 11 estão os erros numéricos calculados sabendo-se que a solução analítica para a temperatura média é $T_m = \frac{1}{5}$. Nota-se que, com o refinamento sistemático da malha, as soluções numéricas estão convergindo para a solução analítica e os erros numéricos estão diminuindo. A ordem de decaimento esperada é $p_L = 2$, devido à aproximação utilizada (Regra do Trapézio). Ao calcular as ordens efetiva e aparente equivalentes, obtém-se $p_{E_h}^* \rightarrow p_L$ e $p_{U_h}^* \rightarrow p_L$.

TABELA 11 – ERROS NUMÉRICOS DOS CASOS DO PROBLEMA 1 PARA A VARIÁVEL T_m .

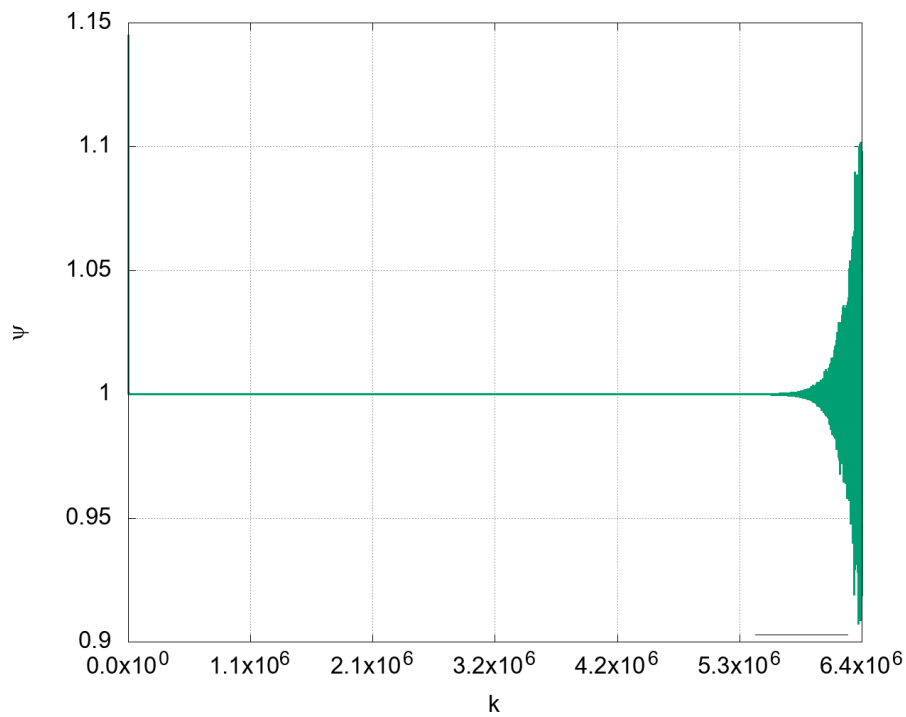
Caso	Erro numérico (Φ)	Erro numérico (ϕ_k)
1	1,220583915710449E-004	1,220583915710449E-004
2	7,629347965121269E-006	7,629347965121269E-006
3	4,768369763041846E-007	4,768369463041846E-007

Para a variável temperatura média (T_m), foram identificados quatro intervalos representados na TABELA 12. O primeiro caracterizou por apresentar $-1 \leq \psi \leq 1$, fora do intervalo de convergência da série geométrica do estimador. O segundo, o terceiro e o quarto apresentaram $\psi > 1$, porém, apenas no terceiro esse comportamento foi monotônico e sem presença significativa de erros de arredondamento. Assim, optou-se por escolher o intervalo III como o intervalo com melhores estimativas. Os intervalos para os demais casos estão no apêndice D. A FIGURA 52 representa os valores da taxa de convergência para todas as iterações.

Na FIGURA 53 são apresentadas as estimativas de erros para todo o processo iterativo. Observa-se que as estimativas não apresentam resultados acurados no início e no final do processo iterativo, como pode ser visto na FIGURA 54, em que percebe-se que os estimadores subestimam o erro de iteração na faixa inicial das iterações.

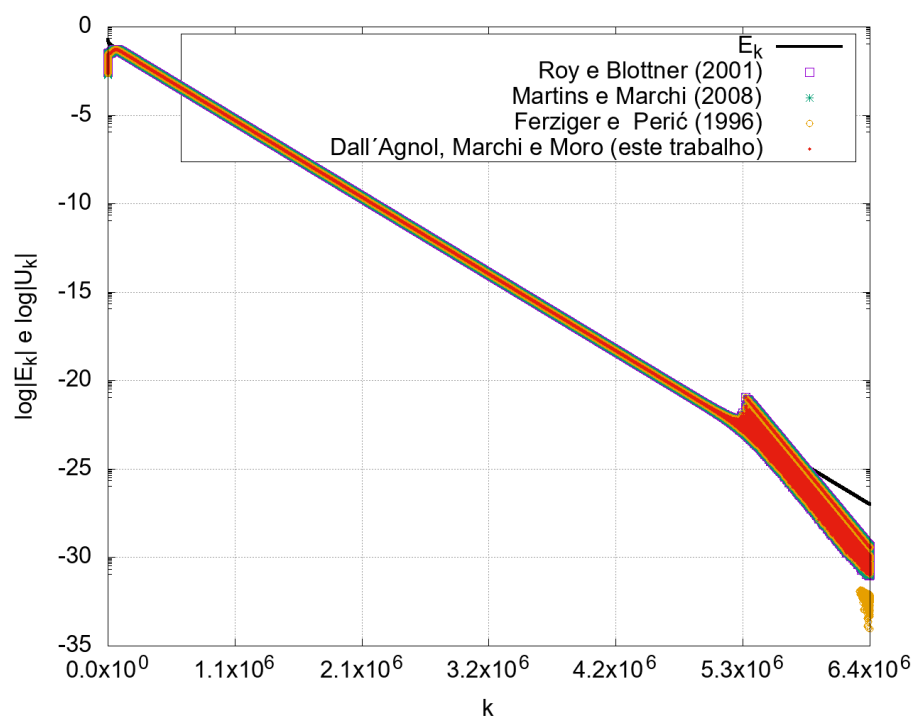
TABELA 12 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL T_m , PROBLEMA 1, CASO 3.

Intervalo	Critério	Iterações
I	$-1 \leq \psi \leq 1$	3 : 145317
II	$\psi > 1$ sem convergência monotônica	145318 : 166153
III	$\psi > 1$ com convergência monotônica e sem erros significativos de arredondamento	166154 : 678463
IV	$\psi > 1$ com convergência monotônica e com erros significativos de arredondamento	678464 : 6373437

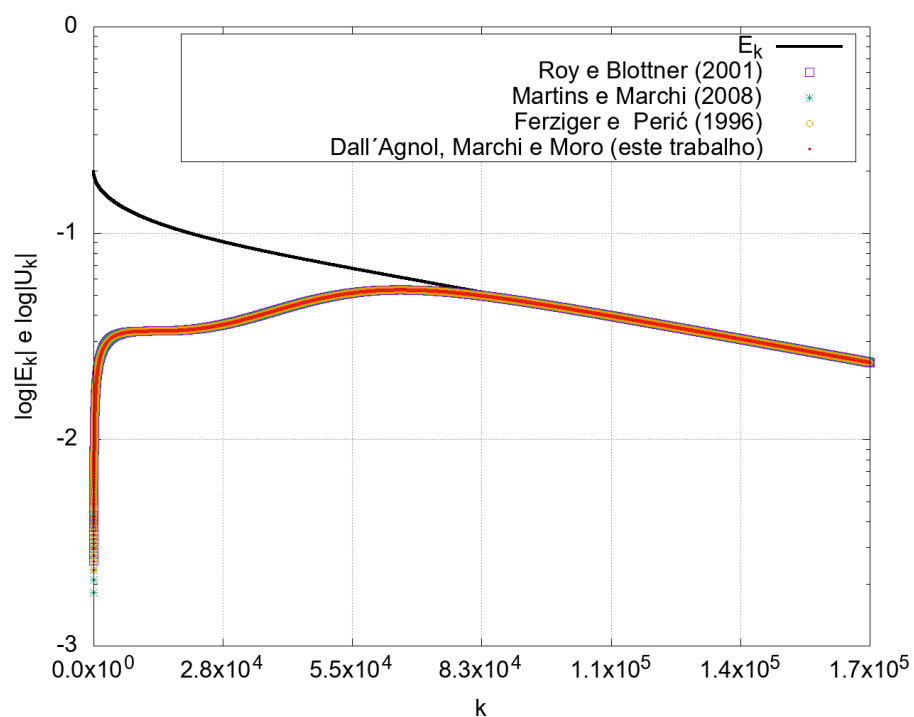
FIGURA 52 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES.

Fonte: a autora (2020).

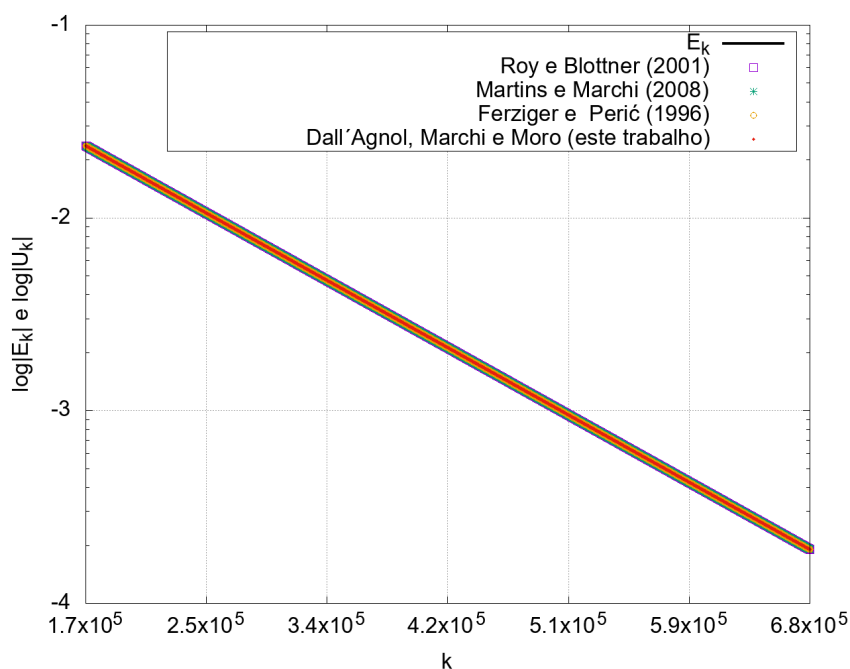
Porém, no intervalo III, apresentado na FIGURA 55, nota-se que estimativas e erros são praticamente coincidentes com o erro, o que justifica a sua escolha como melhor intervalo. Novamente, utilizando a Eq. (4.77), calculam-se as soluções corrigidas com erros reduzidos de iteração, representadas na FIGURA 56.

FIGURA 53 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES.

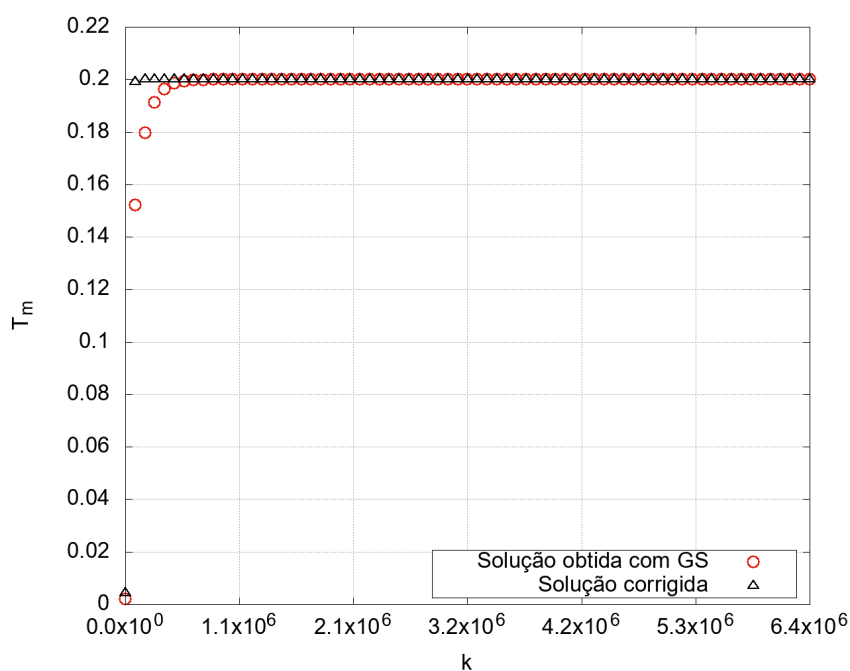
Fonte: a autora (2020).

FIGURA 54 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 3, NOS INTERVALOS I E II.

Fonte: a autora (2020).

FIGURA 55 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO III.

Fonte: a autora (2020).

FIGURA 56 – SOLUÇÕES COM GS E SOLUÇÕES CORRIGIDAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES.

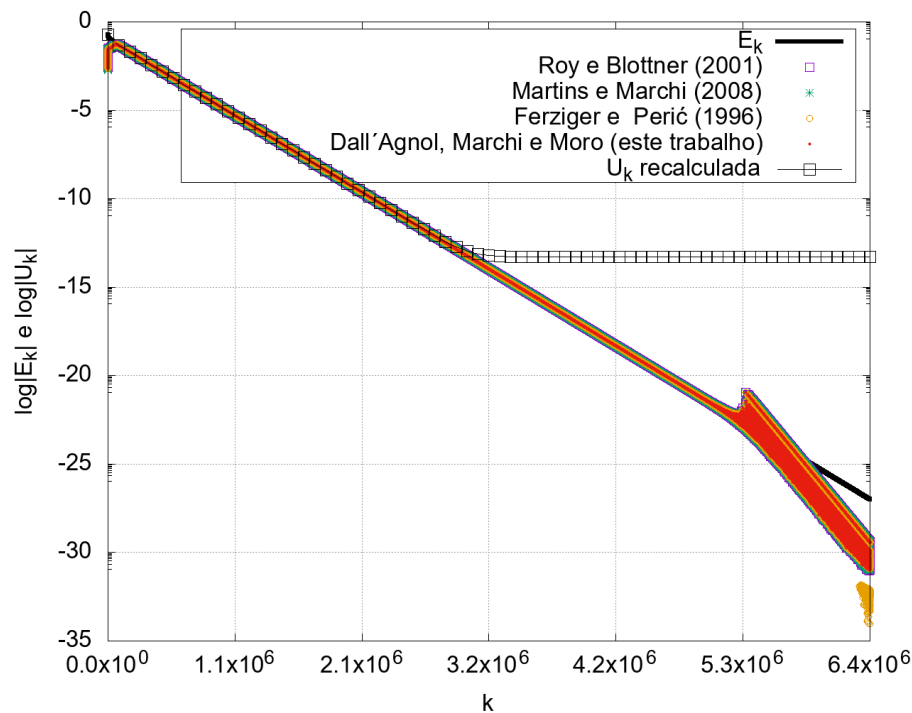
Fonte: a autora (2020).

A última solução obtida em cada caso do intervalo III consta na TABELA 13. A partir dessas soluções são recalculadas as estimativas de erros. Os resultados obtidos para todas as iterações do caso 3 da variável T_m são apresentados na FIGURA 57.

TABELA 13 – VALORES DAS SOLUÇÕES NA ÚLTIMA ITERAÇÃO DO INTERVALO III DE CADA CASO DO PROBLEMA 1, VARIÁVEL T_m .

Caso	Iteração	ϕ_{it_2}
1	5470	2,001220583915710449218763905495840E-001
2	64392	2,000076293479651216327798154140952E-001
3	678463	2,000004768370261629978028402410772E-001

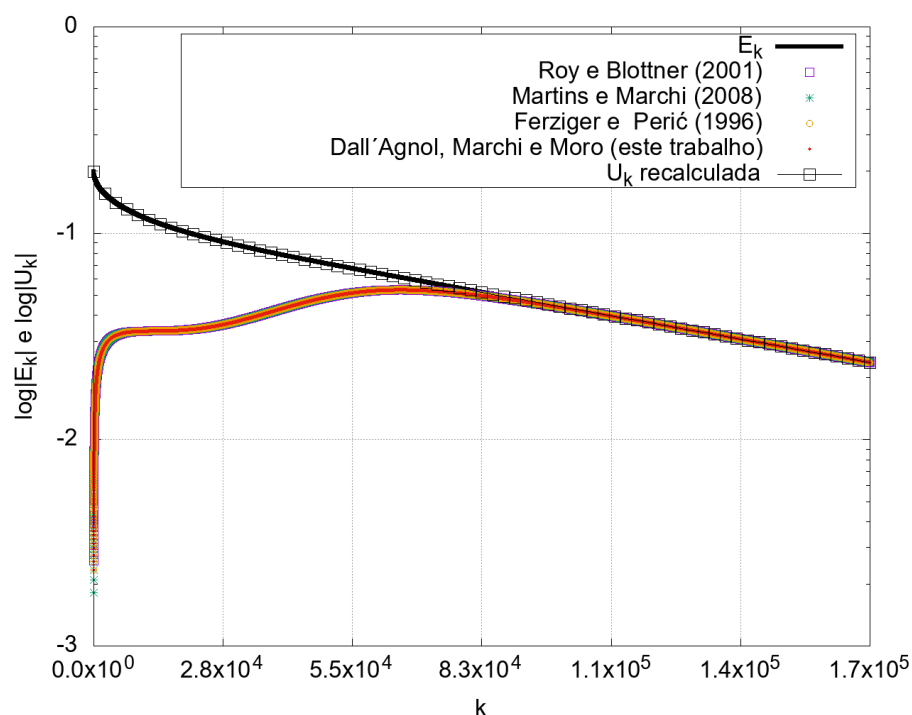
FIGURA 57 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

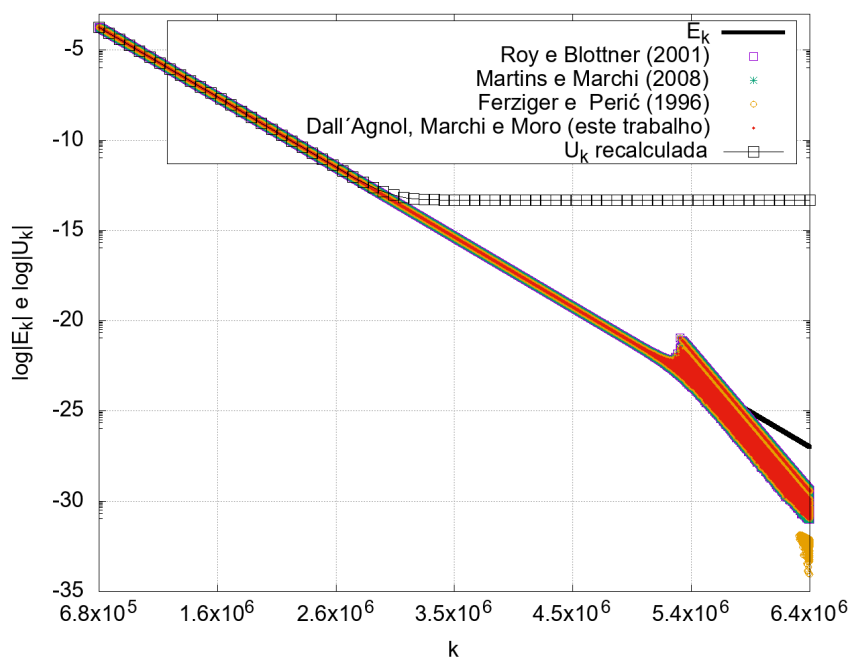
Para os intervalos I e II, nota-se maior acurácia na previsão dos erros de iteração, como mostra a FIGURA 58. Porém, da mesma forma que para as variáveis anteriores, não foi possível notar melhora das estimativas no final do último intervalo, FIGURA 59. Assim, propõe-se utilizar as soluções corrigidas para o cálculo das estimativas nos intervalos I a II e o estimador proposto para o cálculo das estimativas no intervalo IV, como representado na FIGURA 60.

FIGURA 58 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 3, NOS INTERVALOS I E II.



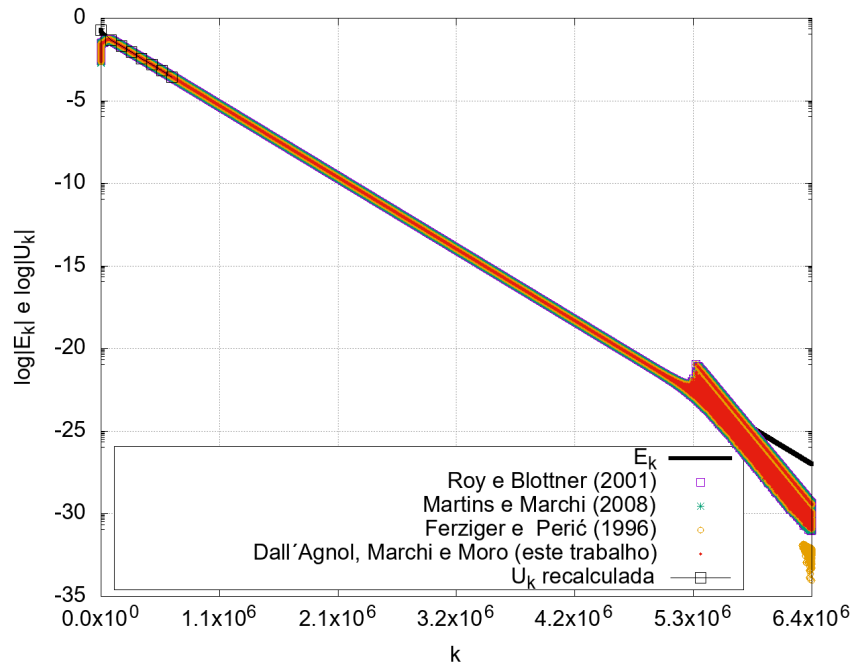
Fonte: a autora (2020).

FIGURA 59 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 3, NO INTERVALO IV.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA 60 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 3, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

5.4 Fechamento do capítulo 5

Neste capítulo apresentaram-se os resultados da aplicação do procedimento proposto ao problema 1: equação de Poisson unidimensional. Por meio do cálculo dos erros numéricos e das ordens efetiva e aparente equivalentes foi possível conduzir um processo de verificação do código implementado. Utilizando o estimador proposto foram calculadas as estimativas do erro de iteração, delimitados os intervalos de iterações em que o estimador apresentou as melhores estimativas e, a partir desses intervalos, foi possível melhorá-las. Foram calculadas soluções corrigidas a partir das estimativas já obtidas, com reduzidos erros de iteração. Essas soluções foram utilizadas para recalculas as estimativas e melhorar as previsões de erros de iteração nas faixas iniciais do processo iterativo de todas as variáveis estudadas.

6 PROBLEMA 2: EQUAÇÃO DE ADVECÇÃO-DIFUSÃO

Os resultados da aplicação da metodologia proposta à equação de advecção-difusão unidimensional são apresentados nesse capítulo. Para cada variável são obtidos os parâmetros numéricos e delimitados os intervalos com as melhores estimativas de erros de iteração. Esses intervalos são utilizados para calcular soluções sem erros de iteração e também para melhorar as estimativas dos demais intervalos. Nesse capítulo são apresentados os resultados para o caso 3, os demais resultados constam no apêndice E.

6.1 Variável 1: valor da função (temperatura) no ponto central do domínio de cálculo $T(1/2)$

Para esse problema foram necessárias, em média, 4 vezes menos iterações que o problema 1 para se alcançar o erro de máquina para cada caso, como mostra a TABELA 14. As soluções numéricas para essa variável obtidas com TDMA e Gauss-Seidel e o número de iterações também são apresentadas na mesma tabela.

TABELA 14 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS DOS CASOS DO PROBLEMA 2 PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$.

Caso	Sol. numérica com TDMA (Φ)	Sol. numérica com GS (ϕ_k)	No. de iterações
1	6,625315389083413E-003	6,625315389083413E-003	7887
2	6,688624561987254E-003	6,688624561987254E-003	117628
3	6,692586755646681E-003	6,692586755646681E-003	1743056

A solução analítica é obtida ao aplicar-se $x = 1/2$ à Eq. (4.11), resultando em 6,692850924284855E-003. A partir dessas soluções, também foram calculadas as ordens efetiva e aparente equivalentes e verificou-se que essas ordens tendem à ordem assintótica do erro de discretização ($p_L = 2$), como esperado. Para esse problema foram utilizados os esquemas CDS e CDS-2, para aproximar as derivadas de primeira e segunda ordens, respectivamente.

Comparando-se as soluções numéricas obtidas com a solução analítica é possível calcular os erros numéricos apresentados na TABELA 15. Ao refinar-se a malha sistematicamente, os erros numéricos decaem, o que significa que a solução numérica está se aproximando da solução analítica.

TABELA 15 – ERROS NUMÉRICOS DOS CASOS DO PROBLEMA 2 PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$.

Caso	Erro numérico (Φ)	Erro numérico (ϕ_k)
1	6,753553520144197E-005	6,753553520144197E-005
2	4,226362297601038E-006	4,226362297601038E-006
3	2,641686381739967E-007	2,641686381739968E-007

Após a verificação do código, passa-se à delimitação dos intervalos de iterações para análise dos erros. Acompanhando-se os valores da taxa de convergência ψ e a influência dos erros de arredondamento ao longo do processo iterativo, chega-se aos intervalos delimitados na TABELA 16 para o caso 3. Para essa variável foram delimitados três intervalos para análise das estimativas de erro de iteração e considerou-se que o intervalo com as melhores estimativas de erro é o intervalo II, por ser o único que atende aos critérios (i) e (ii), simultaneamente. No apêndice E constam os intervalos para os demais casos.

TABELA 16 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$, PROBLEMA 2, CASO 3.

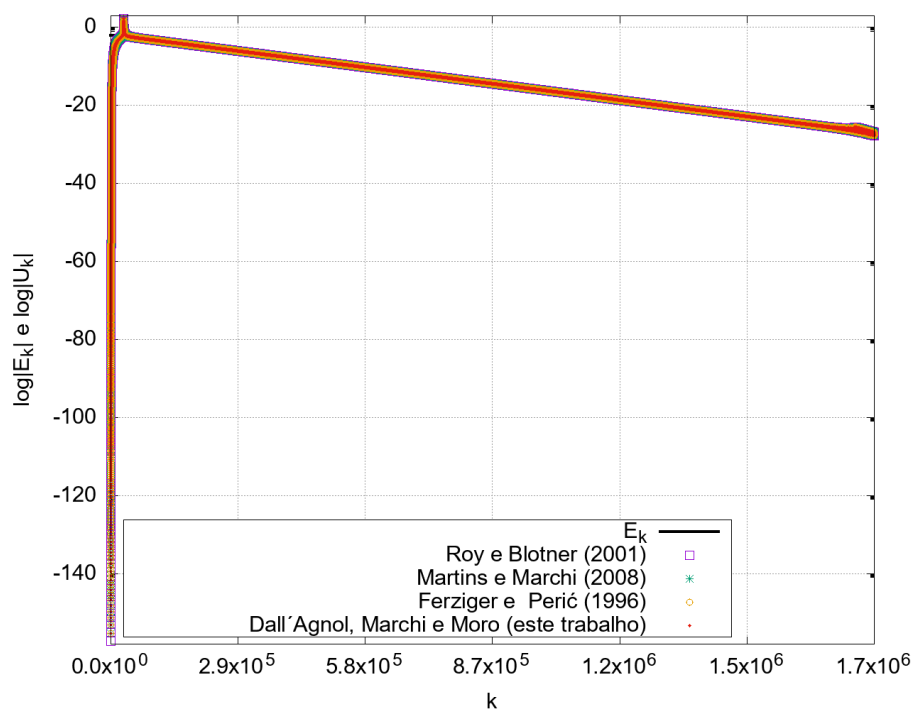
Intervalo	Critério	Iterações
I	$-1 \leq \psi \leq 1$	3 : 29942
II	$\psi > 1$ sem erros significativos de arredondamento	29943 : 354533
III	$\psi > 1$ com erros significativos de arredondamento	354534 : 1743056

É importante destacar que, para esse problema, o *solver* leva algumas iterações para que as condições de contorno sejam incorporadas aos cálculos da variável local. Por esse motivo, o intervalo I inicia-se somente na iteração 3, quando tem-se a solução numérica em 3 níveis iterativos diferentes. No intervalo I, ψ encontra-se fora do intervalo de convergência da série que representa o estimador, já o intervalo III caracteriza-se pela presença mais influente dos erros de arredondamento. Portanto, o intervalo II é o que possui as melhores previsões do erro de iteração para o estimador proposto.

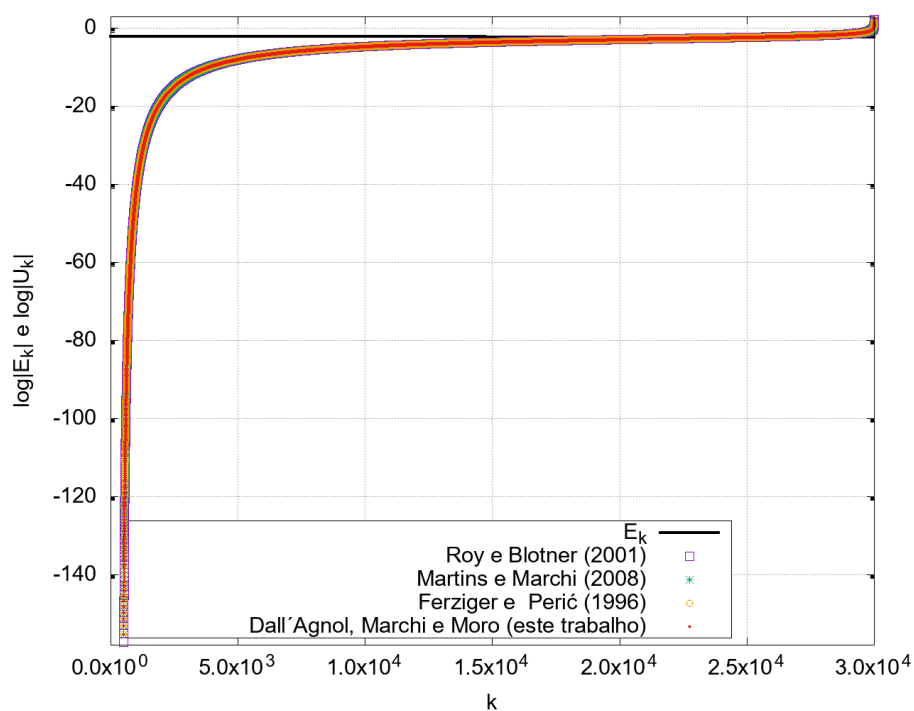
Na FIGURA 61 constam as estimativas para todas as iterações necessárias para obter o erro de máquina no caso 3. Para essa variável, os estimadores mostraram-se confiáveis em, aproximadamente, 64% das iterações.

Observando-se a FIGURA 62, que mostra as estimativas de erros apenas no intervalo I, percebe-se que os estimadores subestimam o erro de iteração. Assim, busca-se melhorar as estimativas de erros nesse intervalo.

Seguindo-se o procedimento proposto, a fim de reduzir os erros de iteração, utiliza-se a Eq. (4.77) e as estimativas obtidas para calcular soluções corrigidas, representadas na FIGURA 63.

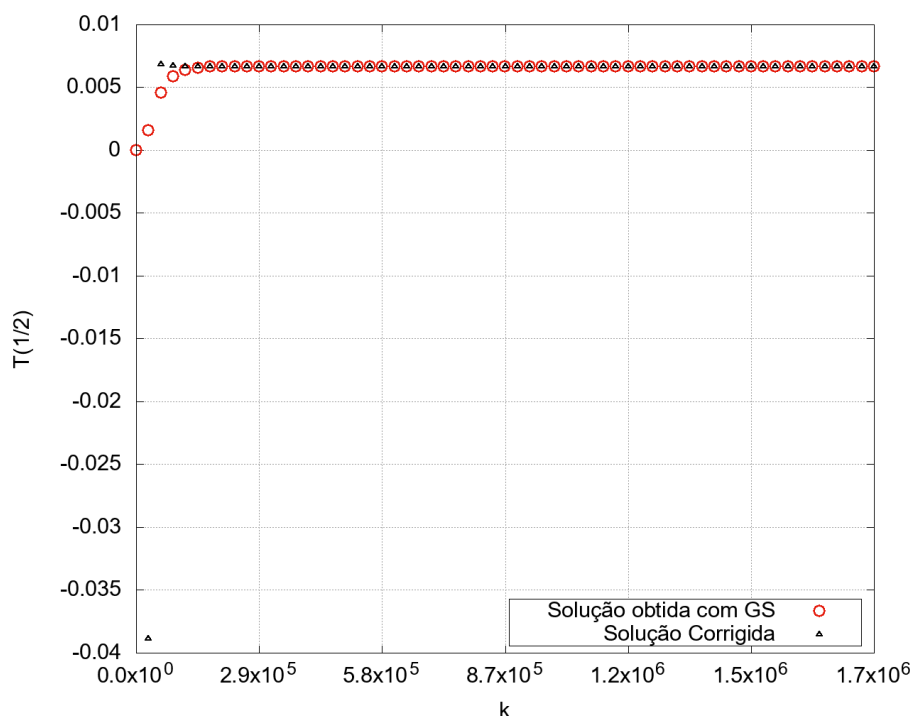
FIGURA 61 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES.

Fonte: a autora (2020).

FIGURA 62 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, NO INTERVALO I.

Fonte: a autora (2020).

FIGURA 63 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

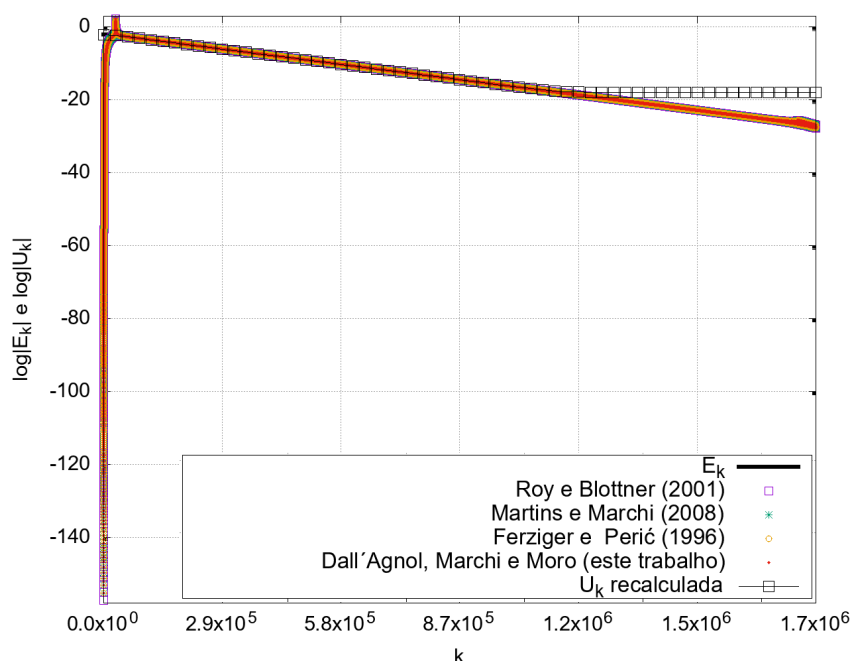
As soluções corrigidas da última iteração do melhor intervalo de estimativas para cada caso, são apresentadas na TABELA 17. Utilizando a solução corrigida, as estimativas são recalculadas por meio da Eq. (4.79). Os resultados obtidos para todas as iterações constam na FIGURA 64.

TABELA 17 – VALORES DAS SOLUÇÕES NA ÚLTIMA ITERAÇÃO DO INTERVALO II DE CADA CASO DO PROBLEMA 2, VARIÁVEL $T(1/2)$.

Caso	Iteração	ϕ_{it_2}
1	2226	6,625315389083413583321717826528341E-003
2	28800	6,688624561987254521119792012801729E-003
3	354533	6,692586755646682946070182900874490E-003

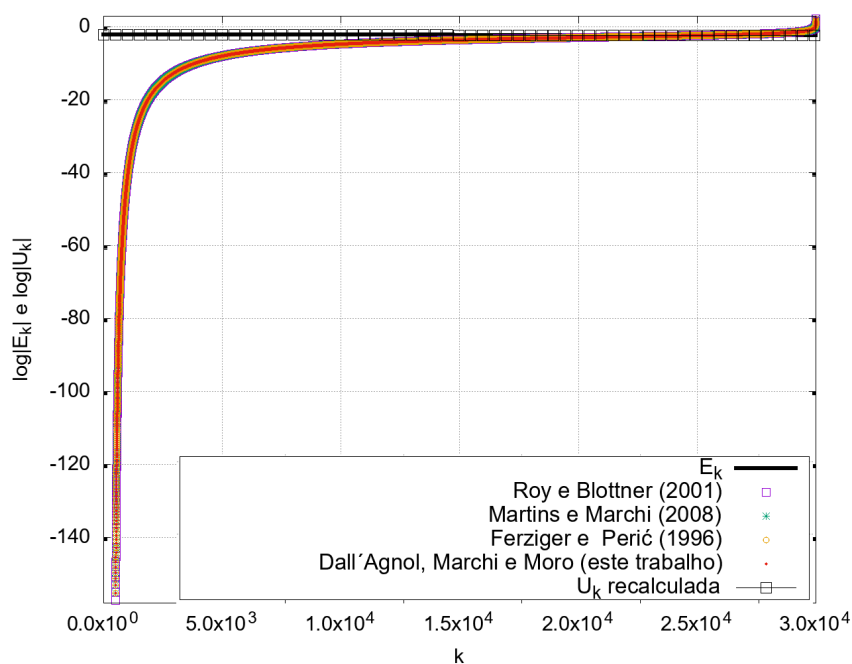
Observando-se a FIGURA 65, nota-se melhora na previsão dos erros de iteração do intervalo I. Porém, observando-se mais atentamente o intervalo III na FIGURA 66, nota-se que as estimativas não alcançaram melhora em todo o intervalo, o que se deve à influência dos erros de arredondamento, como já comentado anteriormente.

FIGURA 64 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

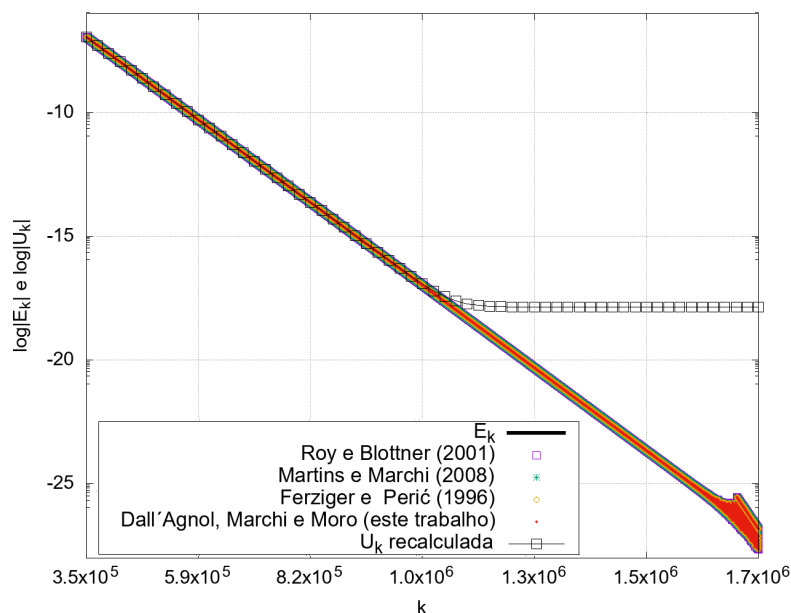
FIGURA 65 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, NO INTERVALO I.



Fonte: a autora (2020).

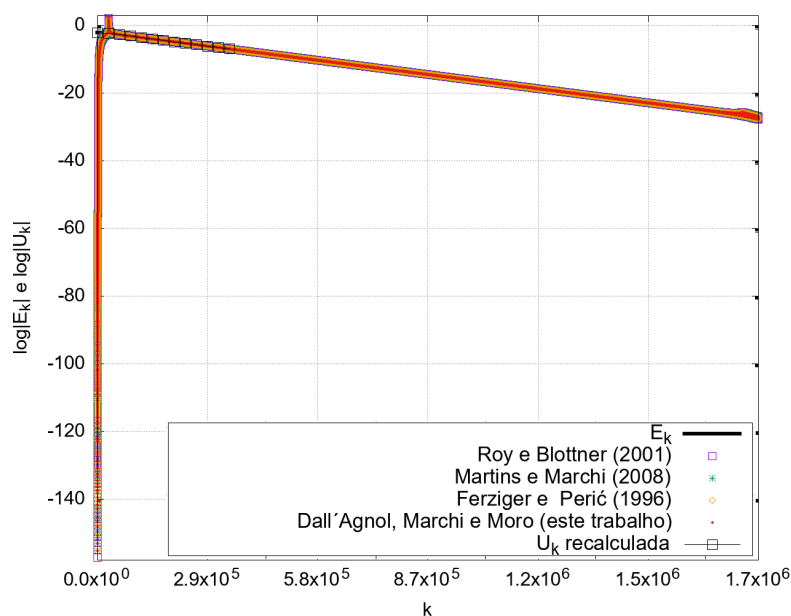
Assim, propõe-se utilizar as soluções corrigidas para as estimativas dos intervalos I e II e o estimador proposto para o intervalo III, como apresentado na FIGURA 67.

FIGURA 66 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, NO INTERVALO III.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA 67 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, EM TODOS OS INTERVALOS.



Fonte: a autora (2020).

6.2 Variável 2: gradiente no contorno leste (direito) do domínio de cálculo $grad T(1)$

Para essa variável, obtém-se a solução analítica derivando-se a Eq. (4.11) e aplicando-se $x = 1$, o que resulta em $1,000045401991010E+001$. As soluções numéricas obtidas para cada caso com TDMA e Gauss-Seidel estão na segunda e terceira colunas da TABELA 18, respectivamente. Na quarta coluna consta o número de iterações para alcançar o erro de máquina em cada caso.

TABELA 18 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS DOS CASOS DO PROBLEMA 2 PARA A VARIÁVEL $grad T(1)$.

Caso	Sol. numérica com TDMA (Φ)	Sol. numérica com GS (ϕ_k)	No. de iterações
1	9,947932529721089E+000	9,947932529721089E+000	8301
2	9,996783336138475E+000	9,996783336138475E+000	124412
3	1,000021786589289E+001	1,000021786589289E+001	1852409

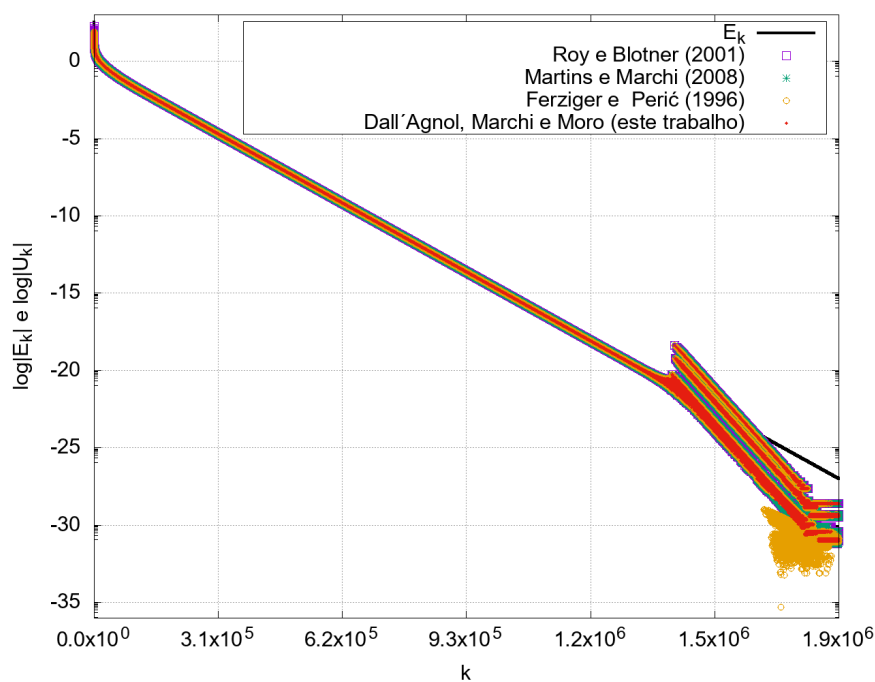
Como a solução analítica está disponível, pode-se calcular os erros numéricos para cada caso. Os resultados constam na TABELA 19. Mais uma vez, nota-se que, com o refino da malha, as soluções numéricas aproximam-se da solução analítica.

TABELA 19 – ERROS NUMÉRICOS DOS CASOS DO PROBLEMA 2 PARA A VARIÁVEL $grad T(1)$.

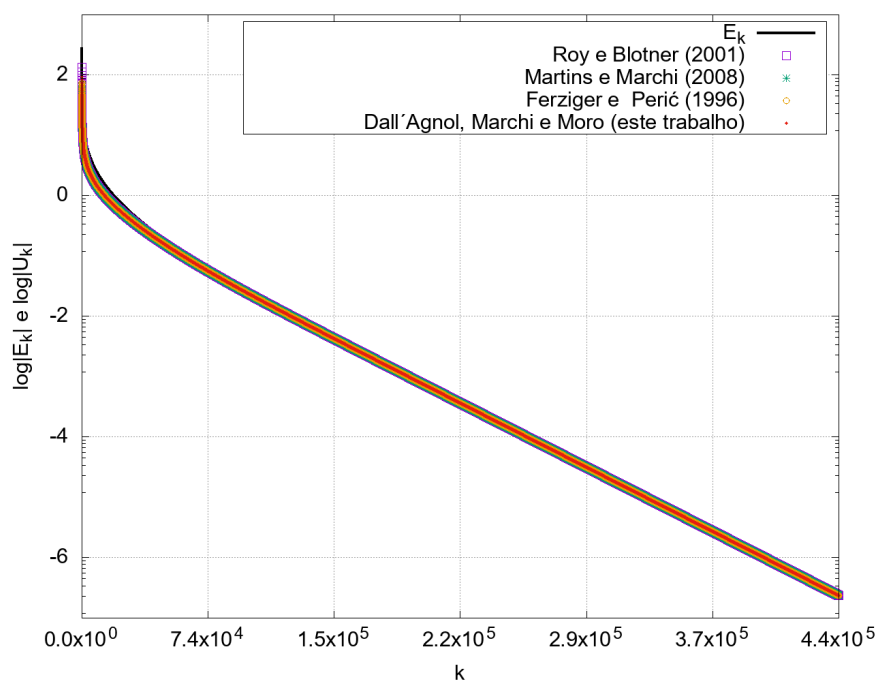
Caso	Erro numérico (Φ)	Erro numérico (ϕ_k)
1	5,252149018900815E-002	5,252149018900815E-002
2	3,670683771622287E-003	3,670683771622287E-003
3	2,361540172088184E-004	2,361540172088184E-004

Utilizou-se o esquema UDS-2 para aproximar $grad T(1)$, logo, a ordem assintótica do erro de discretização é $p_L = 2$. Calculando-se as ordens efetiva e aparente equivalentes, observa-se que $p_{E_h}^* \rightarrow 2$ e $p_{U_h}^* \rightarrow 2$, como esperado. Assim, verifica-se o código e passa-se à verificação da solução.

A efetividade θ ficou em torno de 22%, para todos os casos, percentual semelhante ao da variável T_m para esse problema, o mais baixo dentre os observados até agora. A FIGURA 68 mostra as estimativas de erros para todas as iterações do caso 3. Nessa figura é possível observar que, como para as demais variáveis, as estimativas não são acuradas no início e no final do processo iterativo.

FIGURA 68 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3.

Fonte: a autora (2020).

FIGURA 69 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, NO INTERVALO I.

Fonte: a autora (2020).

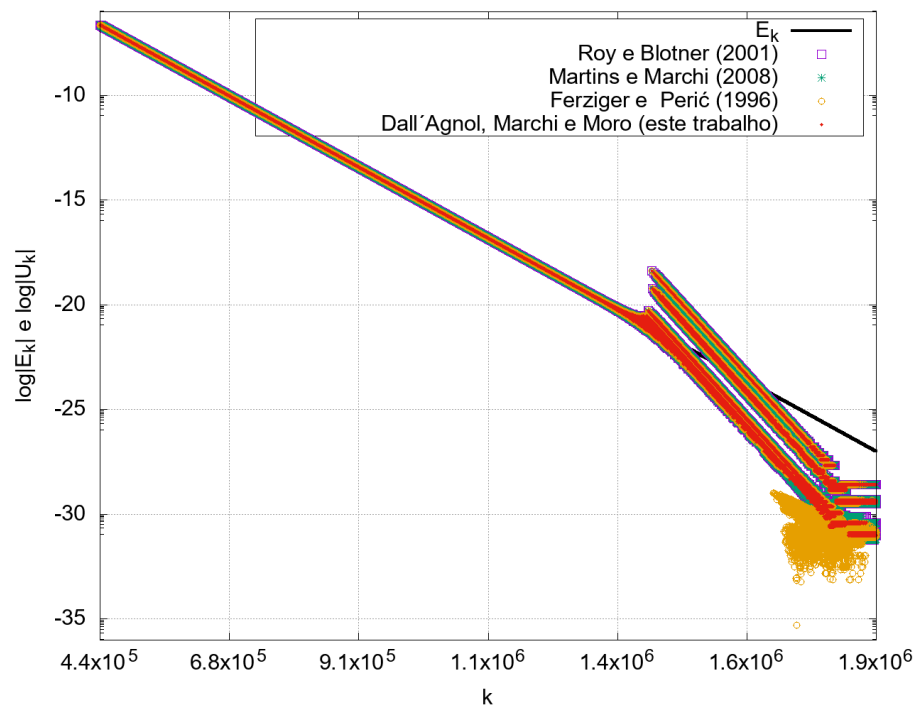
Como o valor da taxa de convergência ψ mantém-se maior que 1 em todo o processo iterativo, delimitaram-se apenas dois intervalos, de acordo com o critério (ii) da metodologia. As faixas de iterações dos dois intervalos são apresentadas na TABELA 20. O intervalo I é o que possui as estimativas mais acuradas por possuir menor influência dos erros de arredondamento. Os casos 1 e 2 estão no apêndice E.

TABELA 20 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA AS VARIÁVEIS T_m E $\text{grad } T(1)$, PROBLEMA 2.

Intervalo	Critério	Iterações
I	$\psi > 1$ sem erros significativos de arredondamento	3 : 441845
II	$\psi > 1$ com erros significativos de arredondamento	441846 : 1852409

No início do intervalo I, novamente observa-se que os estimadores subestimam o erro de iteração, conforme a FIGURA 69. No final do intervalo II (FIGURA 70), nota-se que os erros de arredondamento fazem com que as estimativas não se ajustem ao erro.

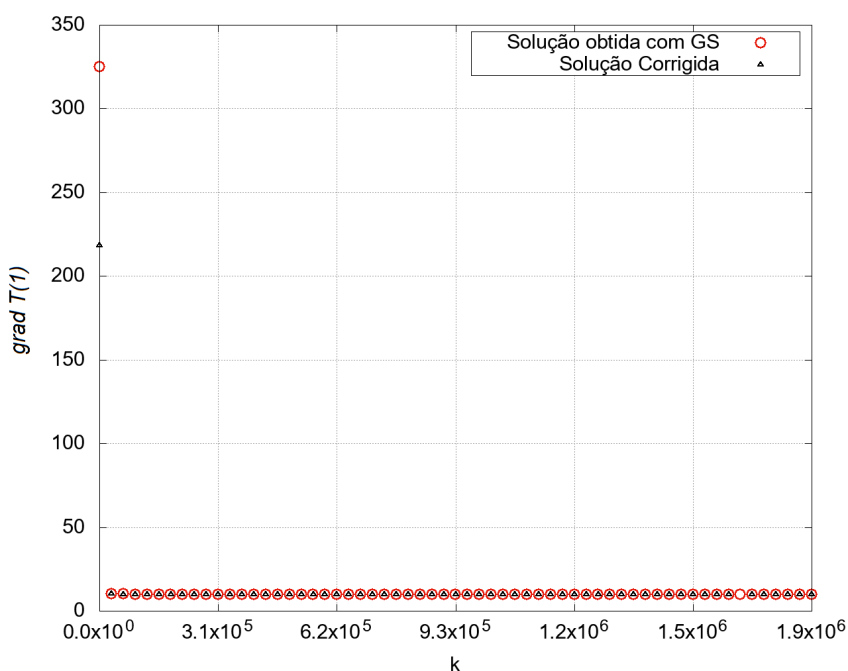
FIGURA 70 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, NO INTERVALO II.



Fonte: a autora (2020).

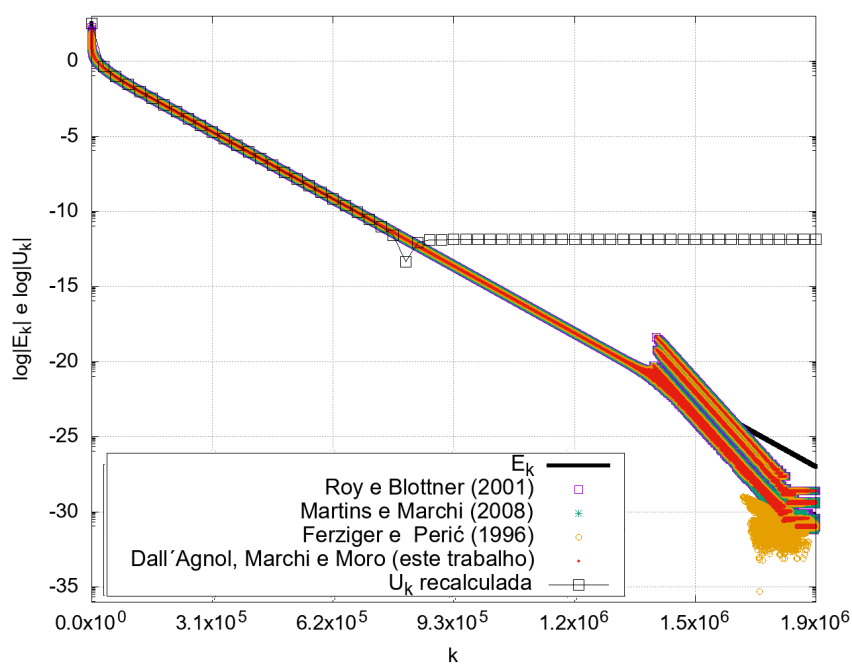
Recalculando-se as soluções por meio da Eq. (4.77), obtêm-se soluções com erros de iteração reduzidos, representadas na FIGURA 71. As últimas soluções obtidas no intervalo I, consideradas mais acuradas, são apresentadas na TABELA 21 e as estimativas recalculadas por meio da Eq. (4.79) para todas as iterações estão na FIGURA 72.

FIGURA 71 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA 72 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES.

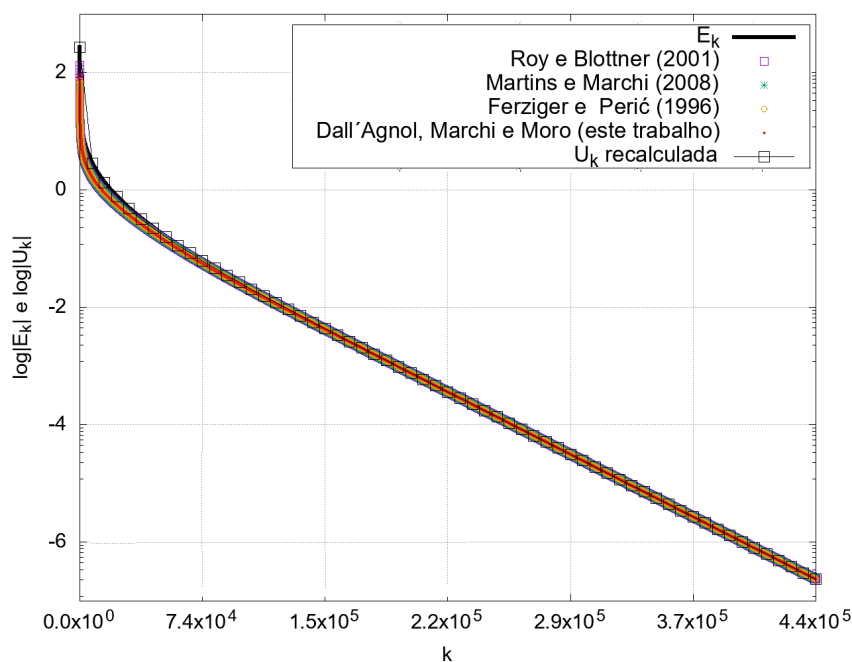


Fonte: a autora (2020).

TABELA 21 – VALORES DAS SOLUÇÕES NA ÚLTIMA ITERAÇÃO DO INTERVALO I DE CADA CASO DO PROBLEMA 2, VARIÁVEL $grad T(1)$.

Caso	Iteração	ϕ_{it_2}
1	3353	9,947932529721088731261878822461451E+000
2	40567	9,996783336138474595103129193948989E+000
3	441845	1,000021786589428831840468832125918E+001

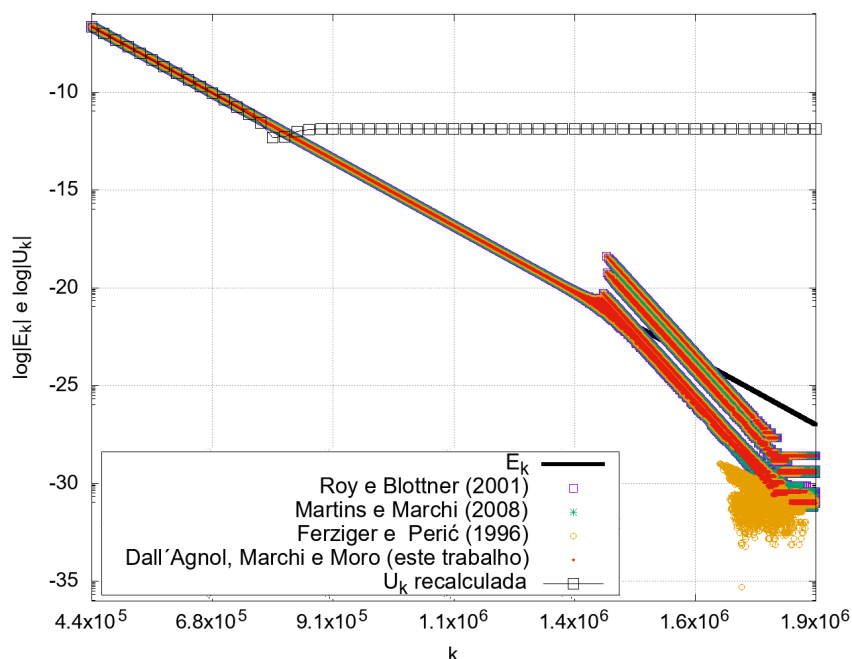
Para o intervalo I, notam-se melhoras significativas nas previsões do erro, como mostra a FIGURA 73. Também se observa que, para essa variável, no intervalo II, a melhora nas previsões de erro não foi tão efetiva, como mostra a FIGURA 74, o que se deve aos erros de arredondamento, cuja presença torna-se mais evidente a partir da iteração 800000, conforme a FIGURA 75.

FIGURA 73 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, NO INTERVALO I.

Fonte: a autora (2020).

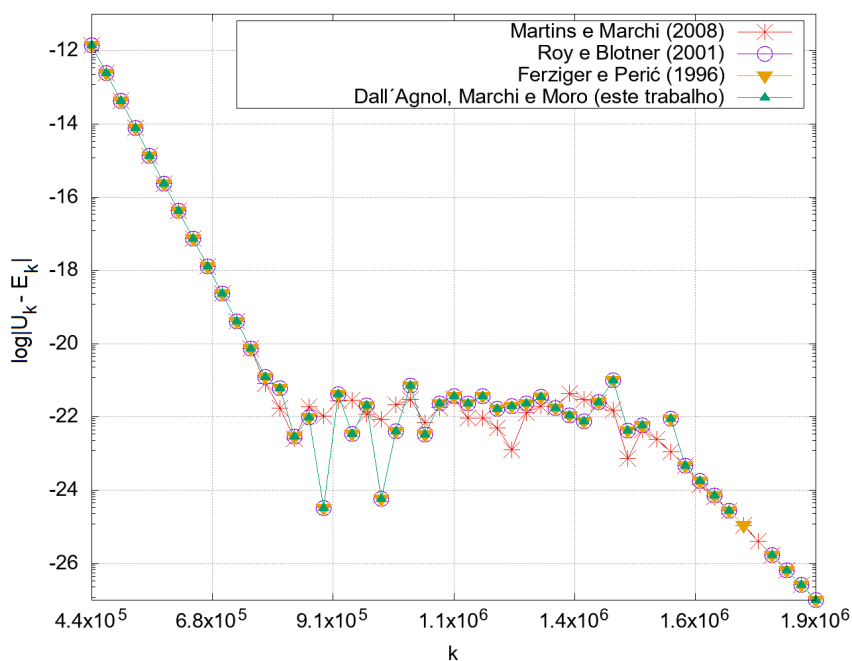
Assim, sugere-se utilizar as soluções corrigidas para se obter as estimativas do intervalo I e o estimador proposto para calcular as estimativas no intervalo II, como na FIGURA 76.

FIGURA 74 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, NO INTERVALO II.



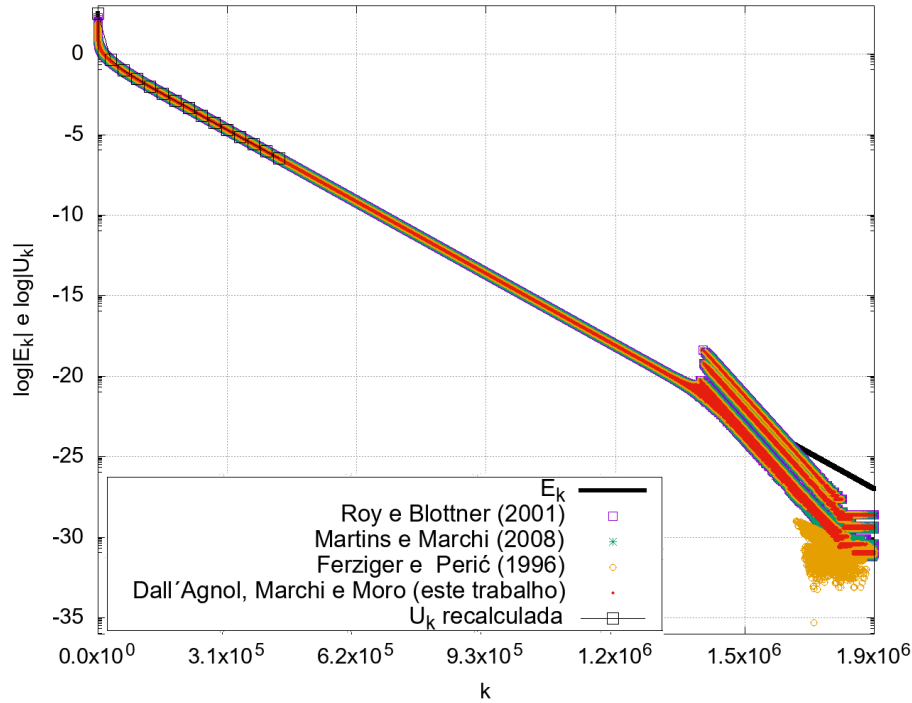
Fonte: a autora (2020).

FIGURA 75 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR PROPOSTO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, NO INTERVALO II.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA 76 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 3, EM TODOS OS INTERVALOS.



Fonte: a autora (2020).

6.3 Variável 3: valor médio da função (temperatura média) T_m

Para essa variável global, as soluções numéricas obtidas com TDMA e com Gauss-Seidel estão na TABELA 22.

TABELA 22 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS DOS CASOS DO PROBLEMA 2 PARA A VARIÁVEL T_m .

Caso	Sol. numérica com TDMA (Φ)	Sol. numérica com GS (ϕ_k)	No. de iterações
1	9,995551575164478E-002	9,995551575164478E-002	7892
2	9,995465571973533E-002	9,995465571973533E-002	117789
3	9,995460161728842E-002	9,995460161728842E-002	1745953

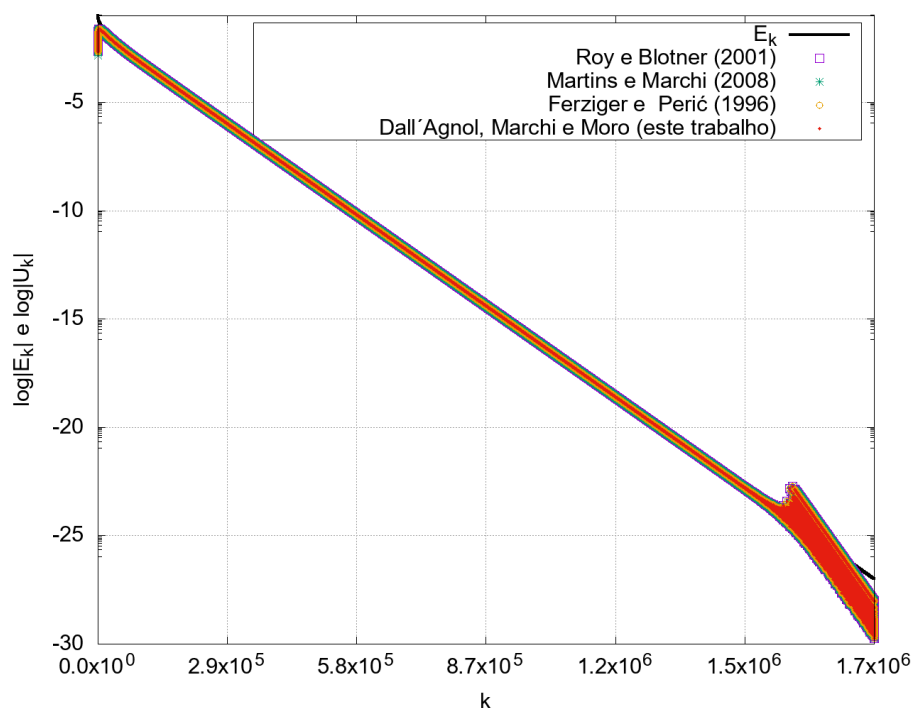
O número de iterações necessário para se alcançar o erro de máquina foi muito semelhante ao da primeira variável observada para esse problema ($T(1/2)$). Sua solução analítica, obtida através do teorema do valor médio para integrais, é dada pela Eq. (4.13), que resulta em 9,995459800899031E-002. De posse dessa solução, são calculados os erros numéricos da TABELA 23.

A regra do trapézio foi o esquema numérico utilizado para aproximar-se T_m , logo, espera-se que o erro de discretização decaia com a ordem assintótica $p_L = 2$. Calculando-se $p_{E_h}^*$ e $p_{U_h}^*$, tem-se que, com o refinamento da malha, $p_{E_h}^*, p_{U_h}^* \rightarrow p_L$, como esperado.

TABELA 23 – ERROS NUMÉRICOS DOS CASOS DO PROBLEMA 2 PARA A VARIÁVEL T_m .

Caso	Erro numérico (Φ)	Erro numérico (ϕ_k)
1	9,177426544629048E-007	9,177426544629048E-007
2	5,771074502080518E-008	5,771074502080517E-008
3	3,608298103740286E-009	3,608298103740279E-009

A FIGURA 77 mostra as estimativas de erros para todas as iterações necessárias para alcançar-se o erro de máquina. Nessa figura percebe-se que as previsões de erros destoam do erro de iteração apenas no final do processo iterativo.

FIGURA 77 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 3.

Fonte: a autora (2020).

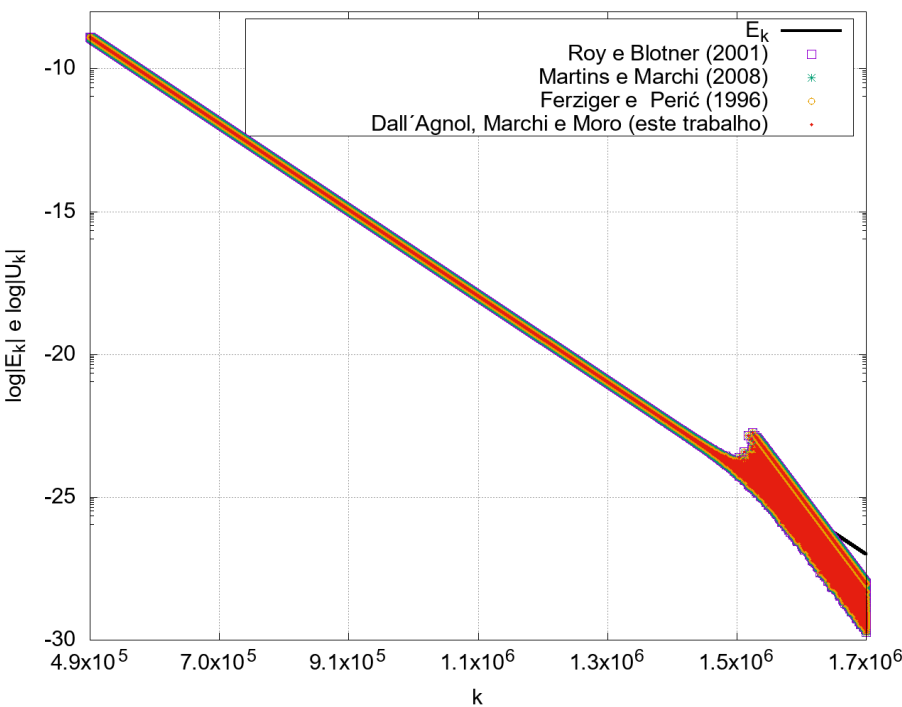
Para essa variável, a taxa de convergência ψ manteve-se maior que 1 em todas as iterações, então se fez necessário delimitar apenas dois intervalos para análise do erro de iteração, como mostra a TABELA 24 para o caso 3. Os intervalos delimitados para os demais casos estão no apêndice. Logo, o intervalo I é o que possui as melhores estimativas por apresentar menor influência dos erros de arredondamento quando comparado ao intervalo II, cujas estimativas de erros estão representadas na FIGURA 78.

Após definido o intervalo com as melhores estimativas, procede-se ao cálculo das soluções corrigidas (soluções com erros de iteração reduzidos), por meio da Eq. (4.77). Na FIGURA 79 apresentam-se as soluções corrigidas e as soluções obtidas com o *solver* GS, a

TABELA 24 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL T_m , PROBLEMA 2.

Intervalo	Critério	Iterações
I	$\psi > 1$ sem erros significativos de arredondamento	3 : 492493
II	$\psi > 1$ com erros significativos de arredondamento	492494 : 1745953

FIGURA 78 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 3, NO INTERVALO II.



Fonte: a autora (2020).

cada iteração.

As soluções corrigidas para a última iteração do melhor intervalo para estimativas dessa variável (I) estão apresentadas na TABELA 25 e foram utilizadas para recalculas as estimativas.

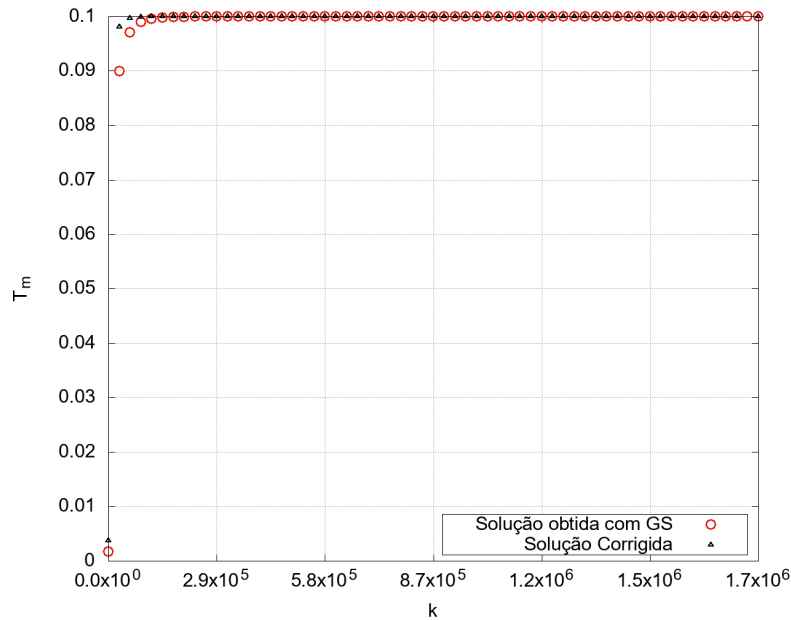
TABELA 25 – VALORES DAS SOLUÇÕES NA ÚLTIMA ITERAÇÃO DO INTERVALO I DE CADA CASO DO PROBLEMA 2, VARIÁVEL T_m .

Caso	Iteração	ϕ_{it_2}
1	3489	9,995551575164477513644931979745904E-002
2	43358	9,995465571973533303274442957246155E-002
3	492493	9,995460161728745367767480050195625E-002

Na FIGURA 80 estão as previsões de erros refeitas, de acordo com o descrito na metodologia. Mais uma vez, percebe-se notável melhora nas estimativas de erros, com

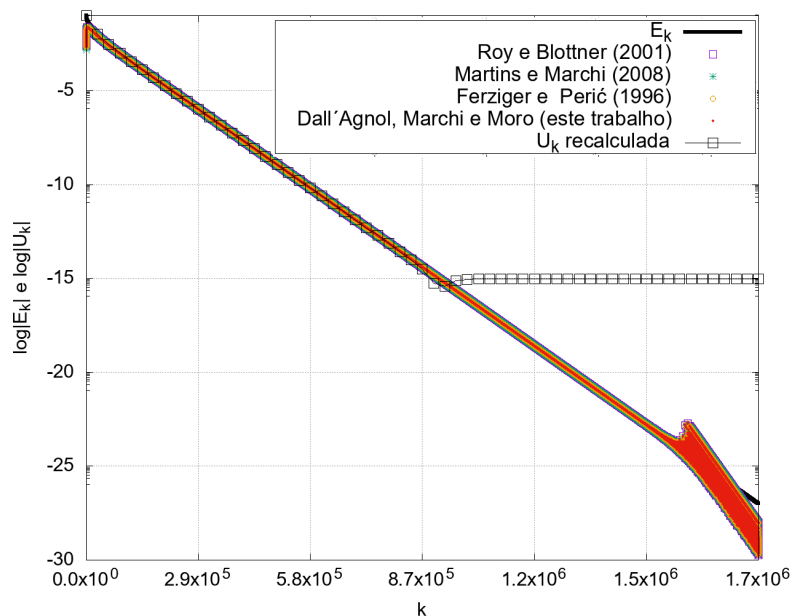
exceção da faixa com maior influência dos erros de arredondamento (final do intervalo II), apresentada na FIGURA 81.

FIGURA 79 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 3, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



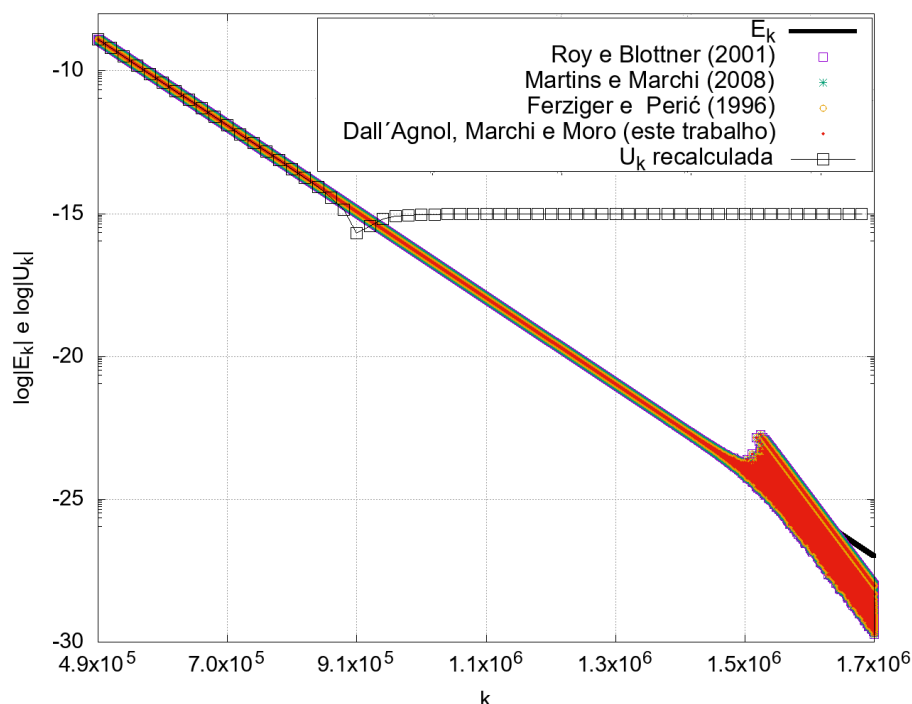
Fonte: a autora (2020).

FIGURA 80 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA 81 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 3, NO INTERVALO II.



Fonte: a autora (2020).

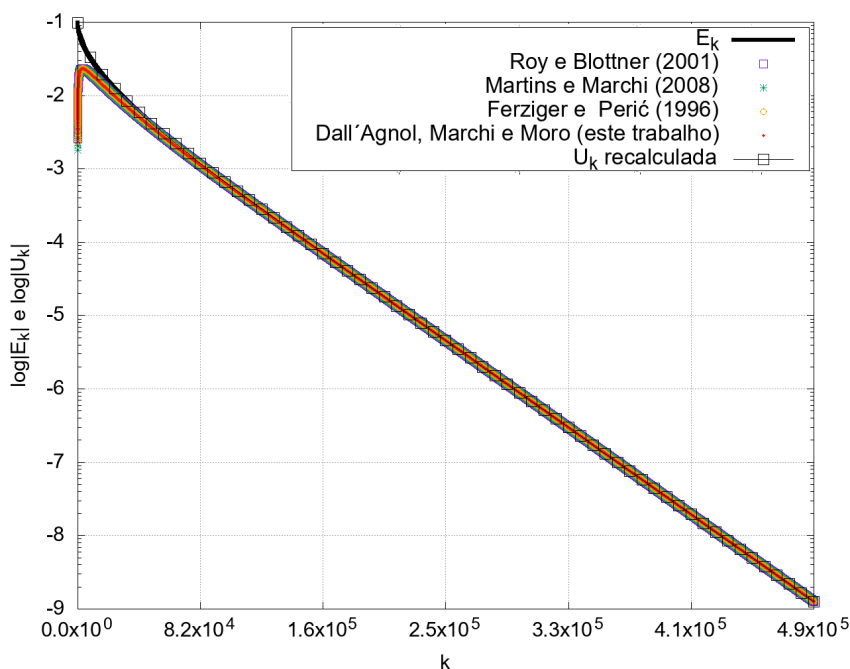
Na FIGURA 82 constam as estimativas obtidas inicialmente e também os novos resultados calculados no intervalo I. Observa-se que, também para essa variável, no início desse intervalo foi obtida melhora significativa nas previsões de erro.

Logo, para as estimativas no intervalo I propõe-se utilizar as soluções corrigidas, com erros de iteração reduzidos. Já para o intervalo II, propõe-se utilizar o estimador proposto. O resultado do uso concomitante das duas maneiras de se estimar o erro de iteração está representado na FIGURA 83.

6.4 Fechamento do capítulo 6

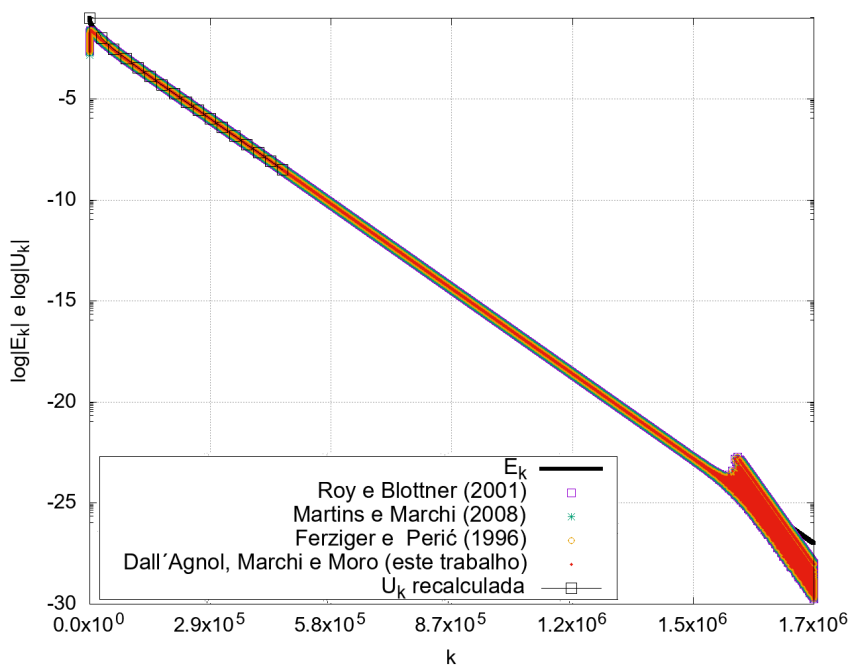
Neste capítulo apresentaram-se os resultados da aplicação do procedimento proposto ao problema 2: equação de advecção-difusão unidimensional. Conduziu-se a verificação do código por meio da comparação entre as soluções numéricas obtidas e a solução analítica disponível, calculando-se os erros numéricos e as ordens efetiva e aparente equivalentes. As estimativas dos erros de iteração foram obtidas com o estimador proposto, e, a partir dessas estimativas foram obtidas soluções com erros de iteração reduzidos. Essas soluções corrigidas foram utilizadas para recalcular as estimativas, que melhoraram consideravelmente na primeira faixa de iterações de cada processo iterativo.

FIGURA 82 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 3, NO INTERVALO I.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA 83 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 3, EM TODOS OS INTERVALOS.



Fonte: a autora (2020).

7 PROBLEMA 3: EQUAÇÃO DE LAPLACE

Neste capítulo, apresentam-se os resultados para a equação de Laplace bidimensional. Novamente, os resultados são mostrados e discutidos separadamente, para cada variável de interesse. Esse problema foi resolvido em *singlegrid* e também em *multigrid*.

7.1 Resultados com *singlegrid*

Nessa seção apresentam-se os resultados do caso 2 desse problema, resolvidos em uma única malha. Os resultados do caso 1 constam no apêndice F.

7.1.1 Variável 1: valor da função (temperatura) no ponto central do domínio de cálculo $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

As análises iniciam-se pela verificação da solução. Assim, apresentam-se na TABELA 26 as soluções obtidas para essa variável com os *solvers* PDMA (MORO, 2018) e Gauss-Seidel. O critério de parada para o segundo *solver* foi o erro de máquina e nessa tabela constam os valores das últimas iterações realizadas para cada caso.

TABELA 26 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS DOS CASOS DO PROBLEMA 3 PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, *SINGLEGRID*.

Caso	Sol. numérica com PDMA (Φ)	Sol. numérica com GS (ϕ_k)	No. de iterações
1	1,993260416376170E-001	1,993260416376170E-001	29153
2	1,992720104130132E-001	1,992720104130131E-001	435850

A equação de Laplace com as condições de contorno fornecidas possui solução analítica conhecida, dada pela Eq. (4.19). Aplicando-se $x = y = 1/2$, tem-se $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1,992684076691933E - 001$, logo, é possível calcular os erros numéricos representados na TABELA 27.

TABELA 27 – ERROS NUMÉRICOS DOS CASOS DO PROBLEMA 3 PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, *SINGLEGRID*.

Caso	Erro numérico (Φ)	Erro numérico (ϕ_k)
1	5,763339684236667E-005	5,763396842366658E-005
2	3,602743819843009E-006	3,602743819843009E-006

Refinando-se a malha sistematicamente, observa-se que o erro de discretização decai com ordens efetiva equivalente ($p_{E_h}^*$) equivalente igual a 2. A ordem assintótica de decaimento do erro de discretização do esquema numérico utilizado nessa equação (CDS-2) é $p_L = 2$, logo, esse erro está decaindo com a ordem esperada.

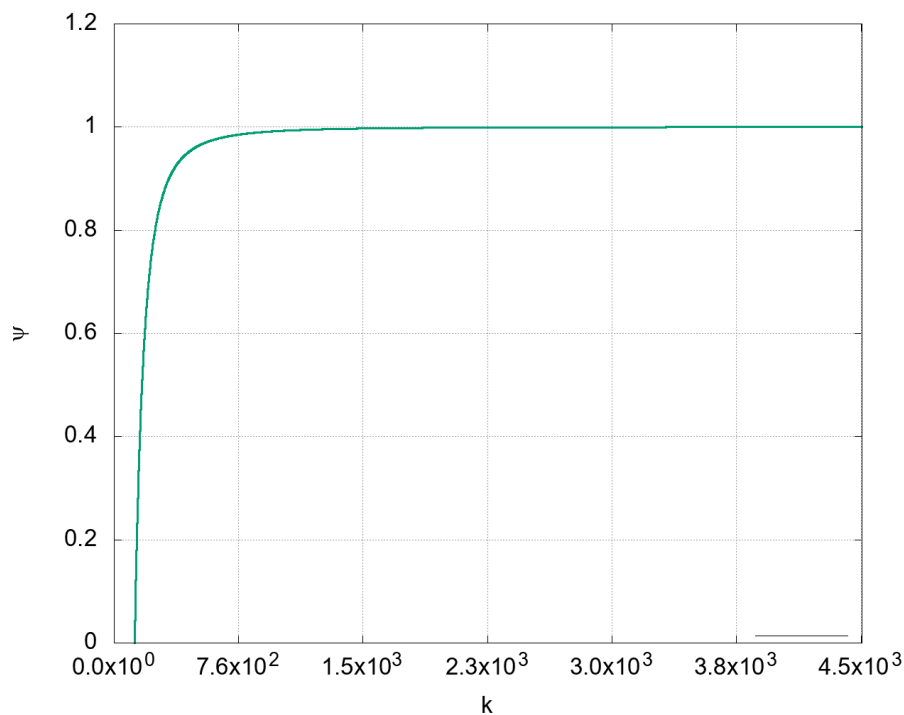
Procedendo-se à verificação da solução e para melhor análise do desempenho do estimador proposto, separam-se as iterações em intervalos, de acordo com os critérios (i) e (ii) descritos na metodologia. Os intervalos para essa variável constam na TABELA 28.

TABELA 28 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, PROBLEMA 3, CASO 3, *SINGLEGRID*.

Intervalo	Critério	Iterações
I	$-1 \leq \psi \leq 1$	129 : 4526
II	$\psi > 1$ sem erros significativos de arredondamento	4527 : 60015
III	$\psi > 1$ com erros significativos de arredondamento	60016 : 435850

O intervalo I inicia-se somente na iteração 129 pois, nesse problema, a condição de contorno leva algumas iterações até ser incorporada ao cálculo da solução. Como ψ é calculado quando tem-se a solução numérica em 3 níveis iterativos consecutivos diferentes, seu cálculo só é possível a partir da iteração 129. Assim, no primeiro intervalo observa-se que ψ está fora do raio de convergência da série geométrica que representa o estimador proposto, logo, as estimativas não são confiáveis. Esse intervalo está representado na FIGURA 84.

FIGURA 84 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, NO INTERVALO I, *SINGLEGRID*.

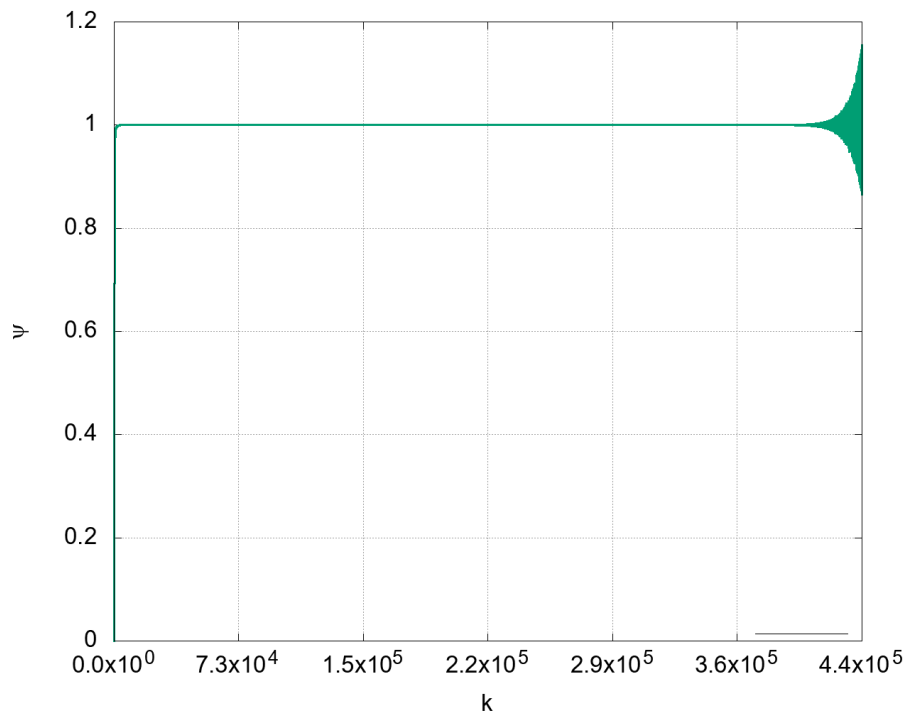


Fonte: a autora (2020).

Nos intervalos II e III nota-se que ψ mantém-se maior do que 1, exceto no final do processo iterativo, onde o erro de arredondamento torna-se mais significativo, como

representado na FIGURA 85. Assim, observando-se a convergência monotônica de ψ , delimita-se o intervalo II como o melhor intervalo para as estimativas. Os intervalos correspondentes ao caso 1 consta no apêndice.

FIGURA 85 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES, *SINGLE-GRID*.



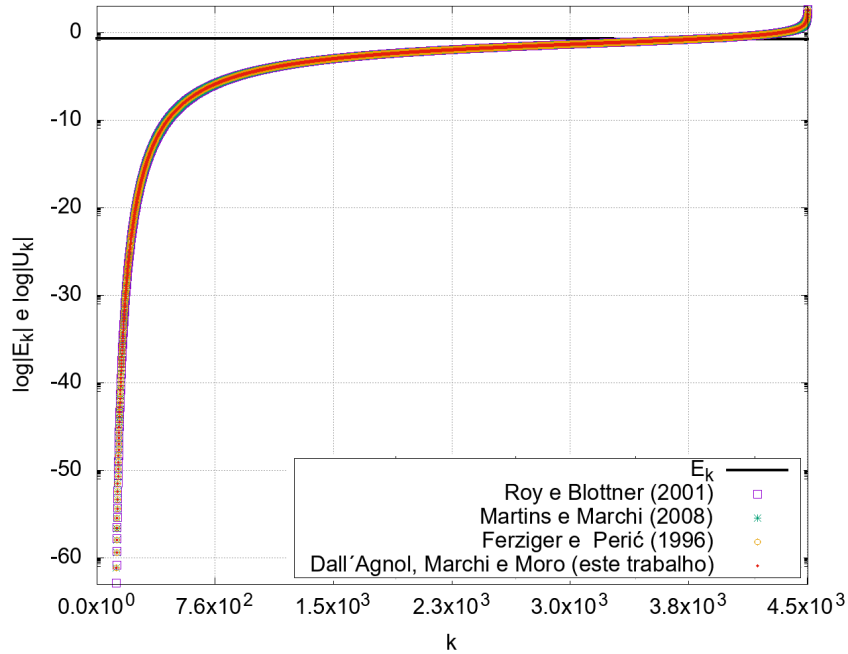
Fonte: a autora (2020).

Observando-se o módulo do erro e das estimativas do erro de iteração em escala logarítmica para o intervalo I representadas na FIGURA 86, nota-se que, para todos os estimadores, as estimativas subestimam o erro no início do intervalo e as superestimam no final do mesmo intervalo.

No intervalo II, observa-se a melhora na acurácia das estimativas no decorrer das iterações, como mostra a FIGURA 87 ocasionada pela convergência monotônica de ψ representada na FIGURA 88. É no final desse intervalo que a melhor estimativa de erro de iteração é selecionada.

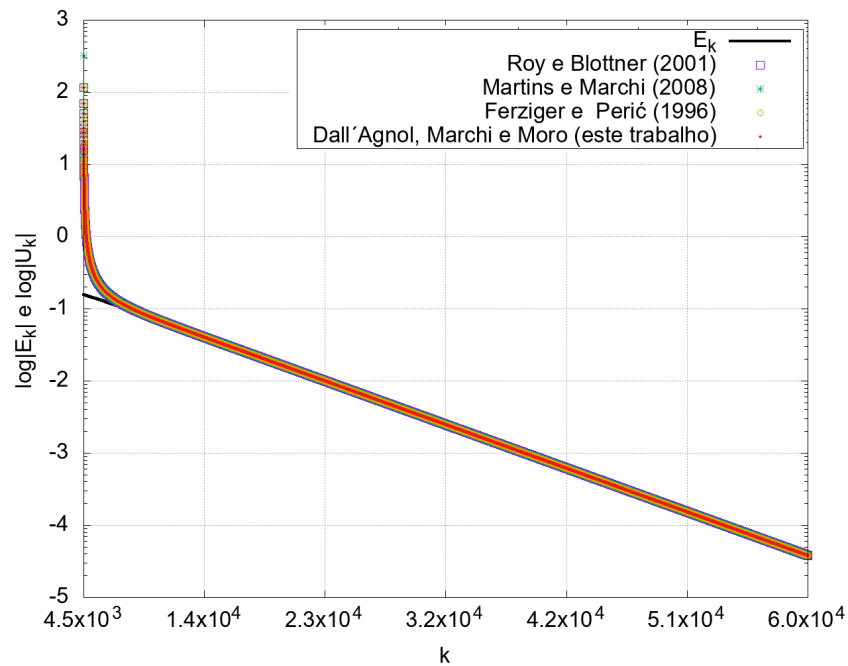
Observando-se a FIGURA 89 que representa o módulo do erro e das estimativas do erro de iteração em escala logarítmica para todas as iterações do processo iterativo, observa-se que as estimativas precisam ser melhoradas nas faixas iniciais e finais de iterações.

FIGURA 86 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, NO INTERVALO I, *SINGLE-GRID*.



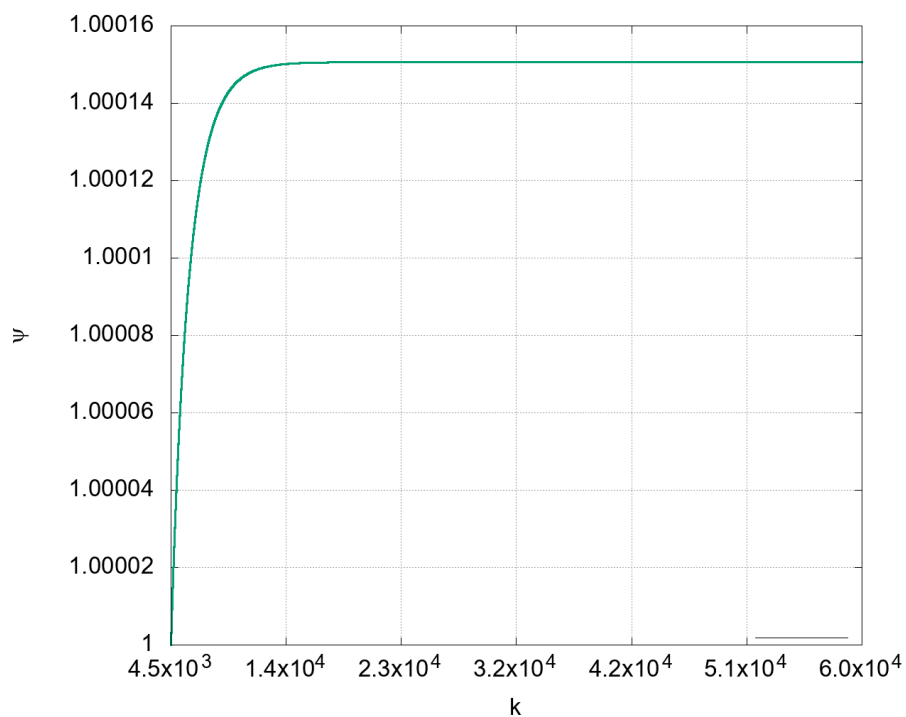
Fonte: a autora (2020).

FIGURA 87 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, NO INTERVALO II, *SINGLE-GRID*.



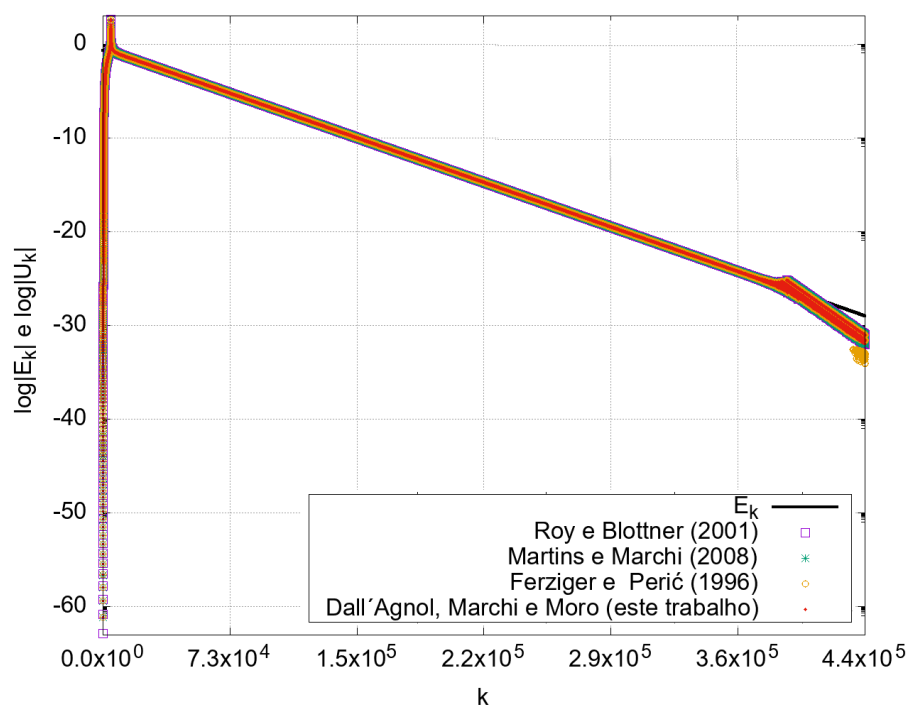
Fonte: a autora (2020).

FIGURA 88 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, NO INTERVALO II, *SINGLEGRID*.



Fonte: a autora (2020).

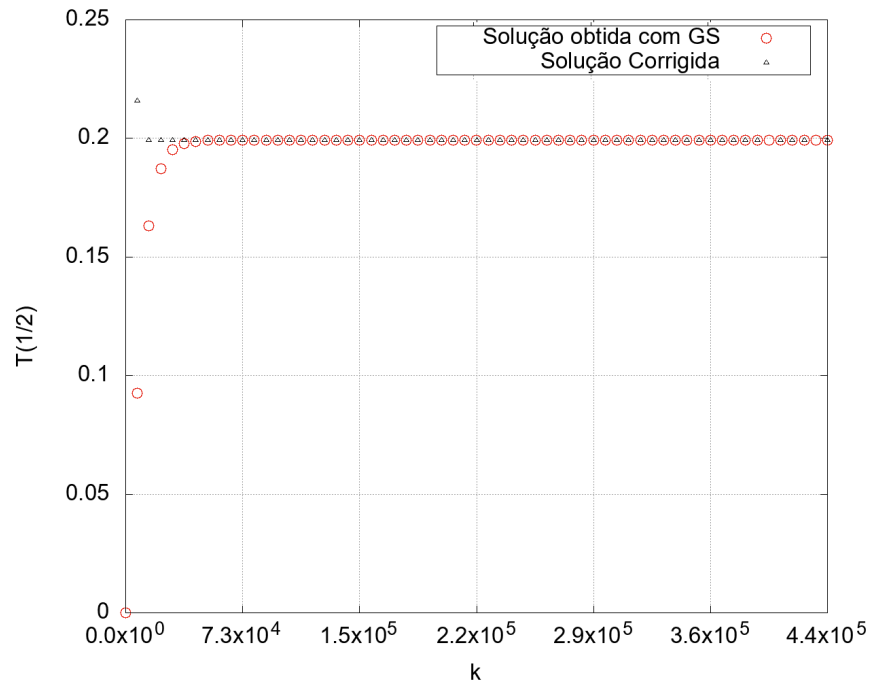
FIGURA 89 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES, *SINGLEGRID*.



Fonte: a autora (2020).

De acordo com o proposto na metodologia, calcula-se a solução corrigida, com reduzidos erros de iteração, por meio da Eq. (4.77). Uma comparação entre as soluções numéricas obtidas anteriormente com o *solver* GS e a solução numérica corrigida é apresentada na FIGURA 90.

FIGURA 90 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES, *SINGLEGRID*.



Fonte: a autora (2020).

Para calcularem-se as novas estimativas, são utilizadas as soluções corrigidas da última iteração do melhor intervalo delimitado para cada caso. Essas soluções estão na TABELA 29.

TABELA 29 – VALORES DAS SOLUÇÕES NA ÚLTIMA ITERAÇÃO DO INTERVALO II DE CADA CASO DO PROBLEMA 3, VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, *SINGLEGRID*.

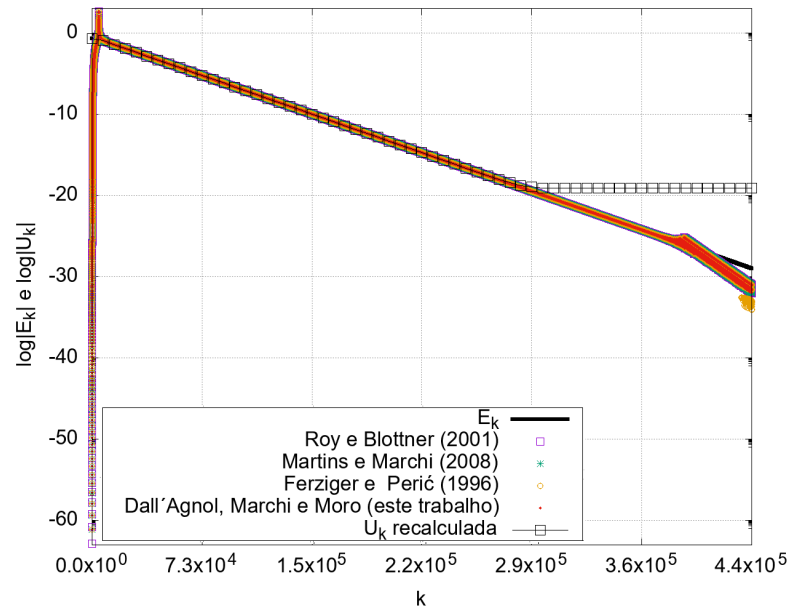
Caso	Iteração	ϕ_{it_2}
1	4738	1,993260416376170067941700583033855E-001
2	60015	1,992720104130131833011553508598369E-001

As novas estimativas calculadas utilizando a Eq. (4.79) em todas as iterações são apresentadas na FIGURA 91. Nota-se que as estimativas melhoraram no início do processo iterativo, como mostra a FIGURA 92, com as novas estimativas para os intervalos I e II.

Porém, as novas estimativas não foram acuradas no final do intervalo III, devido à presença mais significativa dos erros de arredondamento no final do intervalo III, como

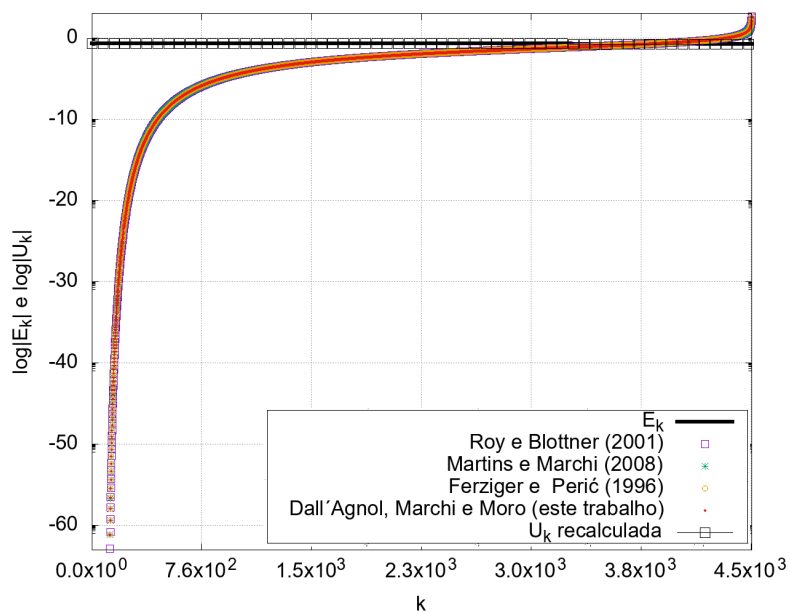
observa-se na FIGURA 93 que representa a diferença entre as estimativas obtidas e o erro verdadeiro. As novas estimativas para o intervalo III são apresentadas na FIGURA 94.

FIGURA 91 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES, *SINGLEGRID*.



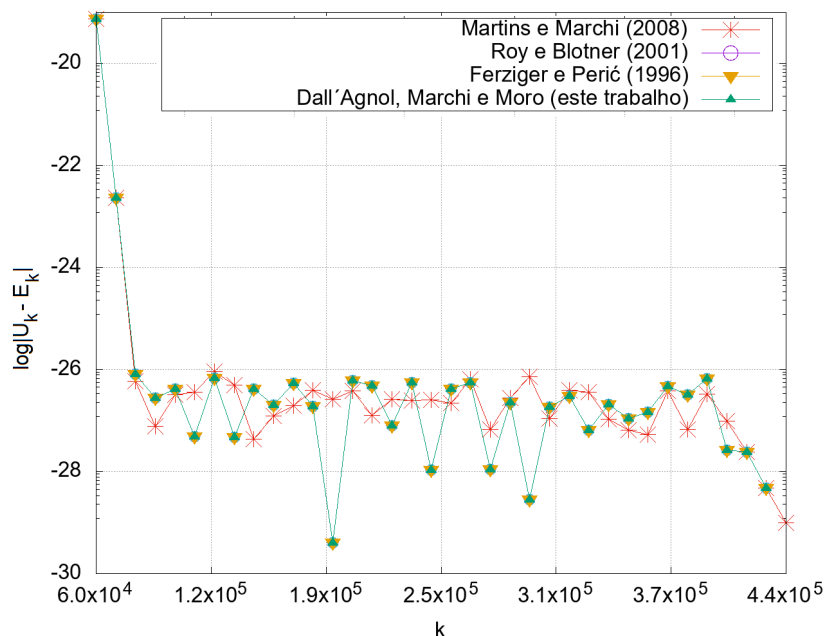
Fonte: a autora (2020).

FIGURA 92 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, NO INTERVALO I, *SINGLEGRID*.



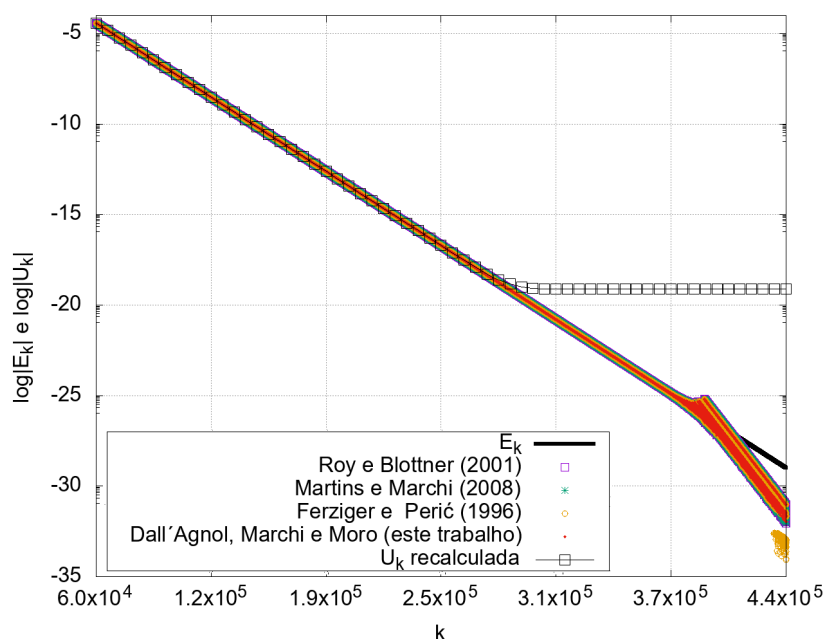
Fonte: a autora (2020).

FIGURA 93 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR PROPOSTO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, NO INTERVALO III, *SINGLEGRID*.



Fonte: a autora (2020).

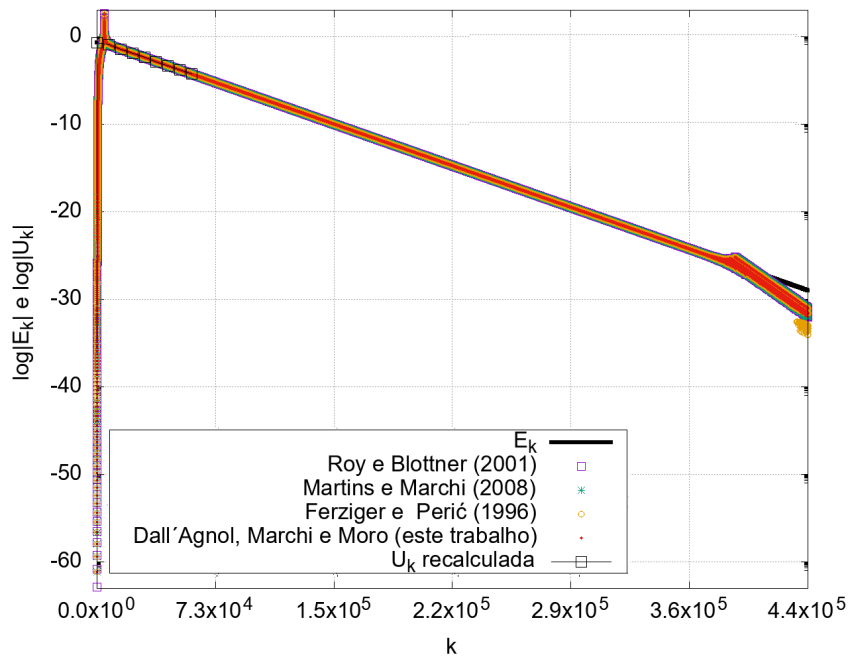
FIGURA 94 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, NO INTERVALO III, *SINGLEGRID*.



Fonte: a autora (2020).

Assim, sugere-se combinar os dois procedimentos para se obter as estimativas, como representado na FIGURA 95. Nos intervalos I e II são utilizadas as soluções corrigidas, já no intervalo III utiliza-se o estimador proposto.

FIGURA 95 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODOS OS INTERVALOS, *SINGLEGRID*.



7.1.2 Variável 2: gradiente no contorno leste (direito) do domínio de cálculo $\text{grad } T(1,y)$

Para essa variável foram obtidas as soluções numéricas apresentadas na TABELA 30. Assim como descrito na metodologia, o critério de parada para o *solver* GS foi o erro de máquina e, na última coluna da tabela, consta o número de iterações necessário para alcançá-lo.

TABELA 30 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS DOS CASOS DO PROBLEMA 3 PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$, *SINGLEGRID*.

Caso	Sol. numérica com PDMA (Φ)	Sol. numérica com GS (ϕ_k)	No. de iterações
1	9,283659951979760E-001	9,282659951979760E-001	29429
2	9,197616756887540E-001	9,197616756887540E-001	440370

Considerando-se a solução analítica (Eq. (4.20)), que resulta em $9,171523356672743E-001$, calculam-se os erros numéricos mostrados na TABELA 31. Observa-se que, com o refinamento da malha, o erro numérico diminui, indicando a convergência das soluções.

TABELA 31 – ERROS NUMÉRICOS DOS CASOS DO PROBLEMA 3 PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$, *SINGLEGRID*.

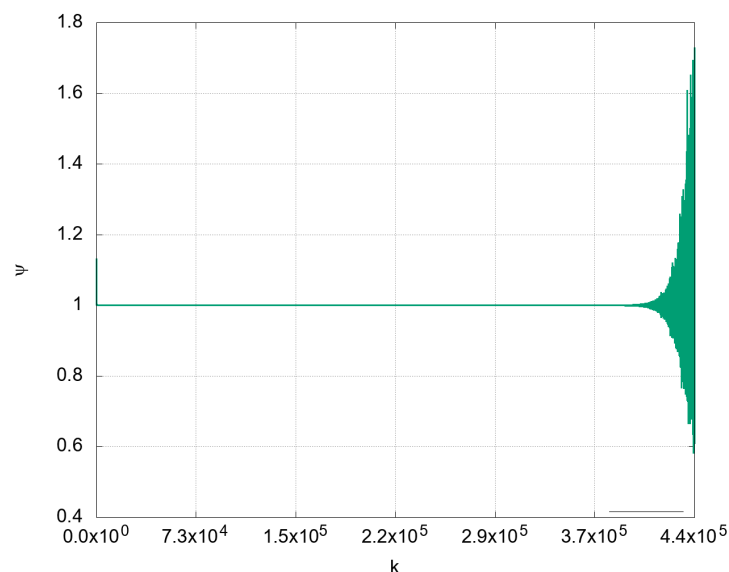
Caso	Erro numérico (Φ)	Erro numérico (ϕ_k)
1	1,111365953070167E-002	1,111365953070167E-002
2	2,609340021479620E-003	2,609340021479620E-003

Para análise das estimativas de erros de iteração obtidas, dividem-se as iterações em intervalos de acordo com os critérios descritos na metodologia. Para essa variável foram delimitados quatro intervalos representados na TABELA 32.

TABELA 32 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$, PROBLEMA 3, CASO 2, *SINGLEGRID*.

Intervalo	Critério	Iterações
I	$\psi > 1$	3 : 18475
II	$\psi > 1$ sem convergência monotônica	18476 : 21076
III	$\psi > 1$ com convergência monotônica	21077 : 92635
IV	$\psi > 1$ com erros significativos de arredondamento	92636 : 440370

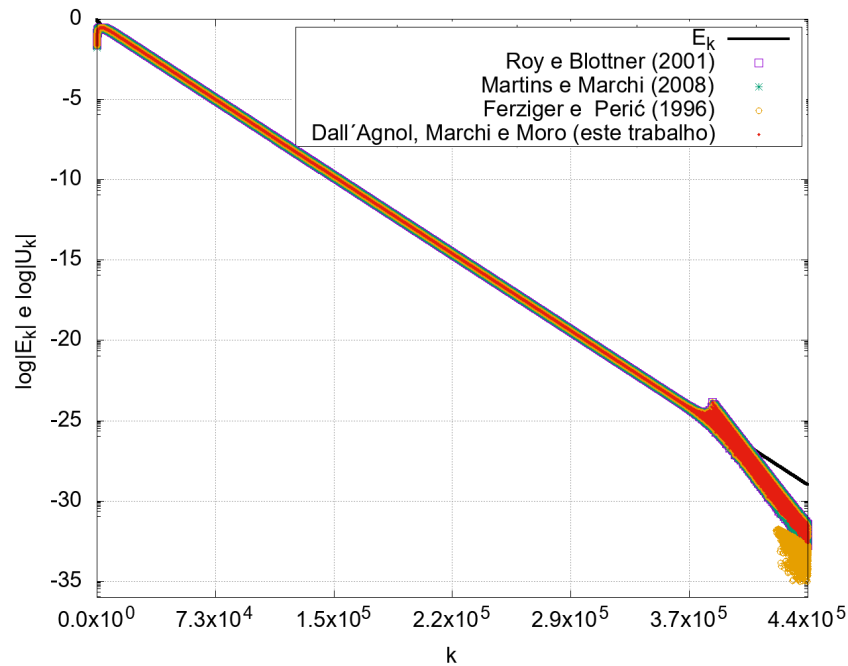
Como exceção das últimas iterações do processo, onde o erro de arredondamento torna-se mais expressivo, observou-se que $\psi > 1$ em todas as demais iterações (FIGURA 96). Porém, entre os intervalos I e III, tem-se uma faixa de iterações em que a convergência de ψ não é monotônica. Logo, o intervalo III mostrou-se o melhor intervalo para as estimativas.

FIGURA 96 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES, *SINGLEGRID*.

Fonte: a autora (2020).

Na FIGURA 97 têm-se os módulos das estimativas e do erro de iteração para todas as iterações. Para essa variável, também se nota que as estimativas não são acuradas nas faixas iniciais e finais do processo iterativo. As estimativas para as faixas iniciais (intervalos I e II) estão na FIGURA 98.

FIGURA 97 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES, *SINGLEGRID*.



Fonte: a autora (2020).

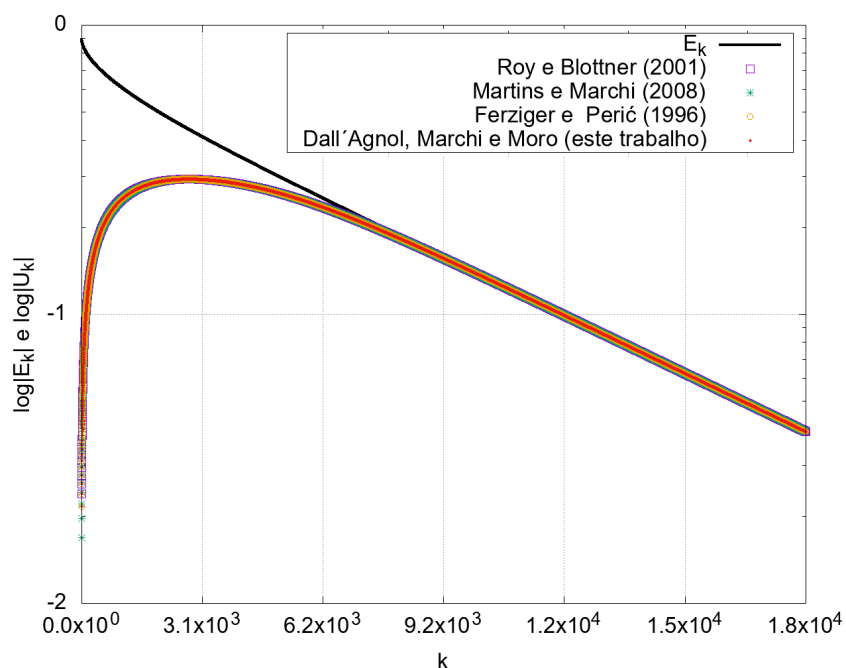
Na FIGURA 99 apresentam-se os módulos das estimativas e do erro de iteração para o intervalo III e na FIGURA 100 apresentam-se os valores de ψ para o mesmo intervalo.

O próximo passo consiste no cálculo das soluções corrigidas, por meio da Eq. (4.77), apresentadas na FIGURA 101. A solução corrigida mais acurada, de acordo com o método, é a referente à última iteração do intervalo III, delimitado anteriormente. Essa solução é utilizada para recalcular as estimativas de erros a cada iteração. Os valores dessas soluções, para cada caso, constam na TABELA 33.

TABELA 33 – VALORES DAS SOLUÇÕES NA ÚLTIMA ITERAÇÃO DO INTERVALO II DE CADA CASO DO PROBLEMA 3, VARIÁVEL $grad\ T(1,y)$, *SINGLEGRID*.

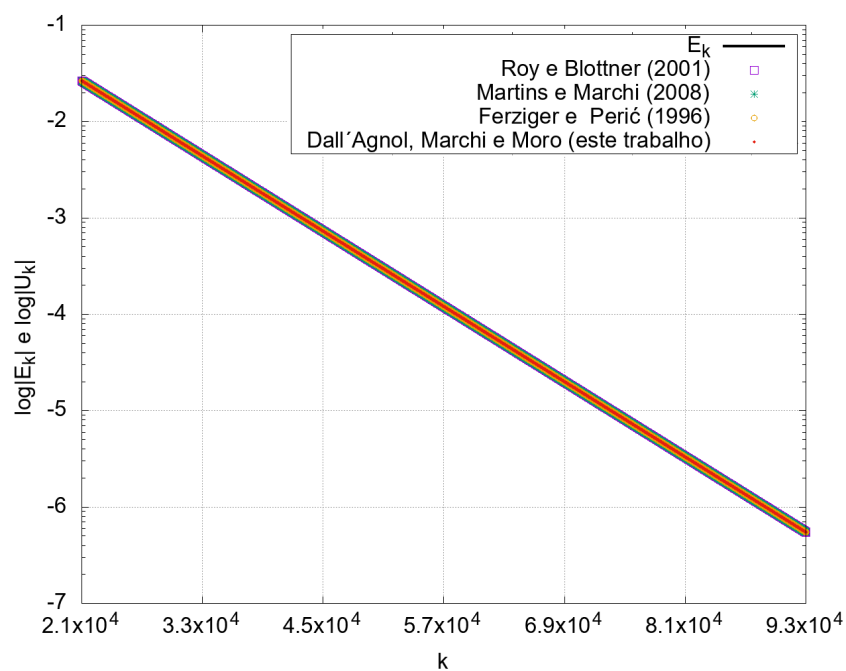
Caso	Iteração	ϕ_{it_2}
1	8041	9,282659951979760169432740110765863E-001
2	92635	9,197616756887539690541397363981809E-001

FIGURA 98 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, NO INTERVALO I, *SINGLEGRID*.



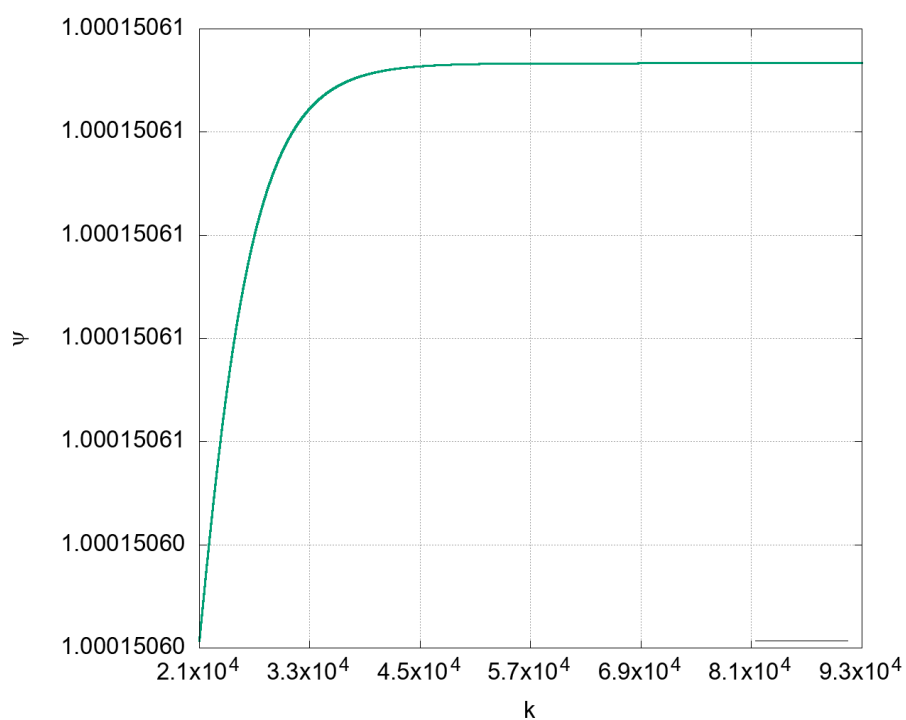
Fonte: a autora (2020).

FIGURA 99 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, NO INTERVALO III, *SINGLEGRID*.



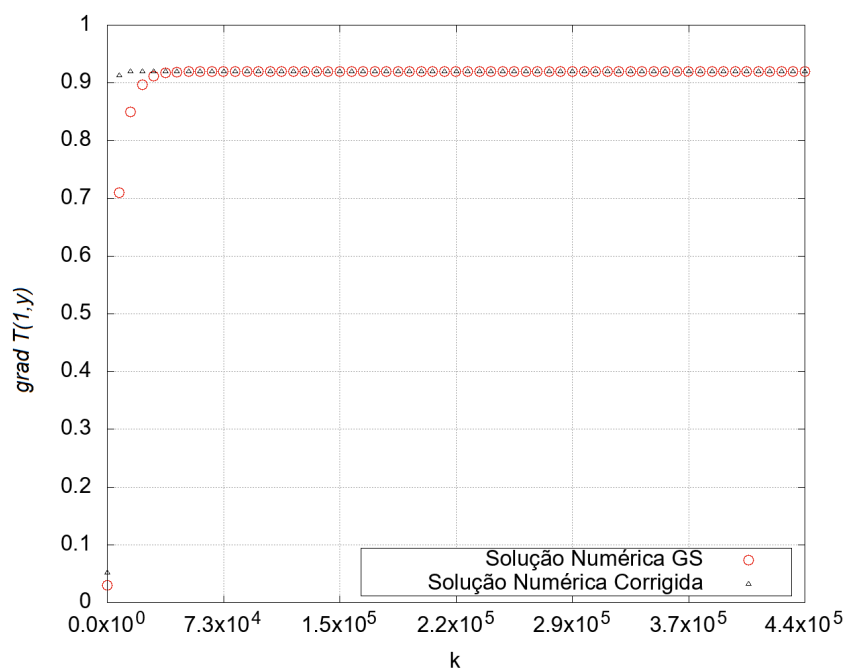
Fonte: a autora (2020).

FIGURA 100 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, NO INTERVALO III, *SINGLEGRID*.



Fonte: a autora (2020).

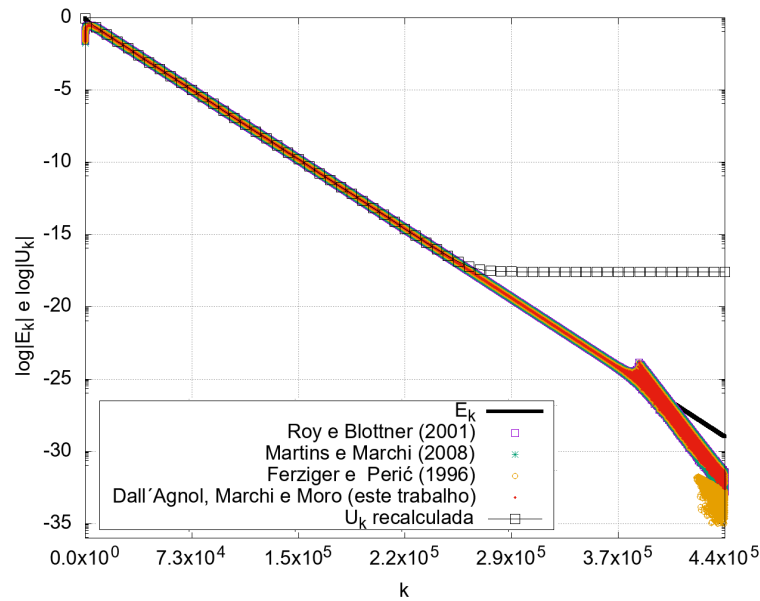
FIGURA 101 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES, *SINGLEGRID*.



Fonte: a autora (2020).

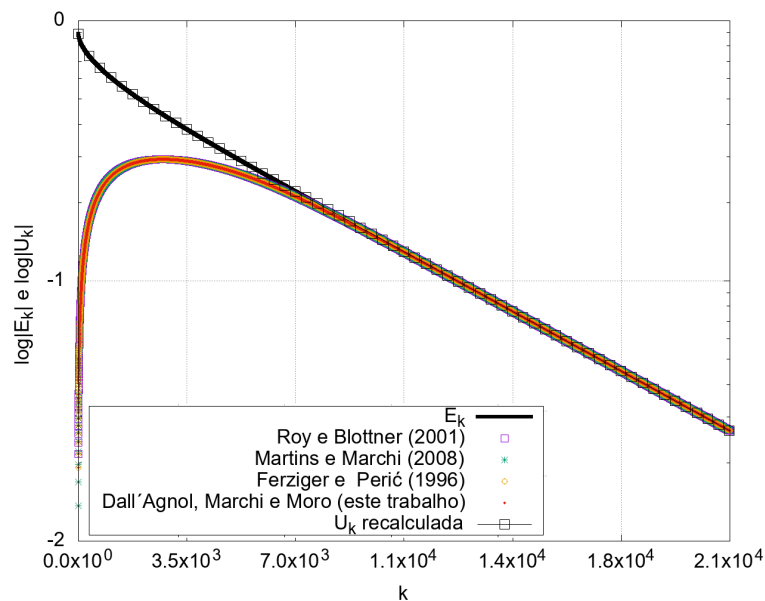
As novas estimativas são representadas na FIGURA 102. Observa-se que, também para essa variável, as estimativas melhoram na faixa inicial do processo iterativo, de acordo com o que mostra a FIGURA 103.

FIGURA 102 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES, *SINGLEGRID*.



Fonte: a autora (2020).

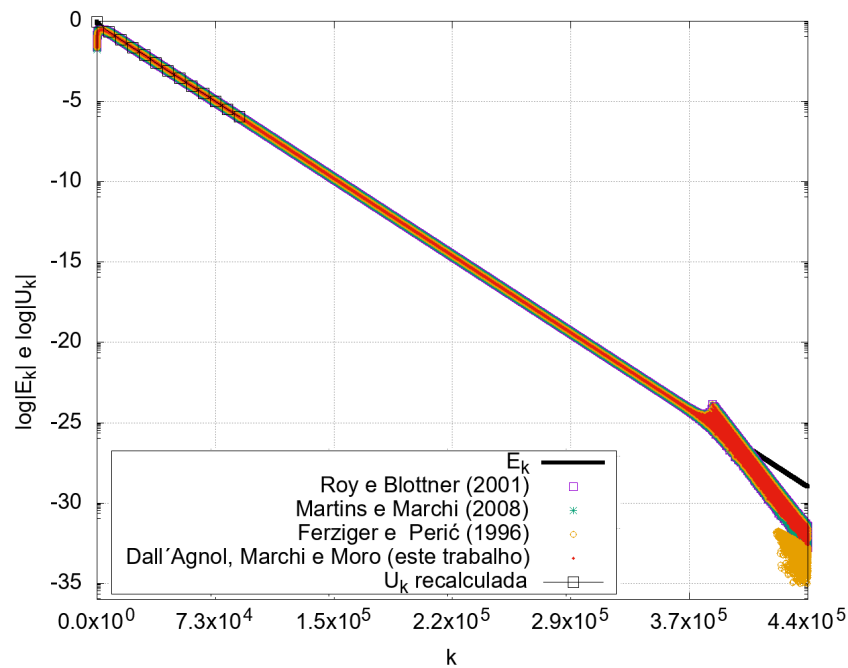
FIGURA 103 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, NOS INTERVALOS I E II, *SINGLEGRID*.



Fonte: a autora (2020).

Porém, o final do intervalo IV, devido à presença mais significativa dos erros de arredondamento, não apresenta estimativas acuradas. Assim, recomenda-se combinar os dois procedimentos para obter as estimativas representadas na FIGURA 104.

FIGURA 104 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODOS OS INTERVALOS, *SINGLEGRID*.



Fonte: a autora (2020).

7.1.3 Variável 3: valor médio da função (temperatura média) T_m

A fim de verificar o código, novamente apresentam-se as soluções numéricas obtidas com os diferentes *solvers* utilizados. Os resultados obtidos estão na TABELA 34. Considerando-se a solução analítica para essa variável, dada pela Eq. (4.21) que resulta em $T_m = 1,85853920460285837E - 001$, são obtidos os erros numéricos cometidos na obtenção das soluções apresentadas. Os erros para cada caso estão na TABELA 35.

TABELA 34 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS DOS CASOS DO PROBLEMA 3 PARA A VARIÁVEL T_m , *SINGLEGRID*.

Caso	Sol. numérica com PDMA (Φ)	Sol. numérica com GS (ϕ_k)	No. de iterações
1	1,809084632456606E-001	1,809084632456606E-001	28779
2	1,846122358980575E-001	1,846122358980575E-001	429852

As soluções numéricas obtidas aproximam-se da solução analítica ao refinar as malhas sistematicamente, o que indica a convergência das soluções. A fim de verificar a solução, o processo iterativo é dividido em intervalos de acordo com os critérios apresentados

TABELA 35 – ERROS NUMÉRICOS DOS CASOS DO PROBLEMA 3 PARA A VARIÁVEL T_m , *SINGLEGRID*.

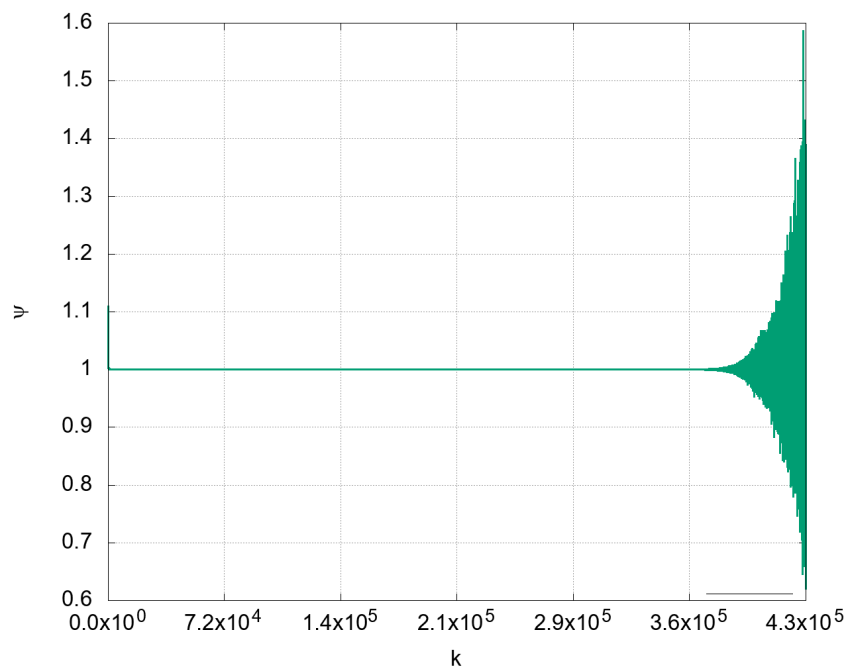
Caso	Erro numérico (Φ)	Erro numérico (ϕ_k)
1	4,945457214625245E-003	4,945457214625245E-003
2	1,241684562228318E-003	1,241684562228319E-003

na metodologia. Os resultados para esse caso apresentam-se na TABELA 36. Os intervalos para os demais casos estão no apêndice F.

TABELA 36 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL T_m , PROBLEMA 3, CASO 2, *SINGLEGRID*.

Intervalo	Critério	Iterações
I	$\psi > 1$	3 : 15160
II	$\psi > 1$ sem convergência monotônica	15161 : 17764
III	$\psi > 1$ com convergência monotônica	17765 : 87281
IV	$\psi > 1$ com erros significativos de arredondamento	87282 : 429852

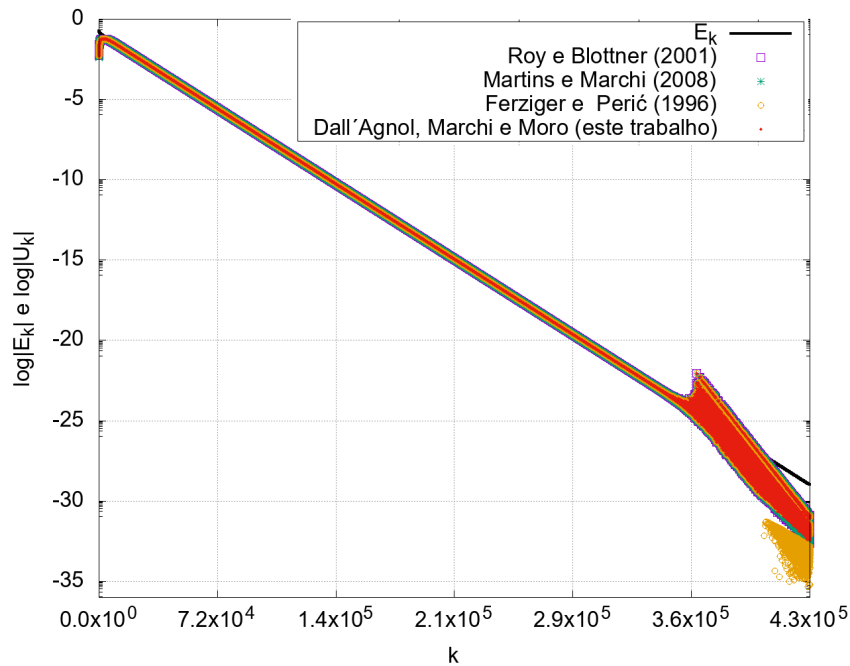
A taxa de convergência ψ dessa variável tem comportamento semelhante à apresentada para a variável $\text{grad } T(1, y)$, representado na FIGURA 105, sendo o intervalo III considerado o melhor intervalo para as estimativas. Para essa variável também se observa que as estimativas não são acuradas no início e no final do processo iterativo, como mostra a FIGURA 106.

FIGURA 105 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES, *SINGLEGRID*.

Fonte: a autora (2020).

As estimativas nos intervalos I e II, não muito acuradas, são representadas na FIGURA 107. Já no intervalo III, representado na FIGURA 108, observa-se que as estimativas são precisas, o que condiz com o comportamento monotônico de ψ , representado na FIGURA 109, para esse intervalo.

FIGURA 106 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES, *SINGLEGRID*.



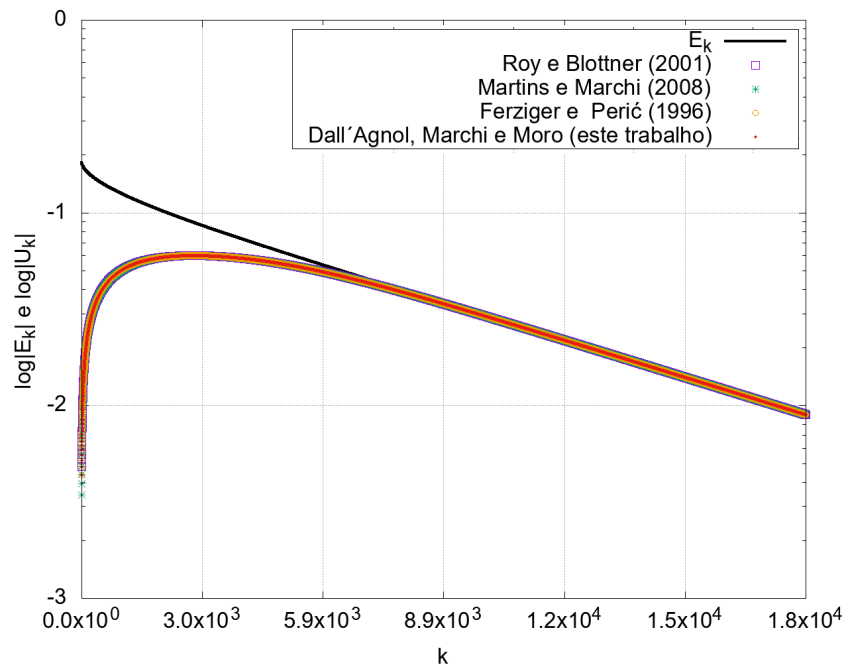
Fonte: a autora (2020).

Após obtidas as primeiras estimativas, são calculadas as soluções corrigidas por meio da Eq. (4.77), os resultados são apresentados na FIGURA 110. Da última iteração do intervalo III obtêm-se as soluções corrigidas que serão utilizadas para refazer as estimativas do erro de iteração. Essas soluções são apresentadas na TABELA 37 para cada caso.

TABELA 37 – VALORES DAS SOLUÇÕES NA ÚLTIMA ITERAÇÃO DO INTERVALO II DE CADA CASO DO PROBLEMA 3, VARIÁVEL T_m , *SINGLEGRID*.

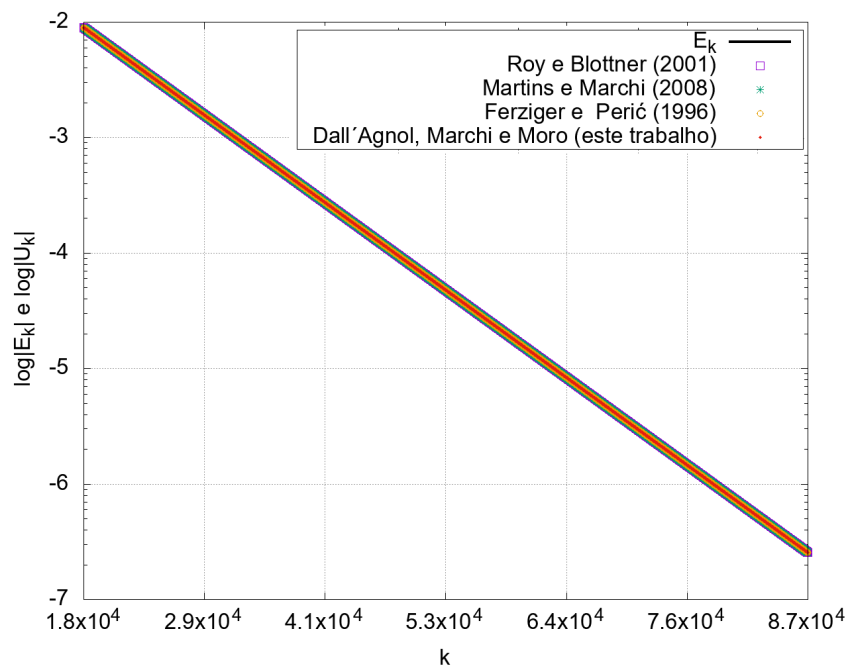
Caso	Iteração	ϕ_{it_2}
1	7826	1,809084632456605916789512655767229E-001
2	87281	1,846122358980575336011350994731200E-001

FIGURA 107 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, NOS INTERVALOS I E II, *SINGLEGRID*.



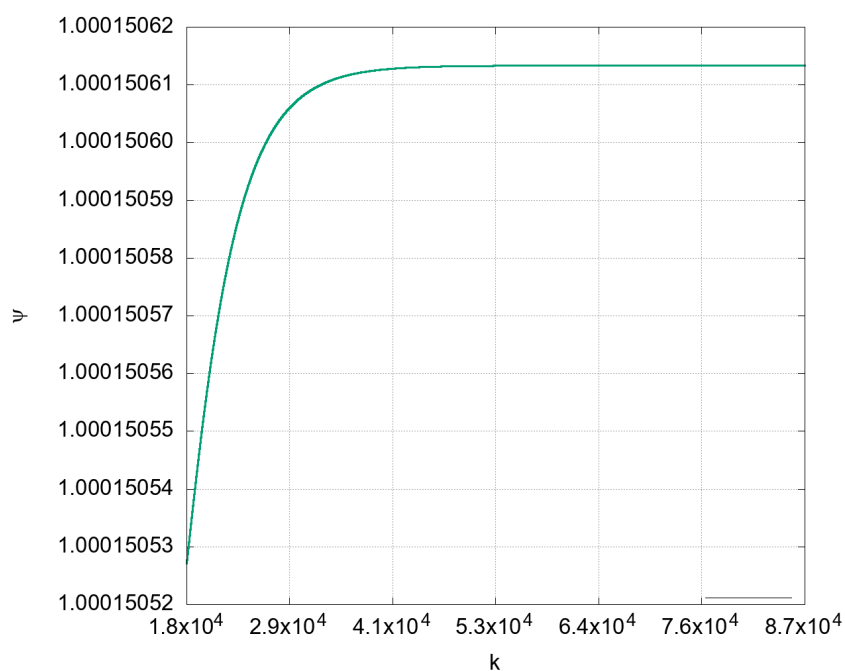
Fonte: a autora (2020).

FIGURA 108 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, NO INTERVALO III, *SINGLEGRID*.



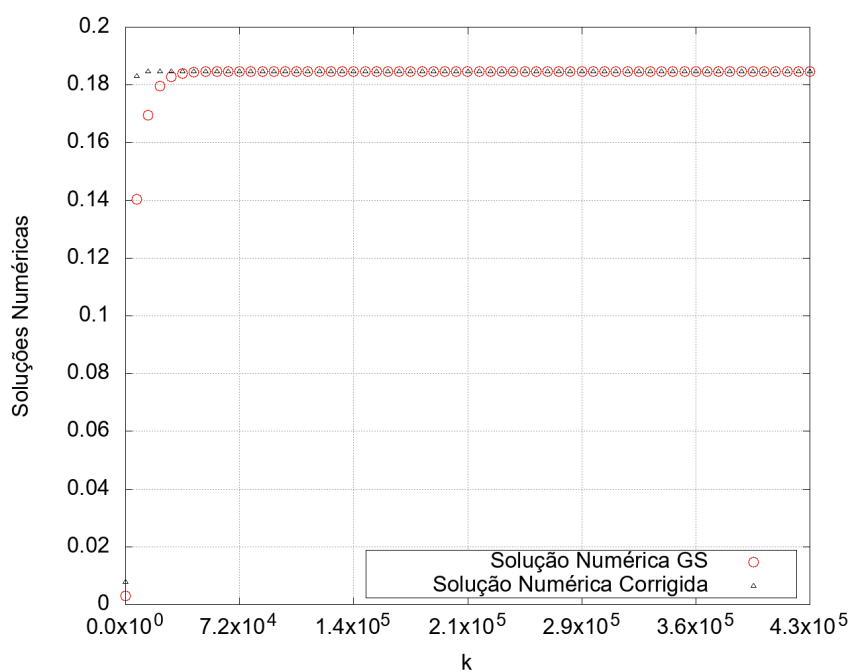
Fonte: a autora (2020).

FIGURA 109 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, NO INTERVALO III, *SINGLEGRID*.



Fonte: a autora (2020).

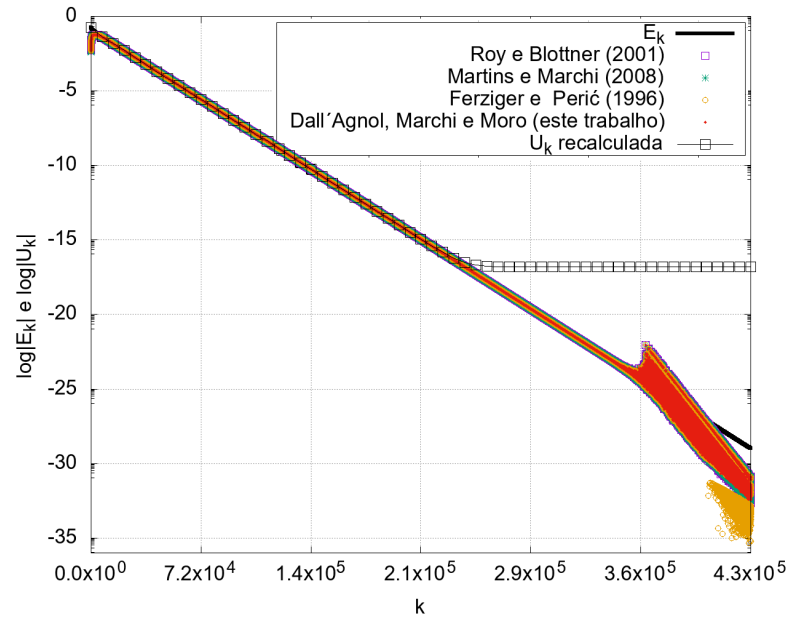
FIGURA 110 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES, *SINGLEGRID*.



Fonte: a autora (2020).

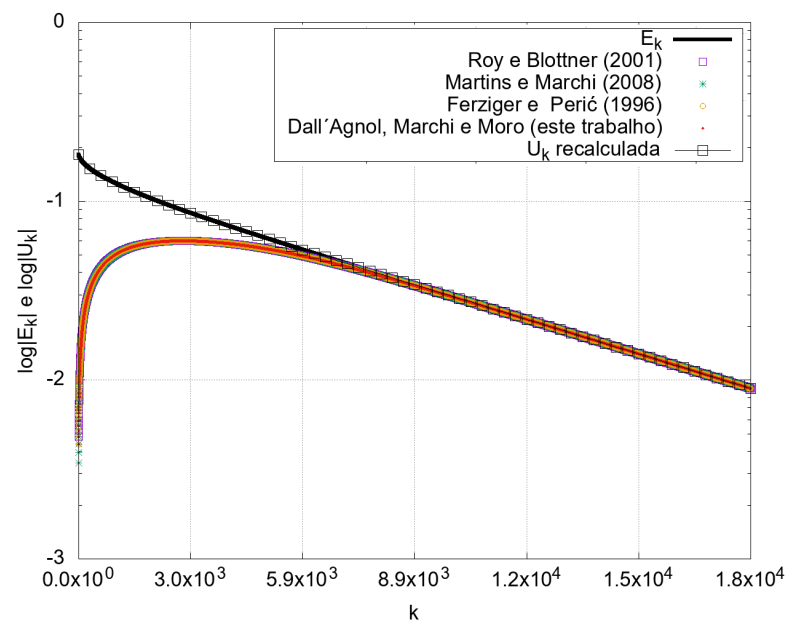
Na FIGURA 111 são representadas as novas estimativas, com melhores resultados para as estimativas da faixa inicial do processo iterativo (FIGURA 112).

FIGURA 111 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES, *SINGLEGRID*.



Fonte: a autora (2020).

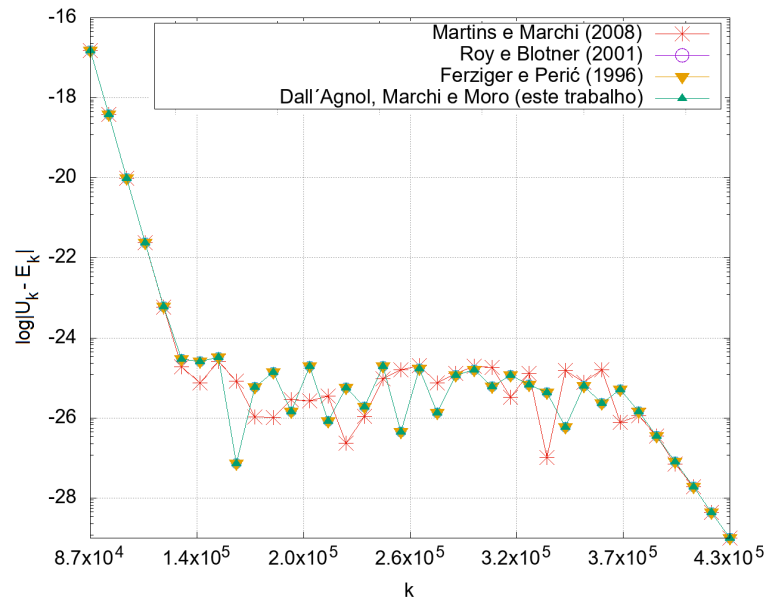
FIGURA 112 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, NOS INTERVALOS I E II, *SINGLEGRID*.



Fonte: a autora (2020).

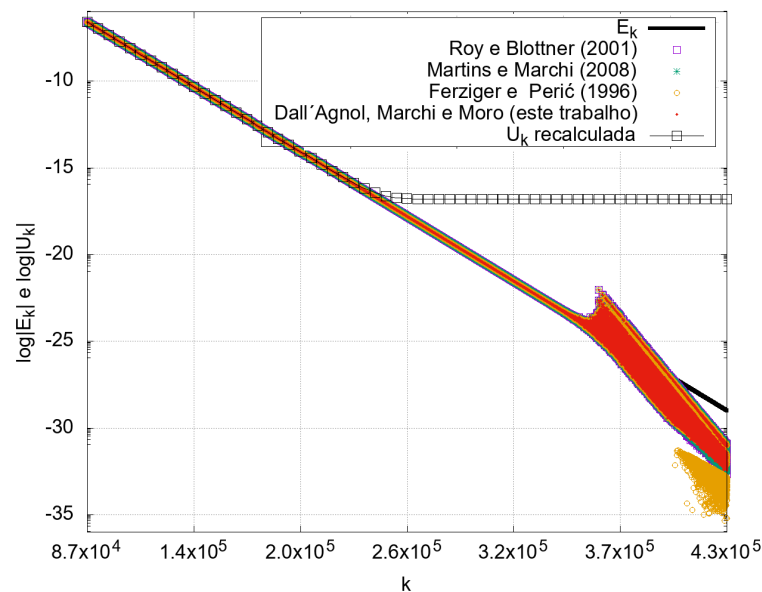
Devido aos erros de arredondamento, representados na FIGURA 113, não se obteve melhora nas estimativas no final do intervalo IV (FIGURA 114).

FIGURA 113 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR PROPOSTO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, NO INTERVALO IV, *SINGLEGRID*.



Fonte: a autora (2020).

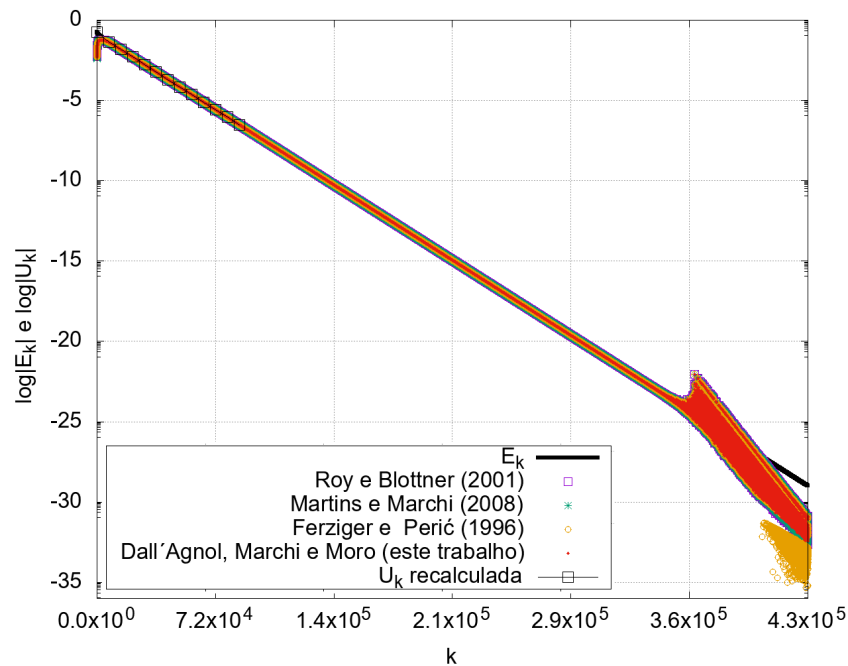
FIGURA 114 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, NO INTERVALO IV, *SINGLEGRID*.



Fonte: a autora (2020).

Assim, sugere-se combinar os dois procedimentos: utilizar as soluções corrigidas nos intervalos I a III e estimador proposto no intervalo IV, para que sejam obtidas as estimativas (FIGURA 115).

FIGURA 115 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODOS OS INTERVALOS, *SINGLEGRID*.



Fonte: a autora (2020).

7.2 Resultados com *multigrid*

Nessa seção apresentam-se os resultados do caso 3 desse problema, resolvido utilizando o *solver* GS associado ao método *multigrid*. Os resultados dos casos 1 e 2 constam no apêndice G.

7.2.1 Variável 1: valor da função (temperatura) no ponto central do domínio de cálculo $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Na TABELA 38 constam os valores obtidos para as soluções numéricas utilizando o método *multigrid* com os parâmetros descritos na metodologia para cada caso do problema 3. Na última coluna consta o número de iterações necessários para alcançar-se o erro de máquina para cada caso. Esse número refere-se ao número de ciclos V realizados até atingir-se o critério de convergência determinado. As soluções convergidas utilizadas foram as calculadas anteriormente com o *solver* PDMA.

TABELA 38 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS DOS CASOS DO PROBLEMA 3 PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, COM *MULTIGRID*.

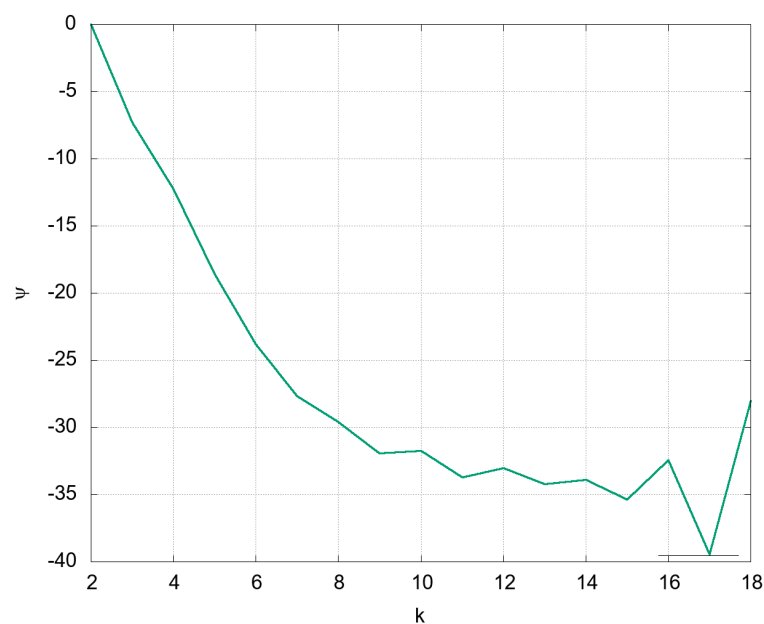
Caso	Sol. numérica com GS e <i>multigrid</i> (ϕ_k)	No. de iterações
1	1,993260416376170E-001	22
2	1,992720104130132E-001	18
3	1,992686328431079E-001	18

Calculando-se os erros numéricos, chega-se aos valores constantes na TABELA 39. Observa-se que, ao refinar as malhas sistematicamente, os erros numérico diminuem, indicando a convergência da solução.

TABELA 39 – ERROS NUMÉRICOS DOS CASOS DO PROBLEMA 3 PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, COM *MULTIGRID*.

Caso	Erro numérico (ϕ_k)
1	5,763396842366658E-005
2	3,602743819843009E-006
3	2,251739140146650E-007

Para que sejam delimitados os intervalos com as melhores estimativas do estimador proposto, observa-se o comportamento da taxa de convergência ψ ao longo das iterações. Esse comportamento está representado na FIGURA 116. Nota-se que $\psi < -1$ em todo o processo iterativo e que o comportamento é monotônico apenas até a iteração 9. Portanto, o intervalo para as melhores estimativas é o intervalo I, da TABELA 40.

FIGURA 116 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 3, COM *MULTIGRID*.

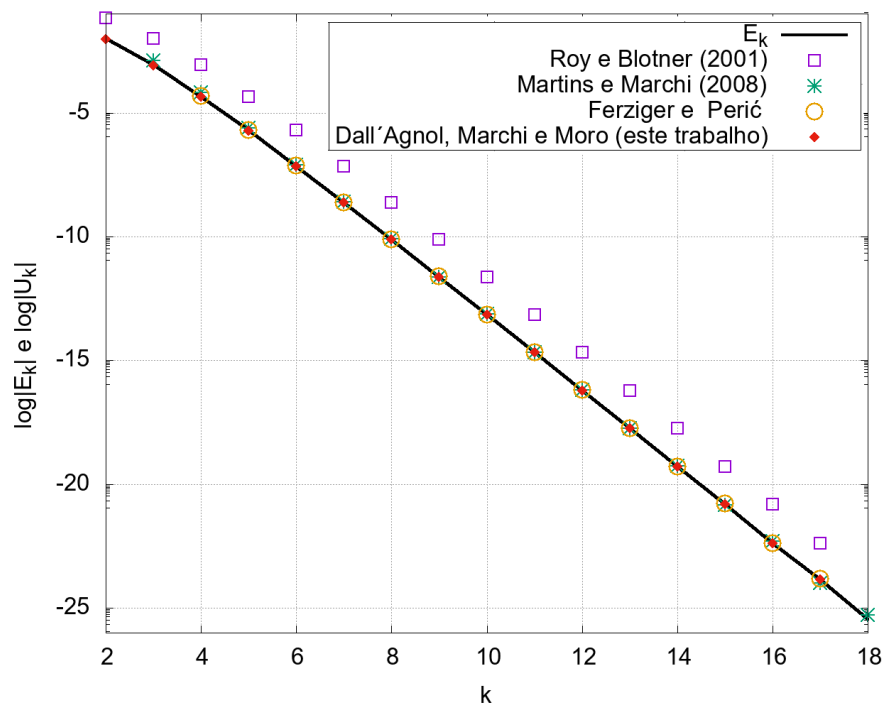
Fonte: a autora (2020).

TABELA 40 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, PROBLEMA 3, CASO 3, COM *MULTIGRID*.

Intervalo	Critério	Iterações
I	$\psi < -1$ com convergência monotônica	3 : 9
II	$\psi < -1$ sem convergência monotônica	10 : 18

O resultado do cálculo das estimativas para essa variável está representado na FIGURA 117. Nela observa-se concordância entre estimativa e erro verdadeiro de iteração para os estimadores de Ferziger e Perić (2002) e proposto em todo o processo iterativo. Porém, analisando-se a efetividade, o estimador proposto mostrou-se confiável ($\theta \geq 1$) em 28% das iterações, contra 58% do empírico padrão e do estimador de Roy e Blottner e 73% do estimador de Ferziger e Perić.

FIGURA 117 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES, COM *MULTIGRID*.



Fonte: a autora (2020).

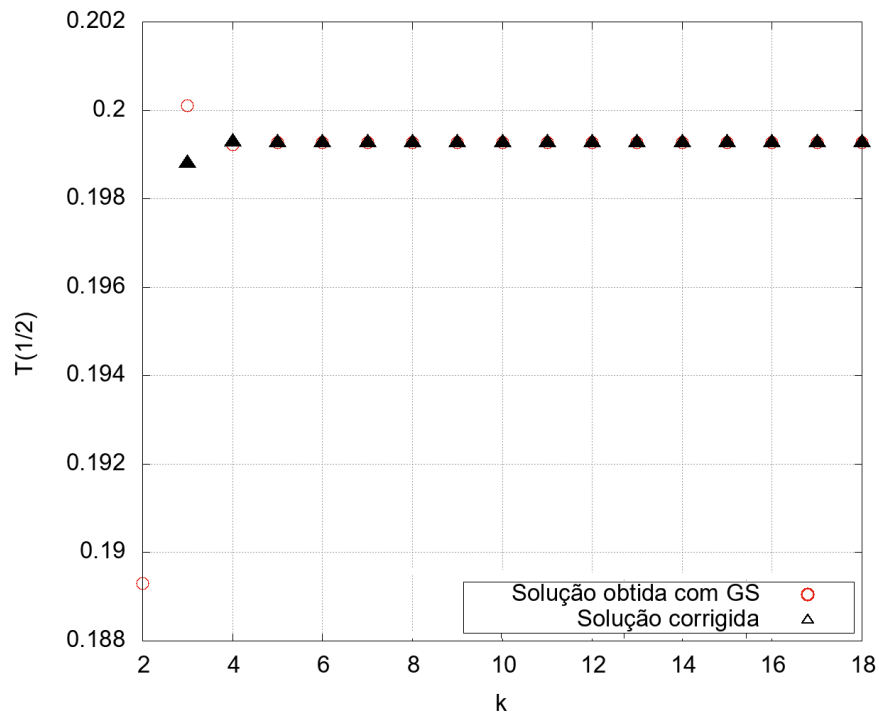
Assim, seguindo-se o procedimento proposto na metodologia, busca-se por meio do cálculo das soluções corrigidas (Eq. (4.77)), melhorar-se as estimativas obtidas. Na FIGURA 118 constam as soluções com reduzidos erros de iteração e na TABELA 41 constam as soluções corrigidas da última iteração do intervalo I.

TABELA 41 – VALORES DAS SOLUÇÕES NA ÚLTIMA ITERAÇÃO DO INTERVALO II DE CADA CASO DO PROBLEMA 3, VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, COM *MULTIGRID* .

Caso	Iteração	ϕ_{it_2}
1	1,993260416426218113081977454060165E-001	6
2	1,992719868296805646376469954263072E-001	8
3	1,992686328431229799230291334338747E-001	9

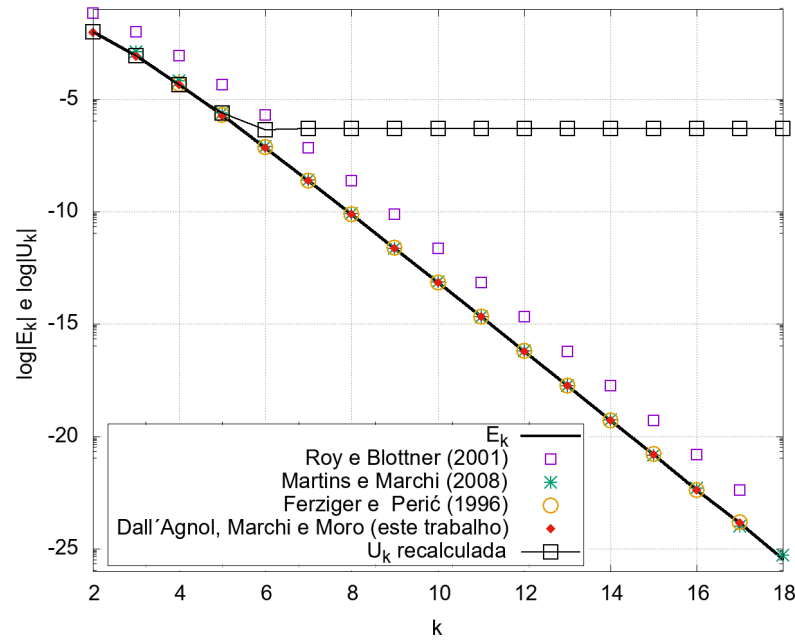
Utilizando as soluções corrigidas, são recalculadas as estimativas. Os resultados são apresentados na FIGURA 119. Observa-se que, assim como nos demais casos, as estimativas melhoraram apenas na primeira faixa de iterações.

Assim, propõe-se utilizar as soluções corrigidas para o cálculo das estimativas na faixa inicial de iterações e o estimador proposto para as iterações das demais faixas, como representado na FIGURA 120.

FIGURA 118 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS ASSOCIADO AO *MULTIGRID* E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 3, PARA TODAS AS ITERAÇÕES, COM *MULTIGRID* .

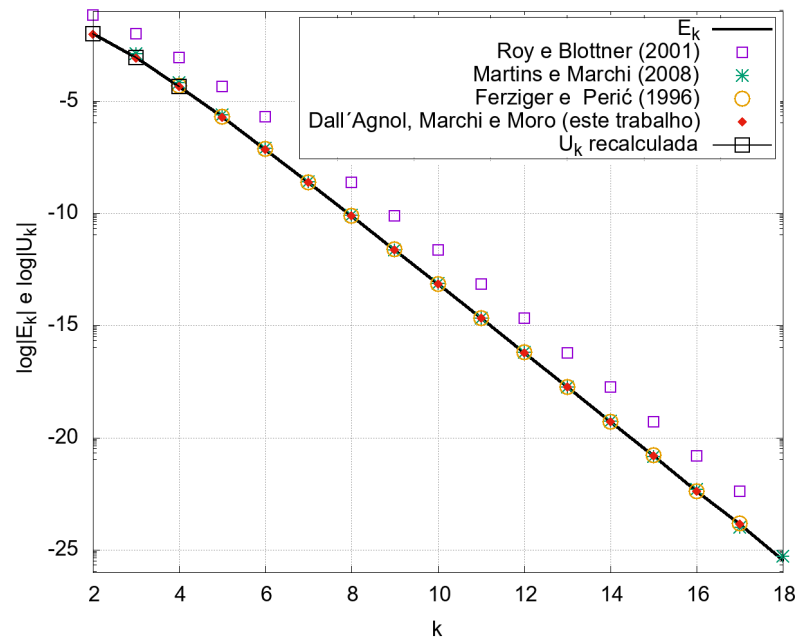
Fonte: a autora (2020).

FIGURA 119 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES, COM *MULTIGRID*.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA 120 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 3, EM TODOS OS INTERVALOS, COM *MULTIGRID*.



Fonte: a autora (2020).

7.2.2 Variável 2: gradiente no contorno leste (direito) do domínio de cálculo $\text{grad } T(1,y)$

As soluções numéricas e a quantidade de ciclos V necessária para atingir-se o erro de máquina para cada caso são apresentadas na TABELA 42. Na TABELA 43 apresentam-se os erros numéricos cometidos no processo iterativo. A diminuição desses erros com o refinamento da malha indica convergência das soluções.

TABELA 42 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS DOS CASOS DO PROBLEMA 3 PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$, COM *MULTIGRID* .

Caso	Sol. numérica com GS e <i>multigrid</i> (ϕ_k)	No. de iterações
1	9,282659951979760E-001	21
2	9,197616756887540E-001	18
3	9,177941585070940E-001	18

TABELA 43 – ERROS NUMÉRICOS DOS CASOS DO PROBLEMA 3 PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$, COM *MULTIGRID* .

Caso	Erro numérico (ϕ_k)
1	1,111365953070167E-002
2	2,609340021479620E-003
3	6,418228398189510E-004

Os intervalos de iterações para a taxa de convergência ψ estão representados na TABELA 44 e também podem ser observados na FIGURA 121, devido ao baixo número de iterações.

TABELA 44 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$, PROBLEMA 3, COM *MULTIGRID* .

Intervalo	Critério	Iterações
I	$\psi < -1$ com convergência monotônica	3 : 15
II	$\psi < -1$ sem convergência monotônica	16 : 18

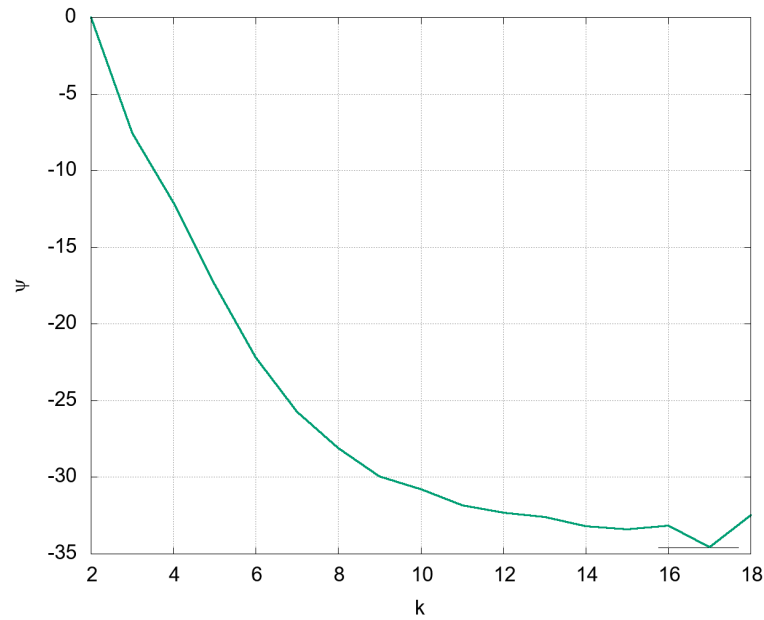
Nota-se que, a convergência monotônica de ψ vai até a iteração 15, porém, mesmo sem convergência monotônica, ψ mantém-se no raio de convergência da série geométrica que representa o estimador proposto até o final do processo iterativo.

As estimativas são calculadas e seus resultados são apresentados na FIGURA 122. Observa-se, mais uma vez, concordância entre estimativas e erros entre todos os estimadores. Ao se analisar as efetividades, foram obtidos os seguintes resultados: o estimador proposto mostrou-se confiável ($\theta \geq 1$) 11% das iterações, o estimador empírico, de Fergizer e Perić e de Roy e Blotner em 74%.

Buscando-se melhorar as estimativas, calculam-se as soluções corrigidas (Eq. 4.77) para cada iteração, apresentadas na FIGURA 123. O resultado para a última iteração do

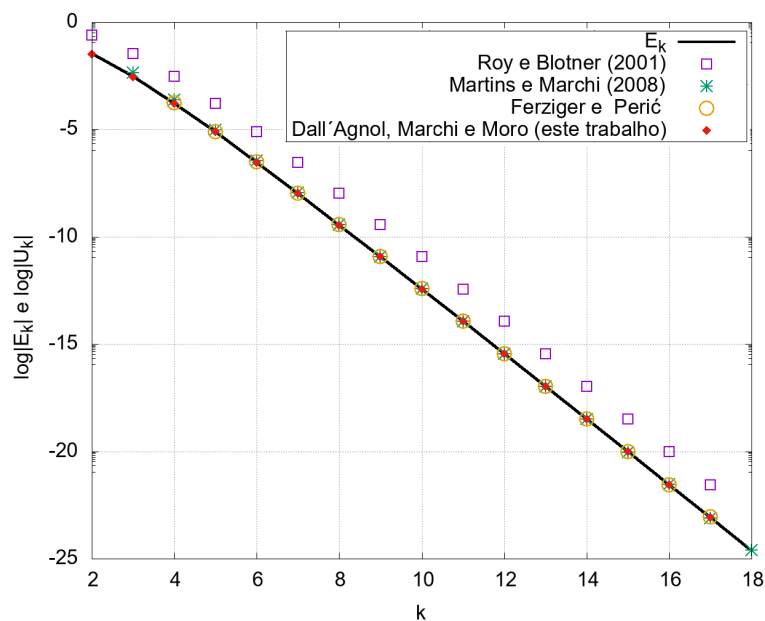
intervalo I para cada caso é apresentado na TABELA 45. Recalculando-se as estimativas por meio da Eq. (4.79), tem-se os resultados apresentados na FIGURA 124.

FIGURA 121 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES, COM *MULTIGRID* .



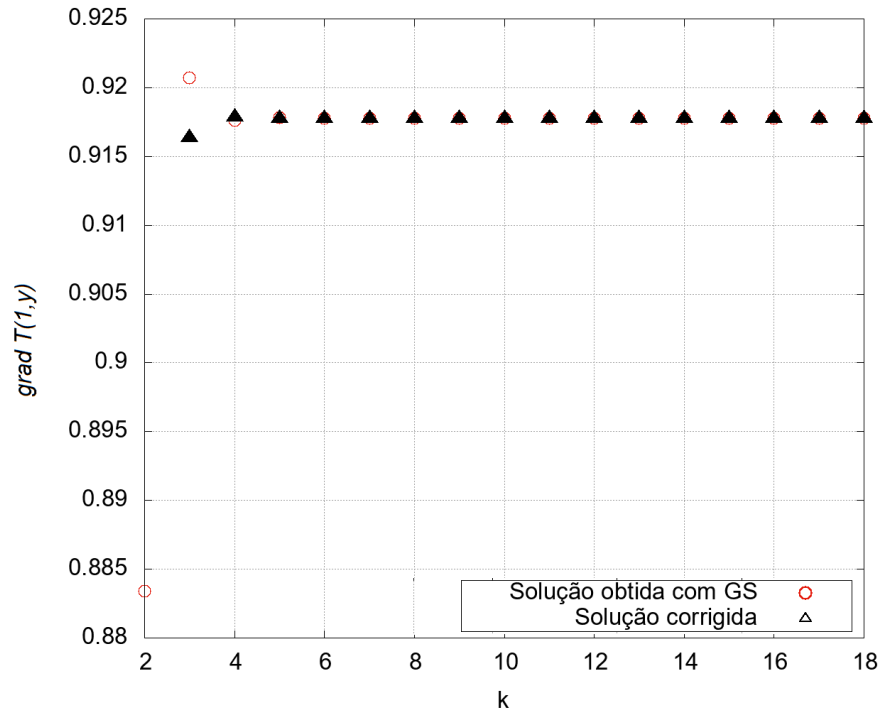
Fonte: a autora (2020).

FIGURA 122 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES, COM *MULTIGRID* .



Fonte: a autora (2020).

FIGURA 123 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS ASSOCIADO AO *MULTIGRID* E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 3, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



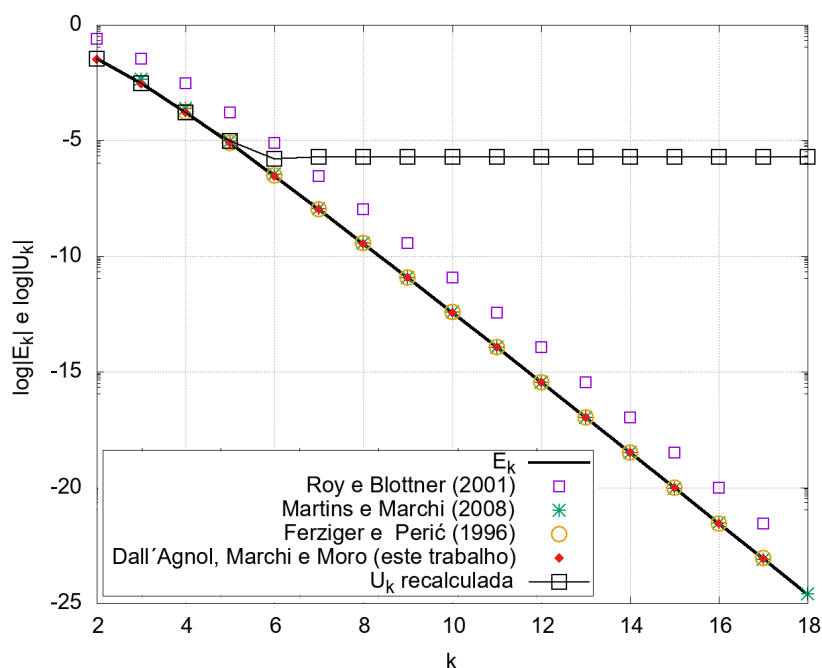
Fonte: a autora (2020).

TABELA 45 – VALORES DAS SOLUÇÕES NA ÚLTIMA ITERAÇÃO DO INTERVALO II DE CADA CASO DO PROBLEMA 3, VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$, COM *MULTIGRID*.

Caso	Iteração	ϕ_{it_2}
1	9,282659951979676549244468023268261E-001	8
2	9,197614537676134064273047858310284E-001	8
3	9,177941585070939796012450011995862E-001	15

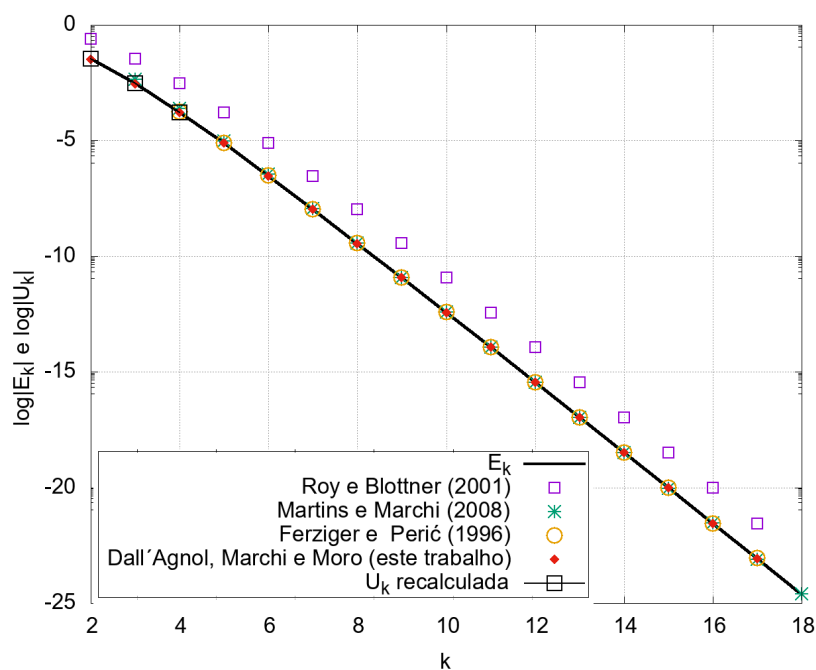
Observando-se a FIGURA 124, nota-se que as estimativas melhoram na primeira faixa de iterações, apenas. Assim, opta-se por calcular as estimativas das faixas intermediárias e finais de iterações com o estimador proposto, como na FIGURA 125.

FIGURA 124 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES, COM *MULTIGRID*.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA 125 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 3, EM TODOS OS INTERVALOS, COM *MULTIGRID*.



Fonte: a autora (2020).

7.2.3 Variável 3: valor médio da função (temperatura média) T_m

As soluções numéricas para essa variável e o número de iterações (ciclos V) necessário para atingir-se o erro de máquina para cada caso estão representados na TABELA 46. Os erros numéricos cometidos ao resolverem-se os sistemas de equações discretizados estão na TABELA 47.

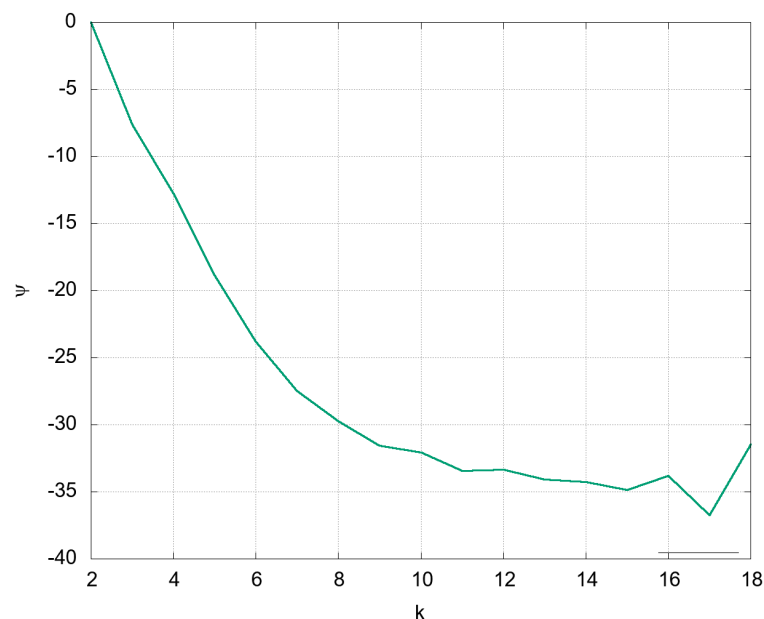
TABELA 46 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS DOS CASOS DO PROBLEMA 3 PARA A VARIÁVEL T_m , COM *MULTIGRID* .

Caso	Sol. numérica com GS e <i>multigrid</i> (ϕ_k)	No. de iterações
1	1,809084632456606E-001	21
2	1,846122358980575E-001	18
3	1,855431773271432E-001	18

TABELA 47 – ERROS NUMÉRICOS DOS CASOS DO PROBLEMA 3 PARA A VARIÁVEL T_m , COM *MULTIGRID* .

Caso	Erro numérico (ϕ_k)
1	4,945457214625245E-003
2	1,241684562228319E-003
3	3,107431331426828E-004

Novamente, nota-se o comportamento não monotônico da taxa de convergência (FIGURA 126) a partir da iteração 9. Assim, essa iteração delimita o final do intervalo I, como apresentado na TABELA 48.

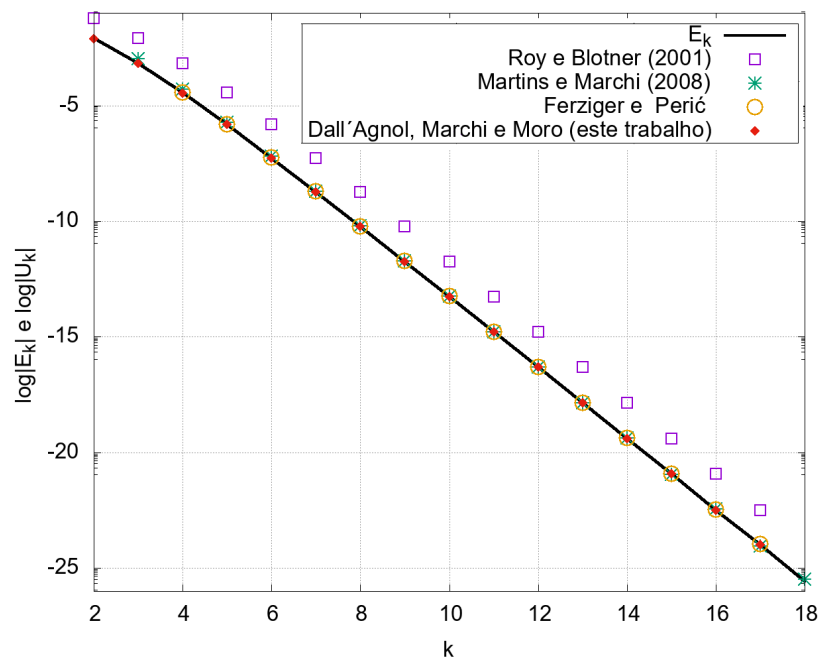
FIGURA 126 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 3, COM *MULTIGRID* .

Fonte: a autora (2020).

TABELA 48 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL T_m , PROBLEMA 3, COM *MULTIGRID*.

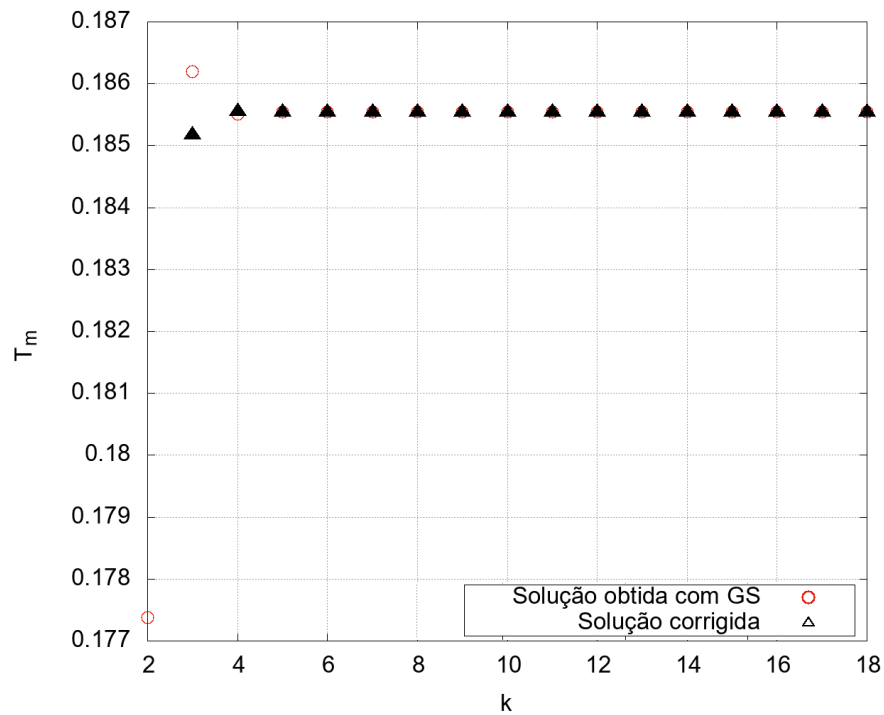
Intervalo	Critério	Iterações
I	$\psi < -1$ com convergência monotônica	3 : 9
II	$\psi < -1$ sem convergência monotônica	10 : 18

O resultado do cálculo das estimativas para todas as iterações apresenta-se na FIGURA 127. Quanto às efetividades, o estimador proposto mostrou-se confiável em 33% das iterações, o estimador empírico em 47% e o de Ferziger e Peric e de Roy e Blotner em 68%.

FIGURA 127 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES, COM *MULTIGRID*.

Aplicando-se o procedimento proposto na metodologia para melhoria das estimativas, calculam-se as soluções corrigidas, com erros de iteração reduzidos, apresentadas na FIGURA 128. As soluções corrigidas para a última iteração do intervalo I é apresentada na TABELA 49.

FIGURA 128 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS ASSOCIADO AO *MULTIGRID* E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 3, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



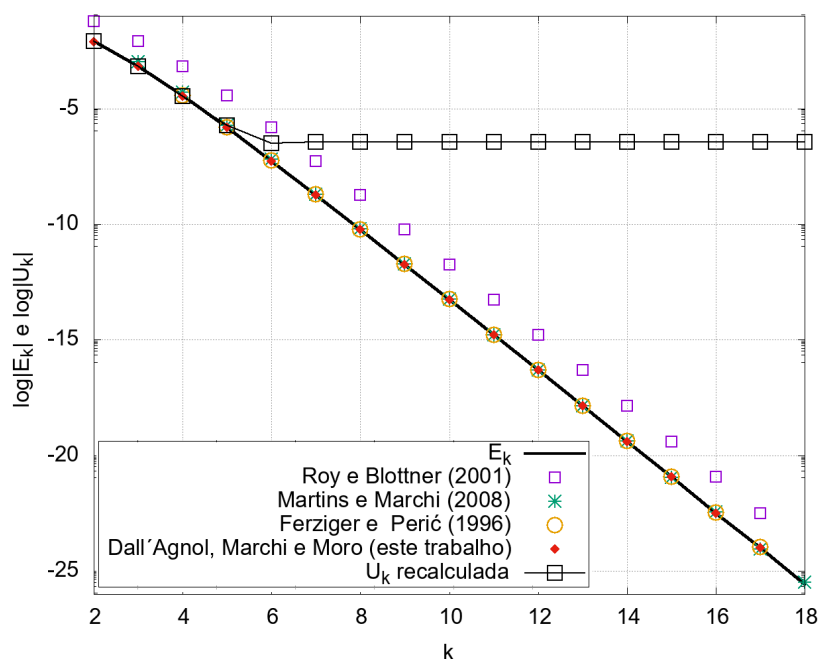
Fonte: a autora (2020).

TABELA 49 – VALORES DAS SOLUÇÕES NA ÚLTIMA ITERAÇÃO DO INTERVALO II DE CADA CASO DO PROBLEMA 3, VARIÁVEL T_m , COM *MULTIGRID*.

Caso	Iteração	ϕ_{it_2}
1	1,809084632456605916669449585428267E-001	8
2	1,846122358980574173485718995193415E-001	8
3	1,855431773271179964412870203626465E-001	9

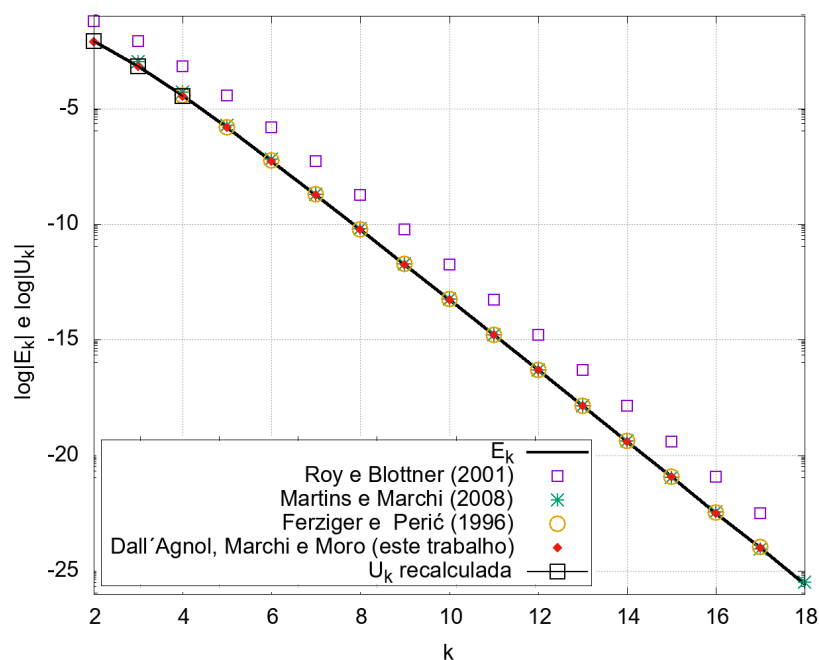
O resultado do cálculo das novas estimativas apresenta-se na FIGURA 129, que apresenta resultados mais acurados apenas nas iterações iniciais do processo iterativo. Assim, sugere-se aplicar as soluções corrigidas ao início do processo iterativo e o estimador proposto nas demais iterações, como na FIGURA 130.

FIGURA 129 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 3, EM TODAS AS ITERAÇÕES, COM *MULTIGRID* .



Fonte: a autora (2020).

FIGURA 130 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 3, EM TODOS OS INTERVALOS, COM *MULTIGRID* .



Fonte: a autora (2020).

7.3 Fechamento do capítulo 7

Neste capítulo apresentaram-se os resultados da aplicação do procedimento proposto ao problema 3: equação de Laplace bidimensional, com e sem *multigrid*. As estimativas foram calculadas para cada variável e, aplicando-se as soluções corrigidas (com erros de iteração reduzidos), foi possível recalcular as estimativas. Ao resolver o problema sem *multigrid*, foi percebida melhora significativa nas estimativas de erros para a faixa inicial do ciclo iterativo, de forma semelhante ao que foi observado nos problemas 1 e 2. Resolvendo-se o problema com o método *multigrid*, observou-se que, ao aplicar o pós-processamento, as estimativas de erro se tornaram menos acuradas. Porém, ao contrário do que se esperava, foram obtidos resultados acurados ao se utilizar apenas o estimador proposto para o cálculo das estimativas. Portanto, se o *multigrid* for utilizado como acelerador de convergência para o ciclo iterativo, recomenda-se utilizar somente o estimador proposto para prever os erros de iteração.

8 CONCLUSÃO

Neste trabalho analisou-se o desempenho do estimador proposto para estimar os erros de iteração envolvidos na resolução numérica da equação de Poisson 1D, da equação de advecção-difusão 1D e da equação de Laplace 2D. Foram calculadas as seguintes variáveis de interesse: valor da função no ponto central do domínio ($T(1/2)$), primeira derivada da função T (gradiente) no contorno leste ($grad\ T(1)$) e valor médio da função (T_m).

Para cada uma das variáveis o processo iterativo foi interrompido ao atingir-se o erro de máquina. Foram calculadas as soluções analíticas e comparadas às respectivas soluções numéricas. Dessa comparação constatou-se que, ao refinar a malha sistematicamente, o erro numérico diminuiu para todos os casos. Complementando a verificação dos códigos, também foram feitas as estimativas *a priori* e *a posteriori* da ordem de decaimento dos erros de discretização, constatando-se, para todos os casos, que as ordens efetiva e aparente equivalentes tendem às ordens assintóticas dos esquemas numéricos utilizados, como esperado.

Ao calcularem-se as primeiras estimativas, o estimador proposto apresentou resultados muito semelhantes aos dos presentes na literatura (FERZIGER; PERIĆ, 2002; MARTINS; MARCHI, 2008; ROY; BLOTTNER, 2001). A fim de melhorar essas estimativas, para cada uma das variáveis foram delimitados intervalos de iterações para que o erros de iteração fossem analisados separadamente e mais detalhadamente. Os critérios para delimitação desses intervalos foram os valores da taxa de convergência ψ e a influência dos erros de arredondamento. Esse procedimento foi bastante trabalhoso pois, para cada variável e para cada problema a taxa de convergência ψ comporta-se de maneira diferente.

Nos dois primeiros problemas, observou-se que a variável $T(1/2)$ foi a que mais dispendeu esforços para caracterização dos seus intervalos. Pois, para essa variável, os valores de ψ possuem comportamento não monotônico ao longo do processo iterativo, ao contrário das demais variáveis, ($grad\ T(1)$) e (T_m), em que ψ apresenta menos variações.

Para todas as variáveis definiu-se como melhor intervalo para estimativas aquele com convergência monotônica de ψ e com menor influência dos erros de arredondamento. Em seguida, com um procedimento que reduz os erros de iteração, calcularam-se soluções corrigidas. A última solução corrigida do melhor intervalo, considerada a mais acurada, foi utilizada para recalculas as estimativas.

As estimativas recalculadas apresentaram melhora na previsão dos erros de iteração em todos os intervalos delimitados para todas as variáveis estudadas, em relação às estimativas obtidas anteriormente, com exceção do último intervalo. Isso se deve ao fato de que a precisão das novas estimativas está limitada à precisão da solução corrigida utilizada para calculá-las. Assim, até o final do intervalo considerado o melhor intervalo

para as estimativas, observa-se melhora nas previsões, após esse intervalo, a acurácia das estimativas diminui. Outro fator que contribuiu para a diminuição da precisão no último intervalo é a presença mais significativa dos erros de arredondamento.

Portanto, os resultados sugerem que o estimador proposto é acurado na previsão dos erros de iteração, quando comparado aos demais estimadores presentes na literatura, podendo ser utilizado por usuários de CFD que desejem estimar esse tipo de erro em ciclos iterativos. Se o objetivo do usuário for obter soluções com erros de iteração reduzidos, as estimativas obtidas por meio do estimador podem ser utilizadas para calcular essas soluções mais acuradas. E mais, se o usuário necessita de estimativas de erros de iteração mais precisas, as soluções com erros reduzidos de iteração podem ser utilizadas para calculá-las, observando-se que a precisão das novas estimativas depende da precisão da solução corrigida utilizada.

8.1 Contribuições

As principais contribuições dessa tese são:

- (a) Desenvolvimento e teste de um novo estimador de erros de iteração;
- (b) Detalhamento dos intervalos com melhores condições de obtenção de estimativas acuradas, de acordo com a taxa de convergência ψ ;
- (c) Cálculo de soluções corrigidas, com erros de iteração reduzidos, com base nas estimativas obtidas;
- (d) Cálculo de estimativas mais acuradas para as faixas iniciais do processo iterativo para todas as variáveis estudadas; e
- (e) Elaboração de procedimentos para usuários de acordo com seus objetivos: estimar erros de iteração, reduzi-los, melhorar a acurácia das estimativas e/ou pesquisá-los.

8.2 Trabalhos futuros

Como sugestão para trabalhos futuros, considerando-se as contribuições já feitas:

- (a) Teste do estimador e do procedimento de correção das soluções e melhoria das estimativas na resolução segregada de equações acopladas, como as equações de Bruggers 2D e Navier-Stokes 2D;
- (b) Teste do estimador e do procedimento de correção para diferentes números de Péclet (equação de advecção-difusão) e diferentes números de Reynolds (equações de Navier-Stokes);

- (c) Teste do estimador e do procedimento de correção das soluções e melhoria das estimativas na resolução de equações discretizadas por meio de métodos diferentes, como volumes finitos;
- (d) Testes com diferentes *solvers* como MSI, com e sem *multigrid* ;
- (e) Testes com formulações diferentes do método *multigrid* , como FAS e FMG;
- (f) Fazer estimativas dos erros de iteração em todo o campo de soluções, calculando-se uma norma que indique a redução do erro de iteração para o todo o campo;
- (g) Fazer estimativas sucessivas dos erros de iteração utilizando o estimador psi-médio repetidas vezes, a exemplo do que é feito com técnica de Múltiplas Extrapolações de Richardson (MER); e
- (h) Fazer estimativas sucessivas do erro de iteração em todo o campo de soluções, estimando e podendo também reduzir o erro de iteração em todo o campo.

REFERÊNCIAS

- ASME. **Standart for Verification and Validation in Computacional Fluid Dynamics and Heat Transfer**. [S.l.: s.n.], 2009. Citado 3 vezes nas páginas 52, 58 e 59.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015. Citado na página 52.
- BRANDT, A. Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems. **Mathematics of computation**, v. 31, n. 138, p. 333–390, 1977. Citado 2 vezes nas páginas 79 e 80.
- BRANDT, A. Barriers to achieving textbook multigrid efficiency (TME) in CFD. **NASA/CR ICASE Interin Report**, n. 32, 1998. Citado na página 80.
- BRANDT, A.; DISKIN, B.; THOMAS, J. L. **Recent advances in achieving textbook multigrid efficiency for computational fluid dynamics simulations**. [S.l.], 2002. Citado na página 80.
- BRIGGS, B. **A Multigrid Tutorial**. 2. ed. Colorado: Boulder, 2000. Citado 4 vezes nas páginas 78, 79, 80 e 81.
- BURDEN, R.; FAIRES, J. **Numerical Analysis**. 9. ed. Boston: Cengage Learning, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 71 e 73.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Métodos Numéricos para Engenharia**. 5. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 74.
- CUNHA, M. C. C. **Métodos Numéricos**. 2. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2000. Citado na página 75.
- FERZIGER, J. H.; PERIĆ, M. Further discussiond of numerical errors in cfd. **International Journal for Numerical Methods in Engeneering**, v. 23, p. 1263–1274, 1996. Citado 9 vezes nas páginas 55, 60, 61, 62, 63, 65, 68, 95 e 97.
- FERZIGER, J. H.; PERIĆ, M. **Computacional Methods for Fluid Dynamics**. 3. ed. Berlin: Springer, 2002. Citado 12 vezes nas páginas 53, 54, 55, 61, 71, 75, 80, 82, 83, 85, 178 e 190.
- FORTUNA, A. de O. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2000. Citado 9 vezes nas páginas 53, 58, 69, 71, 75, 77, 78, 82 e 84.
- GONÇALVES, S. F.; MARCHI, C. H.; PINTO, M. A.; ARAKI, L. K. Efeito de componentes do full multigrid sobre o tempo de cpu em problemas 2d de cfd. **Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - CMAC-SE**, p. 237–242, 2013. Citado na página 81.
- HOFFMANN, L. D. **Cálculo: um curso moderno e suas aplicações**. 11. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015. Citado na página 52.
- INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P. **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1998. Citado 3 vezes nas páginas 69, 86 e 88.

- KIM, N.; ANAND, N.; RHODE, D. A study on convergence criteria for a simple-based finite-volume algorithm. **Numerical Heat Transfer, Part B**, Taylor & Francis, v. 34, n. 4, p. 401–417, 1998. Citado na página 55.
- KREYSZIG, E. **Advanced engineering mathematics**. New York: John Wiley & Sons, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 87 e 89.
- KUMAR, D. S.; KUMAR, K. S.; DAS, M. K. A fine grid solution for a lid-driven cavity flow using multigrid method. **Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics**, Taylor & Francis, v. 3, n. 3, p. 336–354, 2009. Citado na página 81.
- LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. Citado na página 78.
- MARCHI, C. H. **Verificação de Soluções Numéricas Unidimensionais em Dinâmica dos Fluidos**. Tese de Doutorado — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2001. Citado 10 vezes nas páginas 55, 59, 72, 74, 81, 82, 83, 84, 90 e 100.
- MARTINS, M. A. **Estimativa de Erros de Iteração em Dinâmica dos Fluidos Computacional**. Dissertação de Mestrado — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 67.
- MARTINS, M. A.; MARCHI, C. H. Estimate of iteration errors in computational fluid dynamics. **Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals**, Taylor & Francis, v. 53, n. 3, p. 234–245, 2008. Citado 8 vezes nas páginas 55, 56, 65, 68, 93, 96, 97 e 190.
- MESQUITA, M. S.; LEMOS, M. J. D. Optimal multigrid solutions of two-dimensional convection–conduction problems. **Applied Mathematics and Computation**, Elsevier, v. 152, n. 3, p. 725–742, 2004. Citado na página 81.
- MORO, D. F. **Desenvolvimento de Técnicas para reduzir os Erros de Iteração e Discretização em CFD**. Tese de Doutorado — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 75 e 155.
- PAYNE, J. L.; HASSAN, B. **Massively parallel computational fluid dynamics calculations for aerodynamics and aerothermodynamics applications**. [S.l.], 1998. Citado na página 64.
- ROACHE, P. J. **Fundamentals of Verification and Validation**. 2. ed. Socorro: Hermosa Publishers, 2009. Citado 7 vezes nas páginas 53, 58, 59, 84, 85, 88 e 202.
- ROY, C. J.; BLOTTNER, F. G. Assessment of one-and two-equation turbulence models for hypersonic transitional flows. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 38, n. 5, p. 699–710, 2001. Citado 11 vezes nas páginas 55, 64, 65, 66, 68, 85, 93, 95, 97, 190 e 197.
- SANTIAGO, C.; MARCHI, C.; SOUZA, L. Performance of geometric multigrid method for coupled two-dimensional systems in cfd. **Applied Mathematical Modelling**, v. 39, n. 9, p. 2602–2616, 2015. Citado na página 98.
- STÜBEN, K. A review of algebraic multigrid. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Elsevier, v. 128, n. 1, p. 281–309, 2001. Citado na página 80.

TANNEHILL, J. C.; ANDERSON, D.; PLETCHER, R. H. **Computational fluid mechanics and heat transfer**. Washinton, DC: Taylor Francis, 1997. Citado 4 vezes nas páginas 75, 76, 79 e 80.

TROTTEBERG, U.; OOSTERLEE, C. W.; SCHÜLLER, A. **Multigrid**. San Diego: Academic Press, 2001. Citado na página 80.

WESSELING, P. Introduction to multigrid methods. 1995. Citado na página 79.

WESSELING, P.; OOSTERLEE, C. W. Geometric multigrid with applications to computational fluid dynamics. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Elsevier, v. 128, n. 1, p. 311–334, 2001. Citado na página 80.

ZHU, J. Z.; ZIENKIEWICZ, O. C. Superconvergence recovery technique and a posteriori error estimators. **International Journal for Numerical Methods in Engeneering**, v. 30, p. 1321–1339, 1990. Citado 2 vezes nas páginas 59 e 98.

ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. 9. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 87.

Apêndices

APÊNDICE A – DEDUÇÕES DE p_E E p_E^*

O erro de iteração possui comportamento exponencial, assim, quando:

$$k \rightarrow \infty \quad (\text{A.1})$$

$$E(\phi_k) \rightarrow 0 \quad (\text{A.2})$$

de forma que $E(\phi_k) = C10^{-k \cdot p_E}$. De acordo com Roy e Blottner (2001), para $k \rightarrow \infty$, C pode ser considerado constante. Na prática, considerando-se a ordem efetiva (p_E), obtém-se

$$E(\phi_k) = C10^{-k \cdot p_E}. \quad (\text{A.3})$$

Em (A.3), supondo-se duas iterações k_1 e k_2 , com $k_1 < k_2$ e $\Delta k = k_2 - k_1$, tem-se:

$$\begin{cases} E(\phi_{k_1}) = C10^{-k_1 \cdot p_E} \\ E(\phi_{k_2}) = C10^{-k_2 \cdot p_E} \end{cases}$$

Isolando-se C na primeira equação

$$\frac{E(\phi_{k_1})}{10^{-k_1 \cdot p_E}} = C \quad (\text{A.4})$$

e substituindo-se na segunda equação, tem-se

$$E(\phi_{k_2}) = \frac{E(\phi_{k_1})}{10^{-k_1 \cdot p_E}} 10^{-k_2 \cdot p_E}. \quad (\text{A.5})$$

Logo,

$$\frac{E(\phi_{k_1})}{E(\phi_{k_2})} = \frac{10^{-k_1 \cdot p_E}}{10^{-k_2 \cdot p_E}}. \quad (\text{A.6})$$

Aplicando-se a função logaritmo de base 10 em ambos os lados:

$$\log \left(\frac{E(\phi_{k_1})}{E(\phi_{k_2})} \right) = \log \left(\frac{10^{-k_1 \cdot p_E}}{10^{-k_2 \cdot p_E}} \right) = \log (10^{-k_1 \cdot p_E + k_2 \cdot p_E}) = p_E(k_2 - k_1) \quad (\text{A.7})$$

Assim, a expressão da ordem efetiva p_E é

$$p_E = \frac{\log \left(\frac{E(\phi_{k_1})}{E(\phi_{k_2})} \right)}{k_2 - k_1}, \quad (\text{A.8})$$

ou, em termos de Δk

$$p_E(\Delta k) = \frac{\log \left(\frac{E(\phi_{k_1})}{E(\phi_{k_2})} \right)}{\Delta k}. \quad (\text{A.9})$$

Impondo-se que $\left| \frac{E(\phi_{k_1})}{E(\phi_{k_2})} \right|$, pode-se obter também a expressão de p_E^* :

$$p_E^*(\Delta k) = \frac{\log \left| \frac{E(\phi_{k_1})}{E(\phi_{k_2})} \right|}{k_2 - k_1}, \quad (\text{A.10})$$

que, em termos de Δk , é

$$p_E^*(\Delta k) = \frac{\log \left| \frac{E(\phi_{k_1})}{E(\phi_{k_2})} \right|}{\Delta k}. \quad (\text{A.11})$$

APÊNDICE B – SÉRIE GEOMÉTRICA

Para mostrar que a extrapolação

$$\phi_{\infty} = \phi_{k_2} + \frac{(\phi_{k_2} - \phi_{k_1})}{10^{p_U} - 1} = \phi_{k_2} + \frac{(\phi_{k_2} - \phi_{k_1})}{\psi - 1} \quad (\text{B.1})$$

é resultado da soma dos termos de uma série geométrica infinita, primeiramente, define-se série geométrica.

Série geométrica: soma dos termos de uma progressão geométrica, que, por sua vez, é uma sequência em que cada termo é obtido a partir do termo precedente multiplicado pelo mesmo valor, chamado de razão (r).

Note que, ao considerar-se a série geométrica

$$P_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\psi} \left(\frac{1}{\psi} \right)^{n-1}, \quad (\text{B.2})$$

onde o primeiro termo é $a = \frac{1}{\psi}$ e a razão é $r = \frac{1}{\psi}$, tem-se

$$P_{\infty} = \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\psi^2} + \frac{1}{\psi^3} + \dots \quad (\text{B.3})$$

Esta série geométrica converge para a soma

$$s_n = \frac{a}{1 - r}, \quad \text{se } |r| < 1 \quad (\text{B.4})$$

Logo, nesse caso

$$s_n = \frac{\frac{1}{\psi}}{1 - \frac{1}{\psi}} = \frac{1}{\psi - 1}. \quad (\text{B.5})$$

Observe que, se $\left| \frac{1}{\psi} \right| < 1$, tem-se

$$\begin{cases} \psi > 1 \\ \psi < -1 \end{cases}$$

Portanto, a série converge se ψ está no intervalo representado na Fig. B.1:

FIGURA B.1 – INTERVALO REAL DE CONVERGÊNCIA PARA A SÉRIE.



Fonte: a autora (2020).

Se escrevermos

$$\phi_{\infty} = \phi_{k_2} + P_{\infty}(\phi_{k_2} - \phi_{k_1}) \quad (\text{B.6})$$

e substituírmos P_{∞} por sua soma s_n , obtém-se

$$\phi_{\infty} = \phi_{k_2} + \frac{(\phi_{k_2} - \phi_{k_1})}{\psi - 1}. \quad (\text{B.7})$$

APÊNDICE C – RELAÇÕES ENTRE ψ E p_U E p_U^*

Já foi deduzido que, para iterações não consecutivas, vale

$$p_U = \frac{\log \psi}{\Delta k} \quad (\text{C.1})$$

logo, a relação entre ψ e Δk é

$$p_U \Delta k = \log \psi. \quad (\text{C.2})$$

E ainda, se $\psi > 0$, a relação entre ψ e p_U é

$$10^{p_U \cdot \Delta k} = \psi. \quad (\text{C.3})$$

Também tem-se que

$$p_U^* = \frac{\log |\psi|}{\Delta k} \quad (\text{C.4})$$

e, de forma análoga à anterior, chega-se à relação entre ψ e p_U^*

$$10^{p_U^* \cdot \Delta k} = |\psi|. \quad (\text{C.5})$$

Esse resultado implica que:

$$\begin{cases} \psi = 10^{p_U^* \cdot \Delta k} \\ \psi = -10^{p_U^* \cdot \Delta k} \end{cases}$$

NOTA: lembrando-se de que:

$$\psi = \frac{\phi_{k_2} - \phi_{k_1}}{\phi_{k_3} - \phi_{k_2}} \quad (\text{C.6})$$

de (C.5), tem-se

$$10^{p_U^* \cdot \Delta k} = \left| \frac{\phi_{k_2} - \phi_{k_1}}{\phi_{k_3} - \phi_{k_2}} \right|. \quad (\text{C.7})$$

Aplicando-se a função logaritmo de base 10 em ambos os lados, obtém-se

$$p_U^* \cdot \Delta k = \log \left| \frac{\phi_{k_2} - \phi_{k_1}}{\phi_{k_3} - \phi_{k_2}} \right|, \quad (\text{C.8})$$

assim, pela condição de existência do logaritmo do lado esquerdo, tem-se que

$$\frac{\phi_{k_2} - \phi_{k_1}}{\phi_{k_3} - \phi_{k_2}} \neq 0 \Leftrightarrow \phi_{k_2} \neq \phi_{k_1} \quad (\text{C.9})$$

A relação entre ψ e Δk é

$$\Delta k = \frac{\log |\psi|}{p_U^*}. \quad (\text{C.10})$$

Agora, analisa-se a relação entre ψ e p_U^* e as oscilações do erro de iteração.

Lembrando-se que

$$|\psi| = 10^{p_U^* \cdot \Delta k}, \quad (\text{C.11})$$

$$\psi = \frac{\phi_{k_2} - \phi_{k_1}}{\phi_{k_3} - \phi_{k_2}} \quad (\text{C.12})$$

e

$$E(\phi^{(k)}) = \phi_\infty - \phi_k. \quad (\text{C.13})$$

e que também pode-se medir o erro de iteração fazendo-se a diferença entre duas iterações, com um critério absoluto, utilizando-se o esitmador delta (ROACHE, 2009):

$$U_\Delta(\phi_k) = |\phi_k - \phi_{k-1}| \quad (\text{C.14})$$

Logo, tomando-se

$$U_\Delta(\phi_{k_2}) = |\phi_{k_2} - \phi_{k_1}| \quad (\text{C.15})$$

$$U_\Delta(\phi_{k_3}) = |\phi_{k_3} - \phi_{k_2}| \quad (\text{C.16})$$

e considerando-se a equação (C.12), obtém-se

$$|\psi| = \frac{U_\Delta(\phi_{k_2})}{U_\Delta(\phi_{k_3})}. \quad (\text{C.17})$$

NOTA: Quando o erro de iteração decai com o comportamento esperado (monotonicamente), tem-se:

$$\phi_{k_3} - \phi_{k_2} < \phi_{k_2} - \phi_{k_1} \quad (\text{C.18})$$

logo,

$$\psi > 1 \quad (\text{C.19})$$

e ψ localiza-se dentro do intervalo de convergência da série P_∞ .

APÊNDICE D – RESULTADOS DO PROBLEMA 1, CASOS 1 E 2

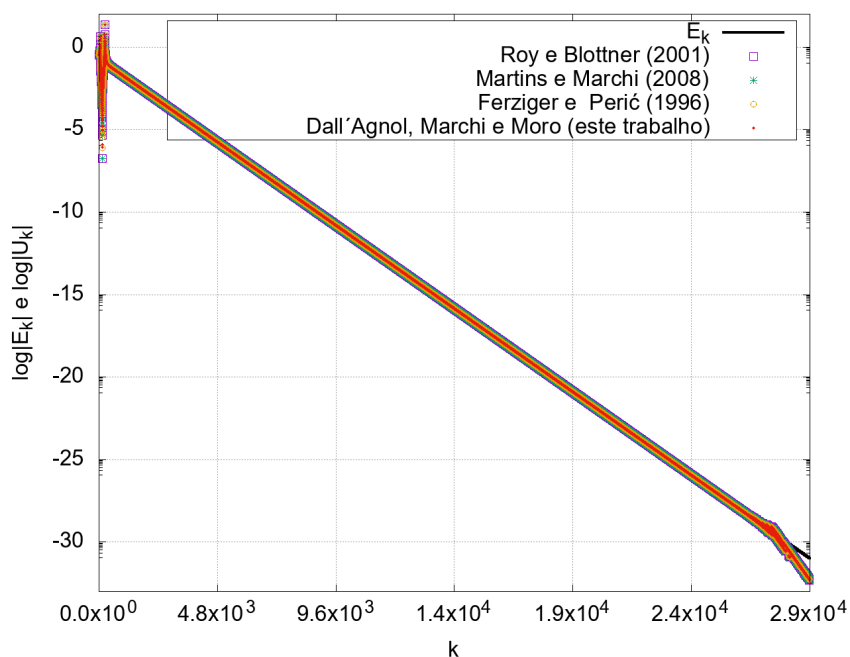
D.1 Variável 1: valor da função (temperatura) no ponto central do domínio de cálculo $T(1/2)$

D.1.1 Caso 1

TABELA D.1 – INTERVALOS DE VARIAÇÃO DE ψ PARA O CASO 1 DO PROBLEMA 1, VARIÁVEL $T(1/2)$.

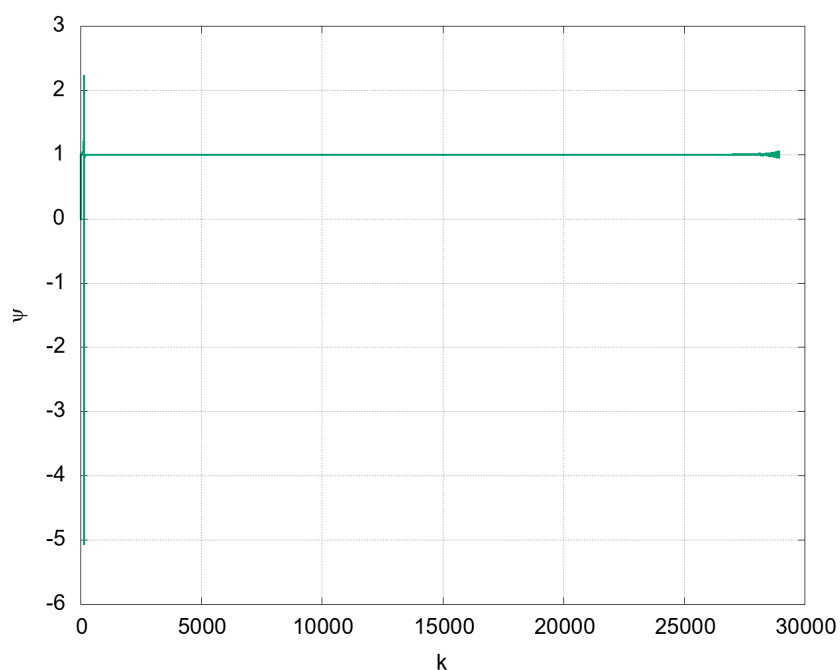
Intervalo	Iterações
I	3:45
II	46:128
transição	129
III	130:244
IV	245:2854
V	2855:28939

FIGURA D.2 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



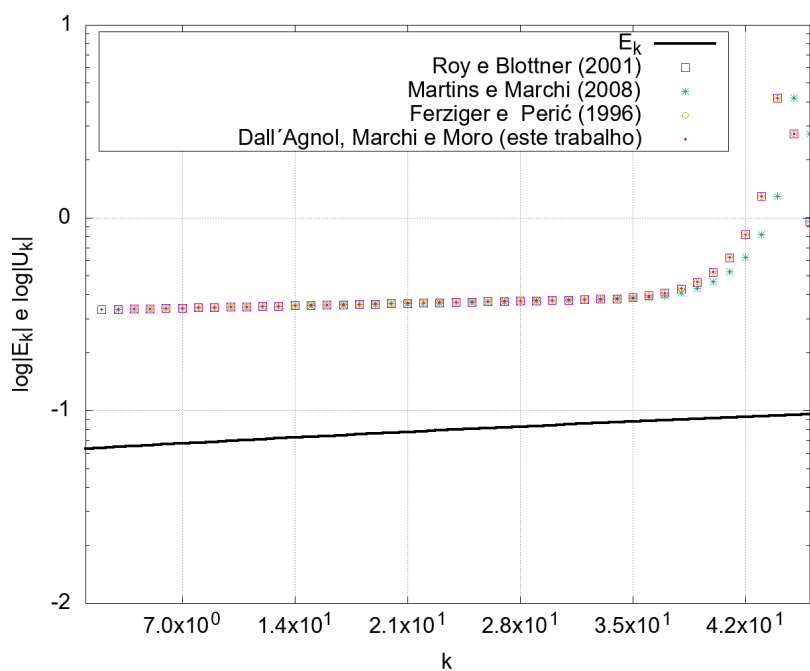
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.3 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.

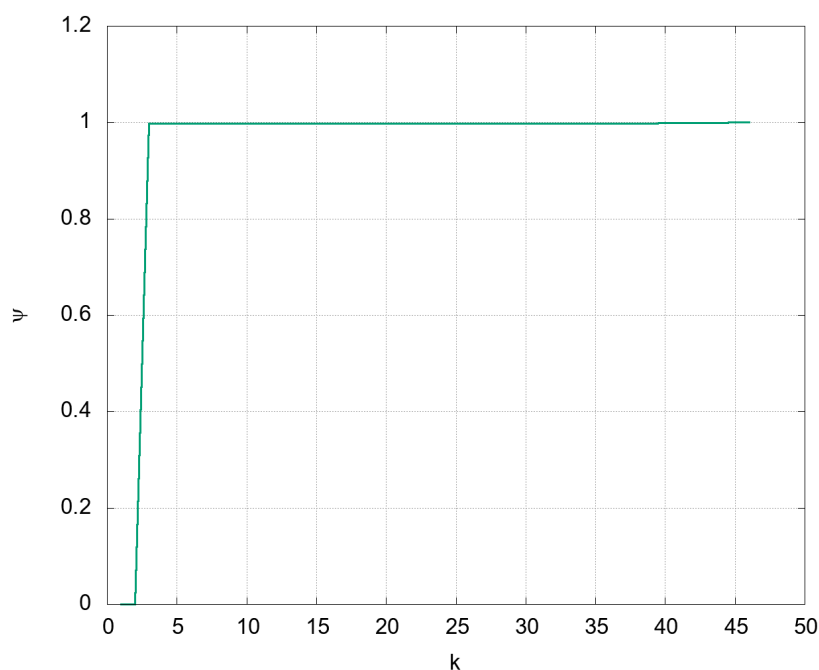


Fonte: a autora (2020).

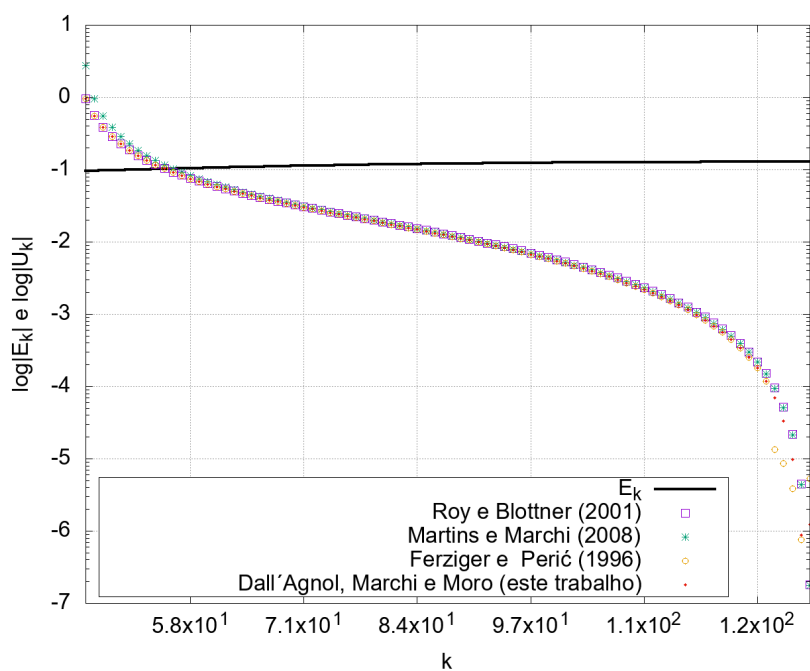
FIGURA D.4 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO I.



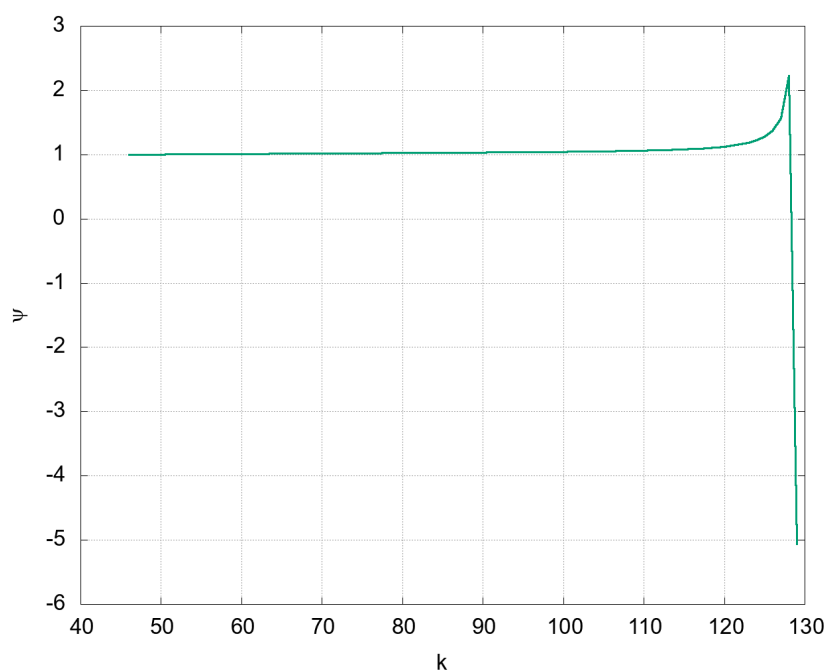
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.5 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO I.

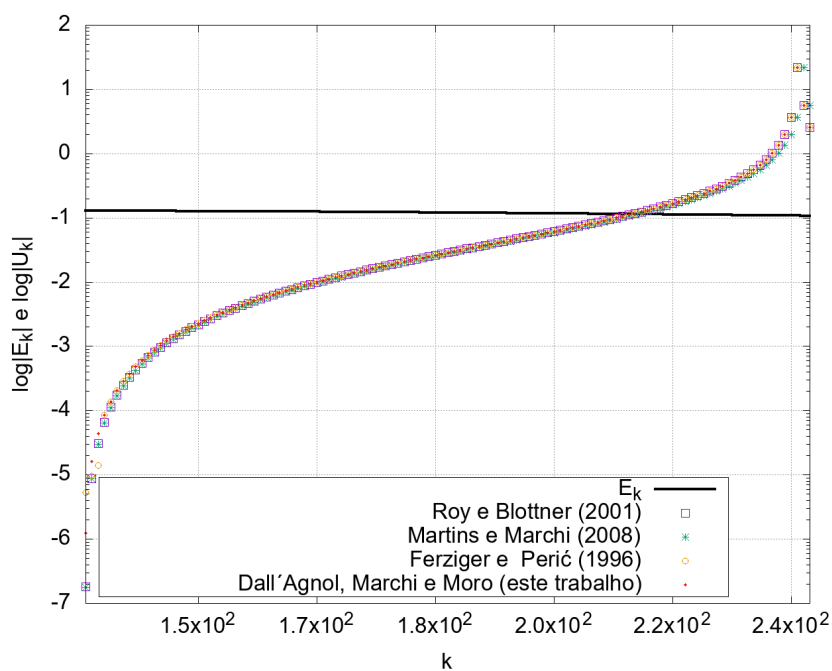
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.6 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO II.

Fonte: a autora (2020).

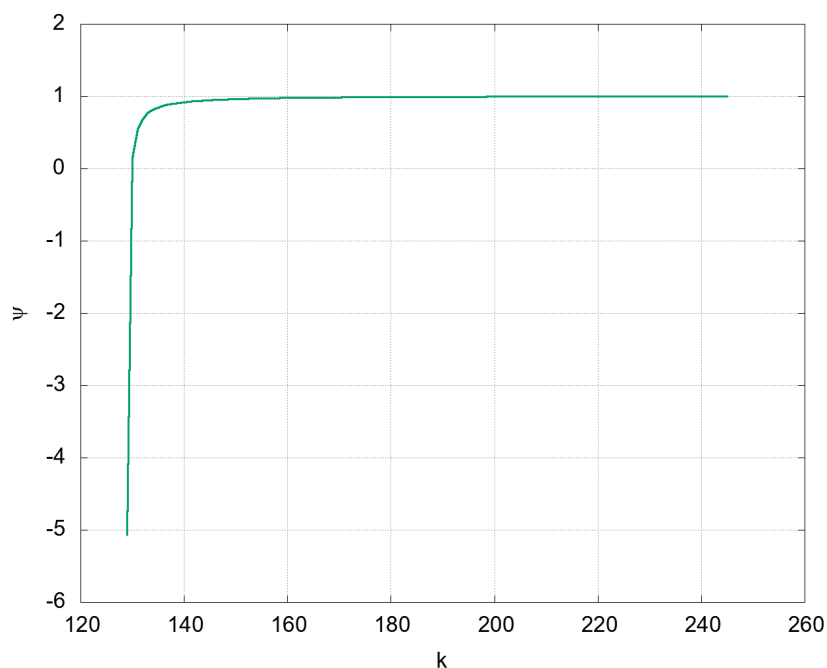
FIGURA D.7 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO II.

Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.8 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO III.

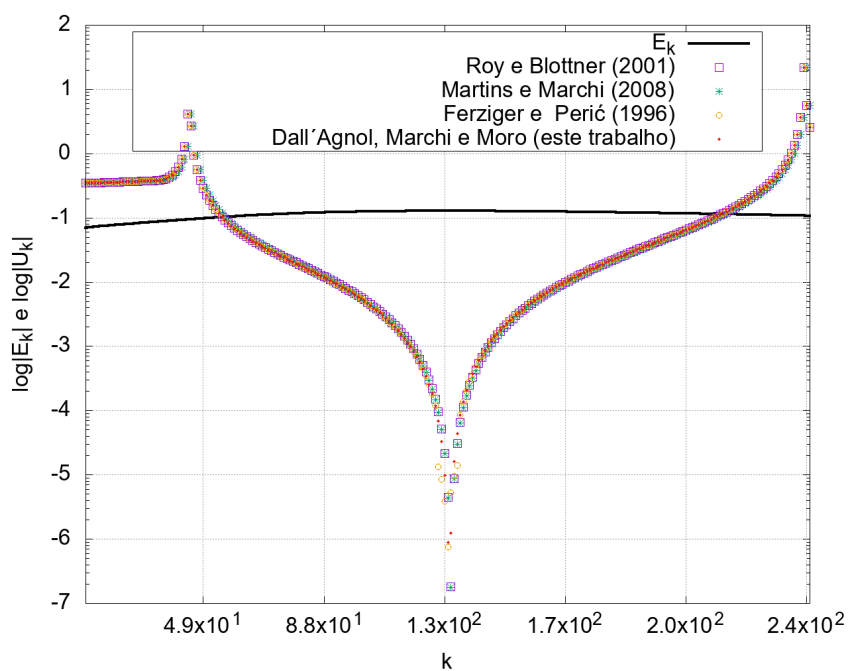
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.9 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO III.



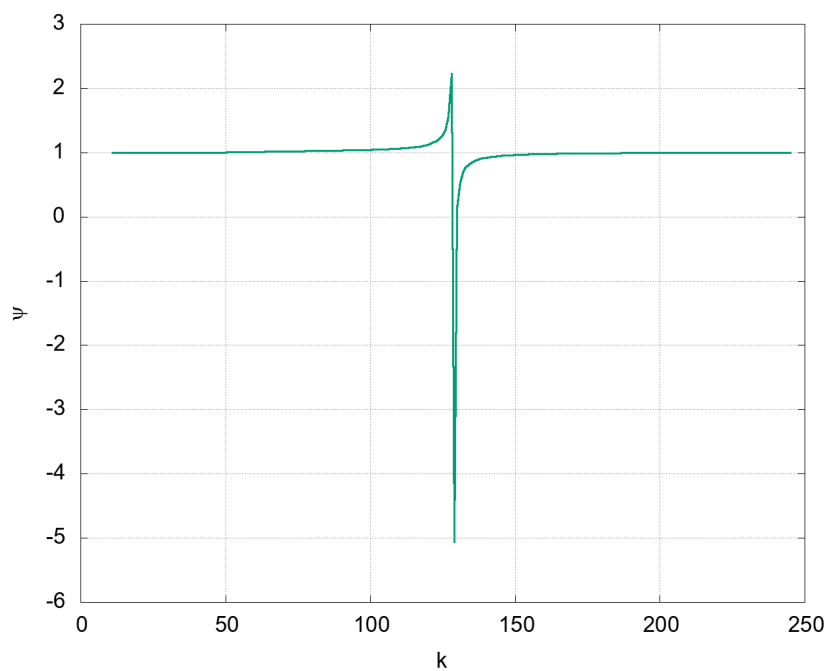
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.10 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NOS INTERVALOS I A III.



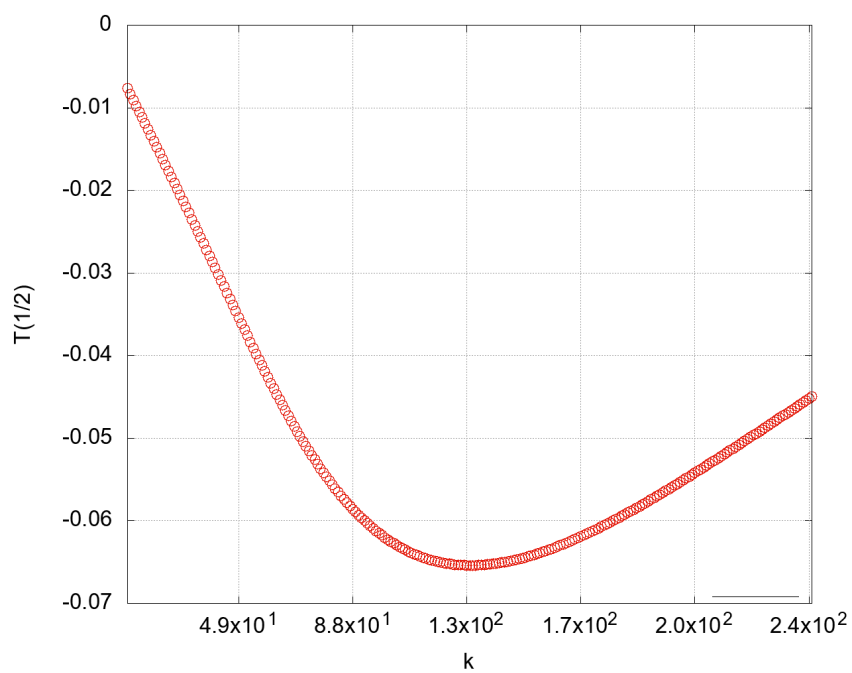
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.11 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NOS INTERVALOS I A III.

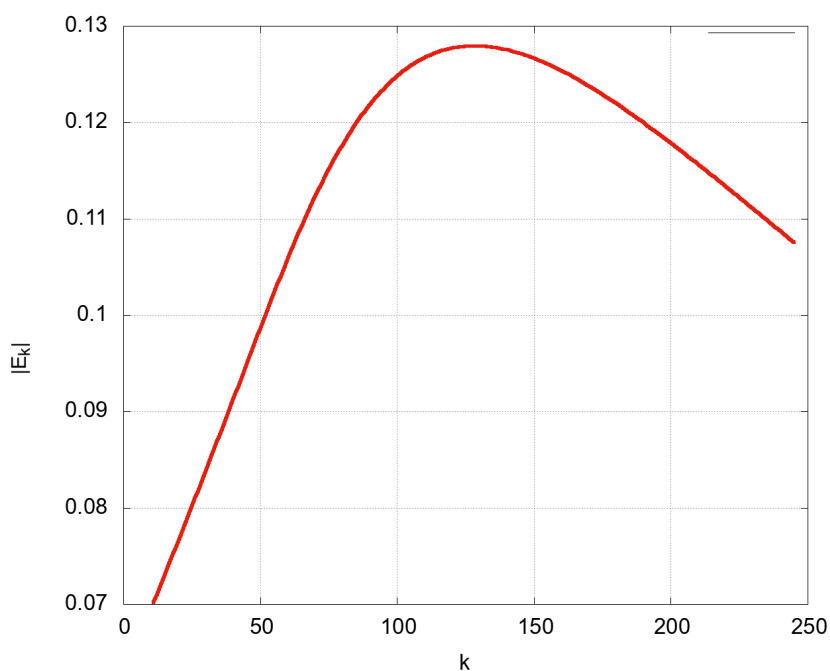


Fonte: a autora (2020).

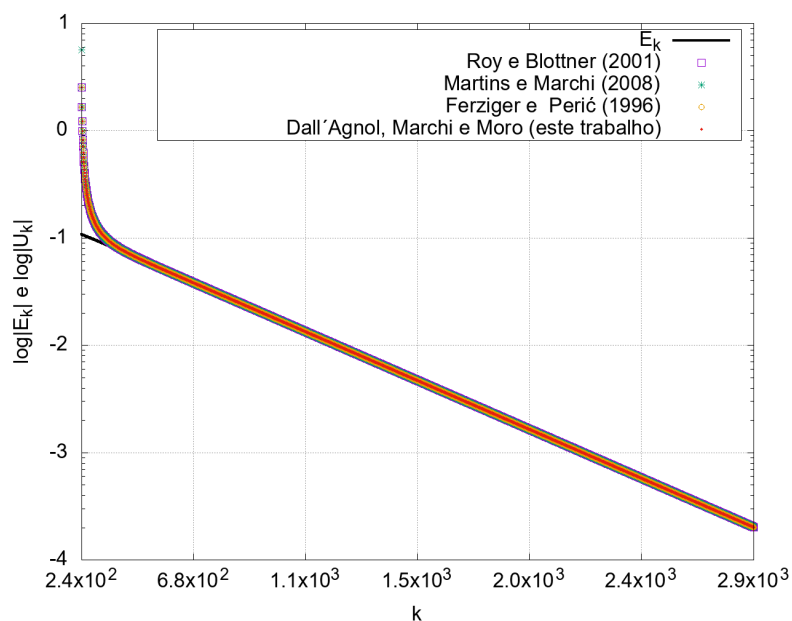
FIGURA D.12 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS CALCULADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NOS INTERVALOS I A III.



Fonte: a autora (2020).

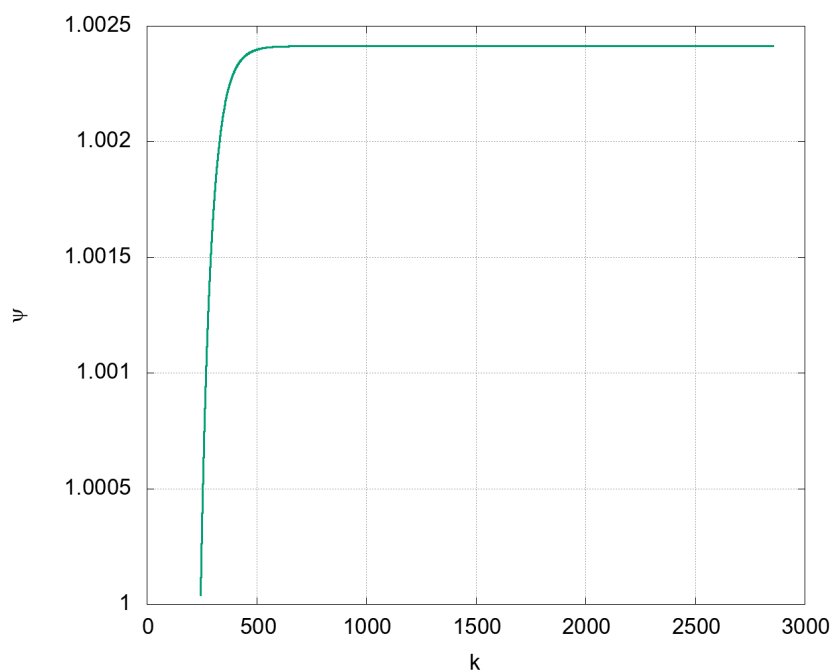
FIGURA D.13 – ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NOS INTERVALOS I A III.

Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.14 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO IV.

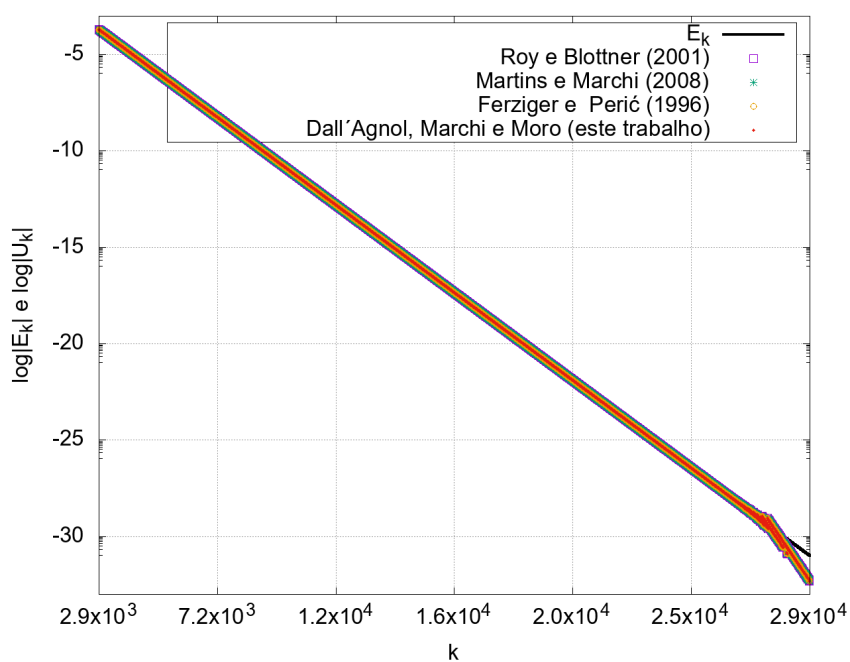
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.15 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO IV.

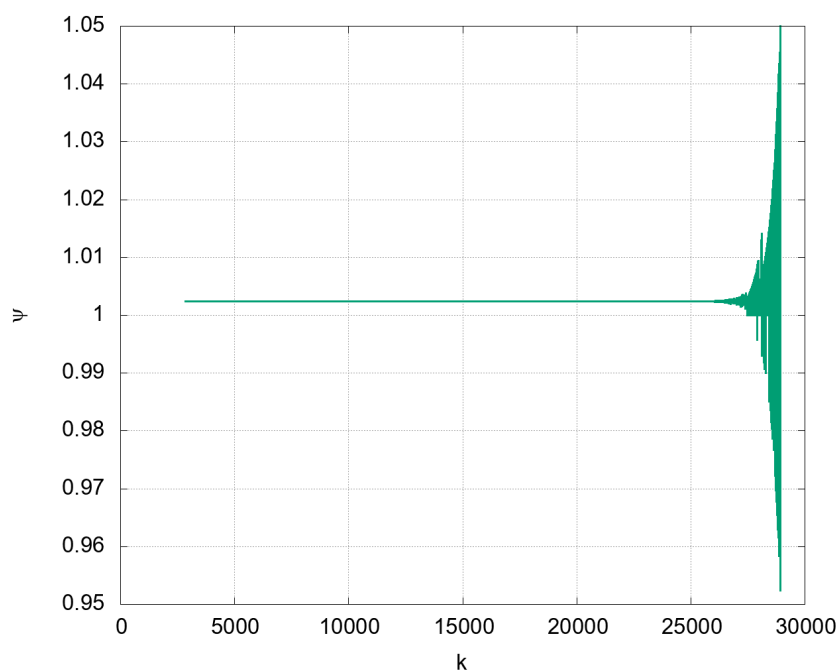


Fonte: a autora (2020).

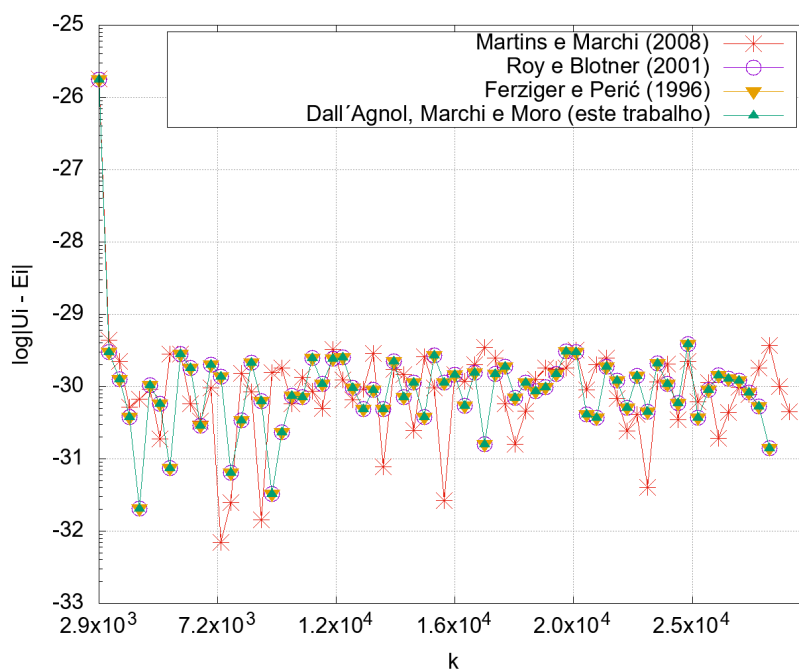
FIGURA D.16 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO V.



Fonte: a autora (2020).

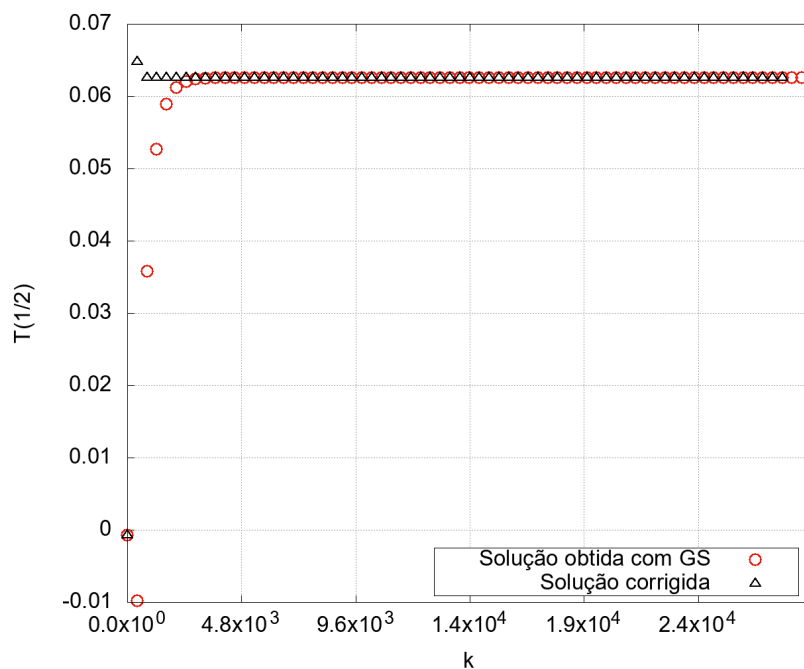
FIGURA D.17 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO V.

Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.18 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO V.

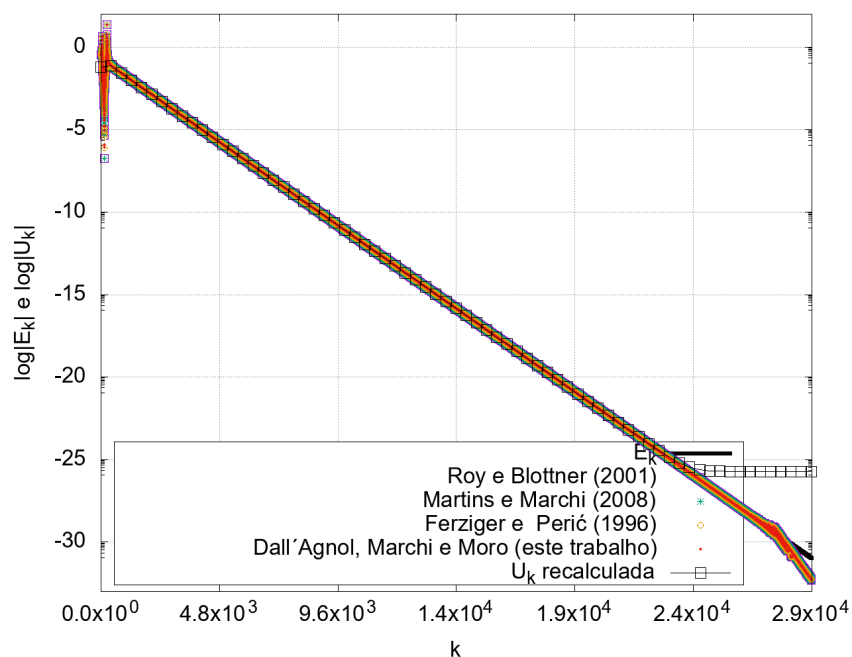
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.19 – SOLUÇÕES COM GS E SOLUÇÕES CORRIGIDAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



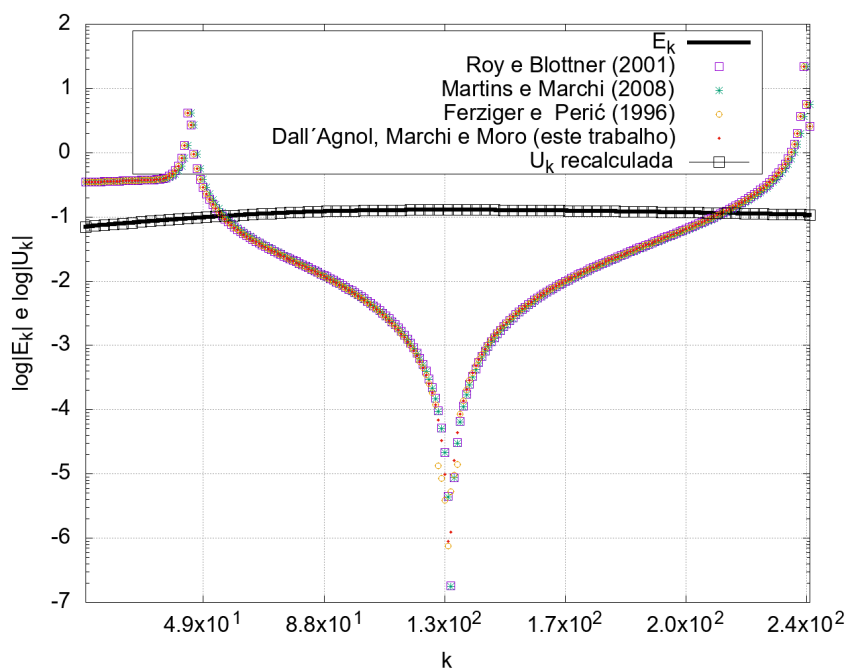
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.20 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



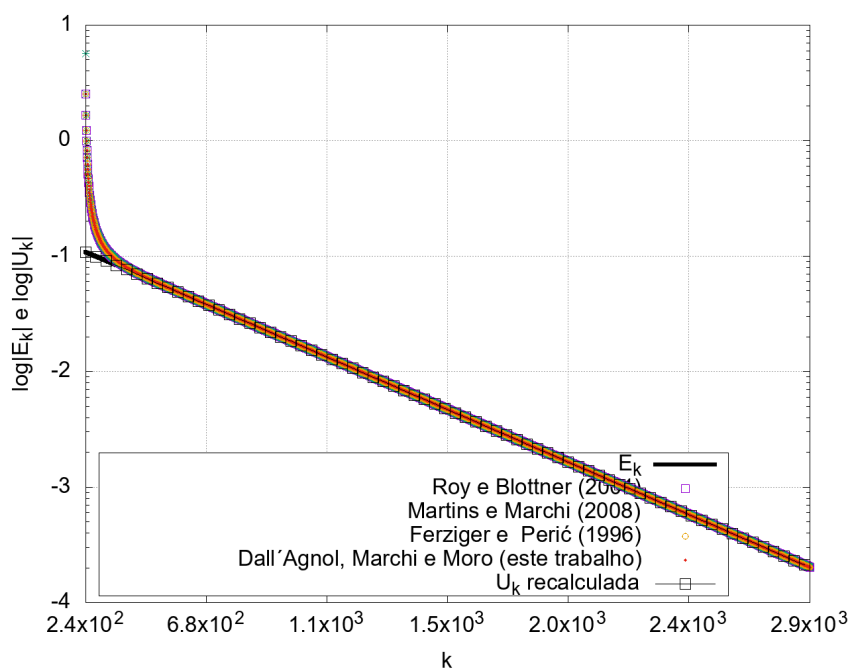
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.21 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NOS INTERVALOS I A III.



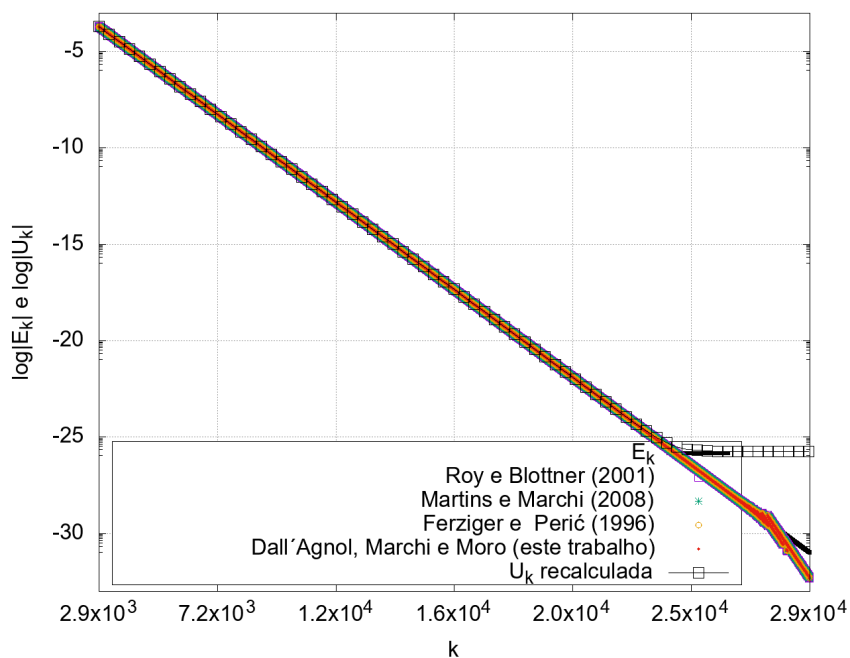
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.22 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO IV.



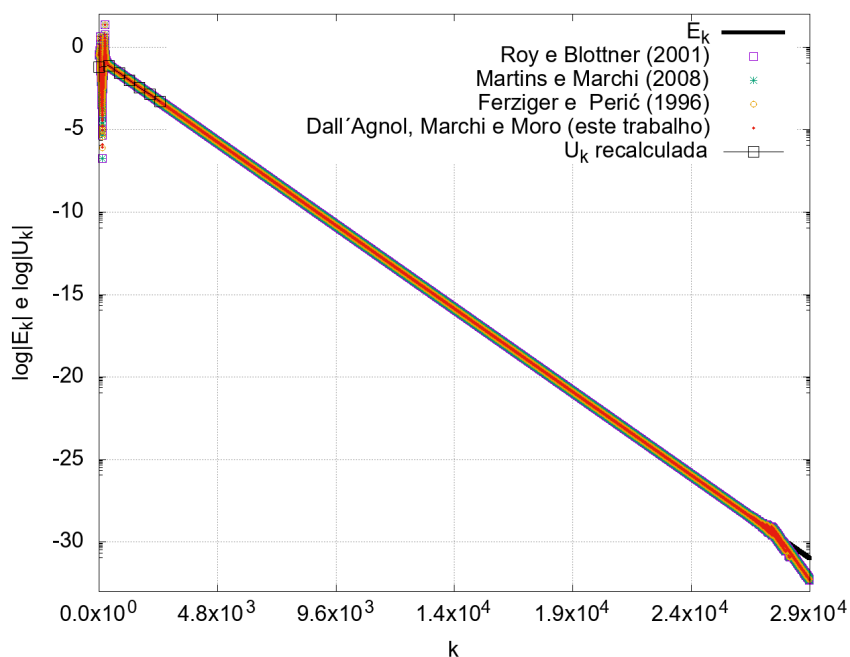
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.23 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO V.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.24 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.

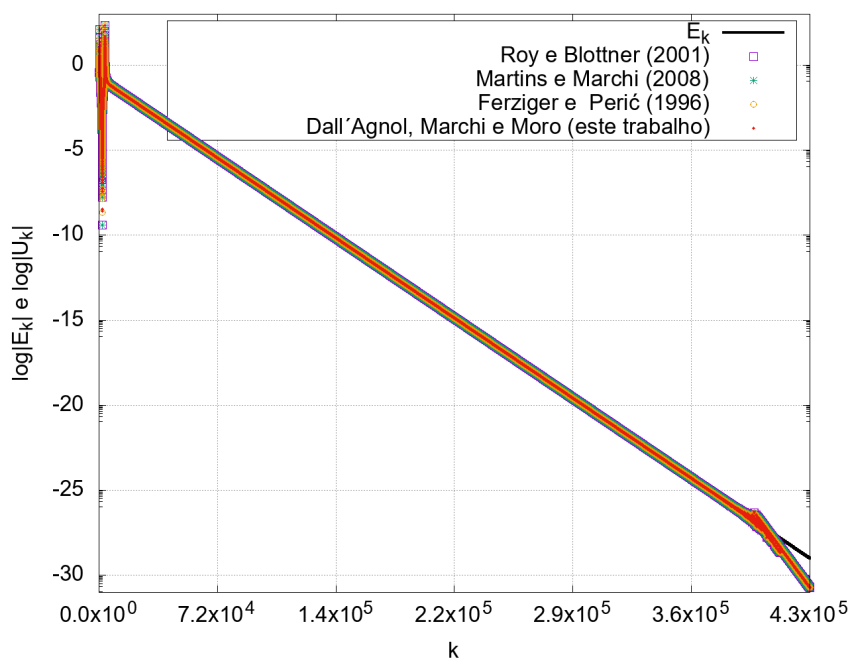


Fonte: a autora (2020).

D.1.2 Caso 2

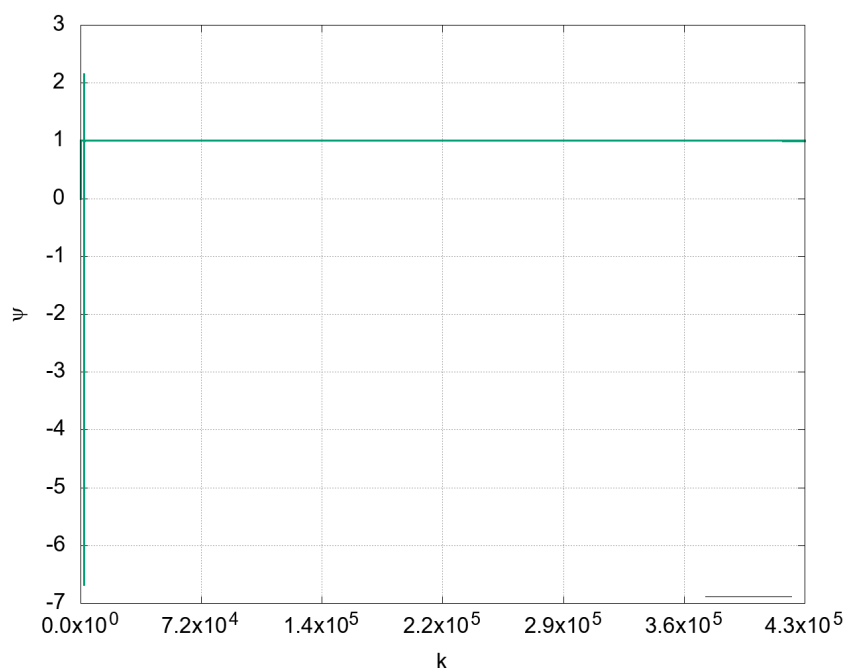
TABELA D.2 – INTERVALOS DE VARIAÇÃO DE ψ PARA O CASO 2 DO PROBLEMA 1, VARIÁVEL $T(1/2)$.

Intervalo	Iterações
I	3:496
II	497:1895
transição	1896
III	1897:3737
IV	3738:36832
V	36833:432046

FIGURA D.25 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.

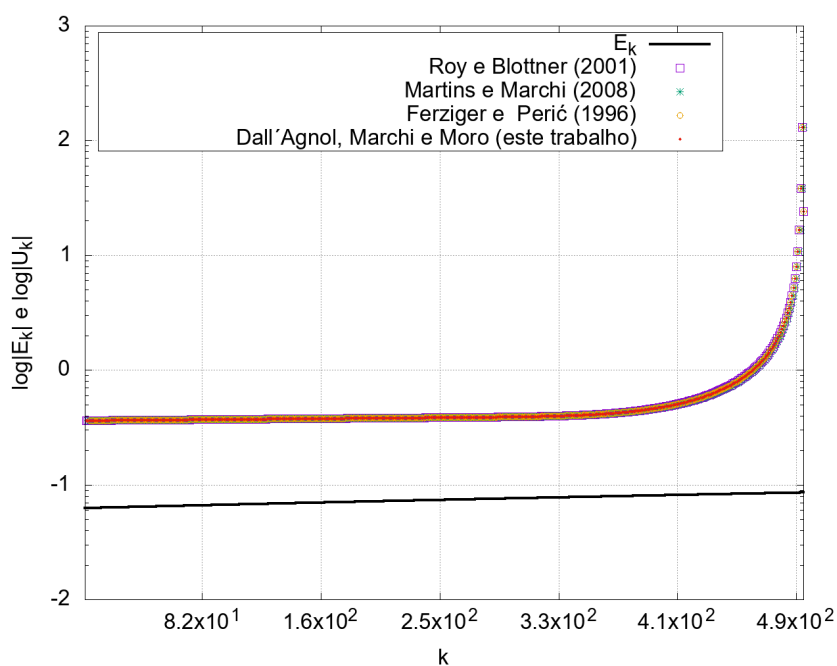
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.26 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



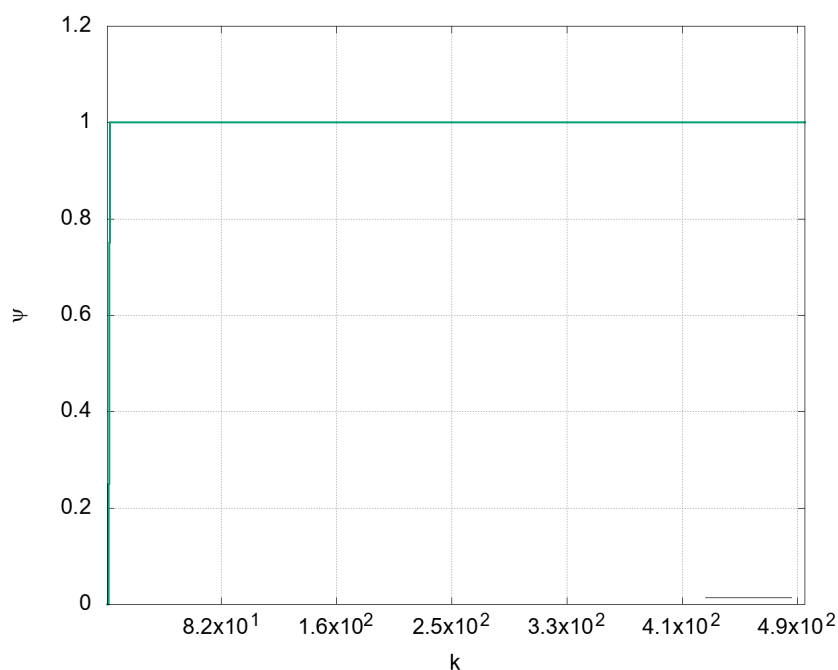
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.27 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO I.



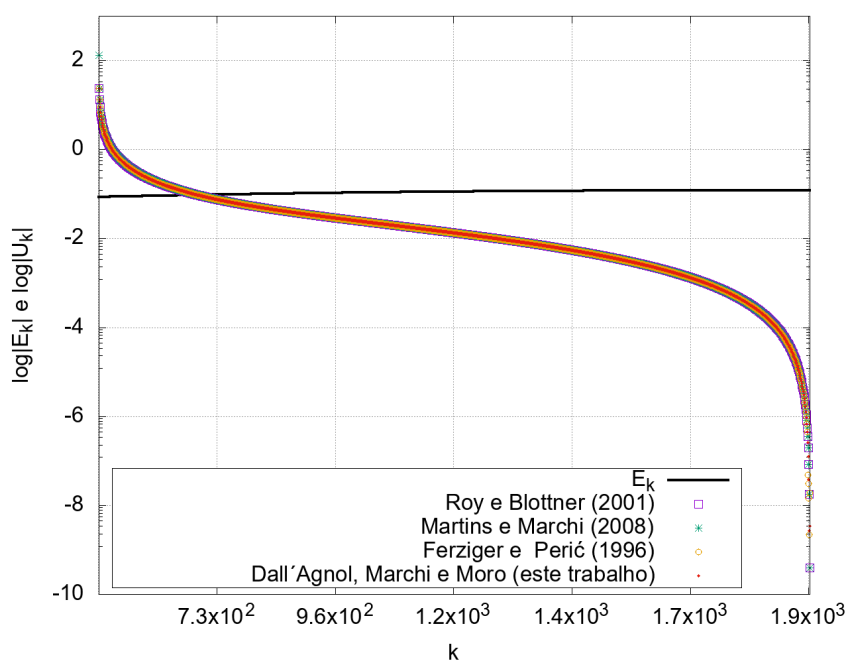
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.28 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO I.

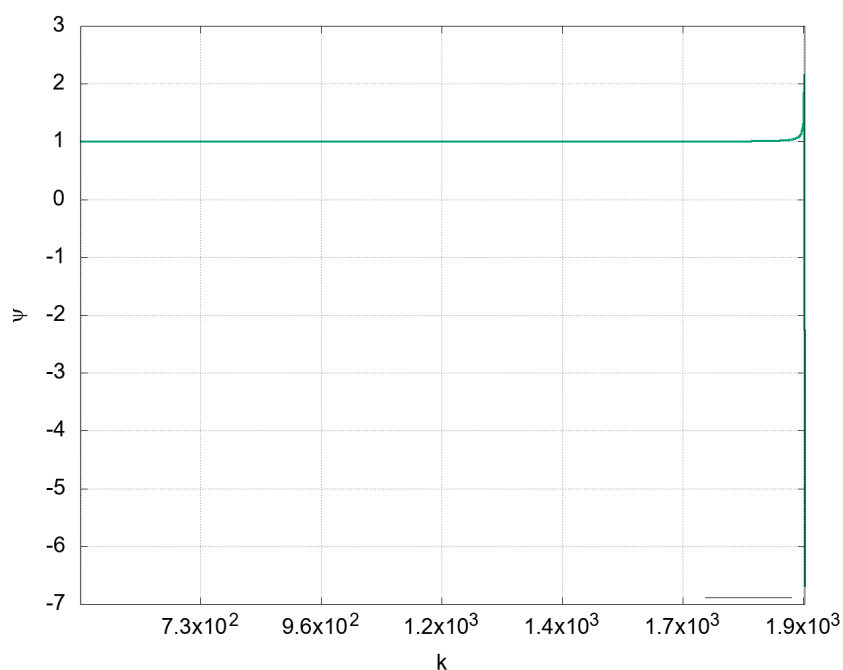


Fonte: a autora (2020).

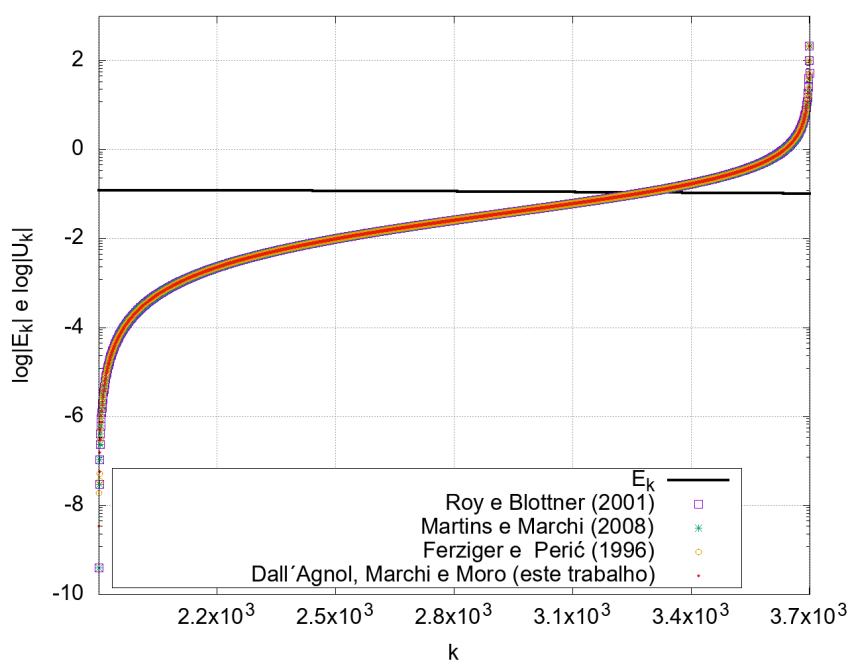
FIGURA D.29 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO II.



Fonte: a autora (2020).

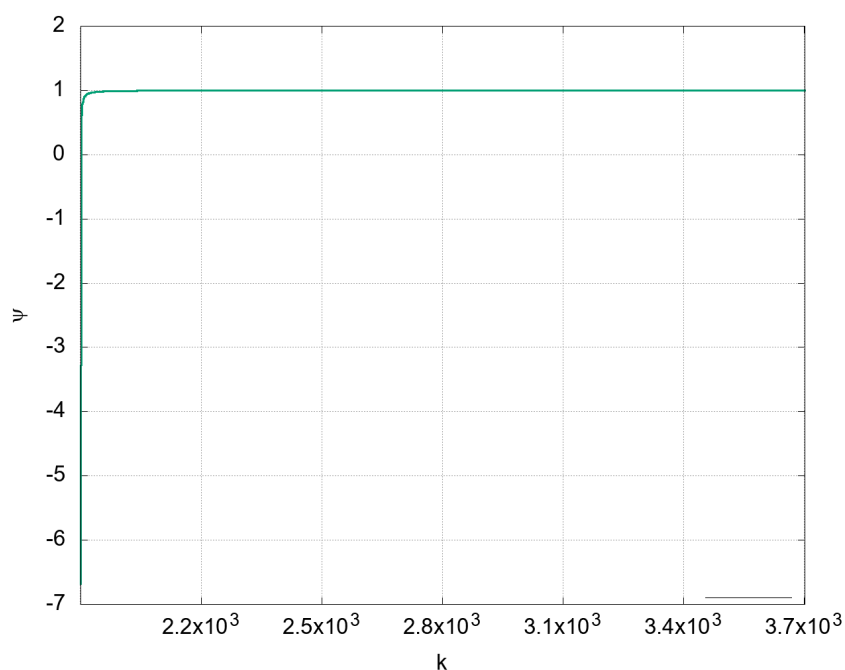
FIGURA D.30 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO II.

Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.31 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO III.

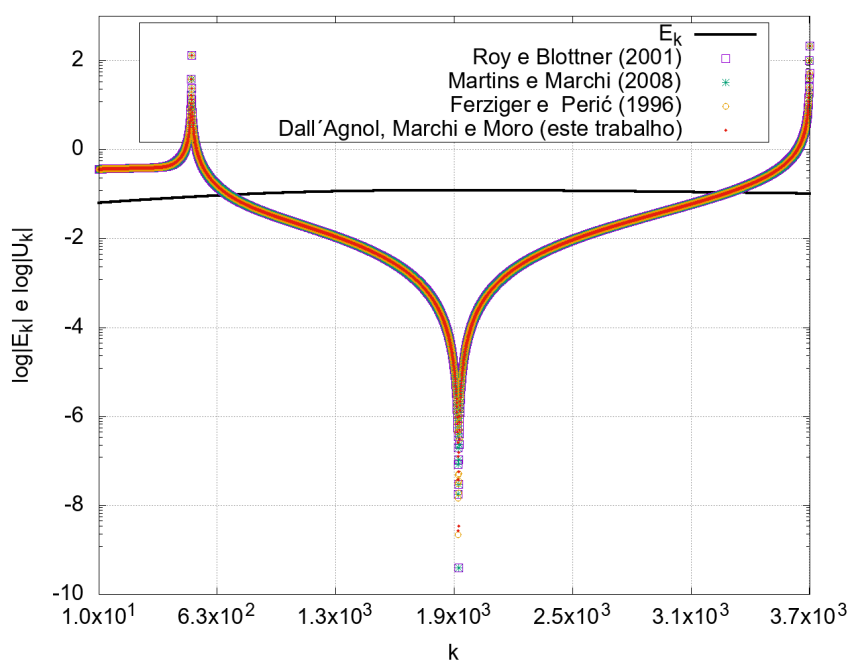
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.32 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO III.



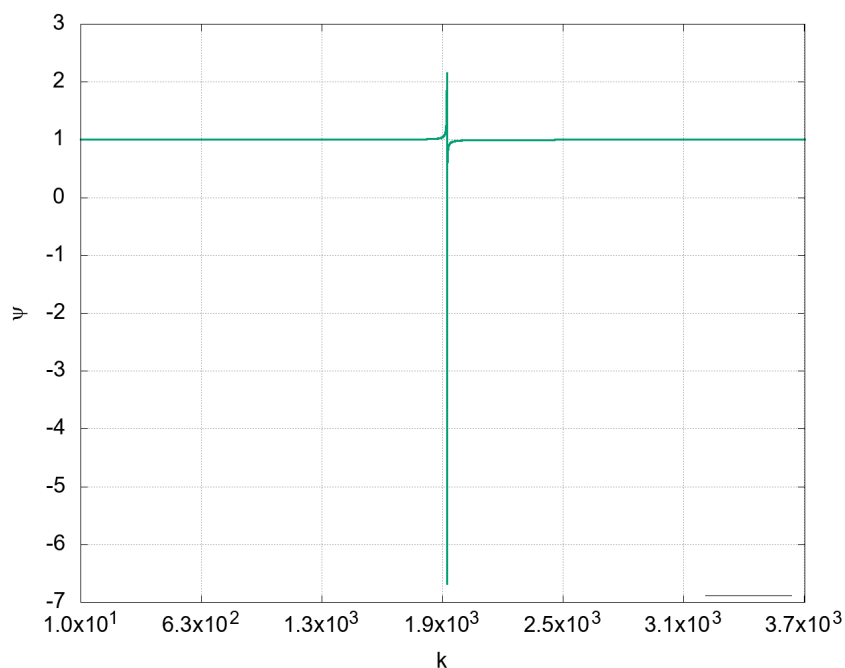
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.33 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NOS INTERVALOS I A III.



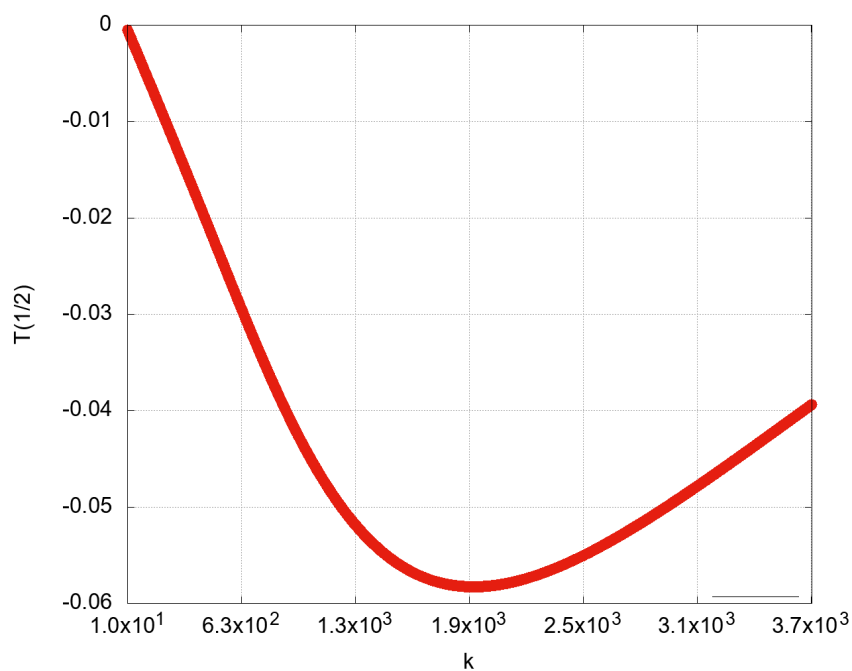
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.34 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NOS INTERVALOS I A III.

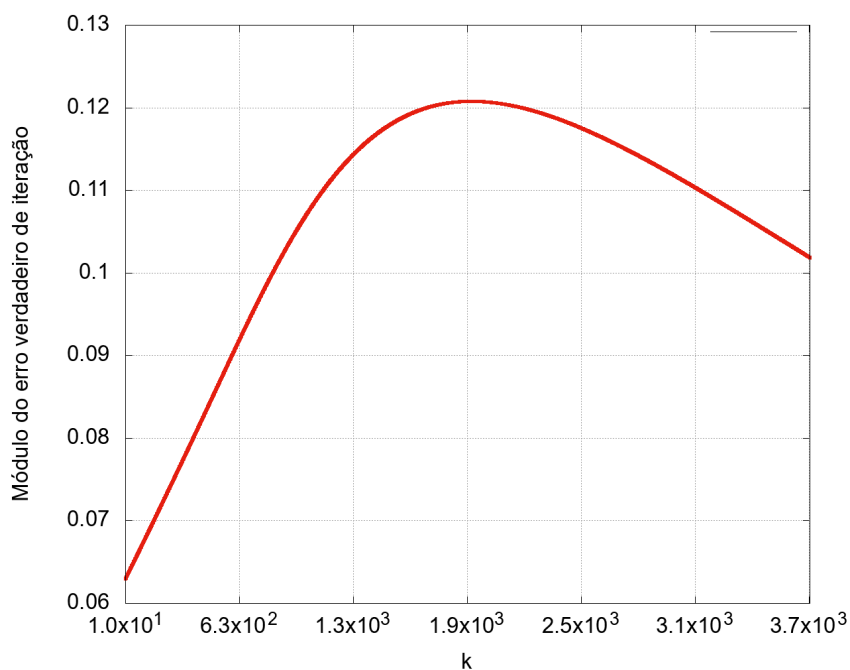


Fonte: a autora (2020).

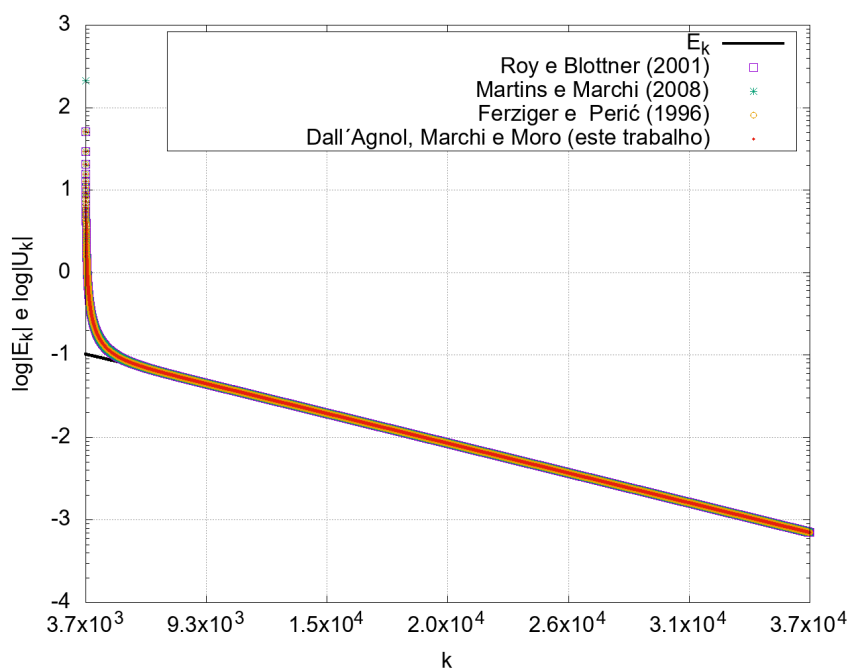
FIGURA D.35 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS CALCULADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NOS INTERVALOS I A III.



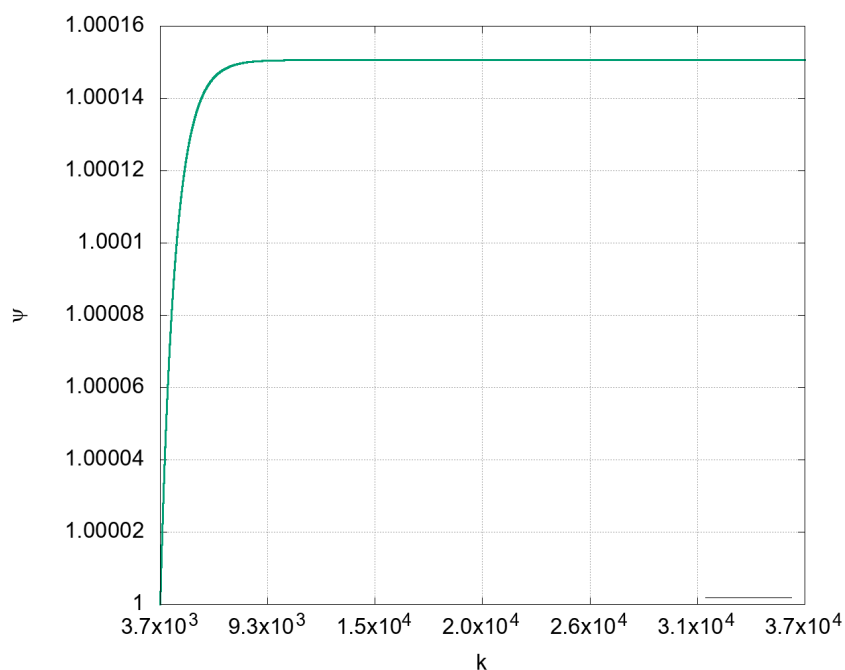
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.36 – ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NOS INTERVALOS I A III.

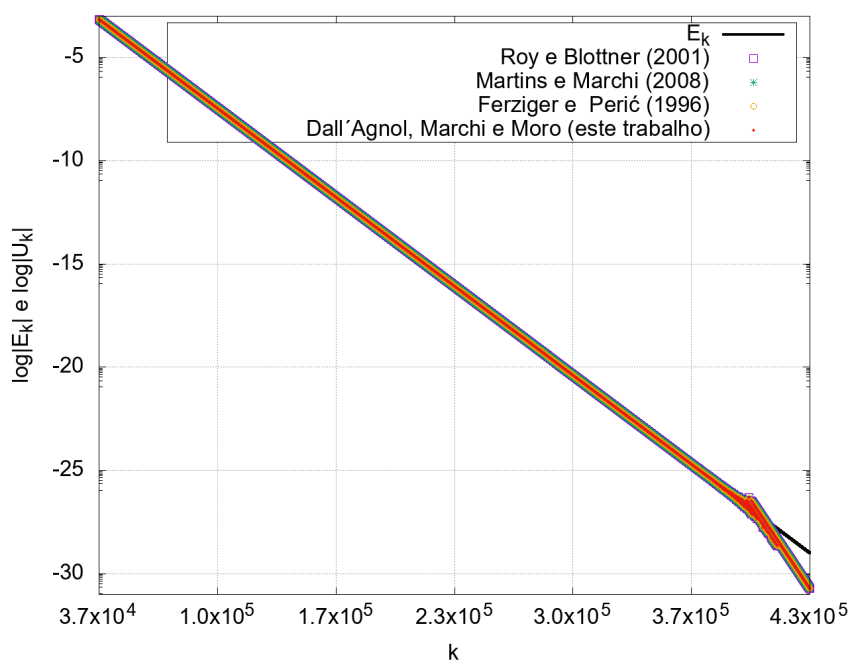
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.37 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO IV.

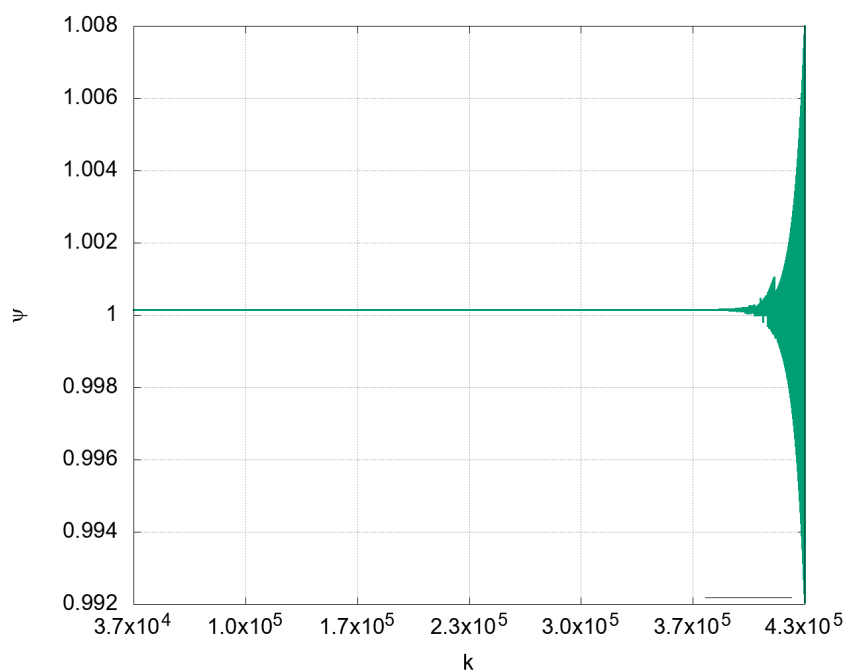
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.38 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO IV.

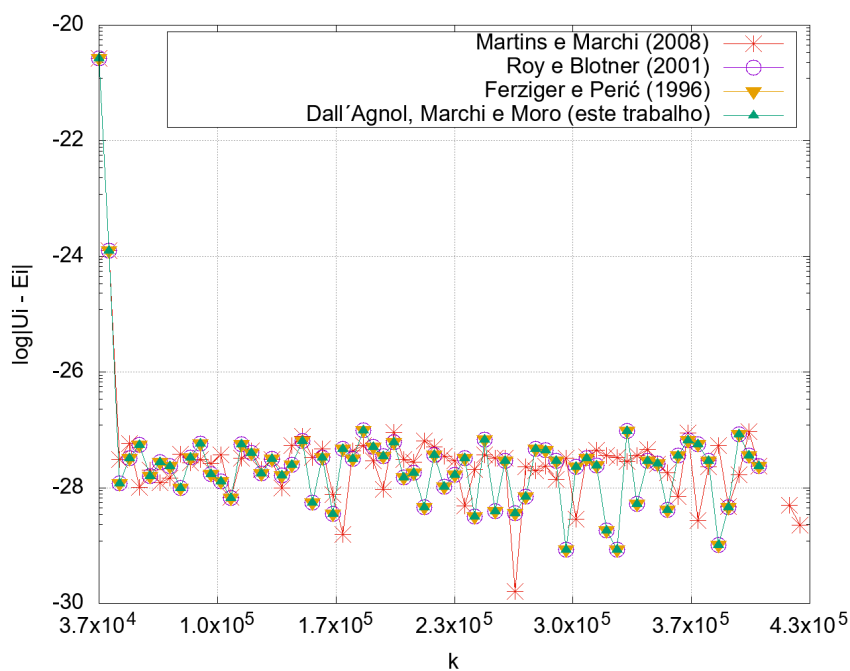
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.39 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO V.

Fonte: a autora (2020).

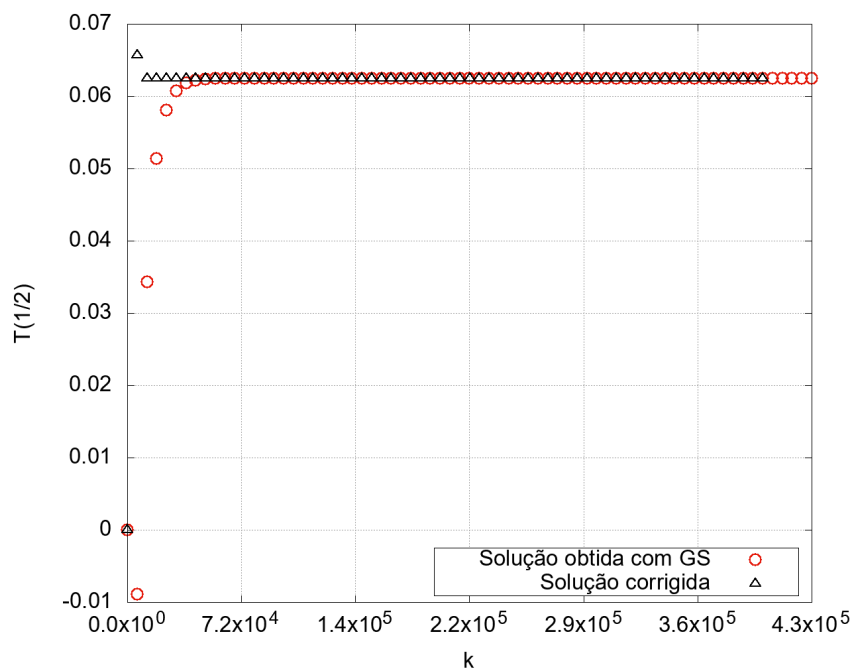
FIGURA D.40 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO V.

Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.41 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO V.

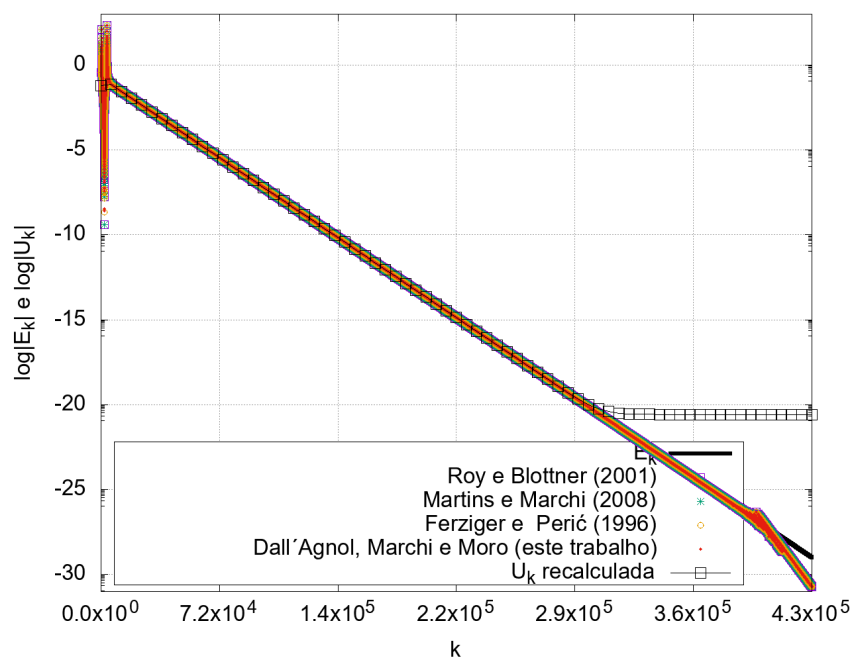
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.42 – SOLUÇÕES COM GS E SOLUÇÕES CORRIGIDAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



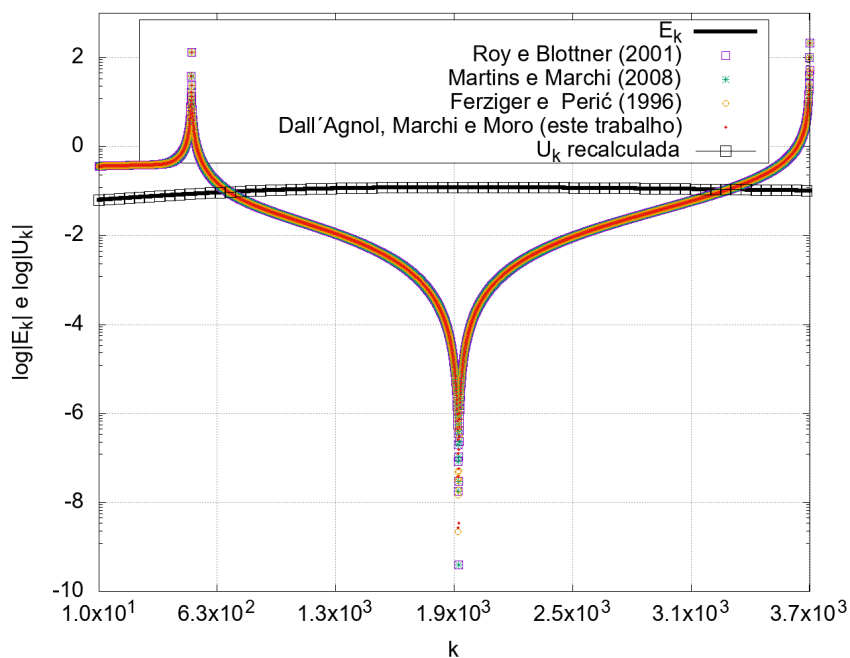
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.43 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



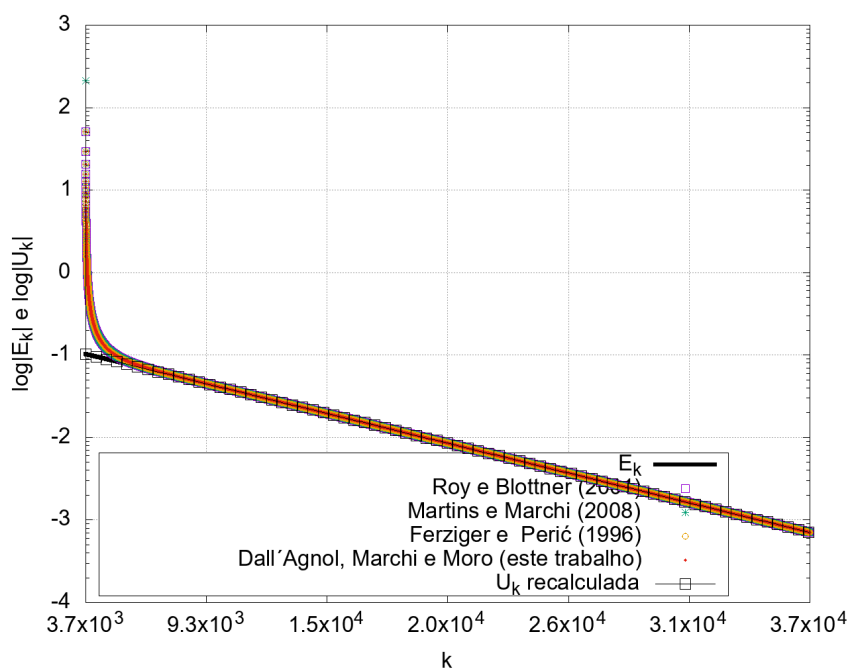
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.44 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NOS INTERVALOS I A III.



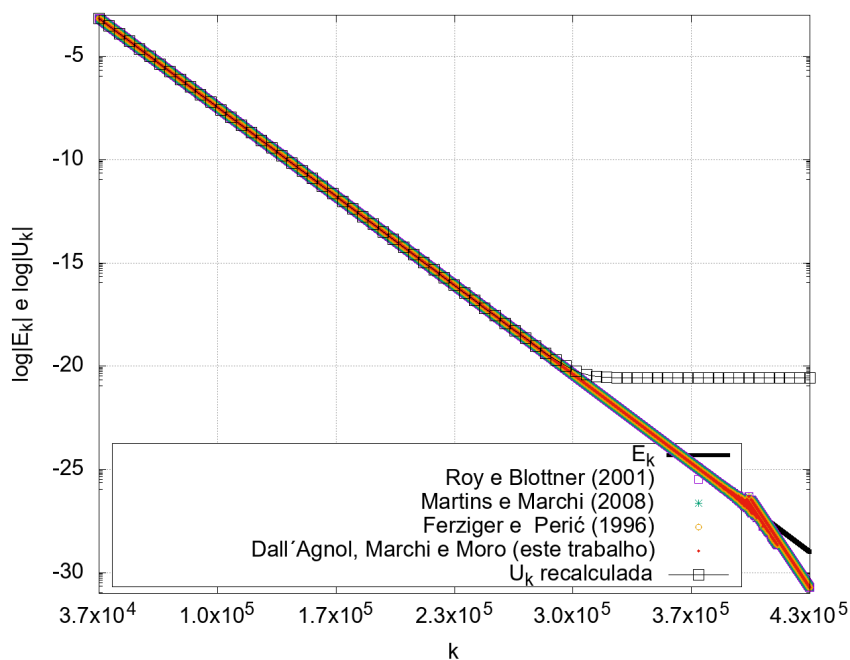
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.45 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO IV.



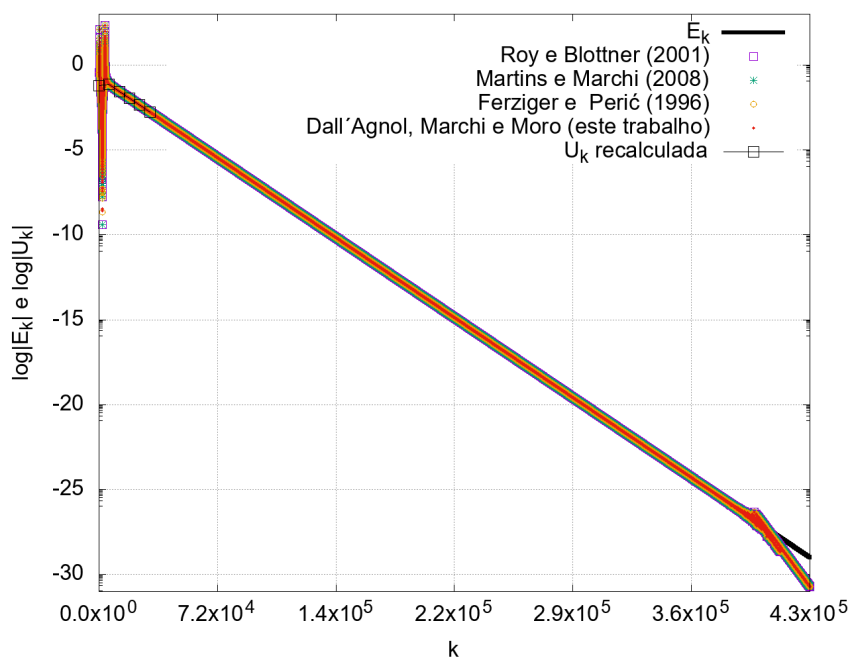
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.46 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO V.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.47 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

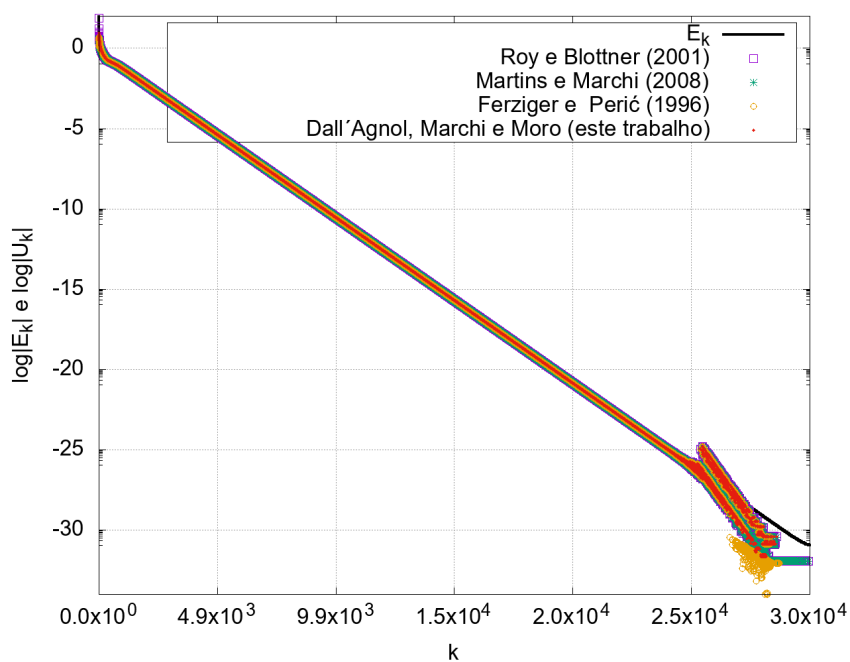
D.2 Variável 2: gradiente no contorno leste (direito) do domínio de cálculo $\text{grad } T(1)$

D.2.1 Caso 1

TABELA D.3 – INTERVALOS DE VARIAÇÃO DE ψ PARA O CASO 1 DO PROBLEMA 1, VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$.

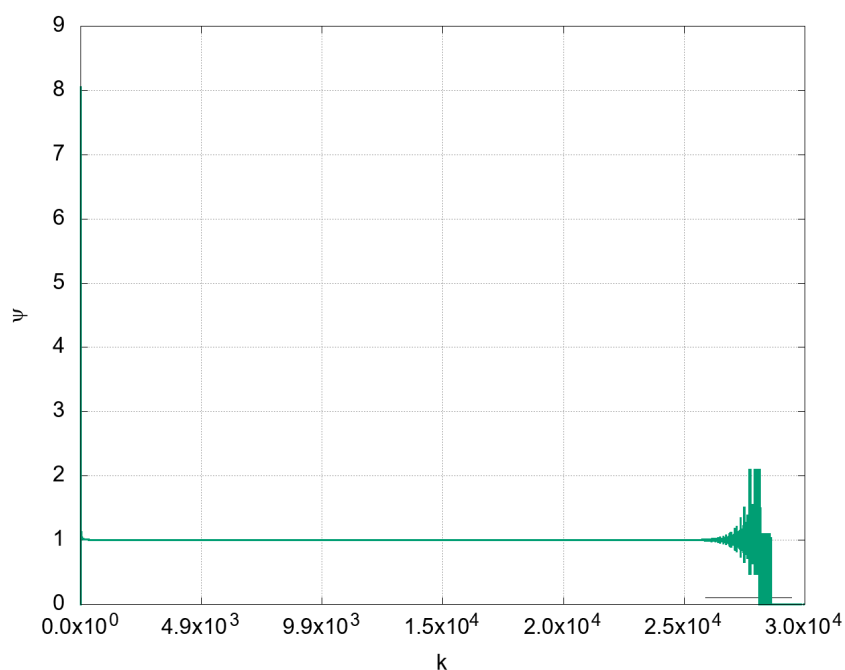
Intervalo	Iterações
I	3:5480
II	5481:29557

FIGURA D.48 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



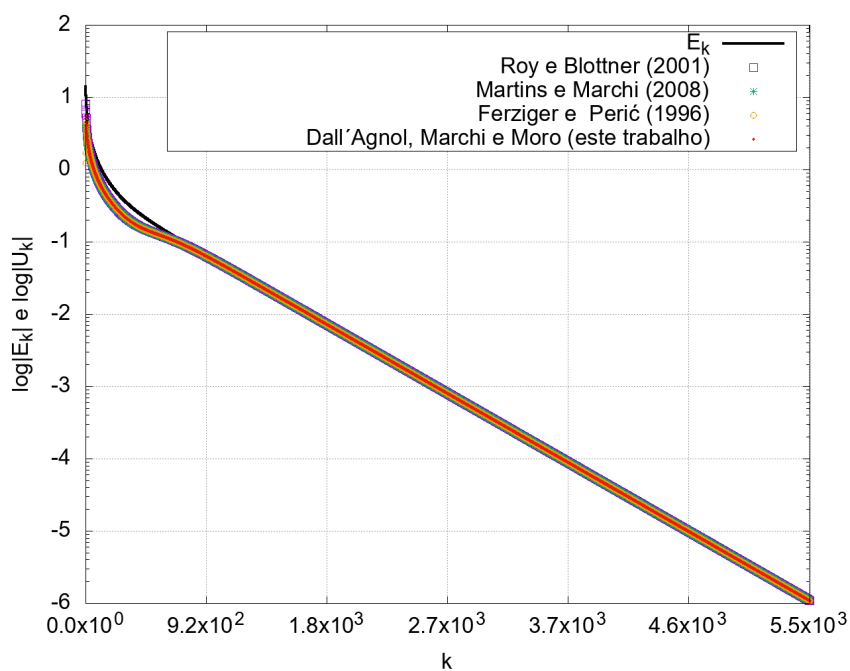
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.49 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



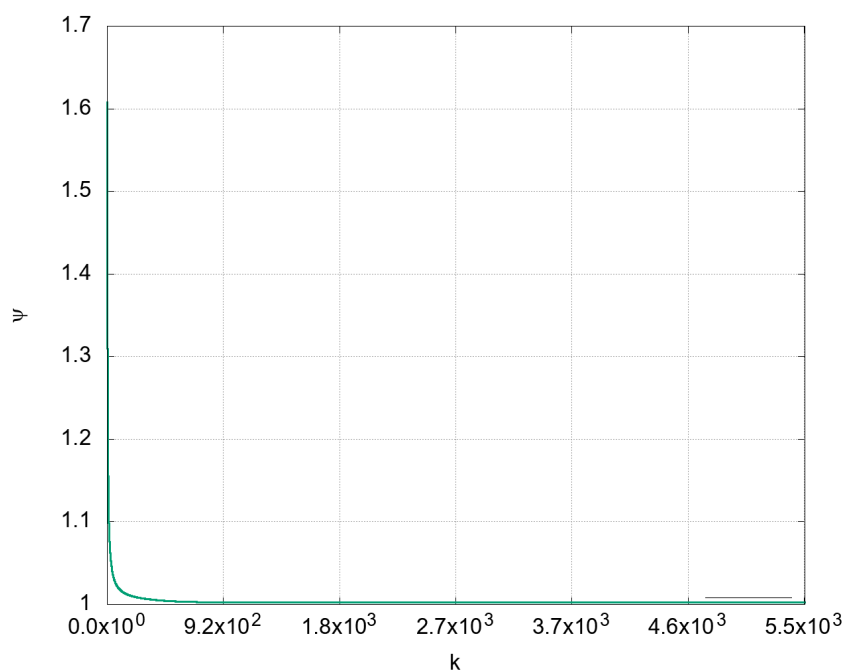
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.50 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO I.



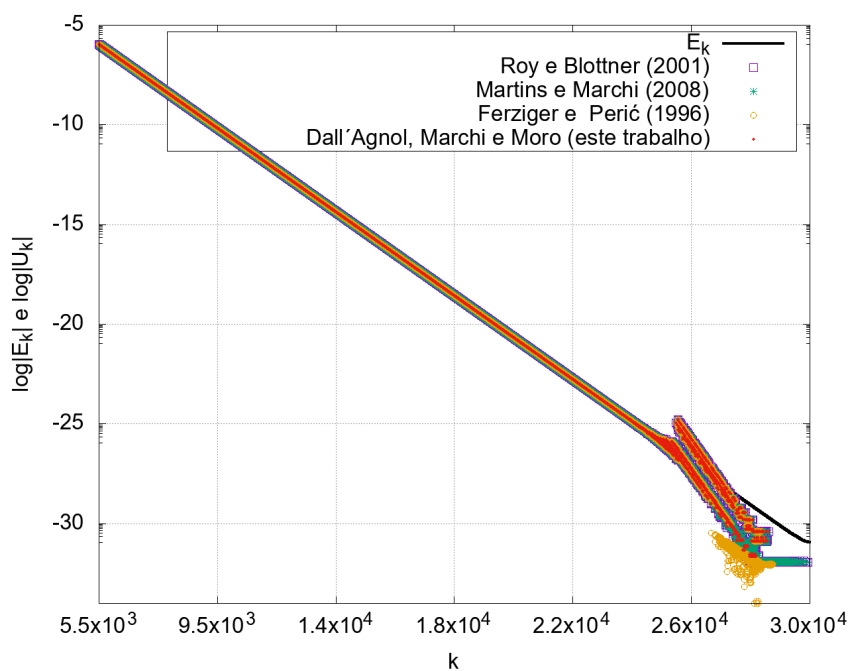
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.51 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO I.



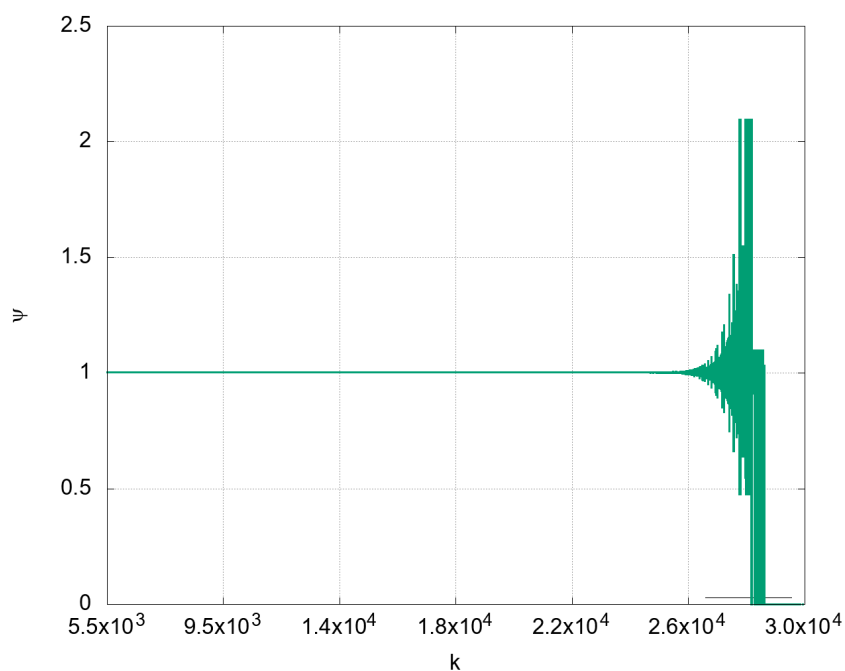
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.52 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO II.



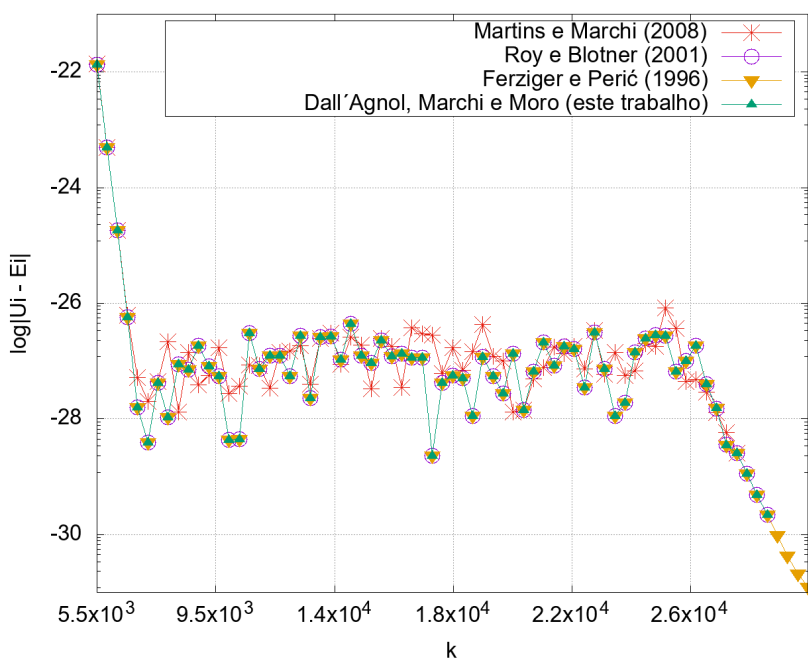
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.53 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO II.



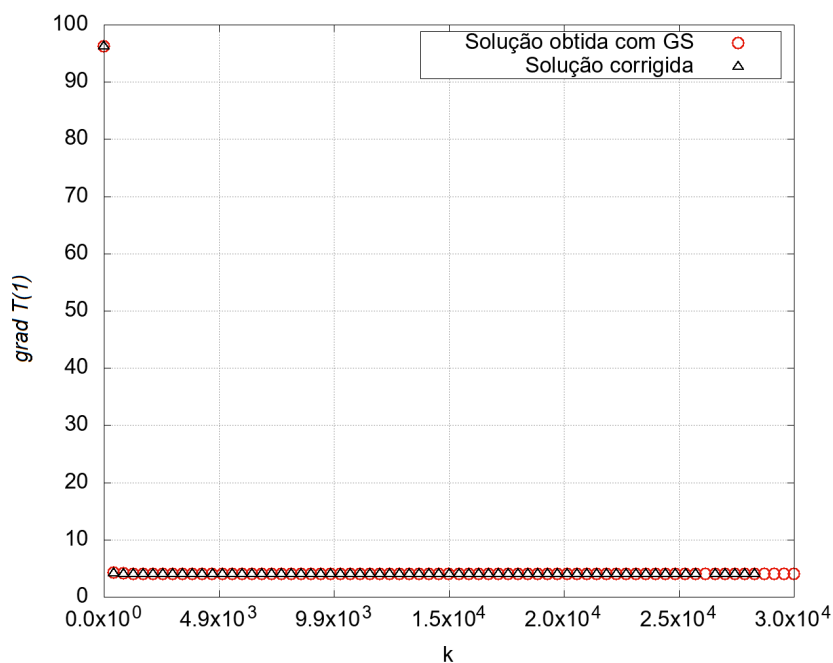
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.54 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO II.



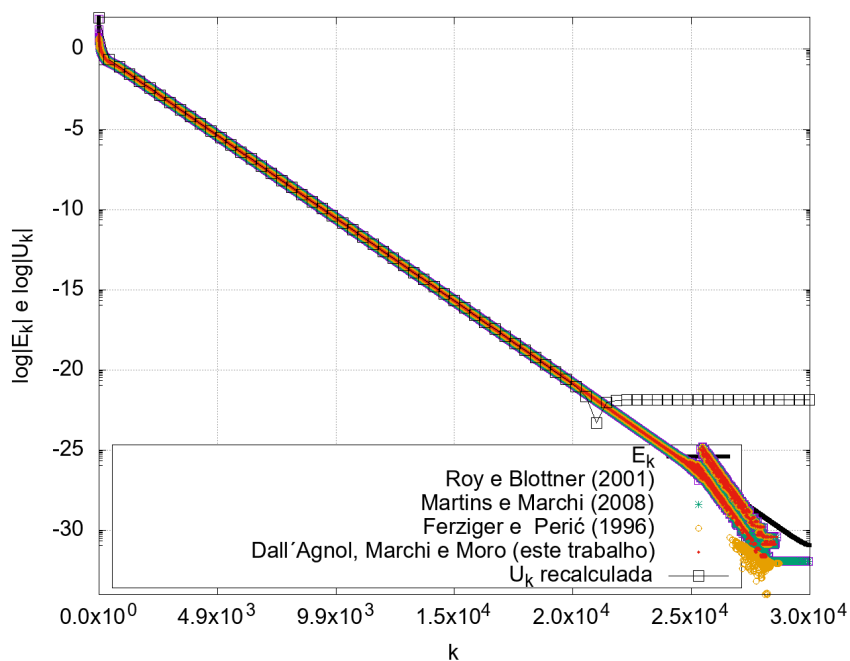
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.55 – SOLUÇÕES COM GS E SOLUÇÕES CORRIGIDAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



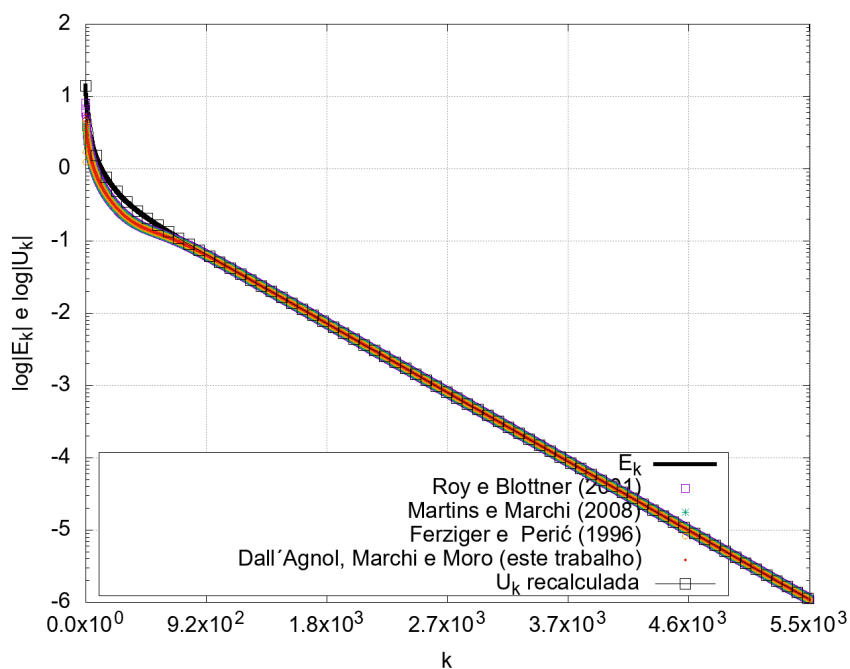
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.56 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



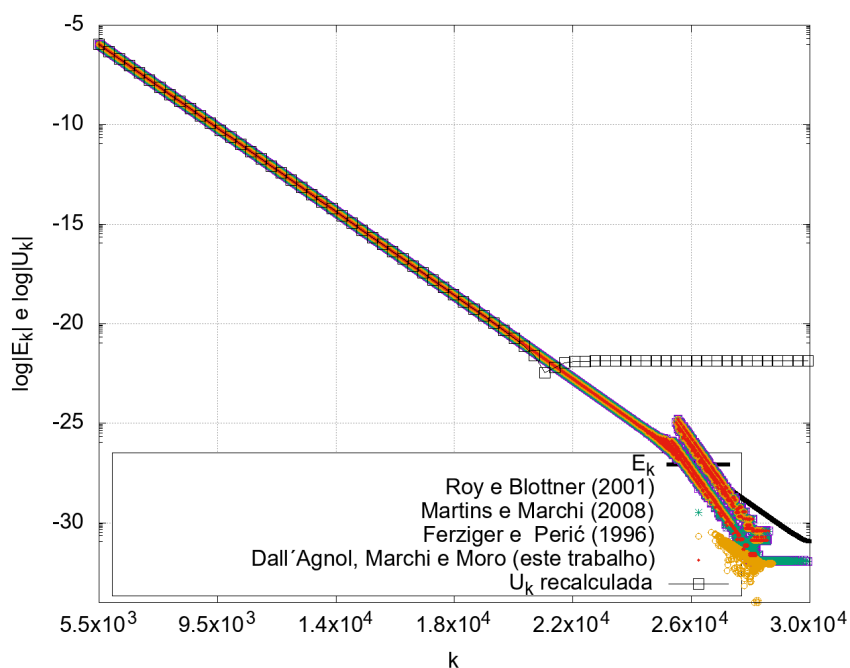
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.57 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO I.



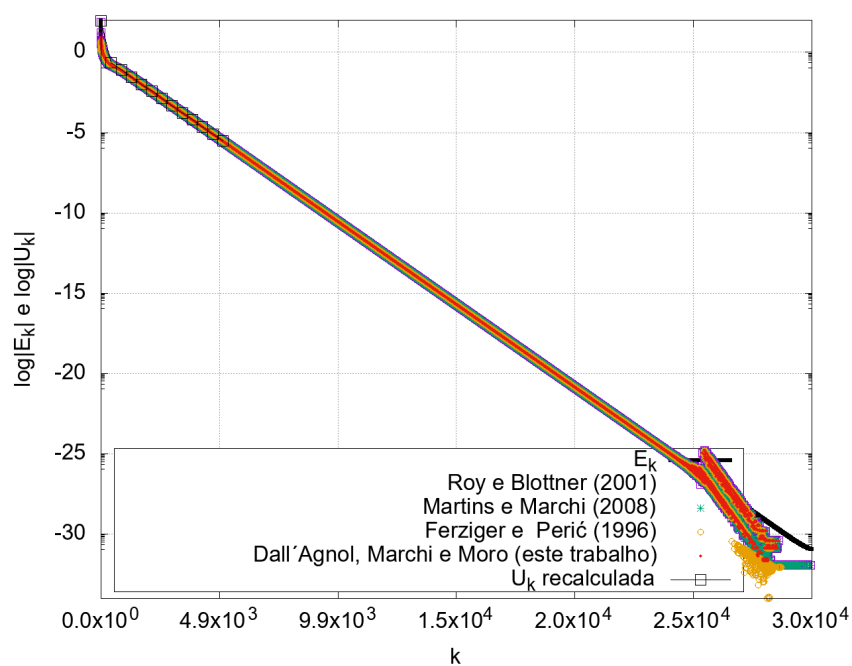
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.58 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO II.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.59 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.

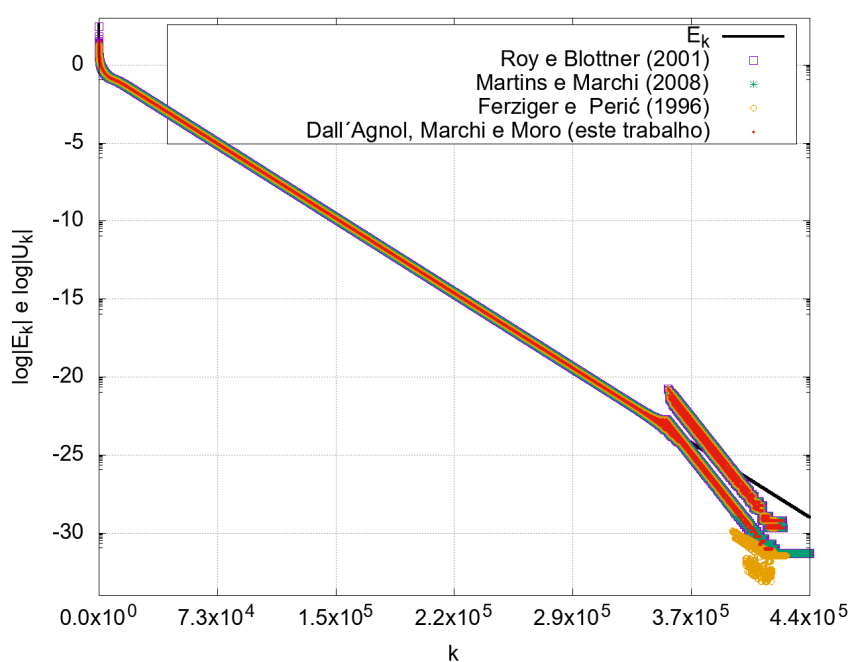


Fonte: a autora (2020).

D.2.2 Caso 2

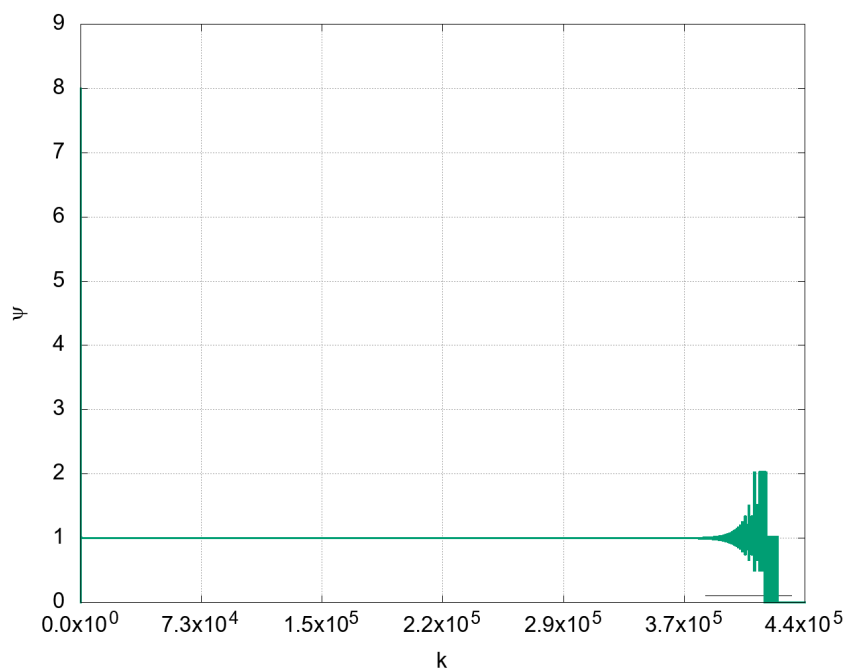
TABELA D.4 – INTERVALOS DE VARIAÇÃO DE ψ PARA O CASO 2 DO PROBLEMA 1, VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$.

Intervalo	Iterações
I	3:66428
II	66429:439711

FIGURA D.60 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.

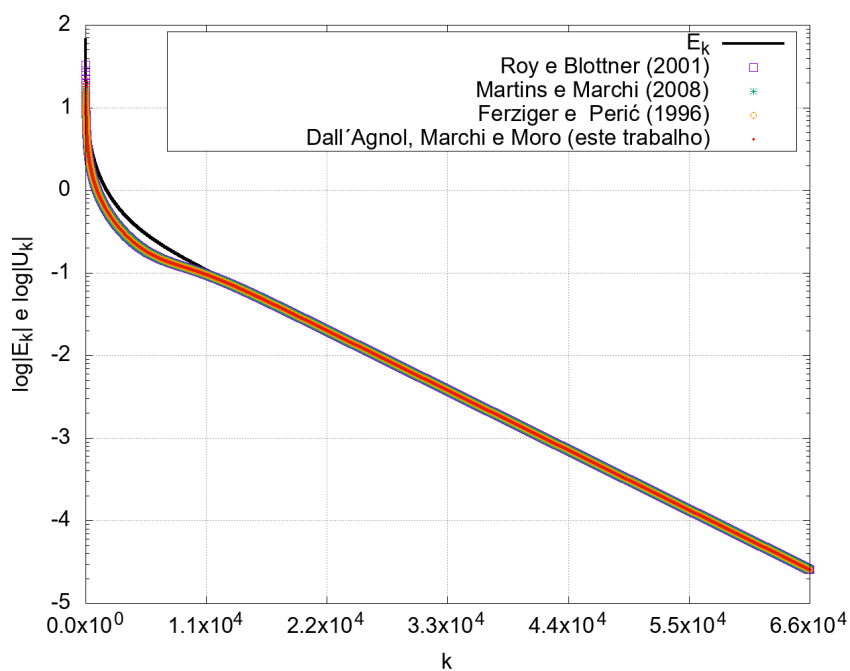
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.61 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



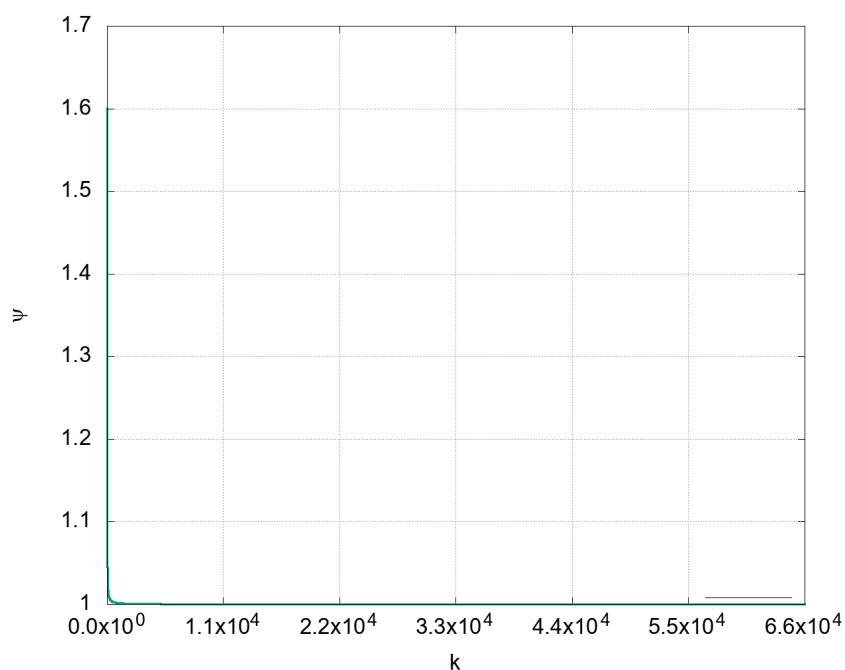
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.62 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO I.



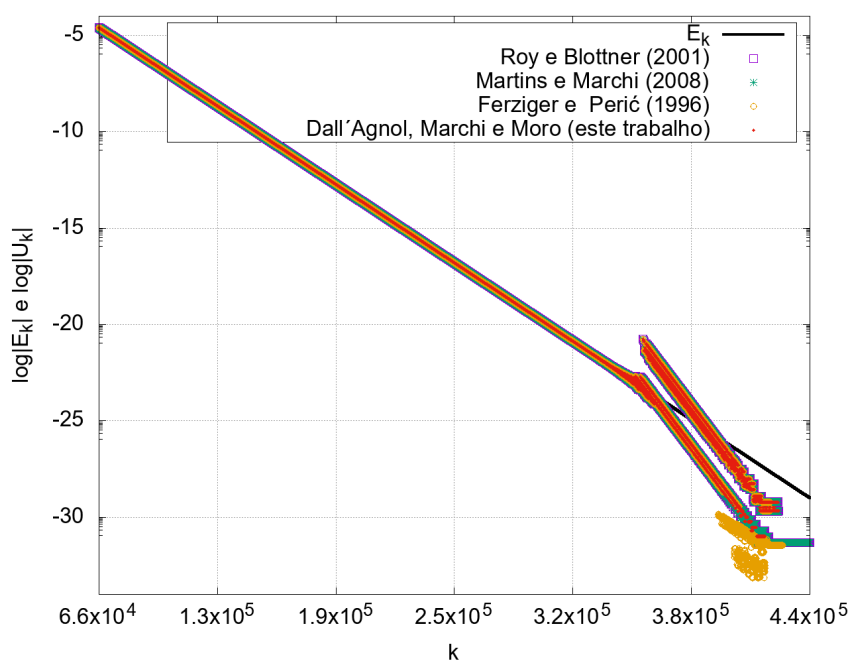
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.63 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO I.



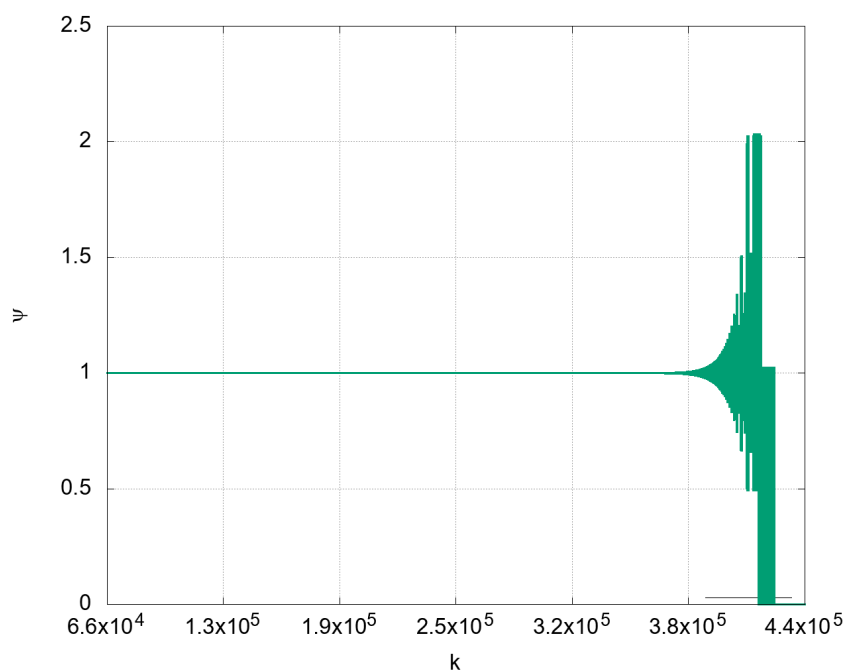
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.64 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO II.



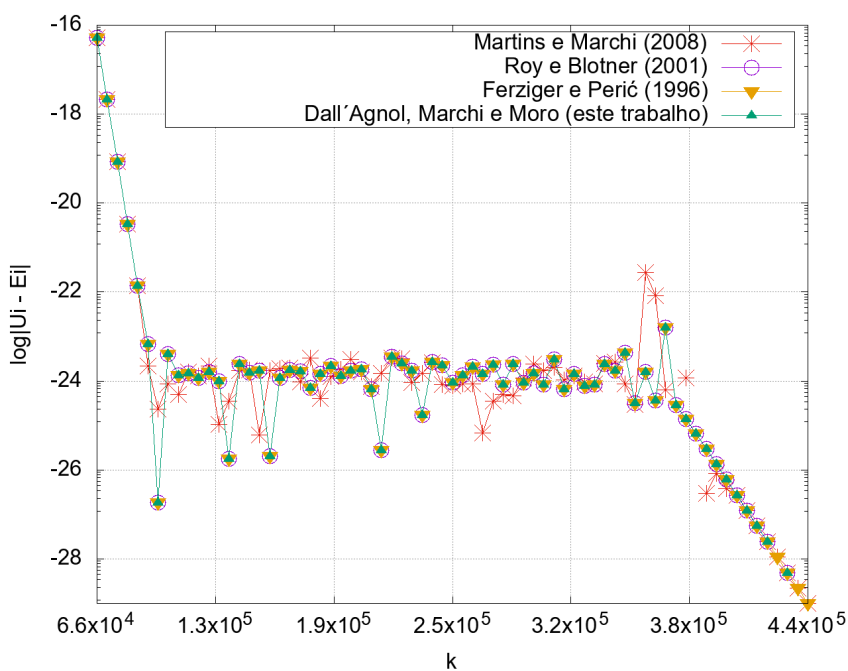
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.65 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO II.



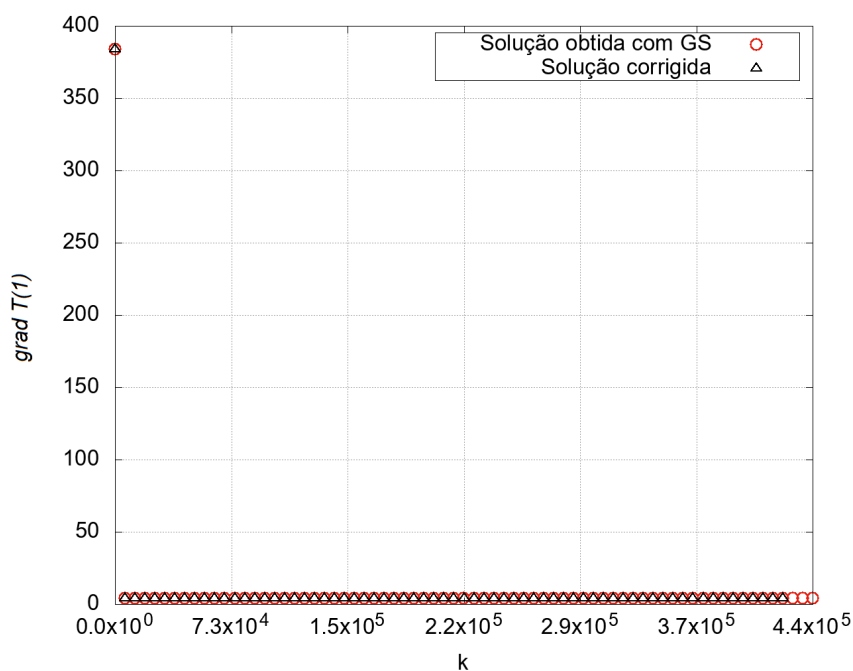
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.66 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO II.



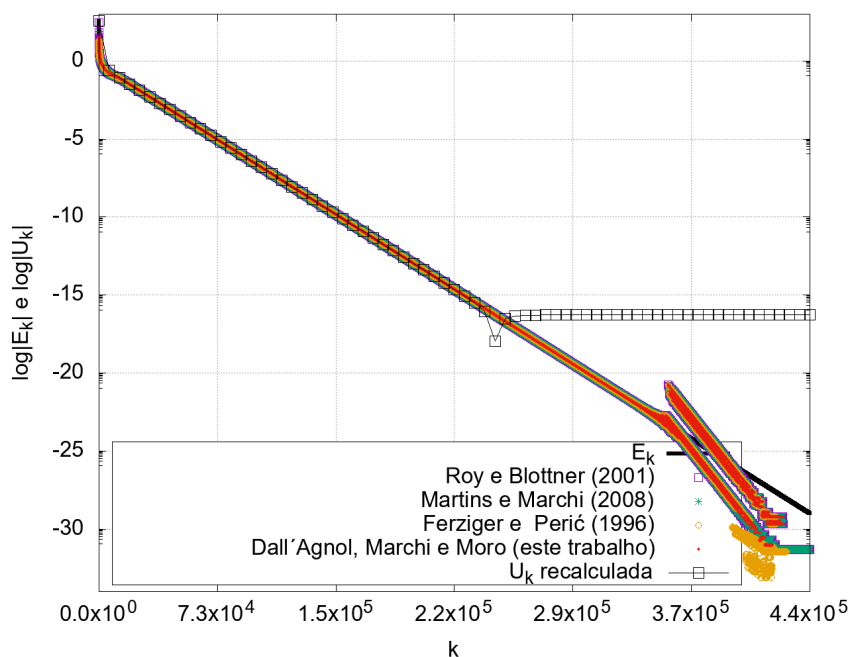
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.67 – SOLUÇÕES COM GS E SOLUÇÕES CORRIGIDAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



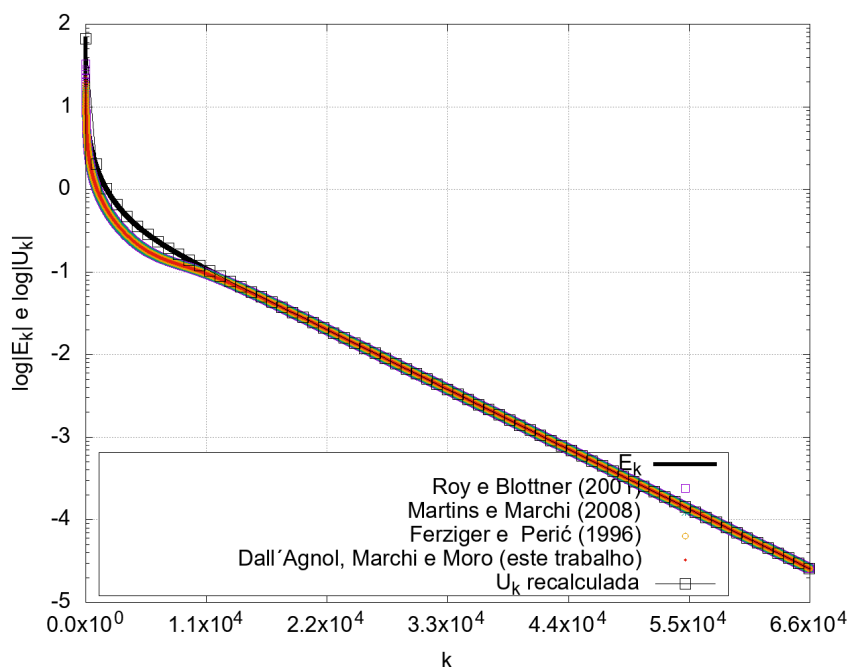
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.68 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



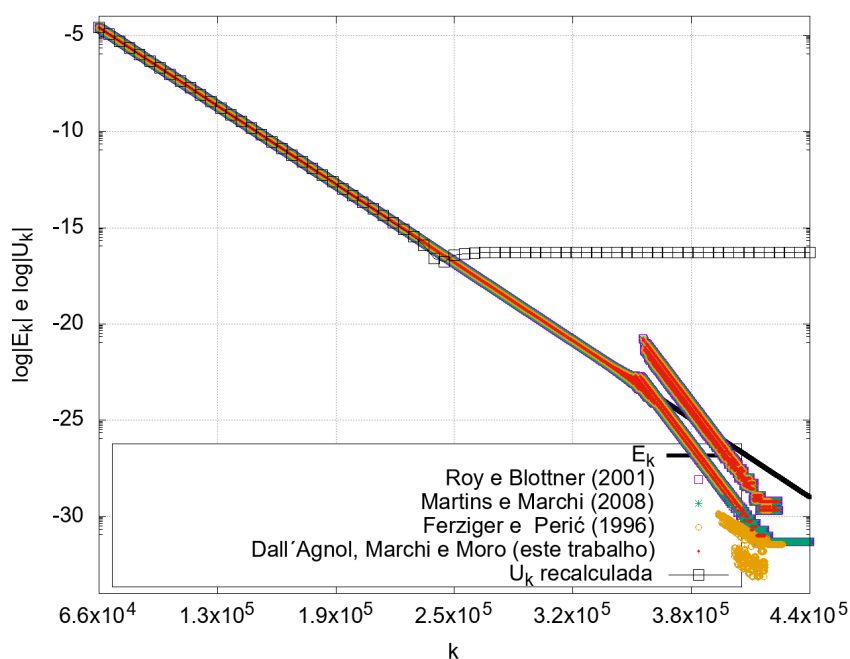
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.69 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO I.



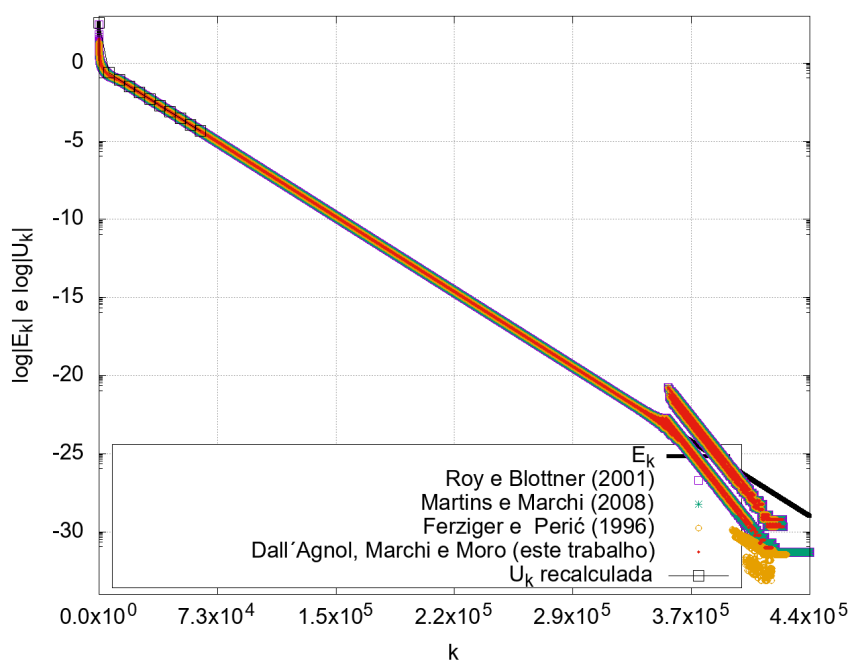
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.70 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO II.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.71 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 1, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

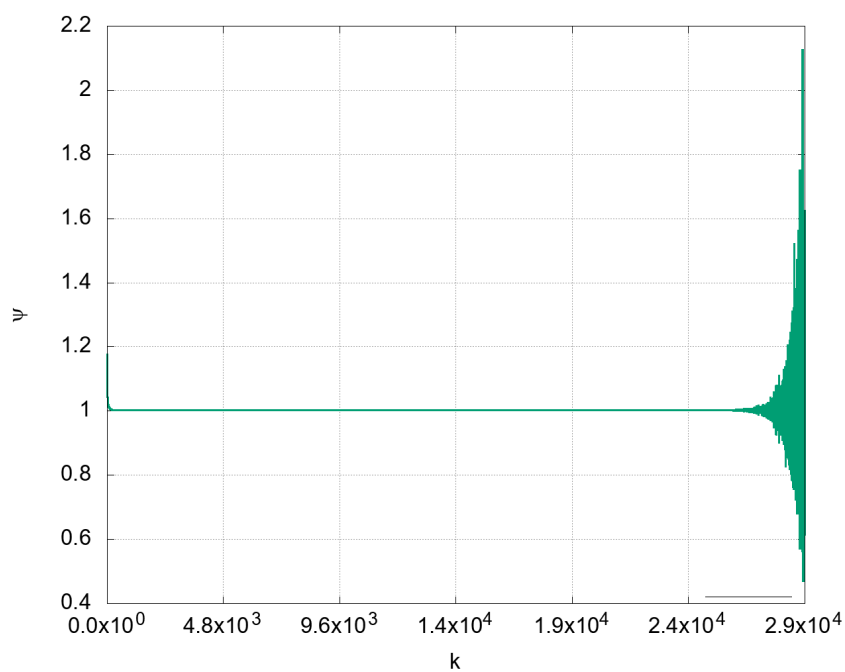
D.3 Variável 3: valor médio da função (temperatura média) T_m

D.3.1 Caso 1

TABELA D.5 – INTERVALOS DE VARIAÇÃO DE ψ PARA O CASO 1 DO PROBLEMA 1, VARIÁVEL T_m .

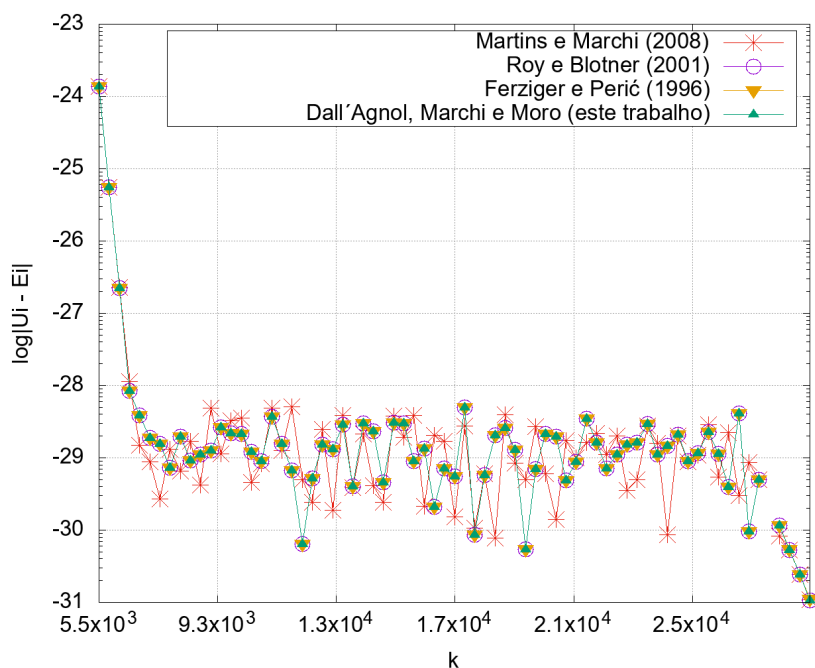
Intervalo	Iterações
I	3:356
II	357:436
III	437:5470
IV	5471:28751

FIGURA D.72 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



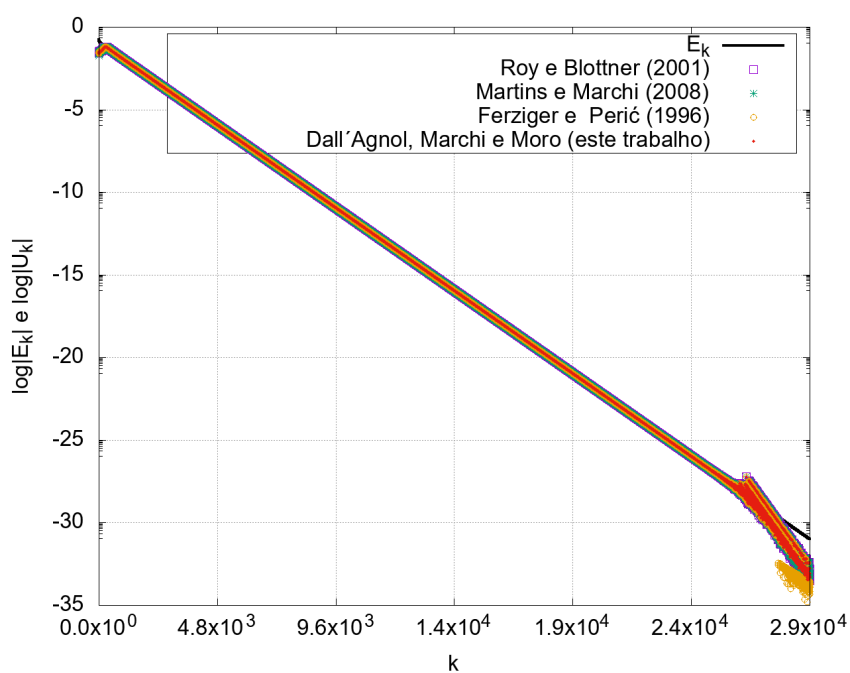
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.73 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO IV.

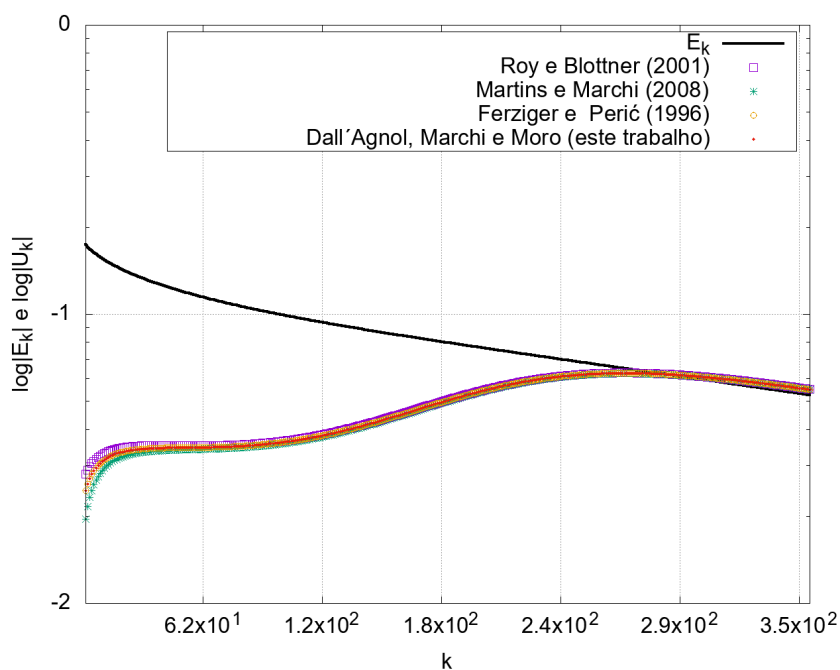


Fonte: a autora (2020).

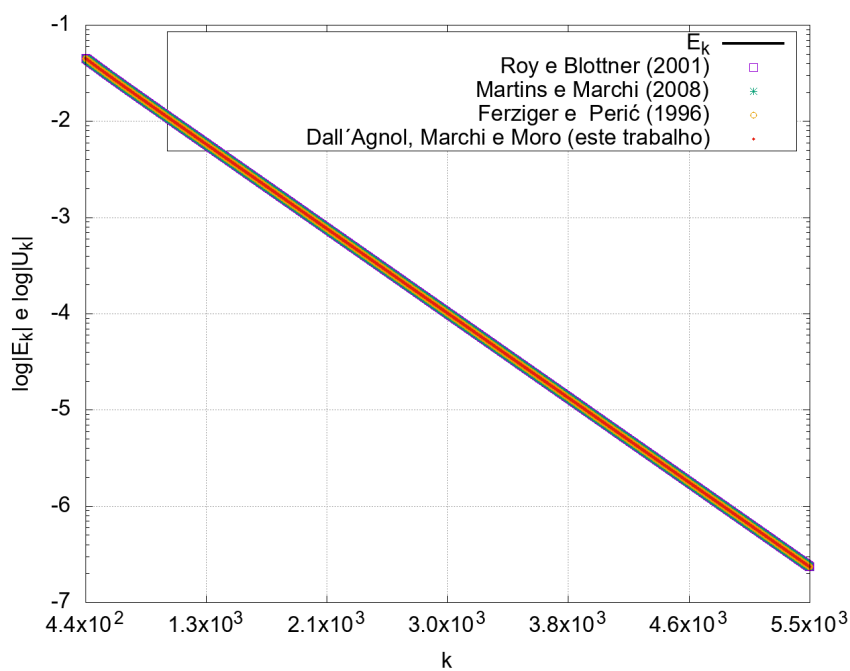
FIGURA D.74 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

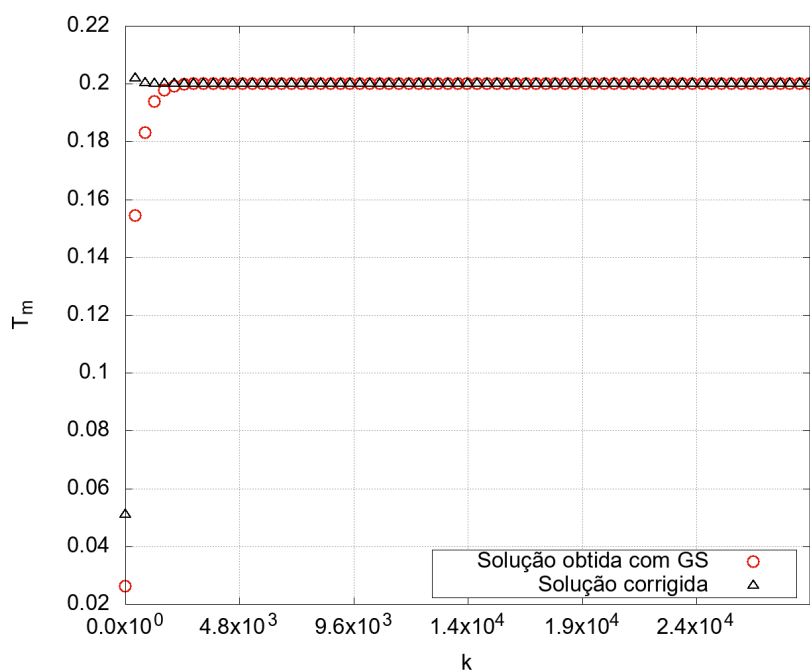
FIGURA D.75 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 1, NOS INTERVALOS I E II.

Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.76 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO III.

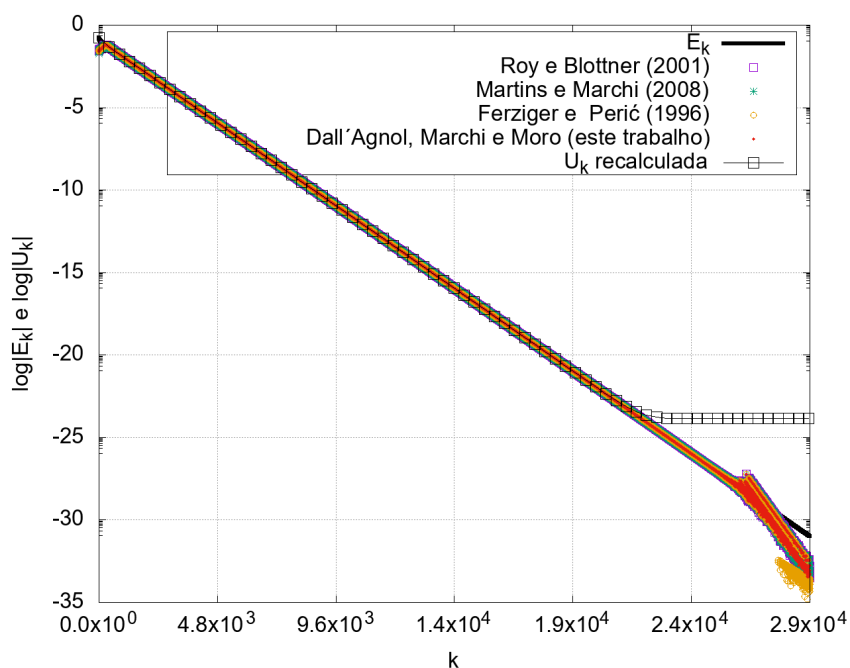
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.77 – SOLUÇÕES COM GS E SOLUÇÕES CORRIGIDAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



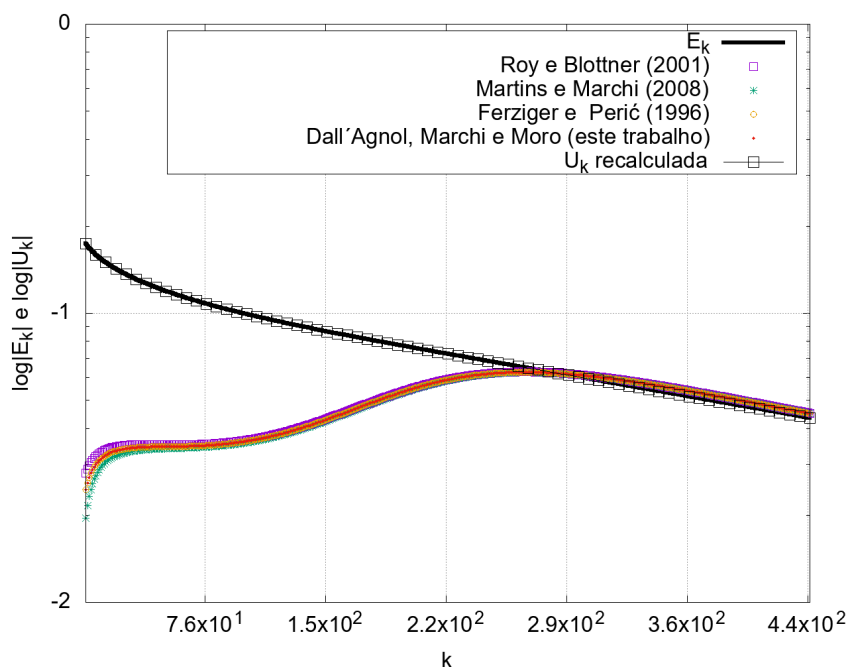
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.78 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



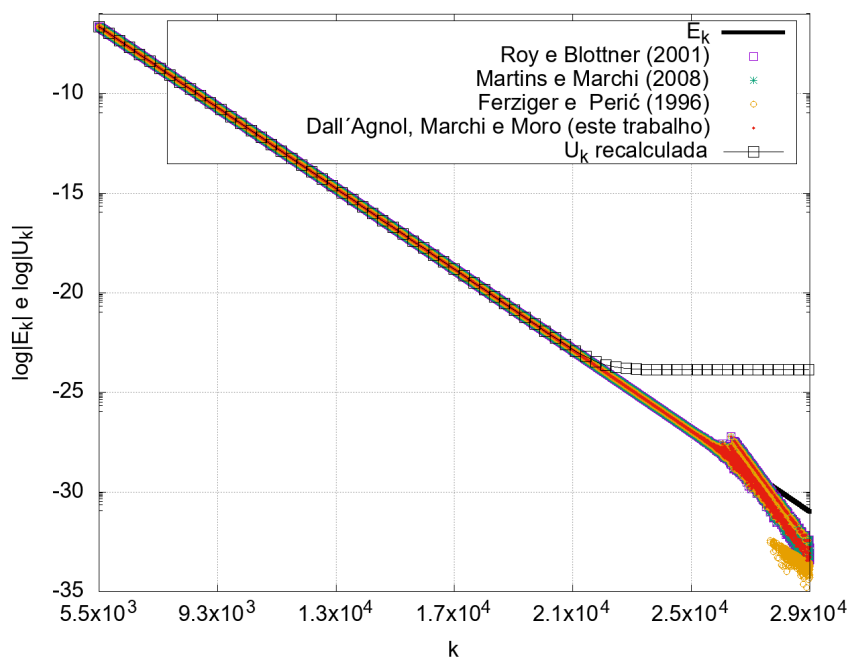
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.79 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 1, NOS INTERVALOS I E II.



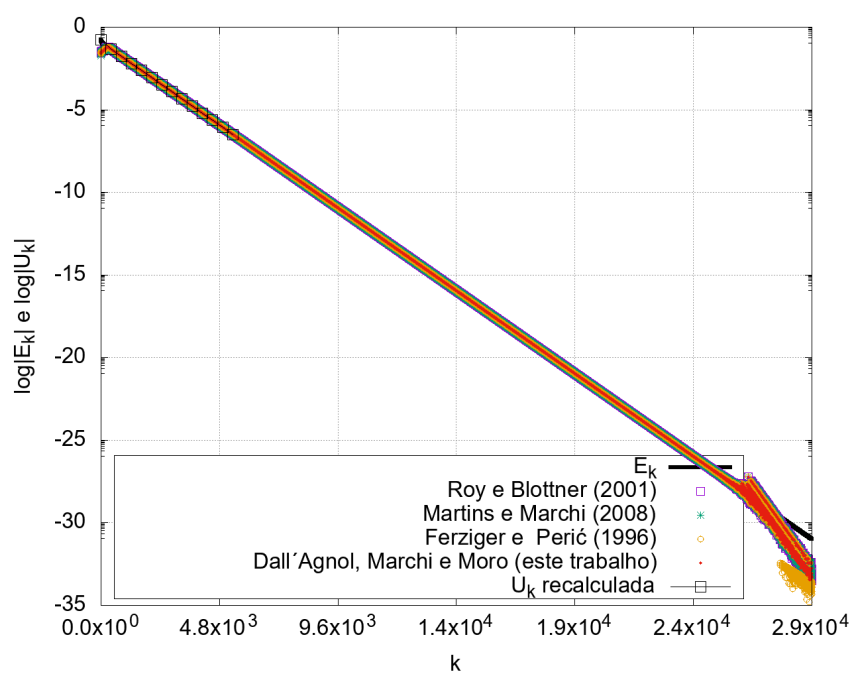
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.80 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 1, NO INTERVALO IV.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.81 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.

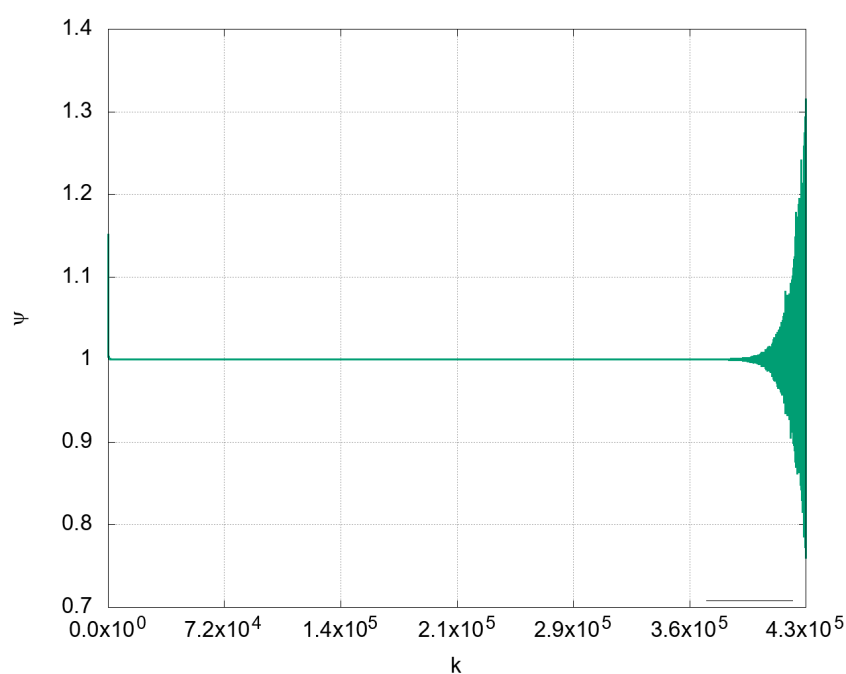


Fonte: a autora (2020).

D.3.2 Caso 2

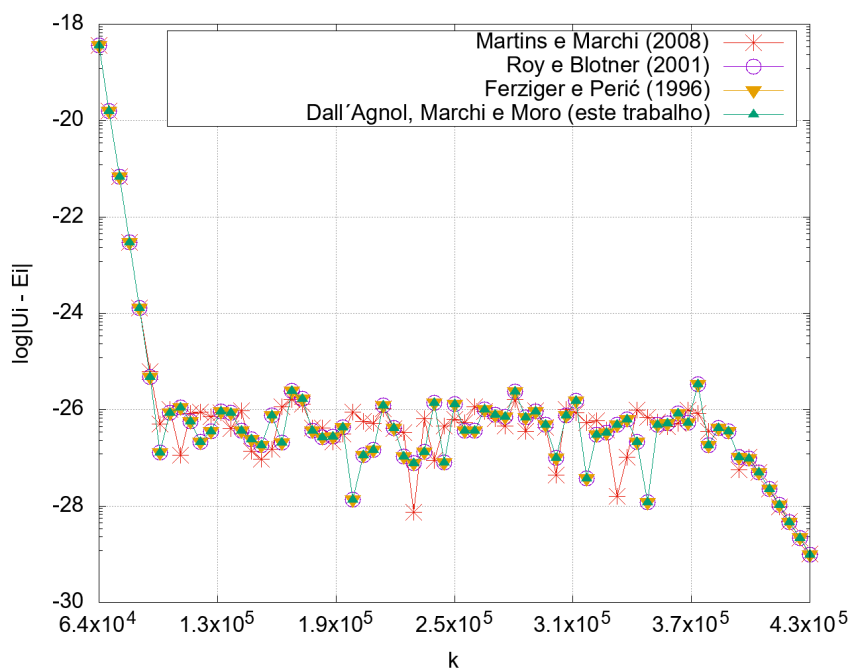
TABELA D.6 – INTERVALOS DE VARIAÇÃO DE ψ PARA O CASO 2 DO PROBLEMA 1, VARIÁVEL T_m .

Intervalo	Iterações
I	3:7288
II	7289:8588
III	8589:64392
IV	64393:429046

FIGURA D.82 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.

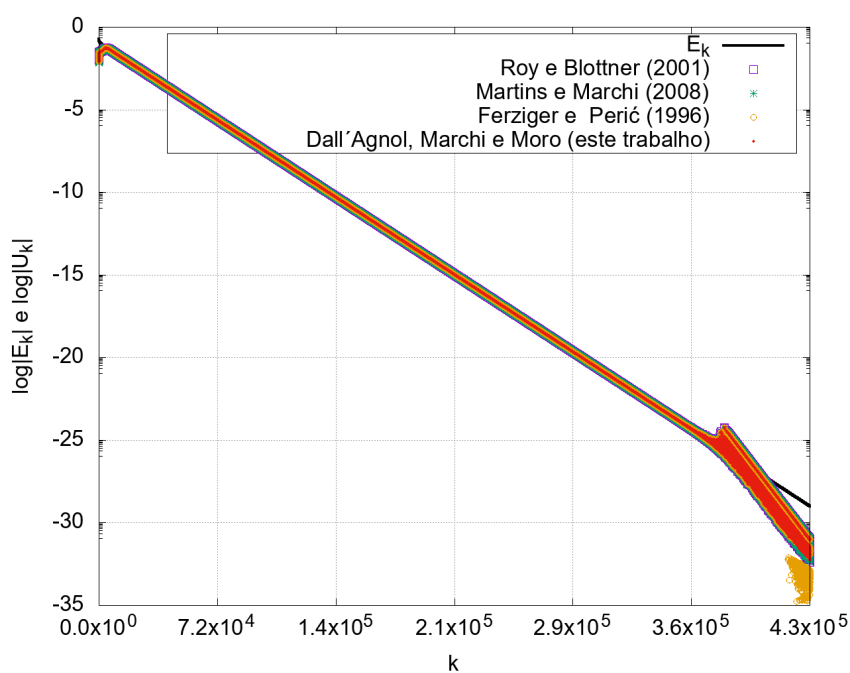
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.83 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO IV.

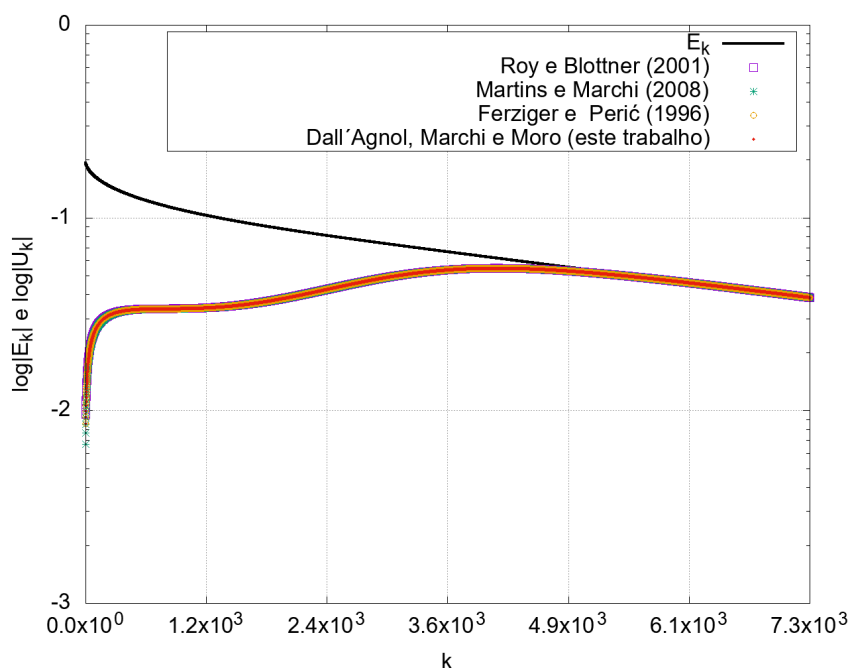


Fonte: a autora (2020).

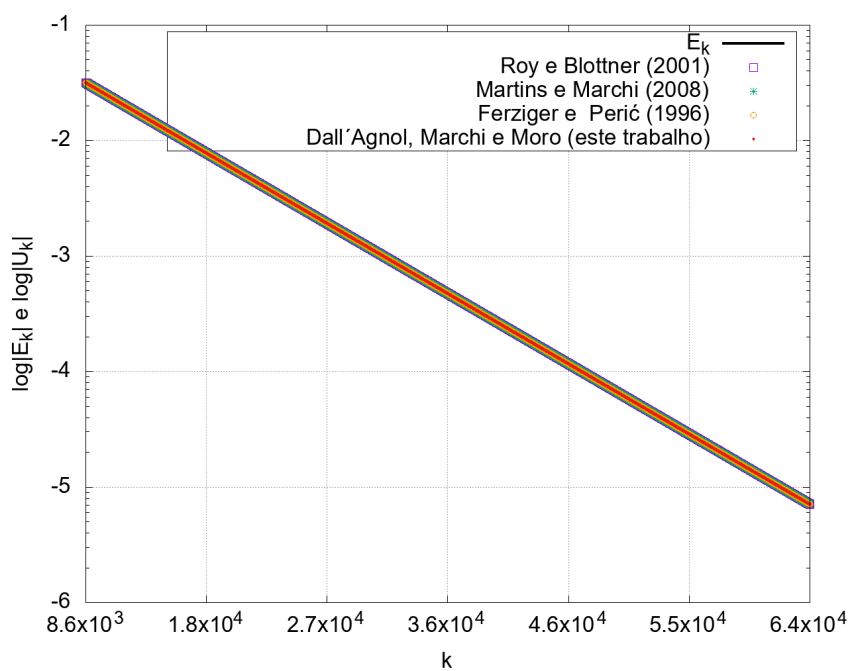
FIGURA D.84 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

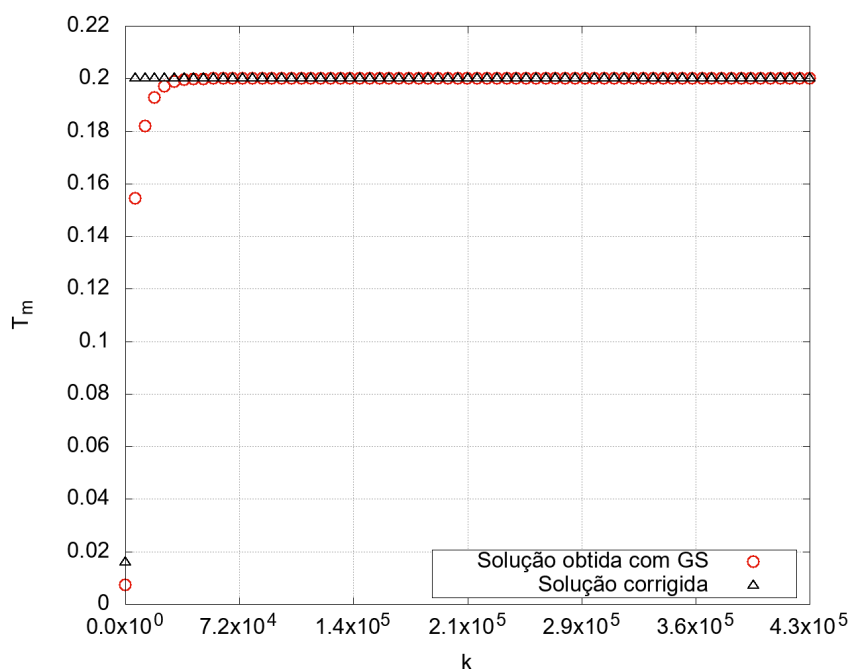
FIGURA D.85 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 2, NOS INTERVALOS I E II.

Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.86 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO III.

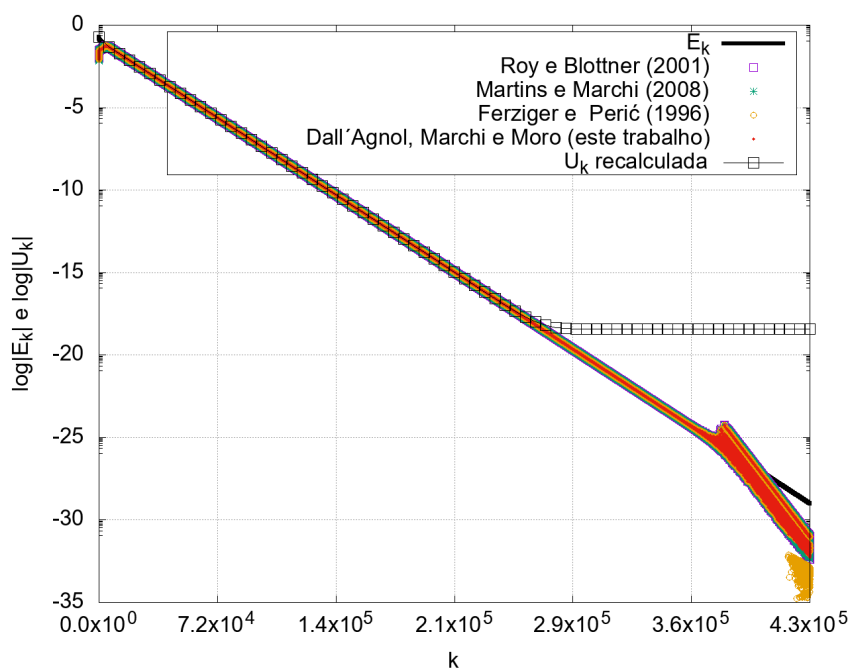
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.87 – SOLUÇÕES COM GS E SOLUÇÕES CORRIGIDAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



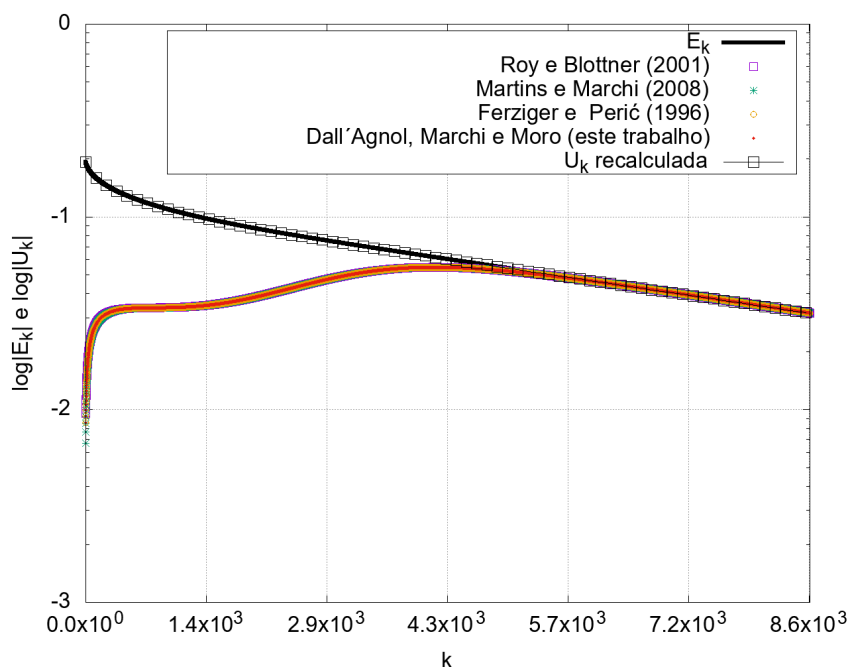
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.88 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



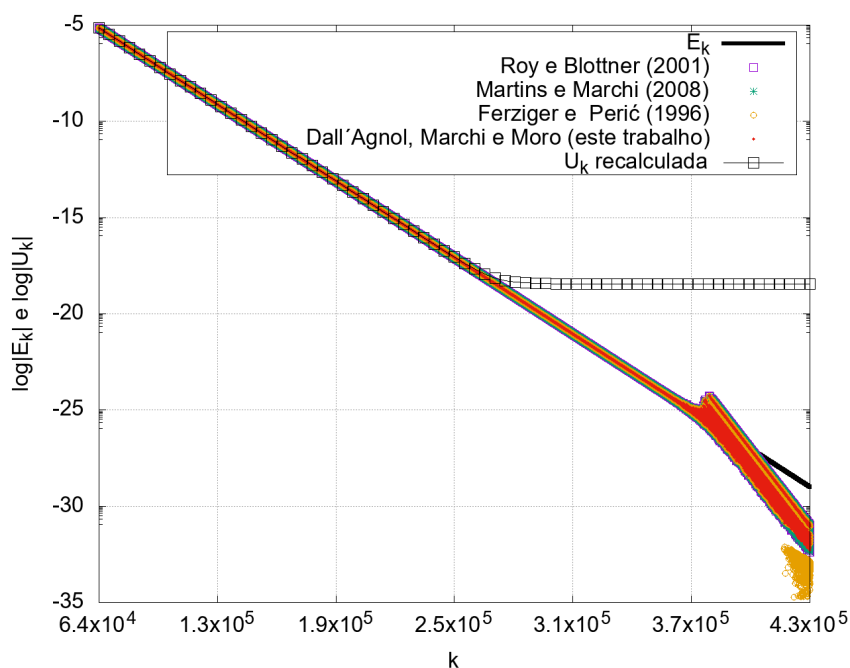
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.89 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 2, NOS INTERVALOS I E II.



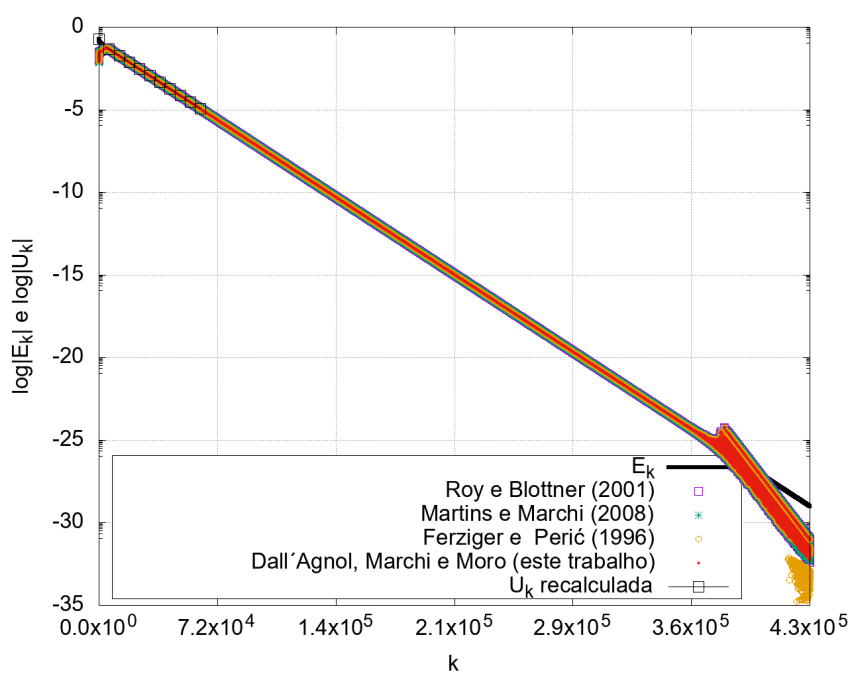
Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.90 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 2, NO INTERVALO IV.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA D.91 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 1, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

APÊNDICE E – RESULTADOS DO PROBLEMA 2, CASOS 1 E 2

E.1 Variável 1: valor da função (temperatura) no ponto central do domínio de cálculo $T(1/2)$

E.1.1 Caso 1

TABELA E.7 – INTERVALOS DE VARIAÇÃO DE ψ PARA O CASO 1 DO PROBLEMA 2, VARIÁVEL $T(1/2)$.

Intervalo	Iterações
I	36:133
II	134:2226
III	2227:7887

FIGURA E.92 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.

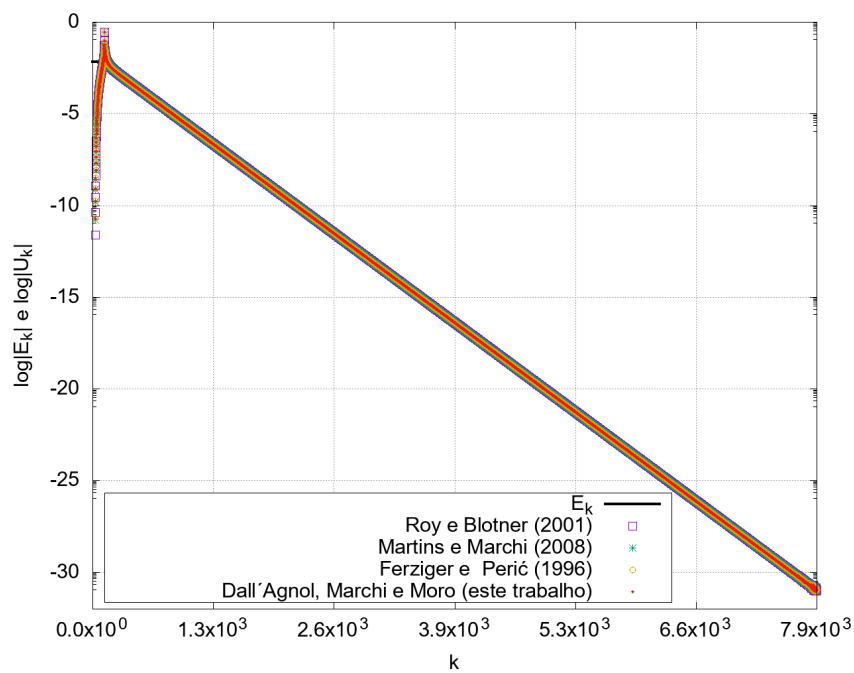
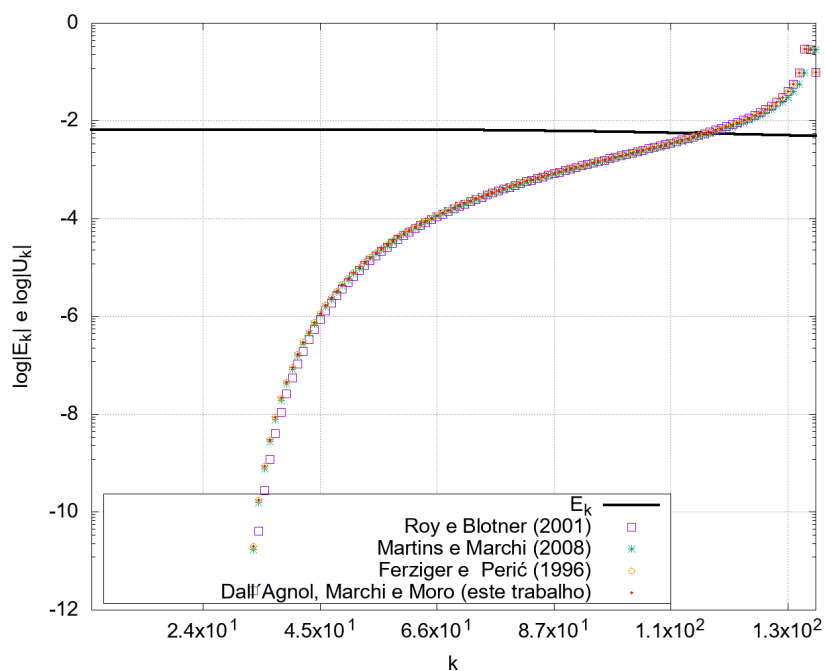
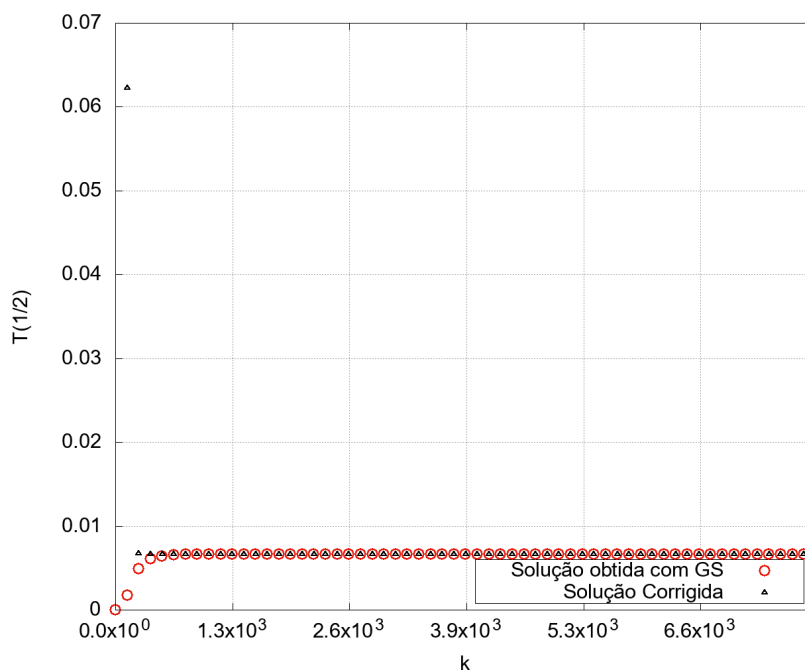


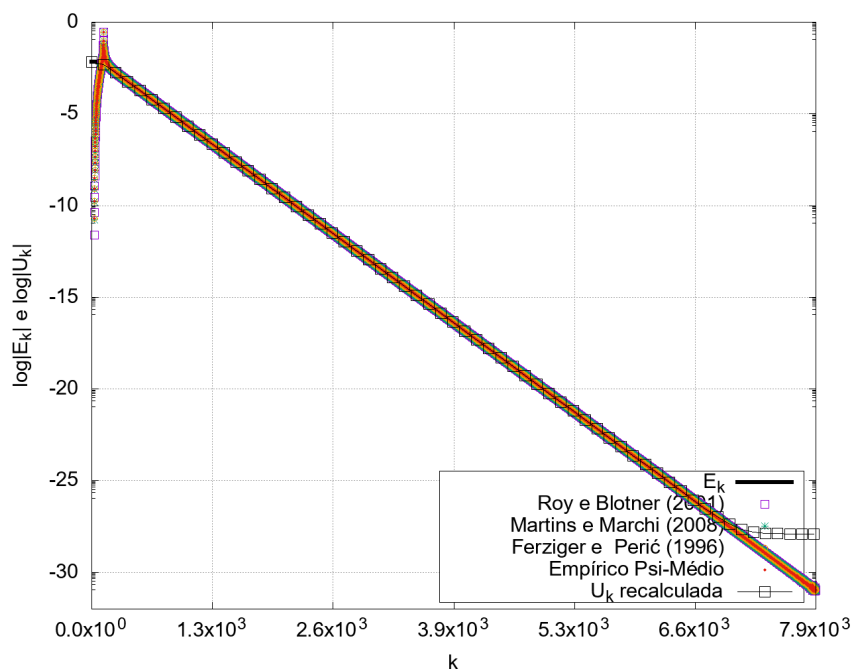
FIGURA E.93 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, NOS INTERVALOS I E II.

Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.94 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.

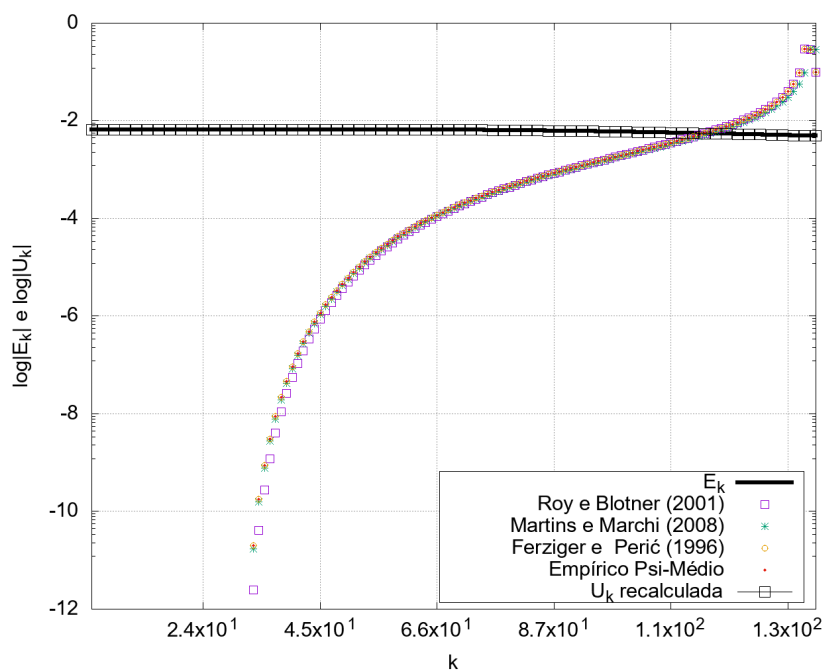
Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.95 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



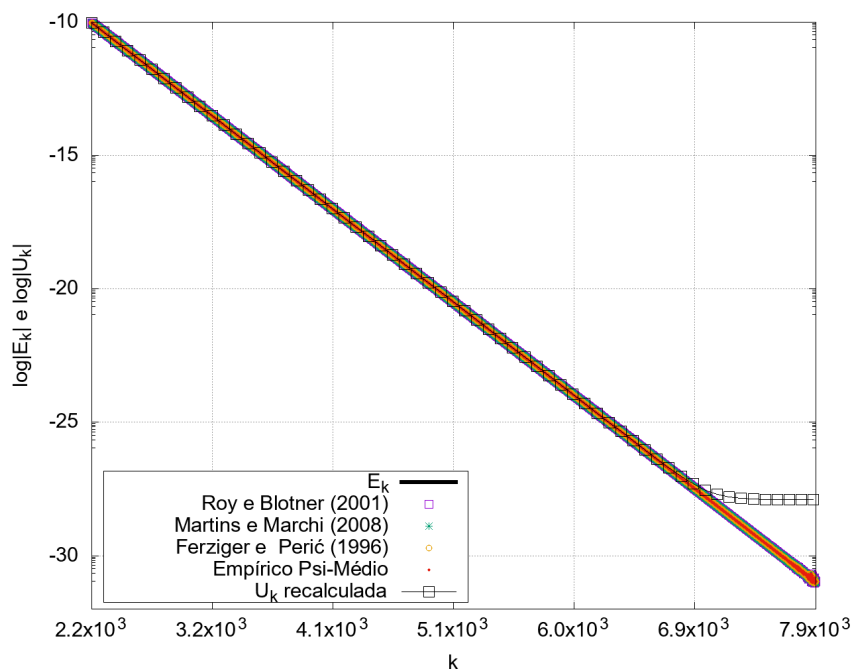
Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.96 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, NOS INTERVALOS I E II.



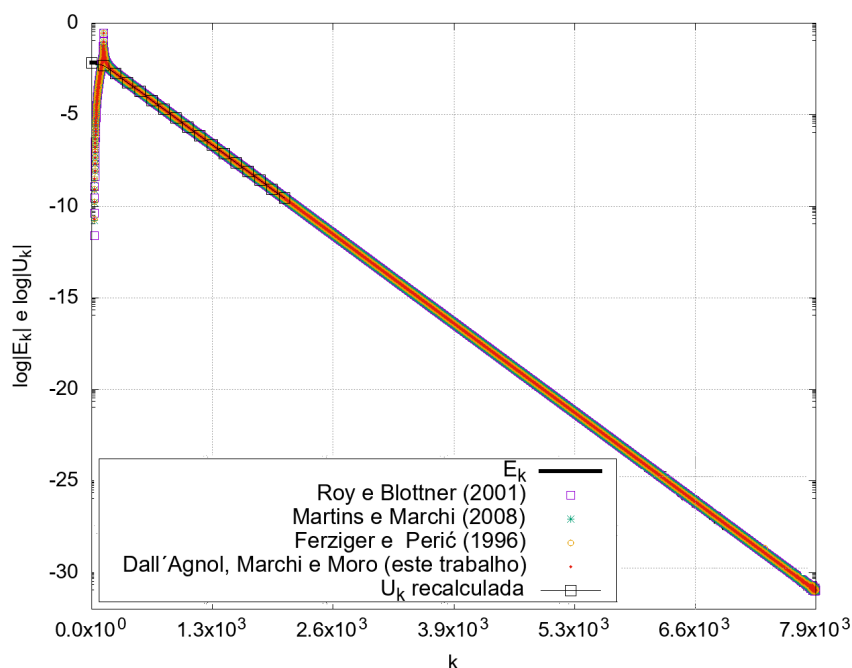
Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.97 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, NO INTERVALO III.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.98 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, EM TODOS OS INTERVALOS.



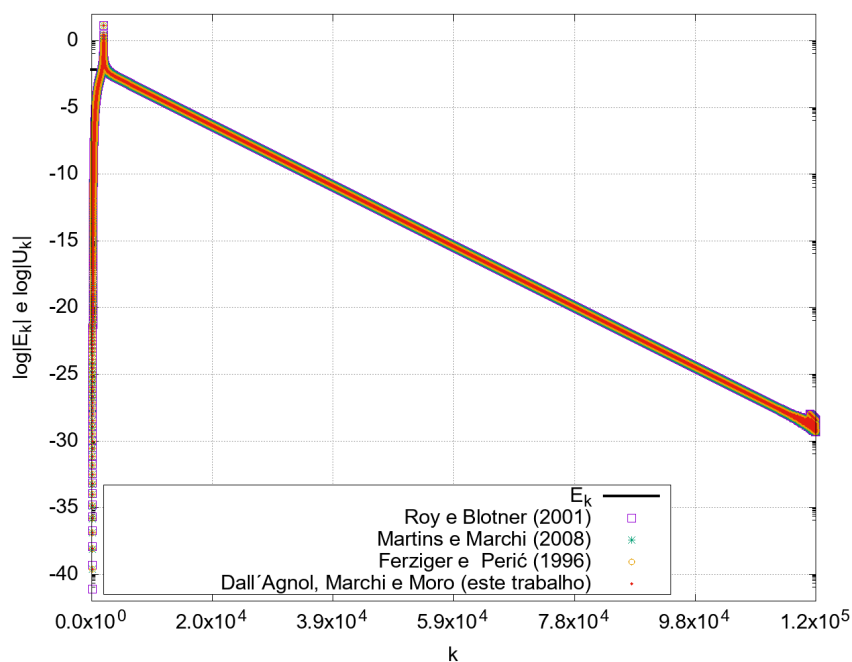
Fonte: a autora (2020).

E.1.2 Caso 2

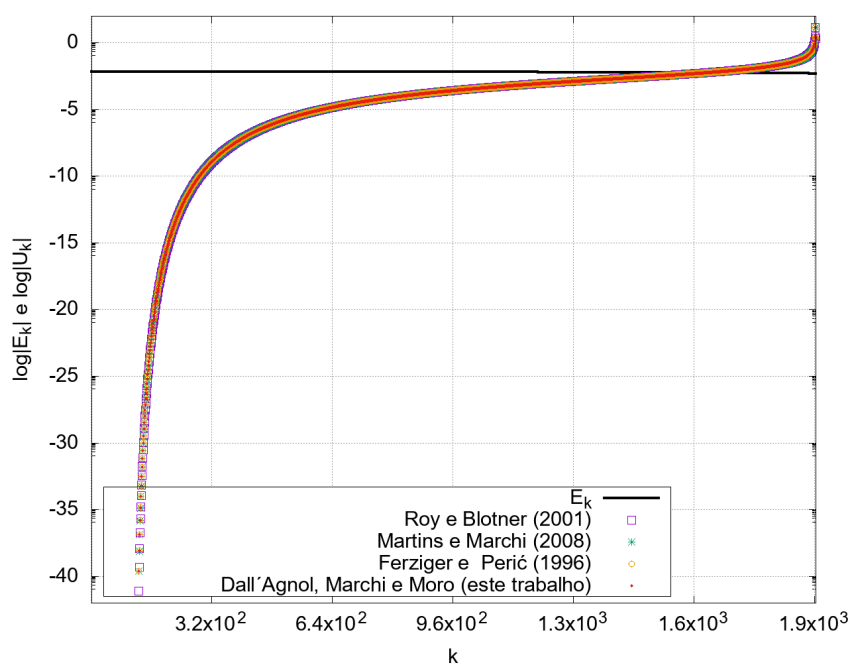
TABELA E.8 – INTERVALOS DE VARIAÇÃO DE ψ PARA O CASO 2 DO PROBLEMA 2, VARIÁVEL $T(1/2)$.

Intervalo	Iterações
I	132:1920
II	1921:28800
III	28801:117628

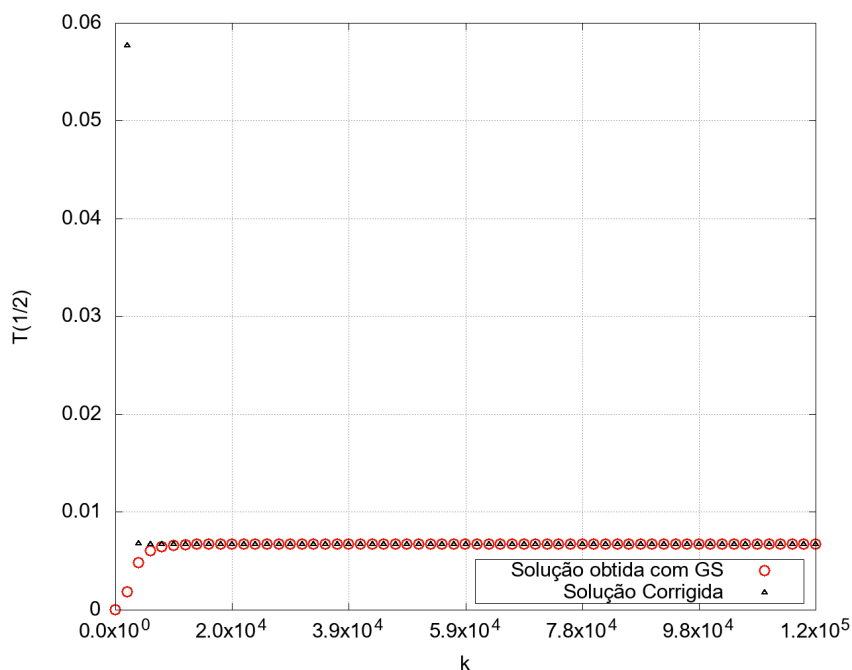
FIGURA E.99 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

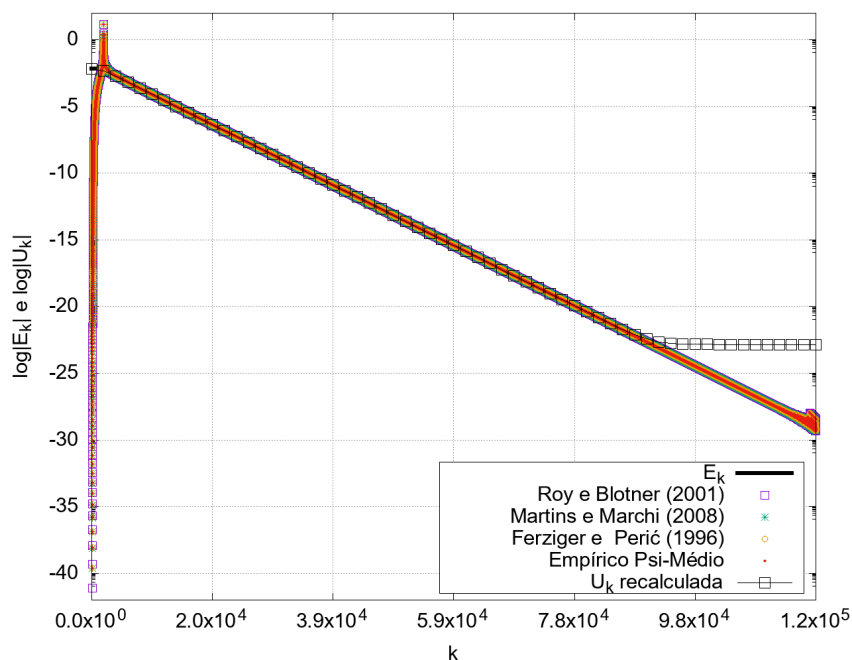
FIGURA E.100 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, NOS INTERVALOS I E II.

Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.101 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.

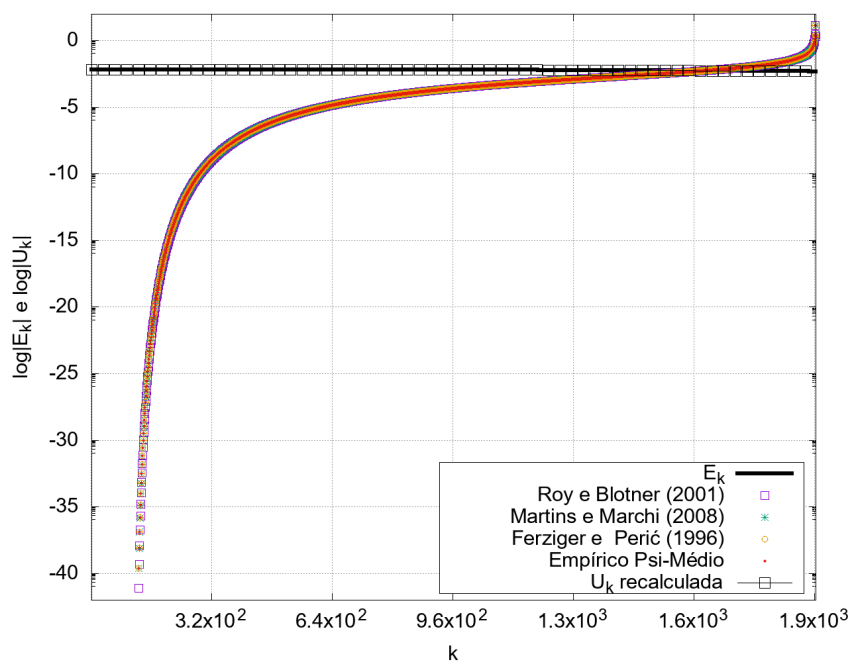
Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.102 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



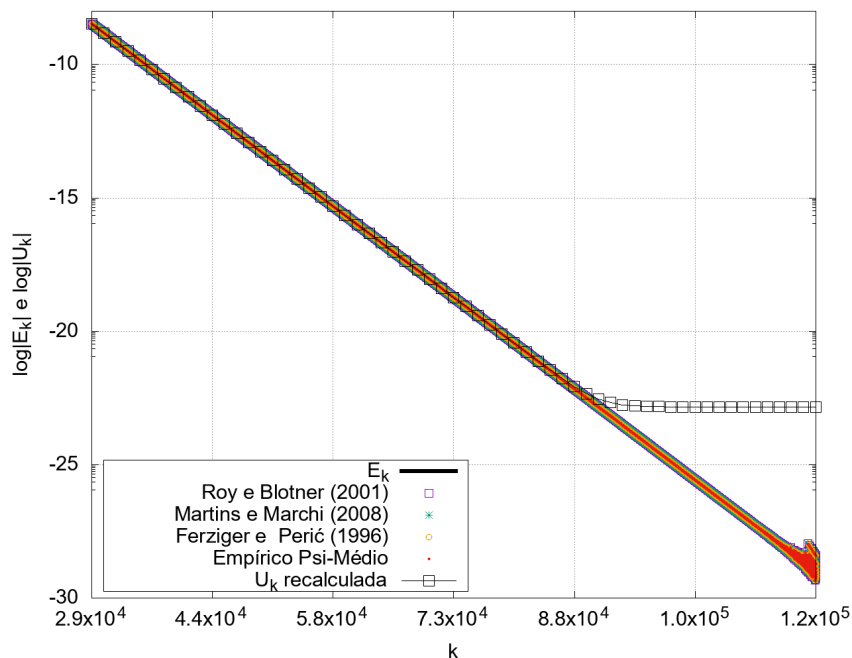
Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.103 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, NOS INTERVALOS I E II.



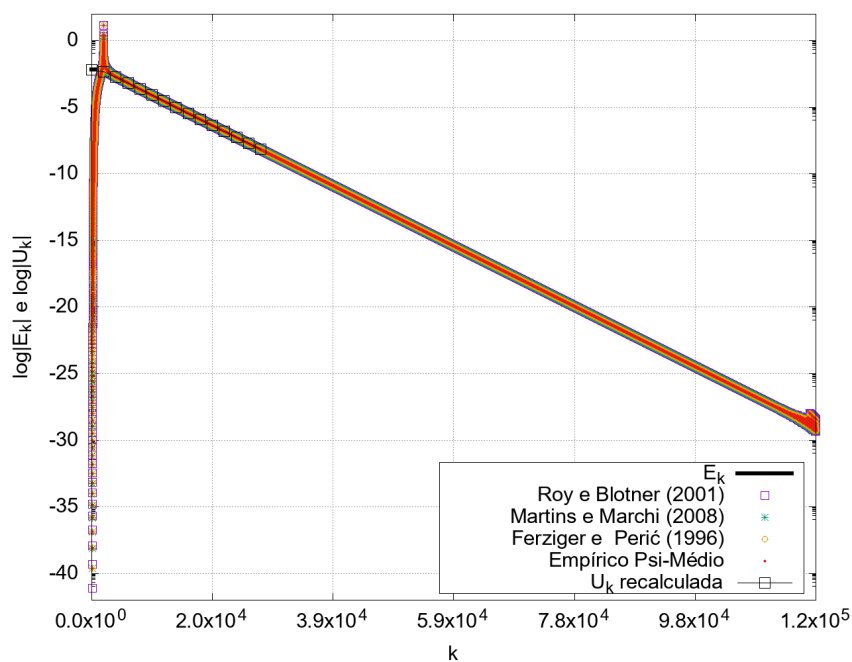
Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.104 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, NO INTERVALO III.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.105 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(1/2)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, EM TODOS OS INTERVALOS.



Fonte: a autora (2020).

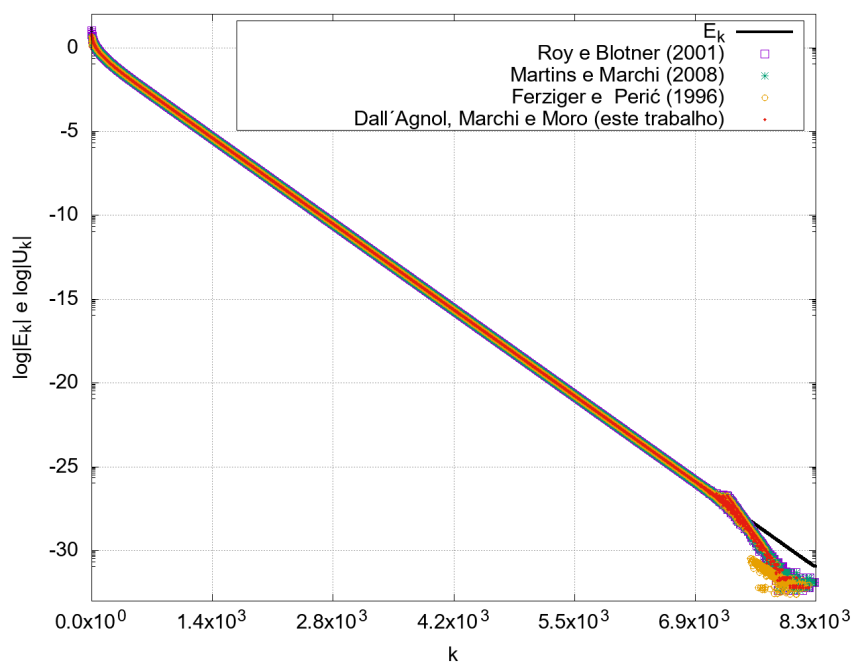
E.2 Variável 2: gradiente no contorno leste (direito) do domínio de cálculo $\text{grad } T(1)$

E.2.1 Caso 1

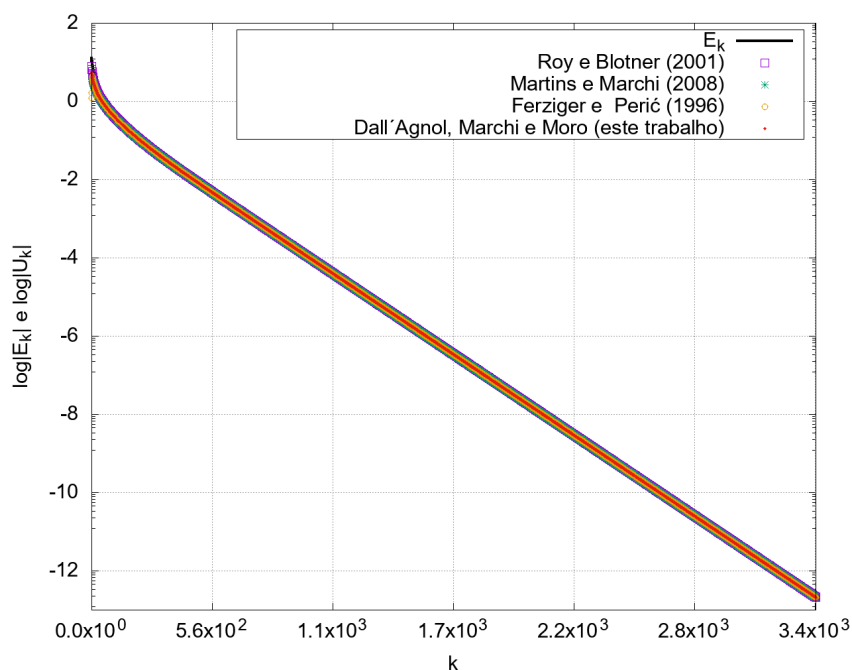
TABELA E.9 – INTERVALOS DE VARIAÇÃO DE ψ PARA O CASO 1 DO PROBLEMA 2, VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$.

Intervalo	Iterações
I	3:3353
II	3354:8301

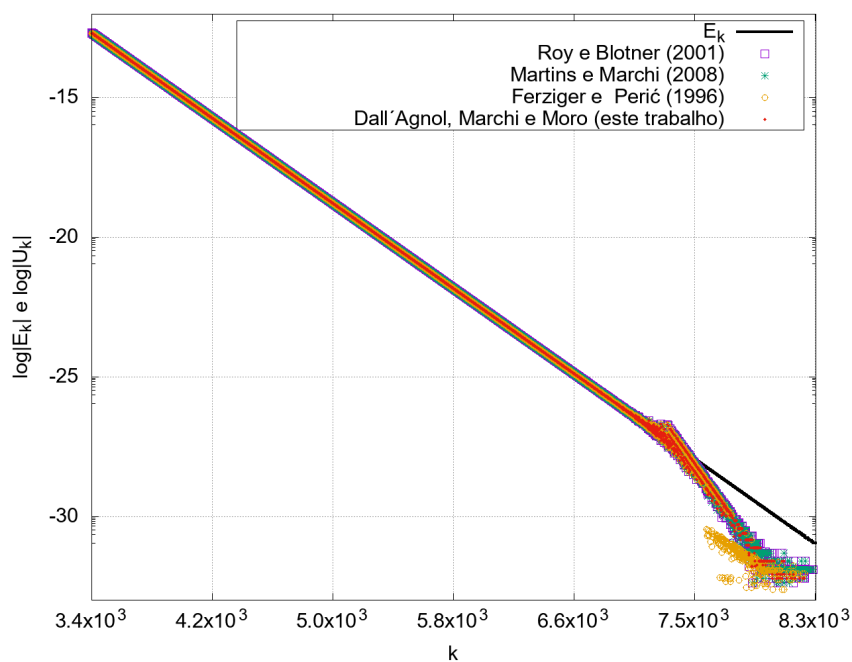
FIGURA E.106 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

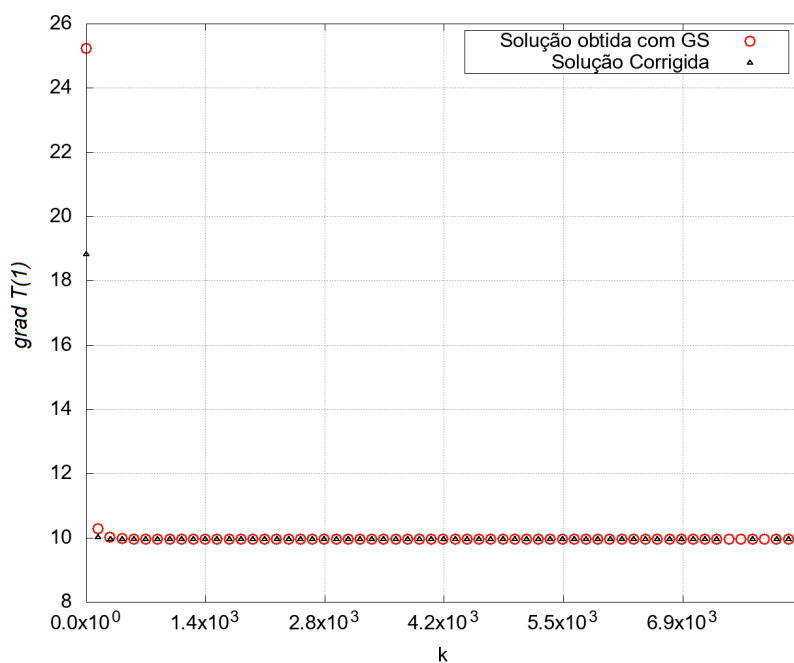
FIGURA E.107 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, NO INTERVALO I.

Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.108 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, NO INTERVALO II.

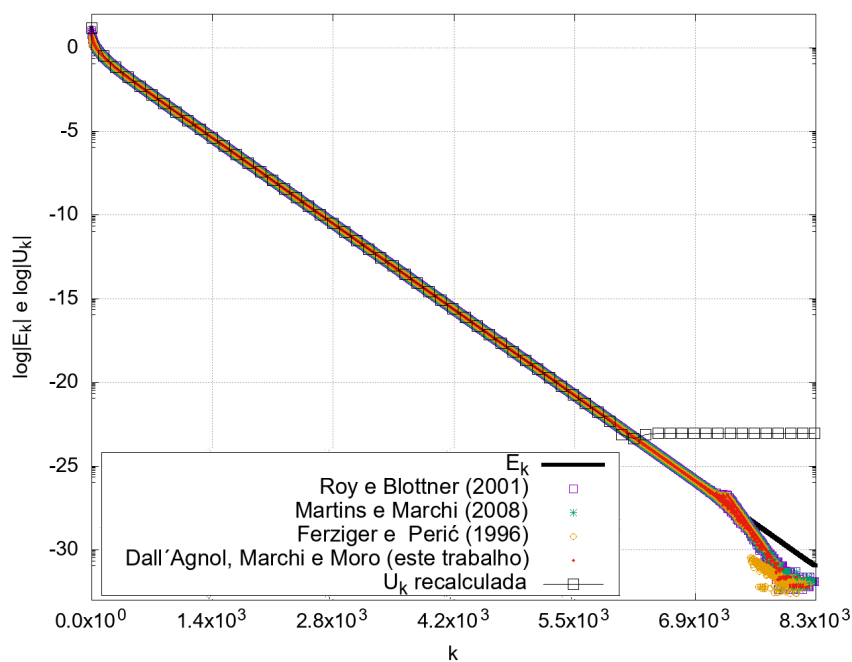
Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.109 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



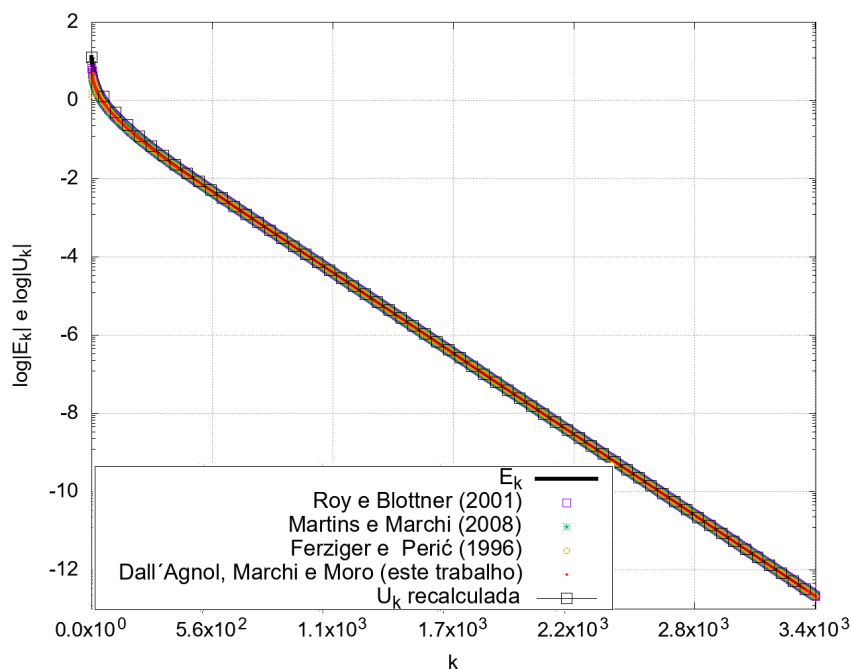
Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.110 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



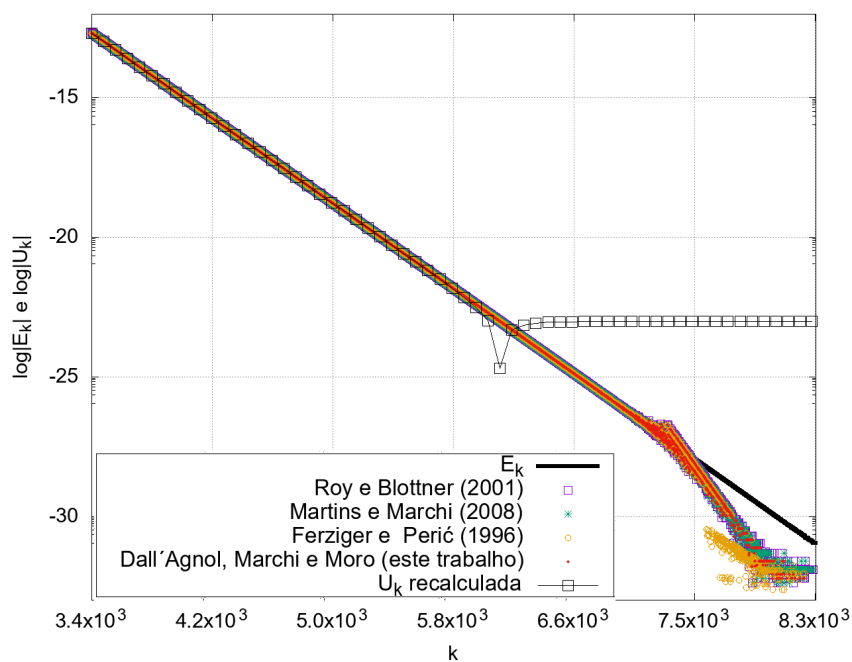
Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.111 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, NO INTERVALO I.



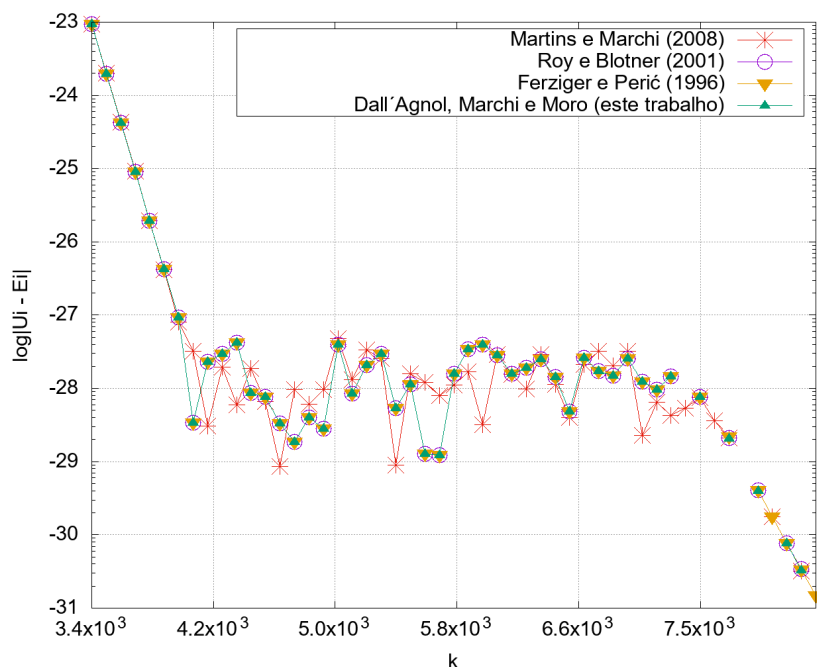
Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.112 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, NO INTERVALO II.



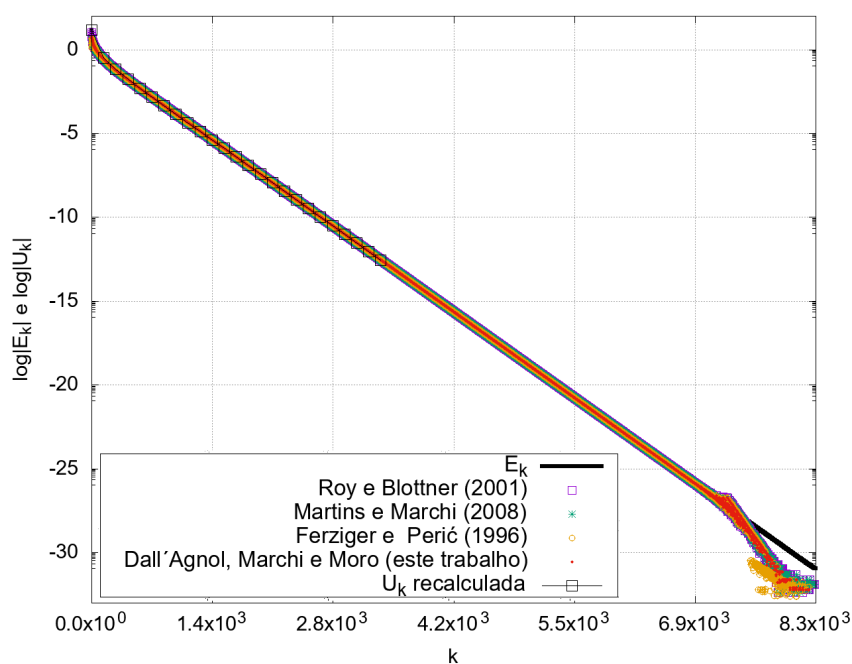
Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.113 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, NO INTERVALO II.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.114 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\frac{dT}{dx} \big|_{x=1}$ DO PROBLEMA 2, CASO 1, EM TODOS OS INTERVALOS.



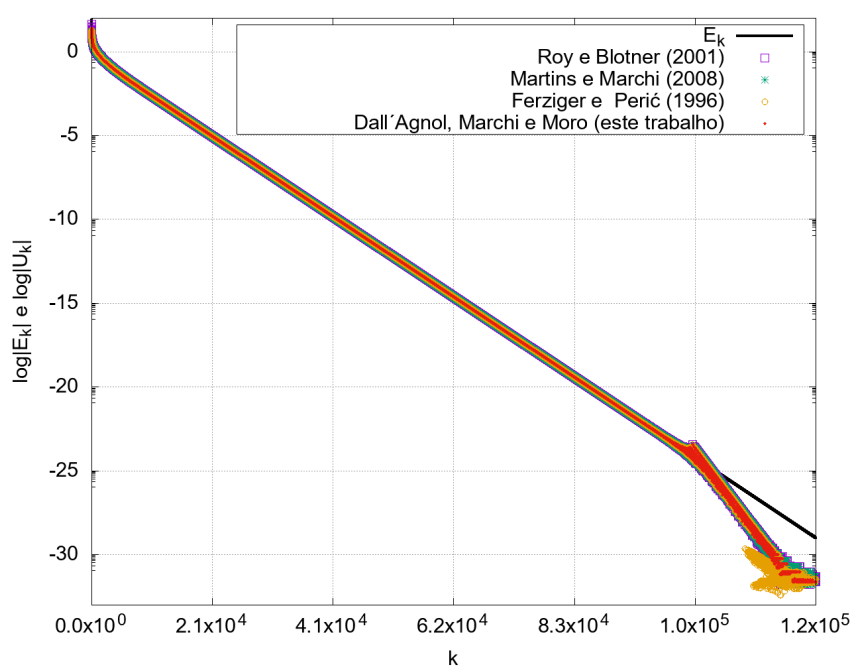
Fonte: a autora (2020).

E.2.2 Caso 2

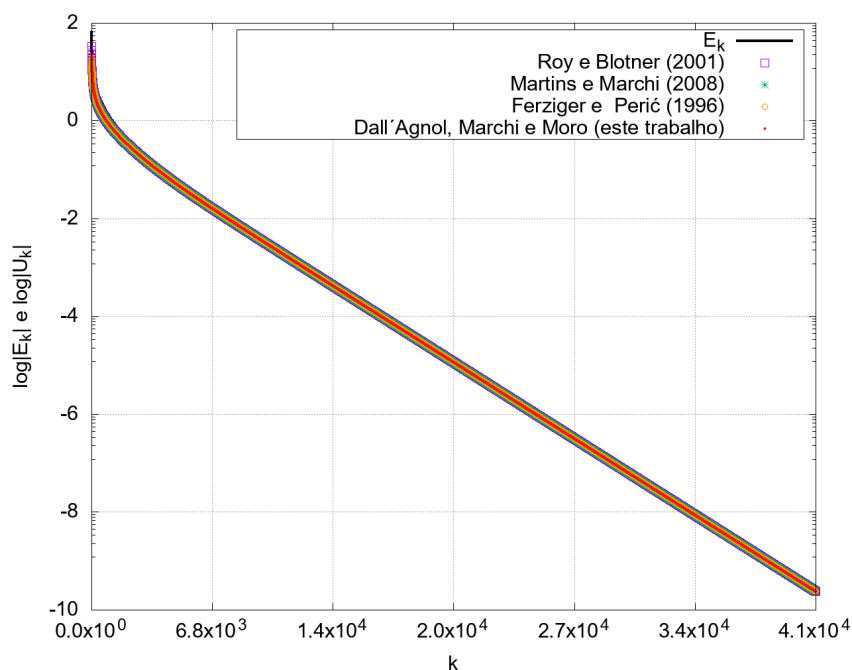
TABELA E.10 – INTERVALOS DE VARIAÇÃO DE ψ PARA O CASO 2 DO PROBLEMA 2, VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$.

Intervalo	Iterações
I	3:40567
II	40568:124412

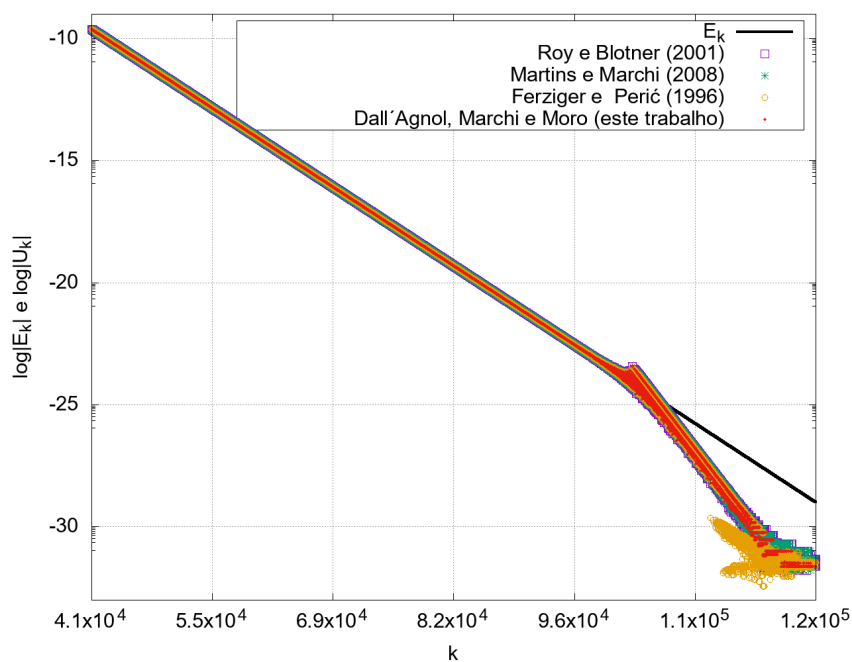
FIGURA E.115 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

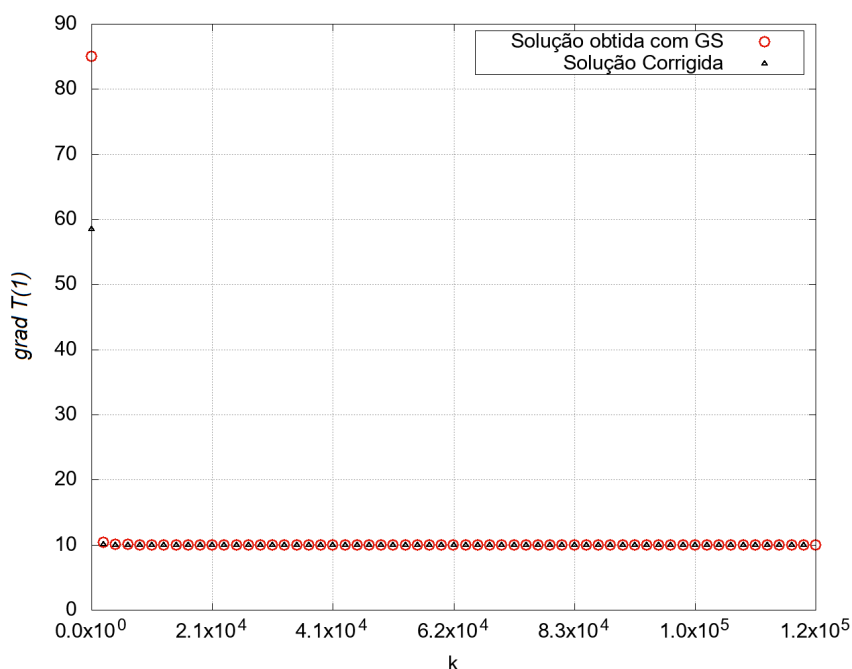
FIGURA E.116 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, NO INTERVALO I.

Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.117 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, NO INTERVALO II.

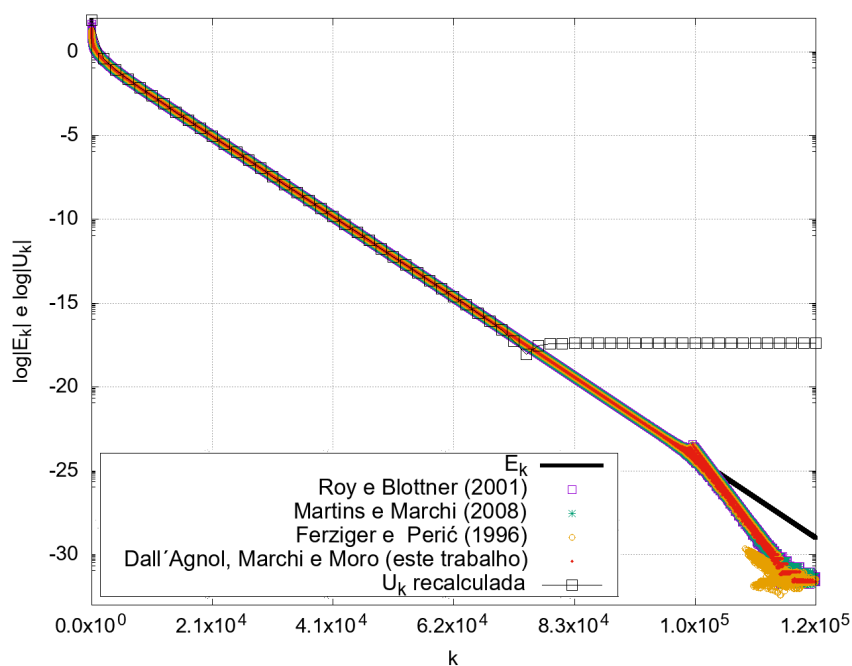
Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.118 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



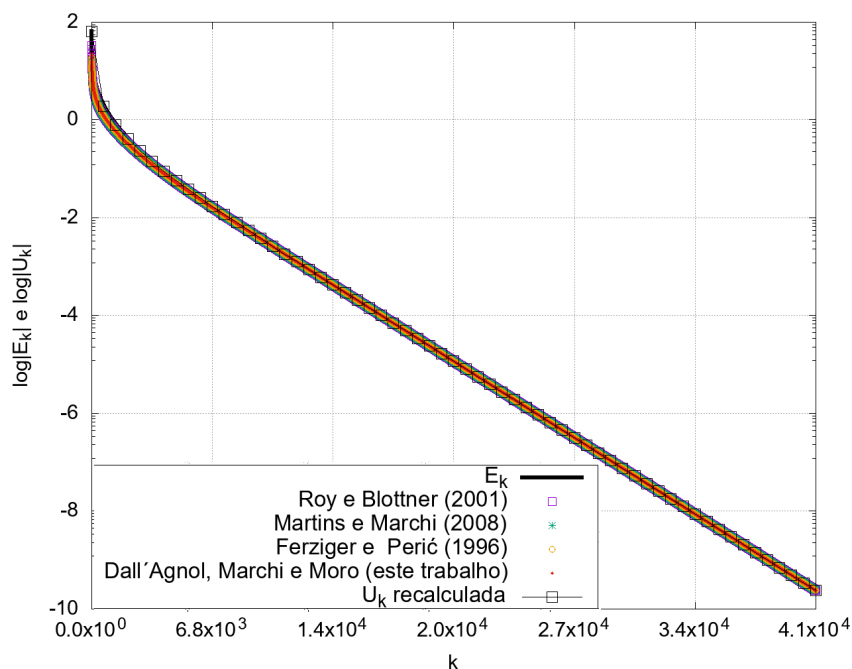
Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.119 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



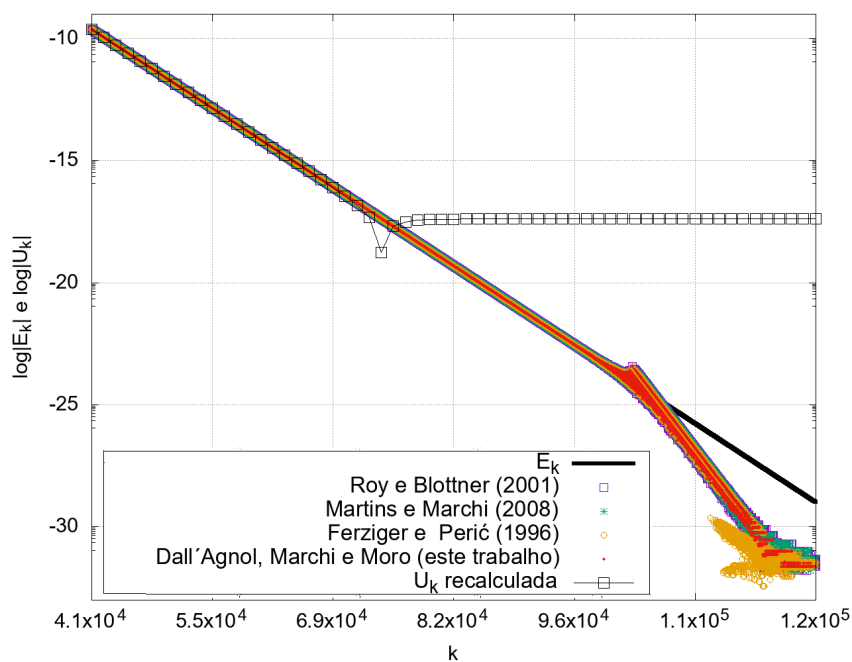
Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.120 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, NO INTERVALO I.



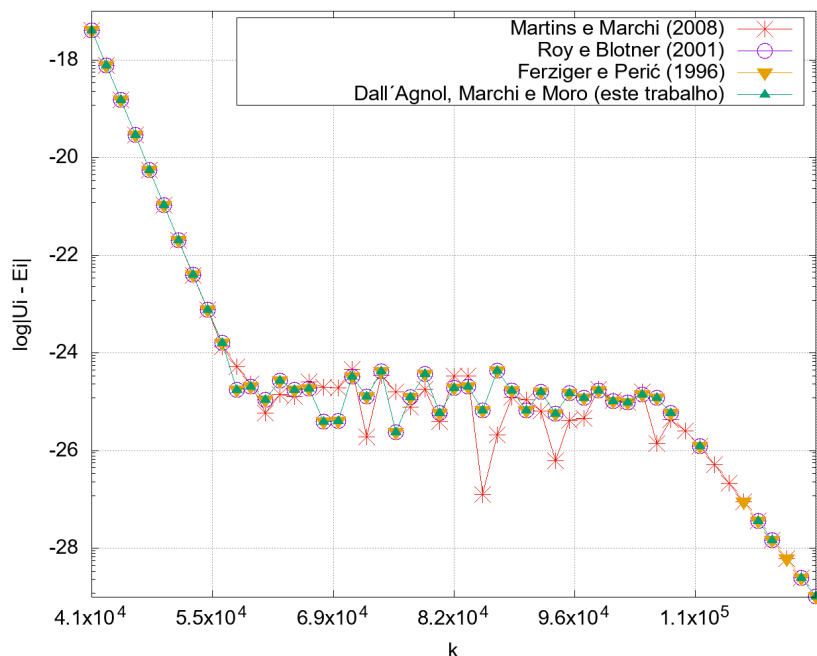
Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.121 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, NO INTERVALO II.



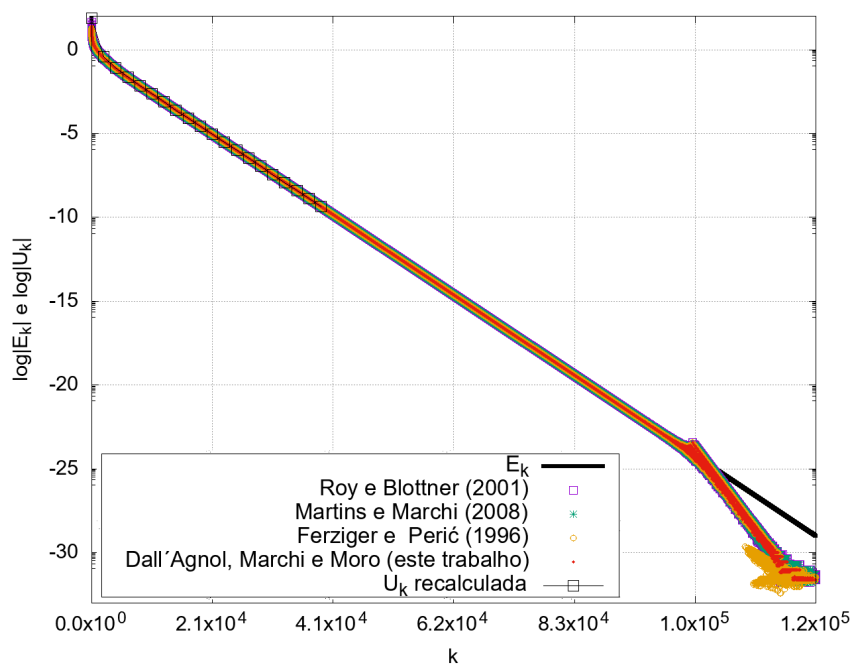
Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.122 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, NO INTERVALO II.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.123 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1)$ DO PROBLEMA 2, CASO 2, EM TODOS OS INTERVALOS.



Fonte: a autora (2020).

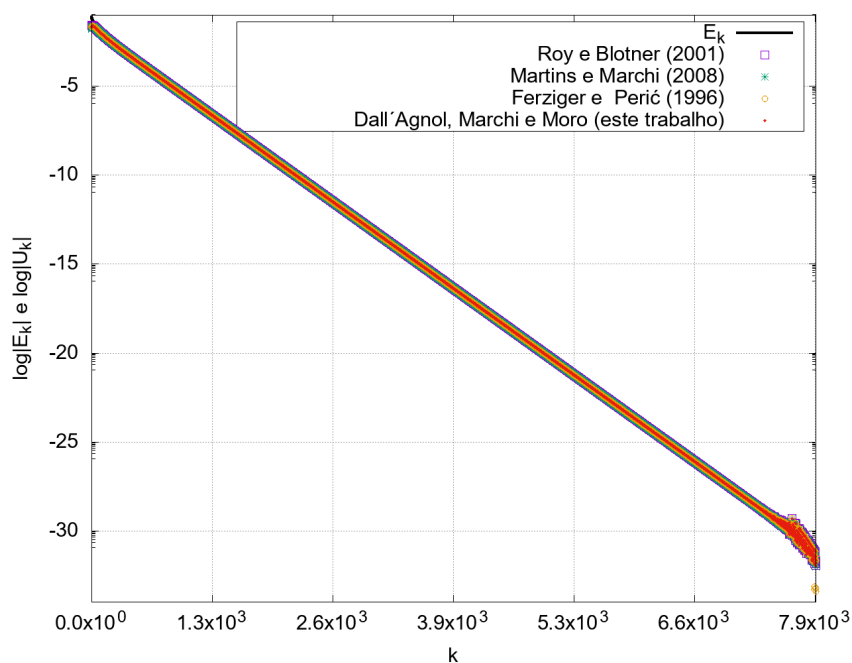
E.3 Variável 3: valor médio da função (temperatura média) T_m

E.3.1 Caso 1

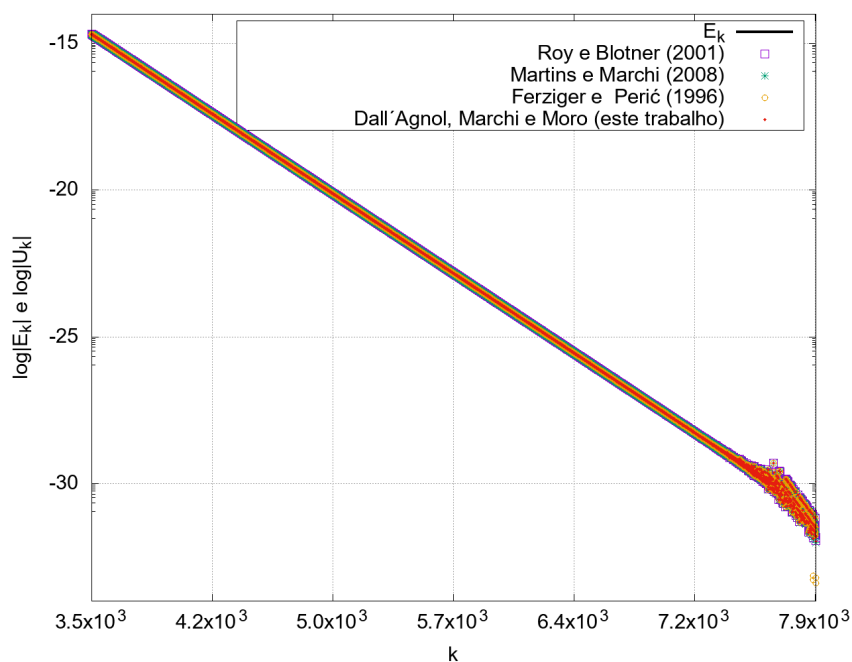
TABELA E.11 – INTERVALOS DE VARIAÇÃO DE ψ PARA O CASO 1 DO PROBLEMA 2, VARIÁVEL T_m .

Intervalo	Iterações
I	3:3489
II	3490:7892

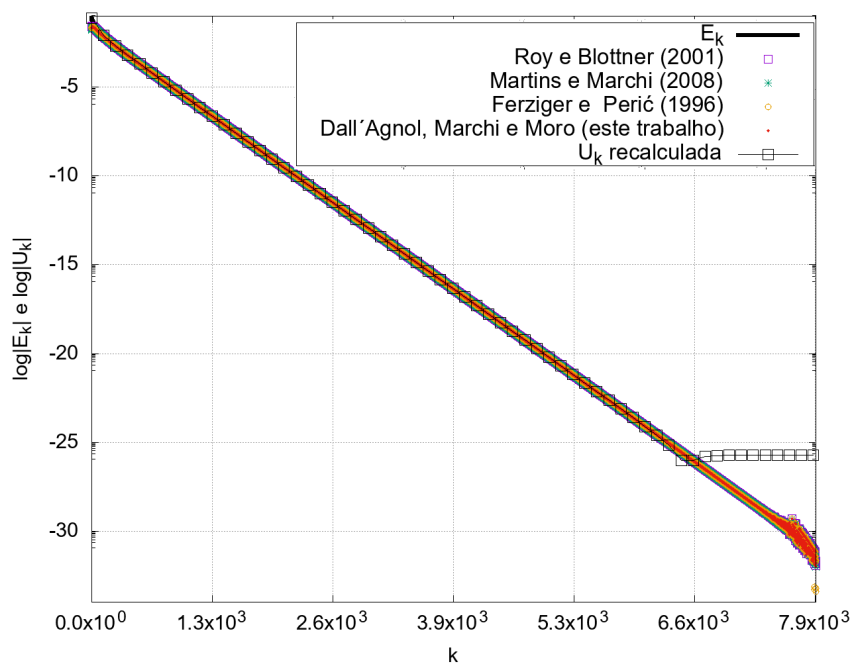
FIGURA E.124 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

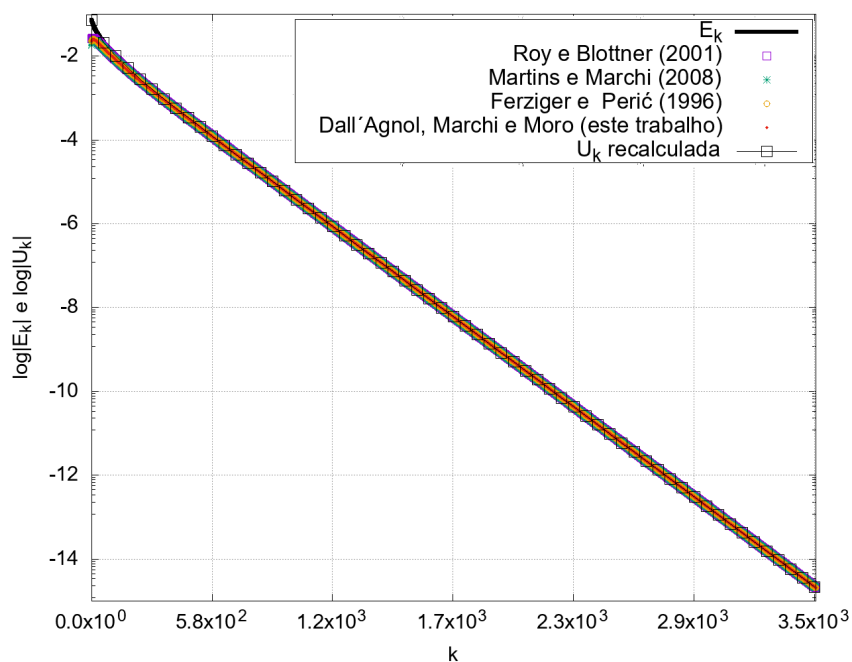
FIGURA E.125 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 1, NO INTERVALO II.

Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.126 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES.

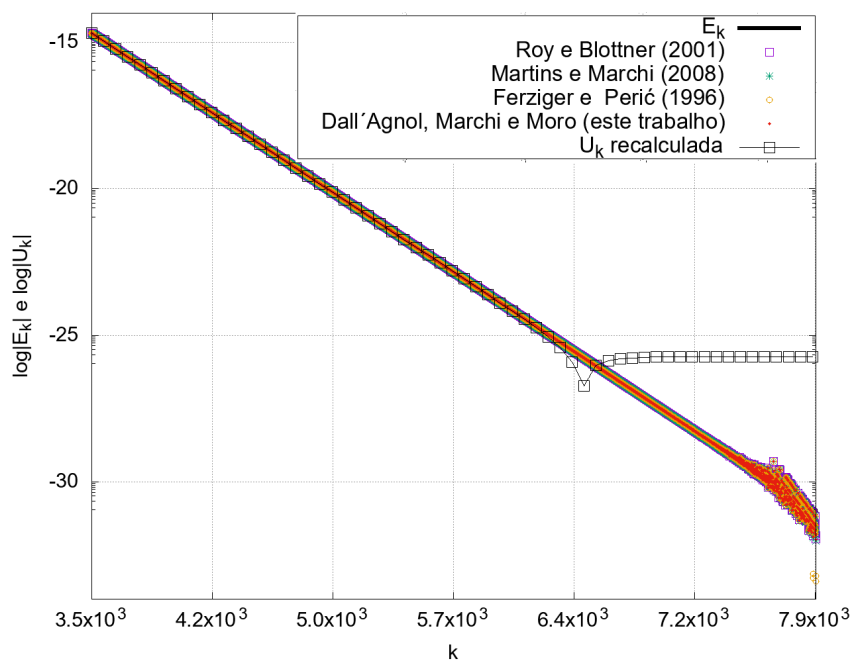
Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.127 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 1, NO INTERVALO I.



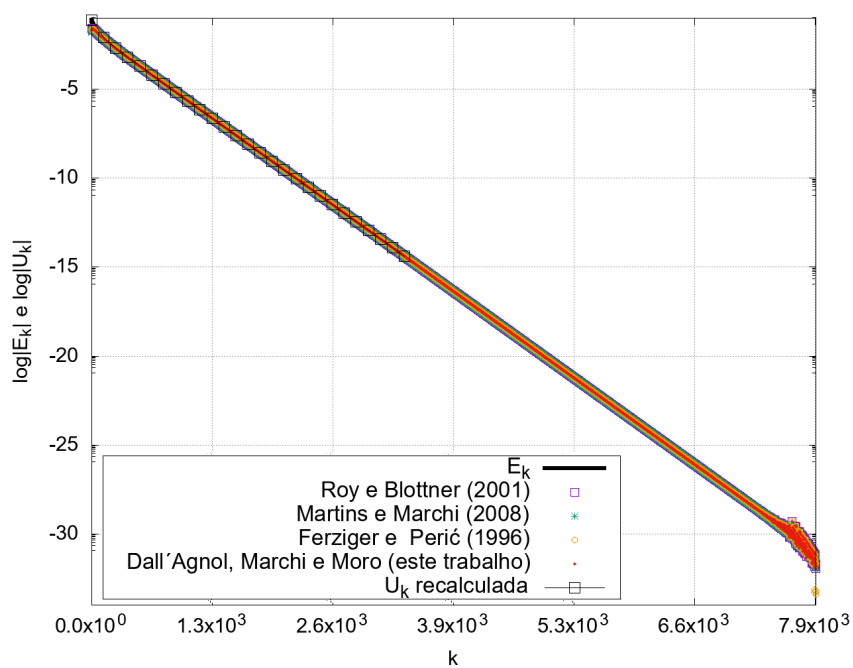
Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.128 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 1, NO INTERVALO II.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.129 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 1, EM TODOS OS INTERVALOS.

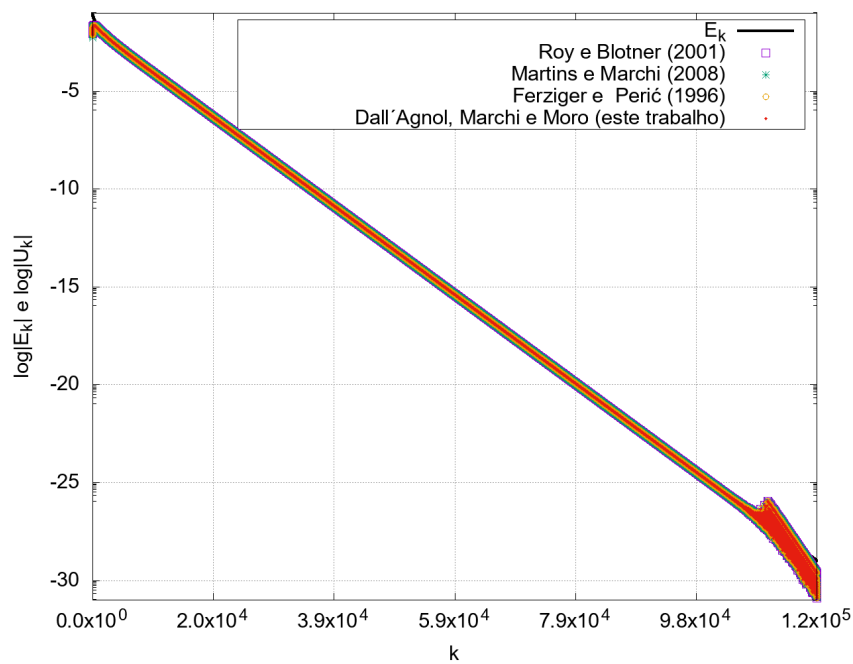


Fonte: a autora (2020).

E.3.2 Caso 2

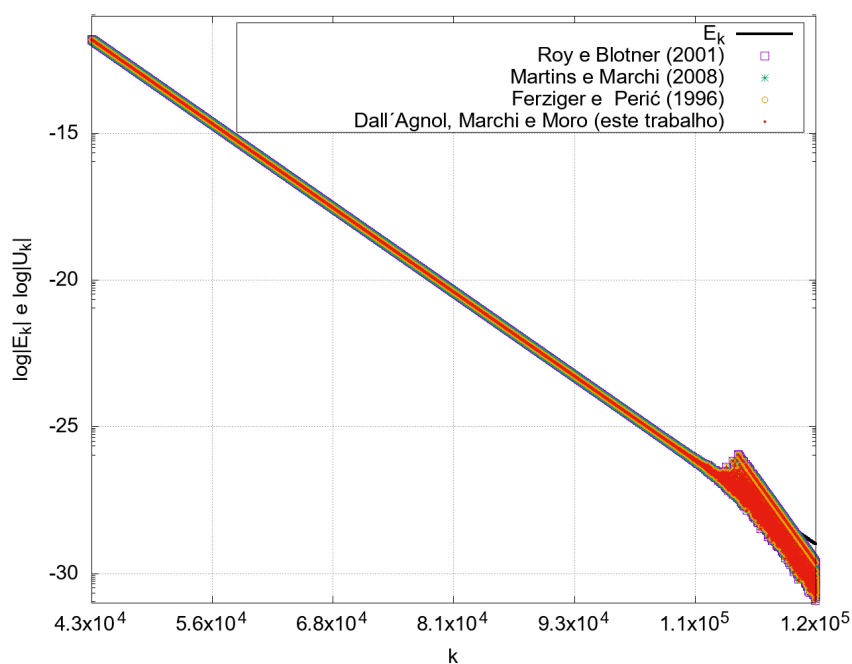
TABELA E.12 – INTERVALOS DE VARIAÇÃO DE ψ PARA O CASO 2 DO PROBLEMA 2, VARIÁVEL T_m .

Intervalo	Iterações
I	3:43358
II	43359:117789

FIGURA E.130 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.

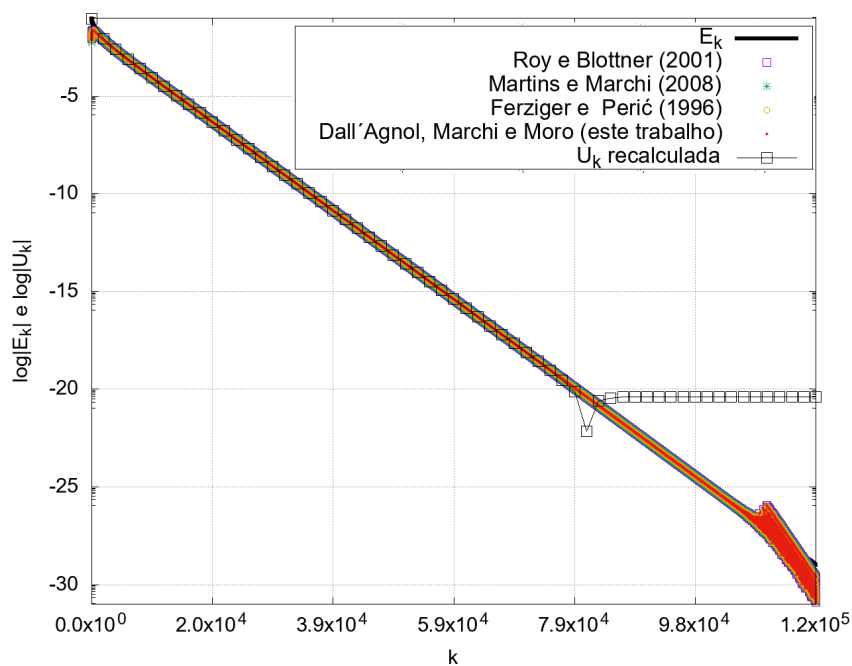
Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.131 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 2, NO INTERVALO II.



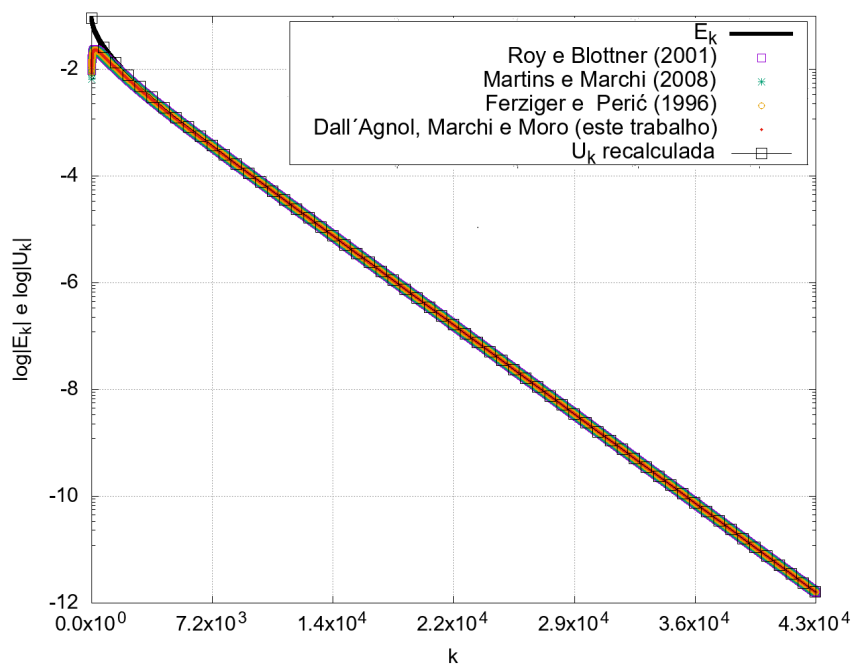
Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.132 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



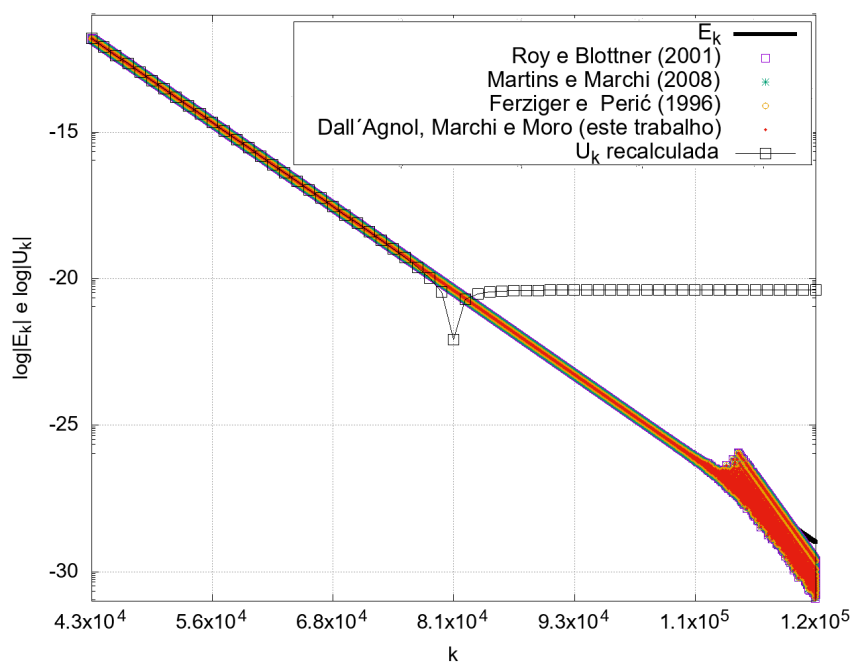
Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.133 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 2, NO INTERVALO I.



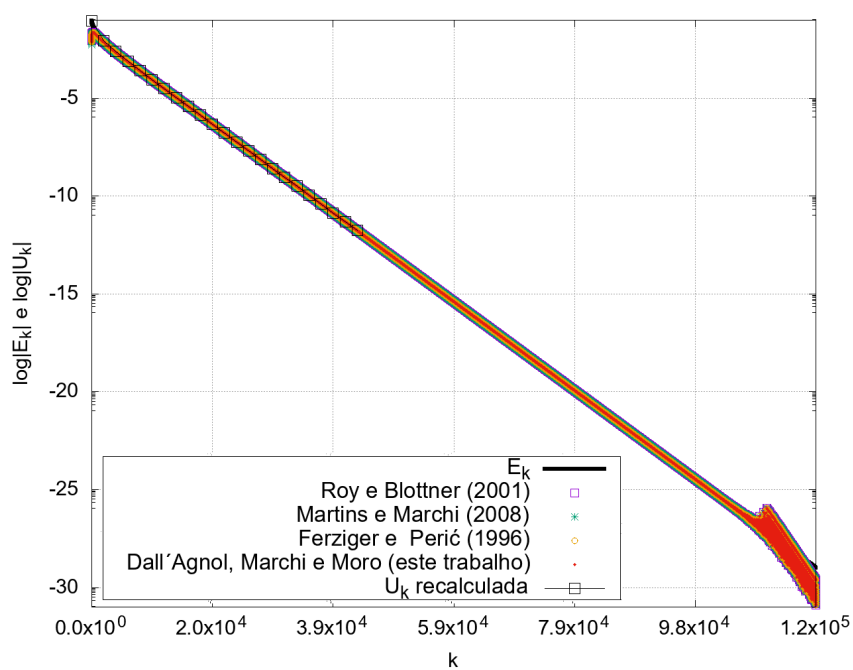
Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.134 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 2, NO INTERVALO II.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA E.135 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 2, CASO 2, EM TODOS OS INTERVALOS.



Fonte: a autora (2020).

APÊNDICE F – RESULTADOS DO PROBLEMA 3, CASO 1

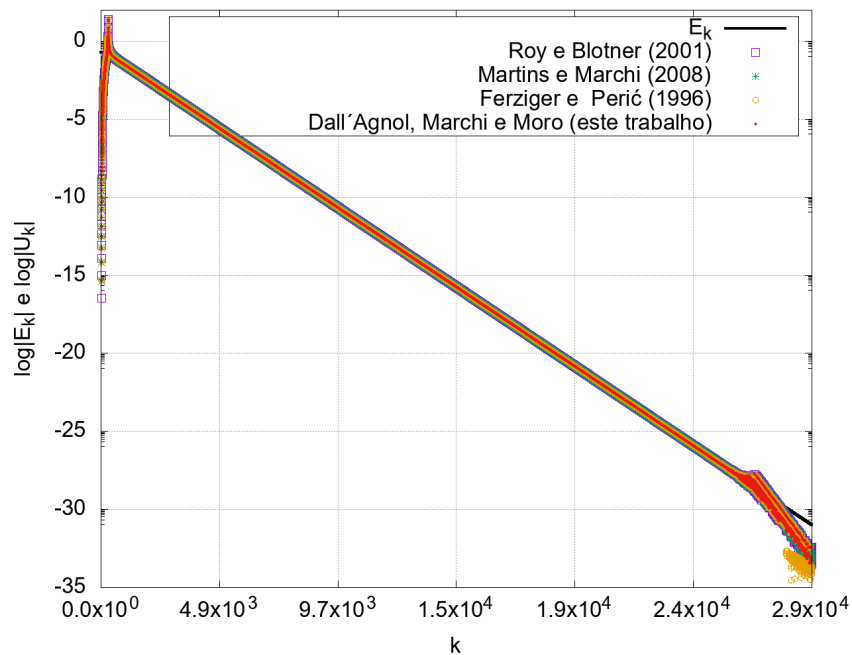
F.1 Variável 1: valor da função (temperatura) no ponto central do domínio de cálculo $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, sem *multigrid*

F.1.1 Caso 1

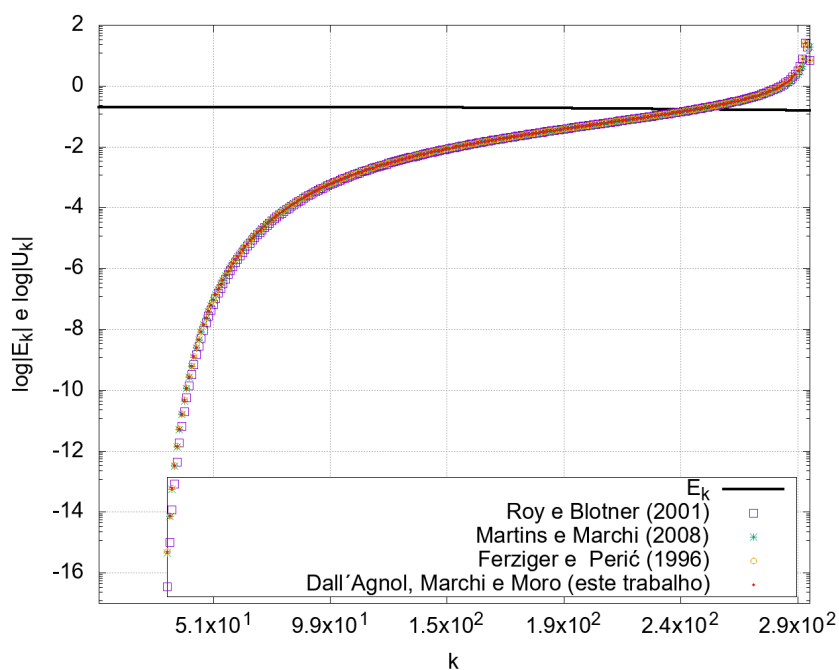
TABELA F.13 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, PROBLEMA 3.

Intervalo	Critério	Iterações
I	$-1 \leq \psi \leq 1$	33 : 295
II	$\psi > 1$ sem erros significativos de arredondamento	296 : 4738
III	$\psi > 1$ com erros significativos de arredondamento	4739 : 29153

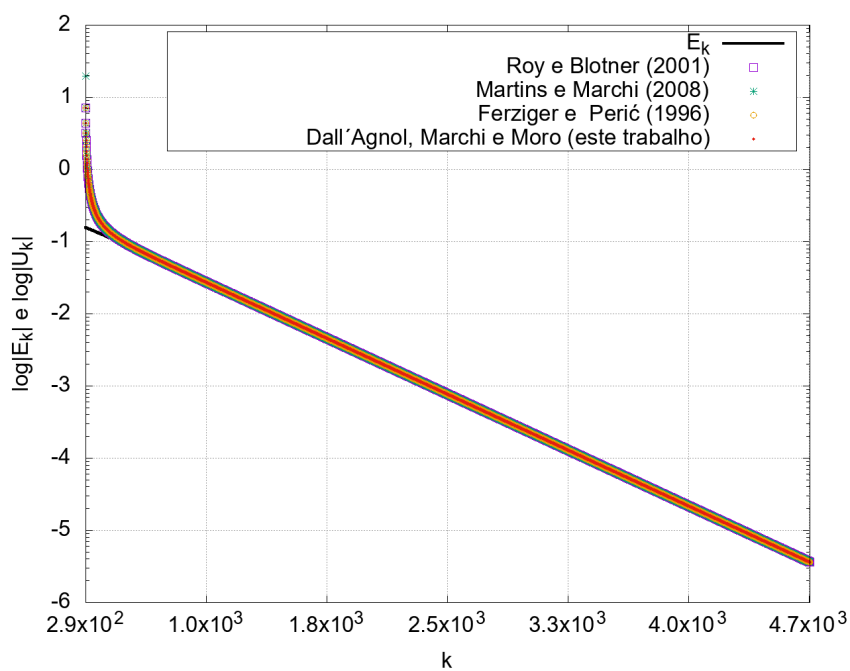
FIGURA F.136 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



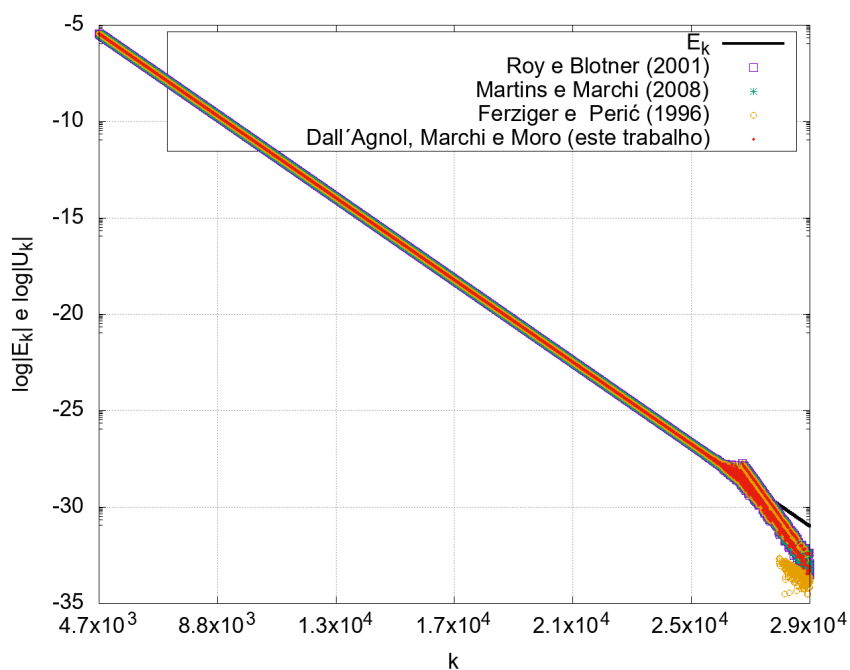
Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.137 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, NOS INTERVALOS I E II.

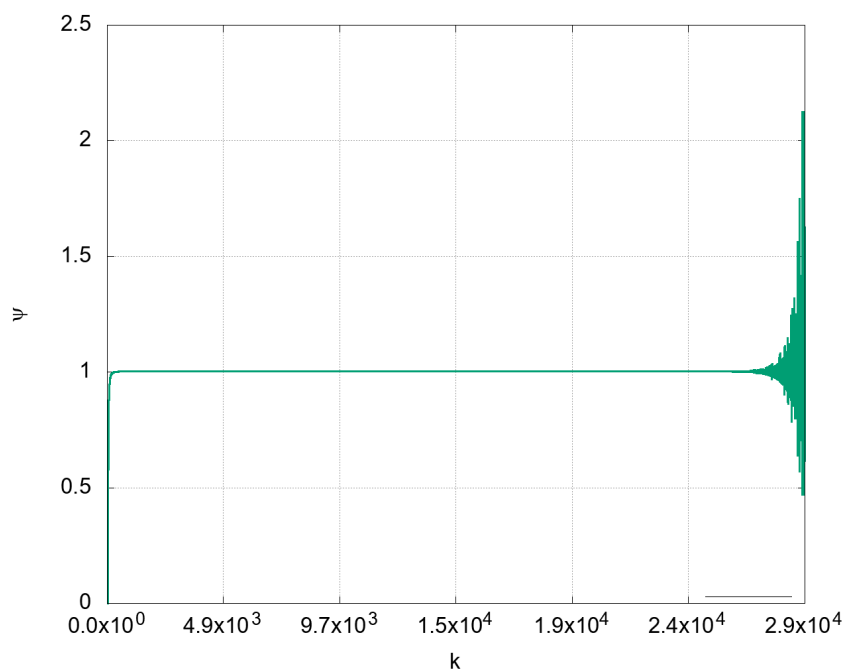
Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.138 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, NO INTERVALO II.

Fonte: a autora (2020).

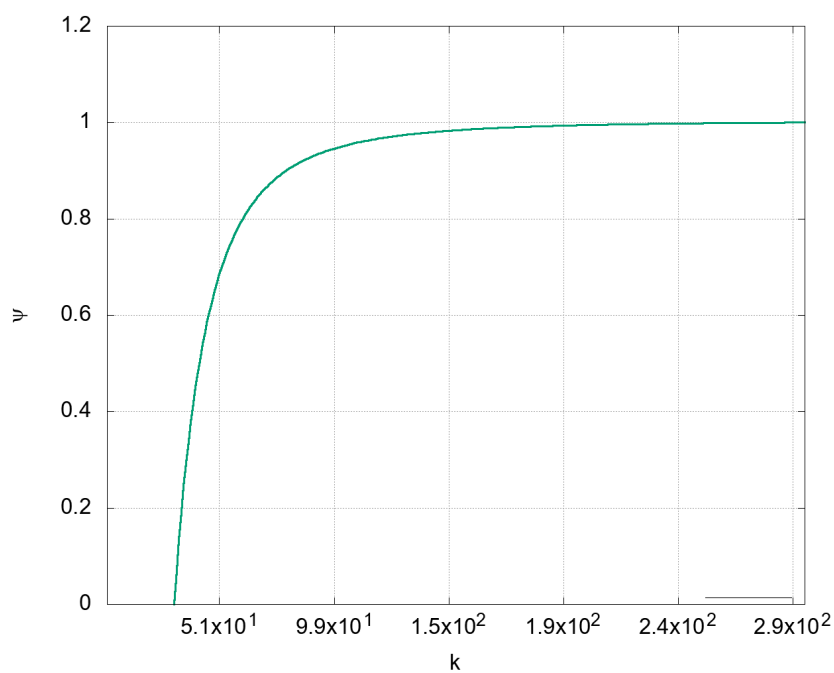
FIGURA F.139 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, NO INTERVALO III.

Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.140 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.

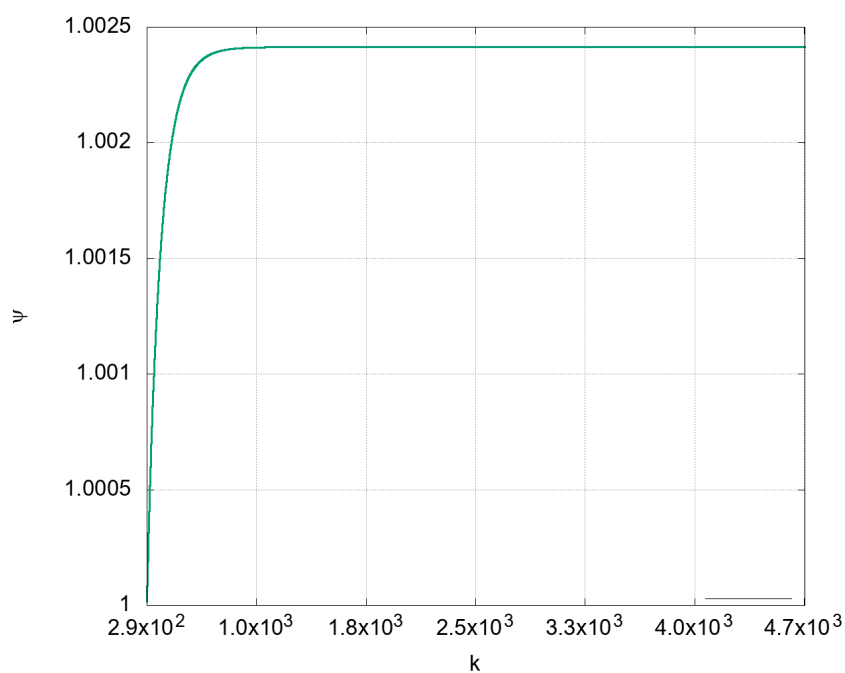
Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.141 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, INTERVALOS I E II.

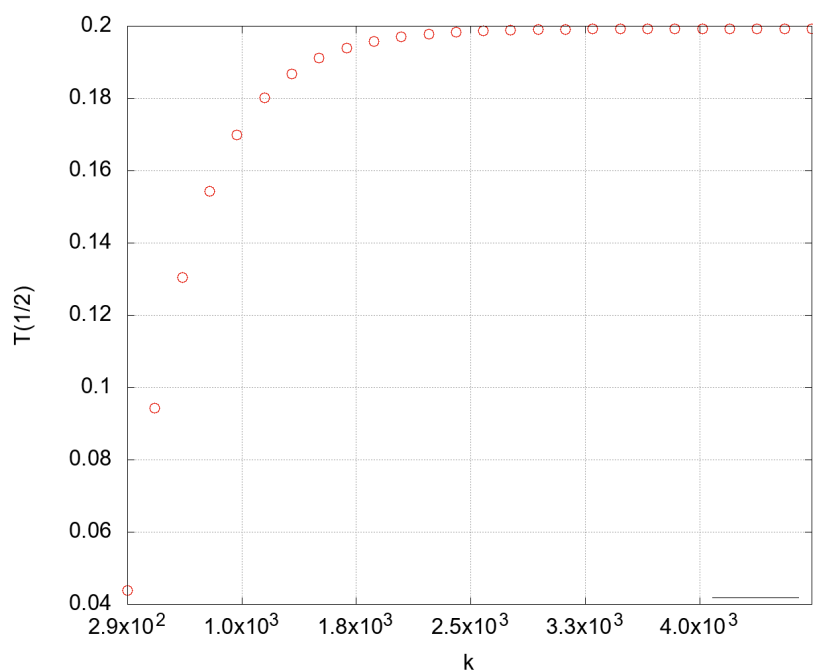


Fonte: a autora (2020).

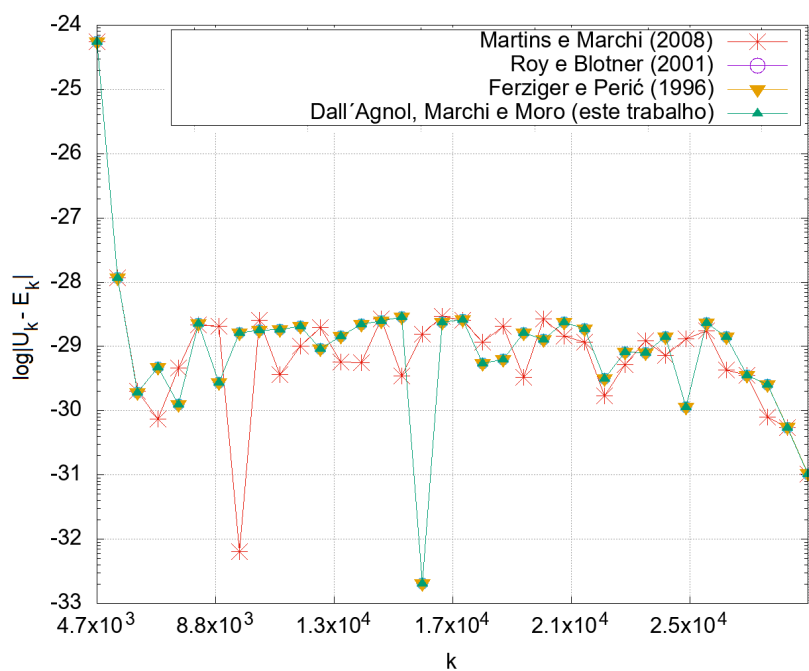
FIGURA F.142 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, INTERVALO II.



Fonte: a autora (2020).

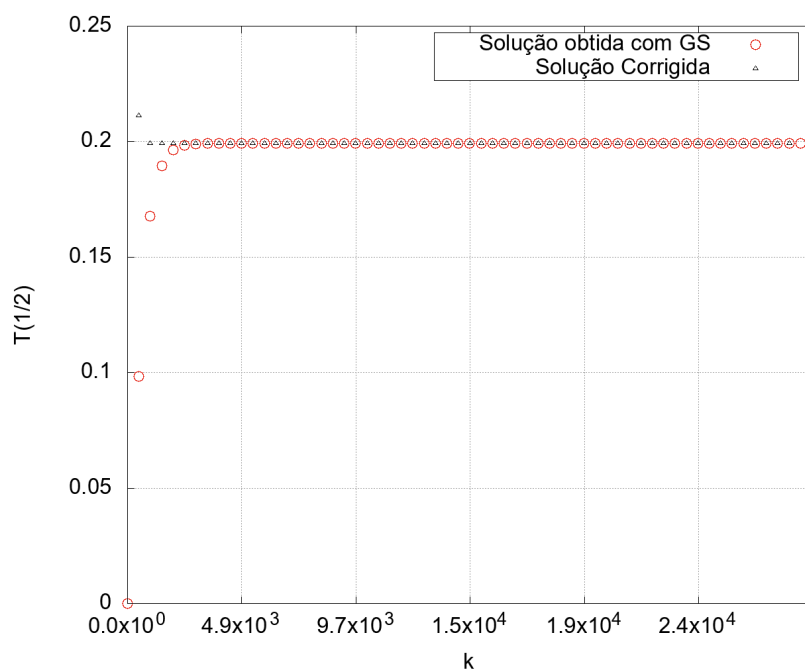
FIGURA F.143 – SOLUÇÕES NUMÉRICAS CALCULADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, NO INTERVALO II.

Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.144 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, NO INTERVALO III.

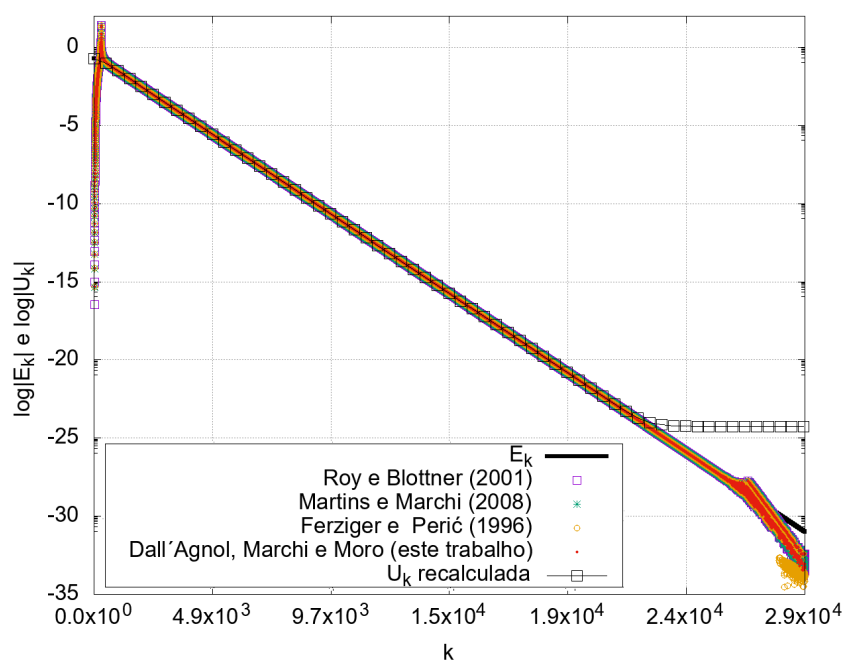
Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.145 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



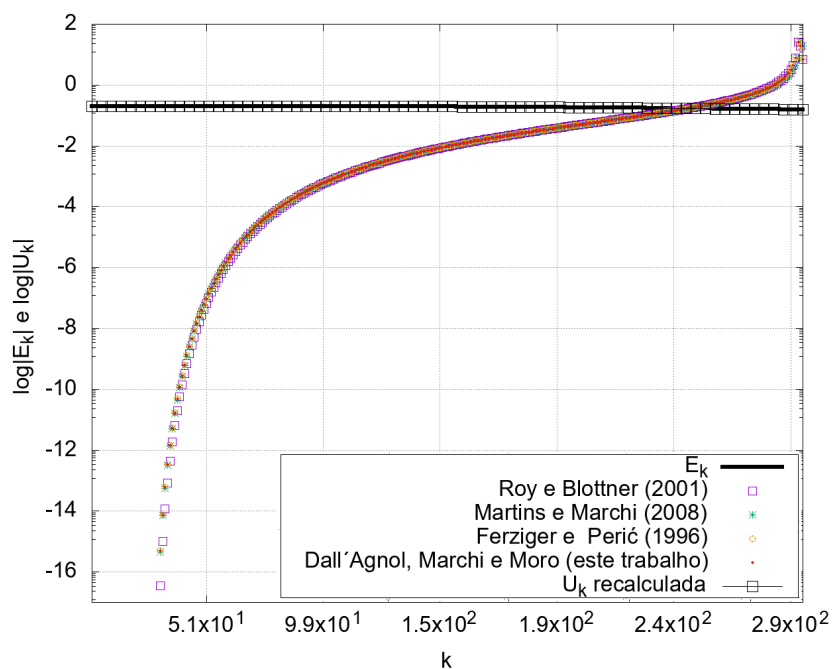
Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.146 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



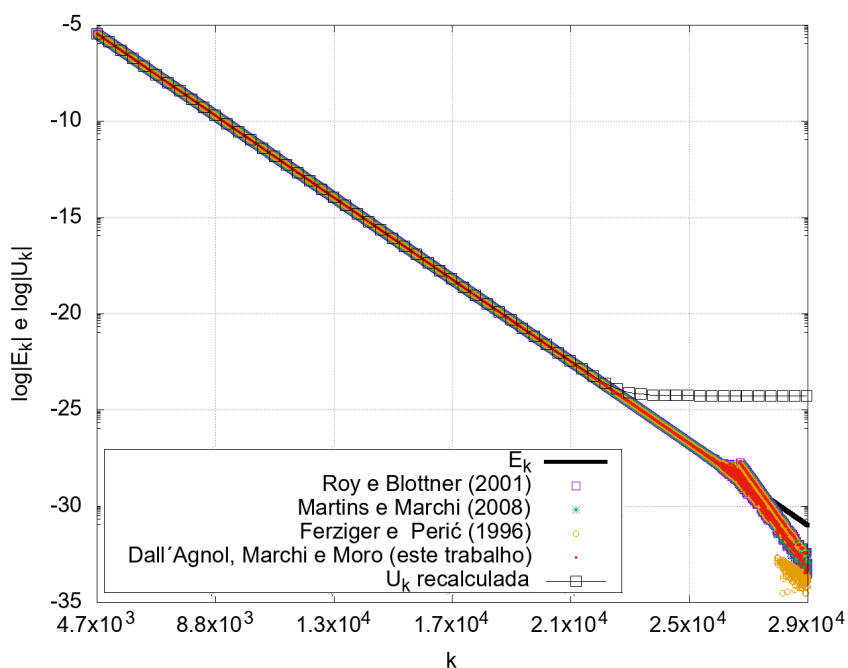
Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.147 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, NOS INTERVALOS I E II.



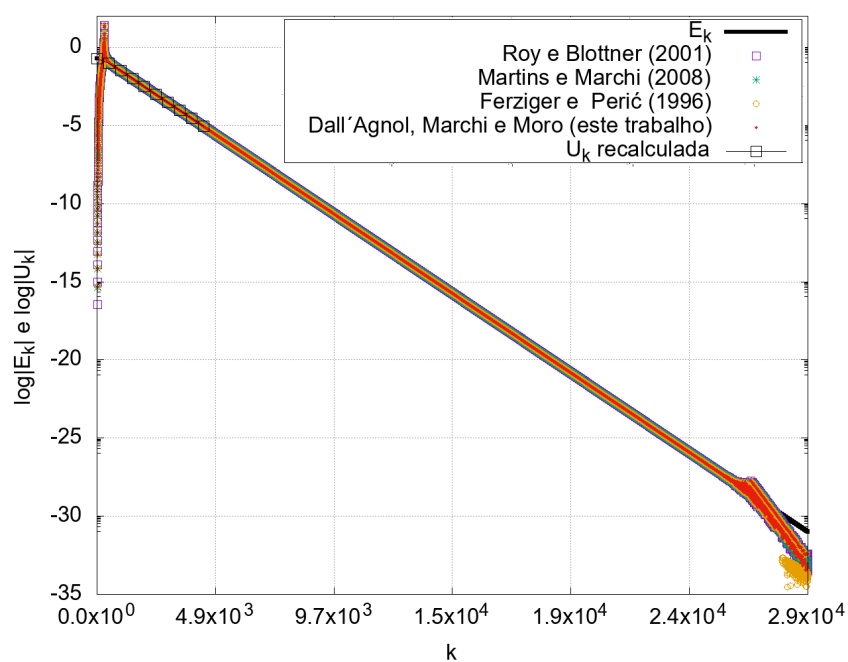
Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.148 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, NO INTERVALO III.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.149 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

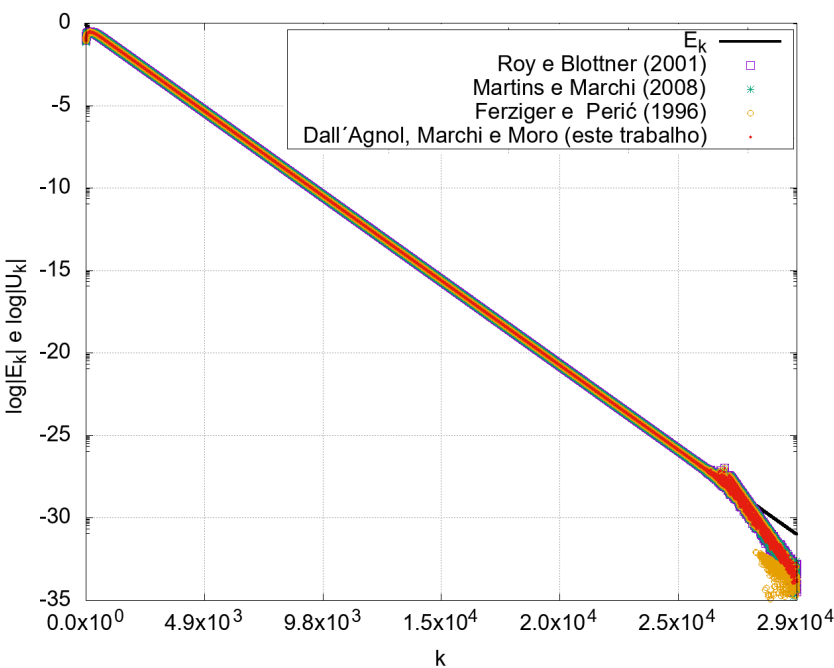
F.2 Variável 2: gradiente no contorno leste (direito) do domínio de cálculo $\text{grad } T(1,y)$, sem *multigrid*

F.2.1 Caso 1

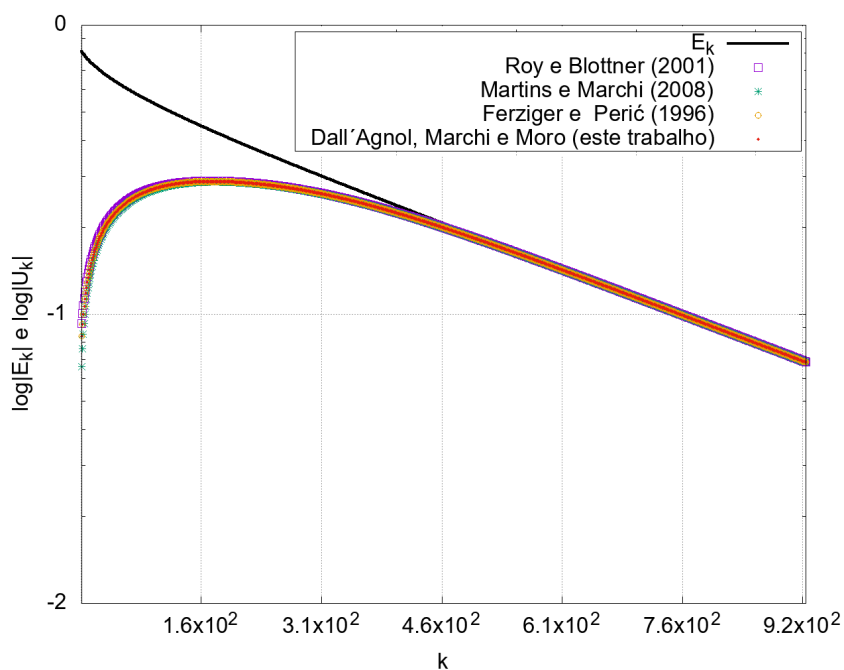
TABELA F.14 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2})$, PROBLEMA 3.

Intervalo	Critério	Iterações
I	$\psi > 1$	4 : 918
II	$\psi > 1$ sem convergência monotônica	919 : 1079
III	$\psi > 1$ com convergência monotônica	1079 : 8041
IV	$\psi > 1$ com erros significativos de arredondamento	8042: 29429

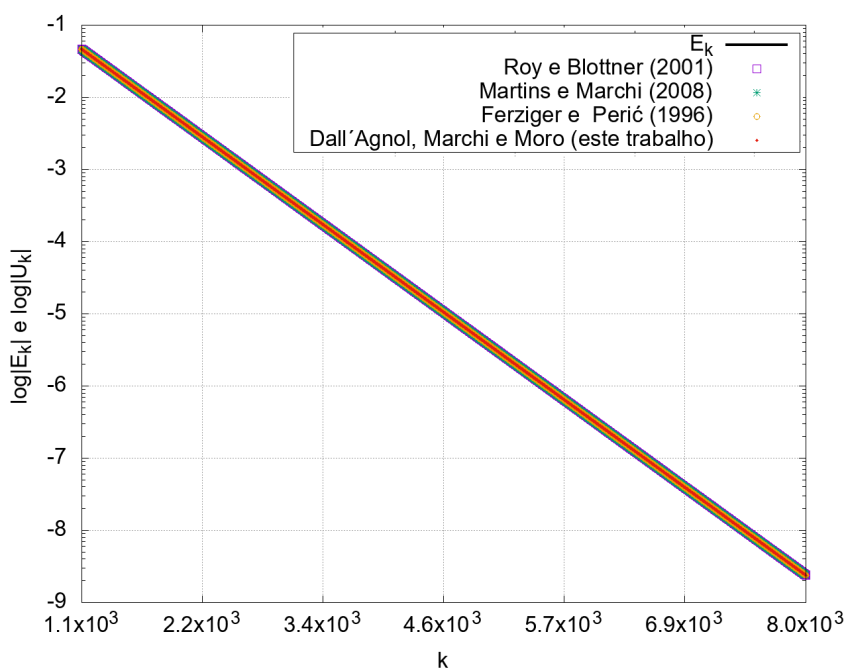
FIGURA F.150 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1.



Fonte: a autora (2020).

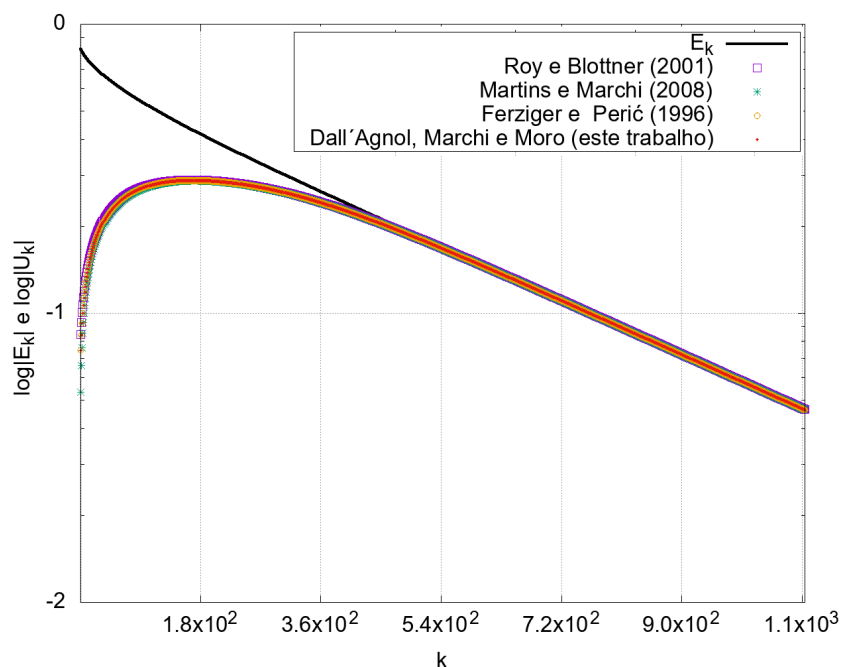
FIGURA F.151 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, NO INTERVALO I.

Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.152 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, NO INTERVALO III.

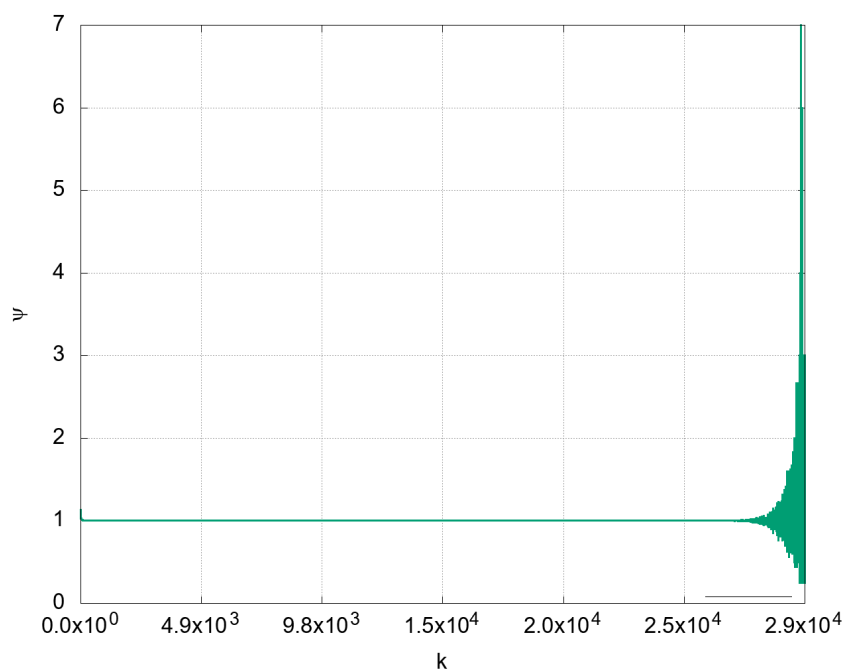
Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.153 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, NOS INTERVALOS I A III.



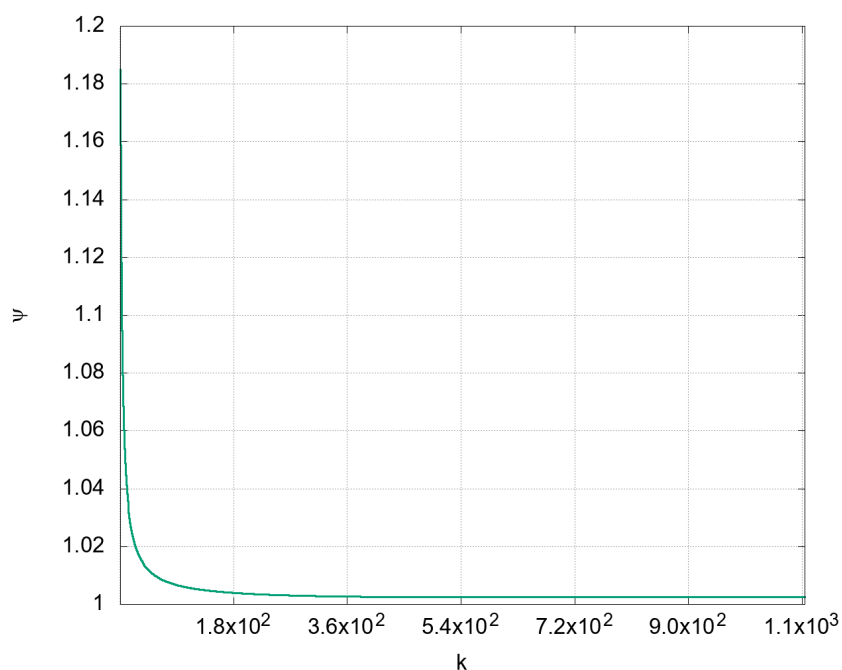
Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.154 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



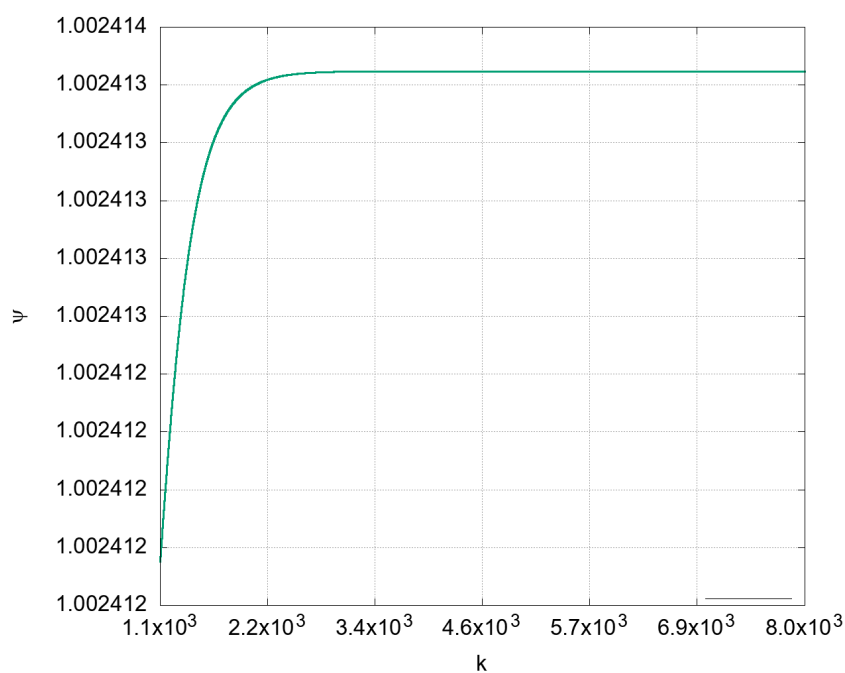
Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.155 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, INTERVALOS I A III.



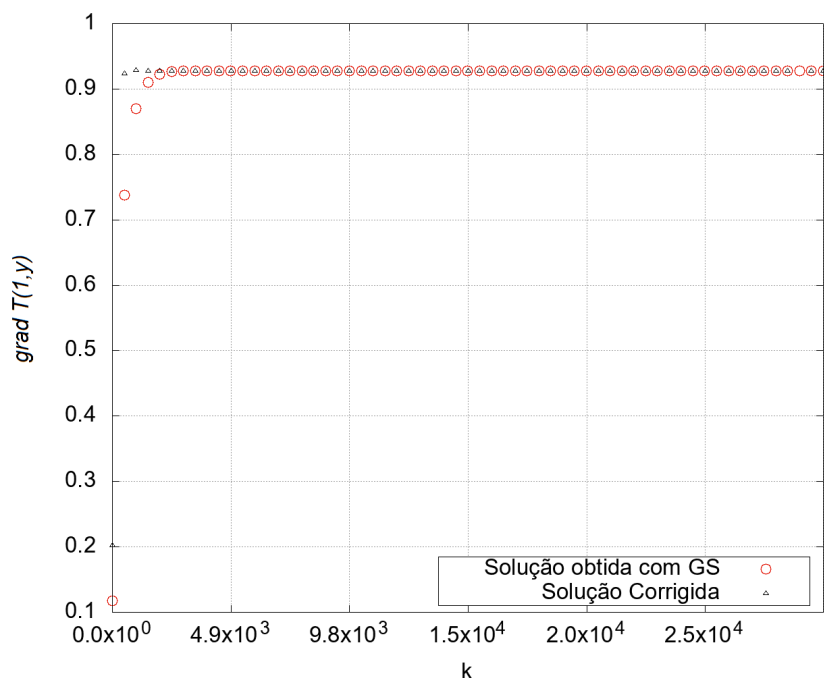
Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.156 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, INTERVALO III.



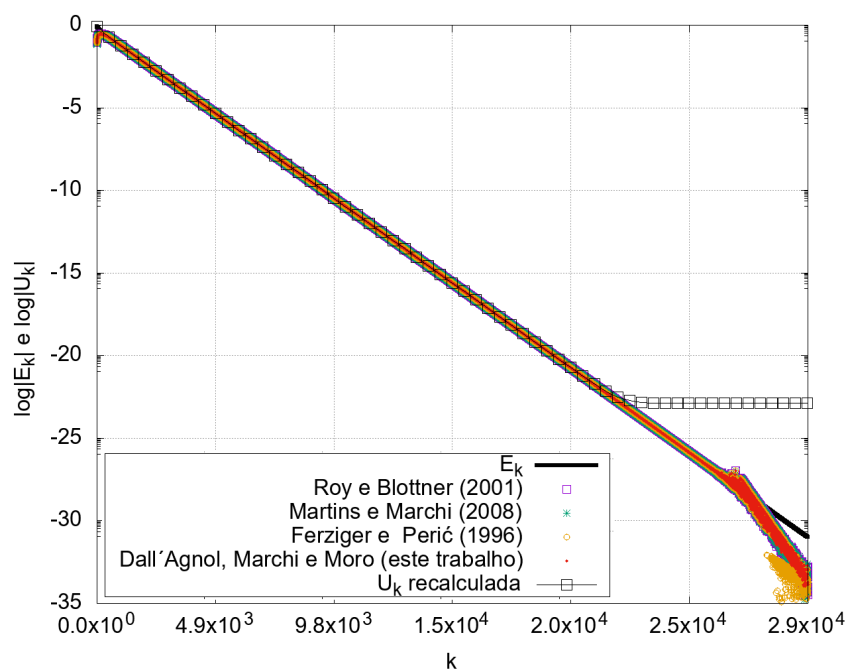
Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.157 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



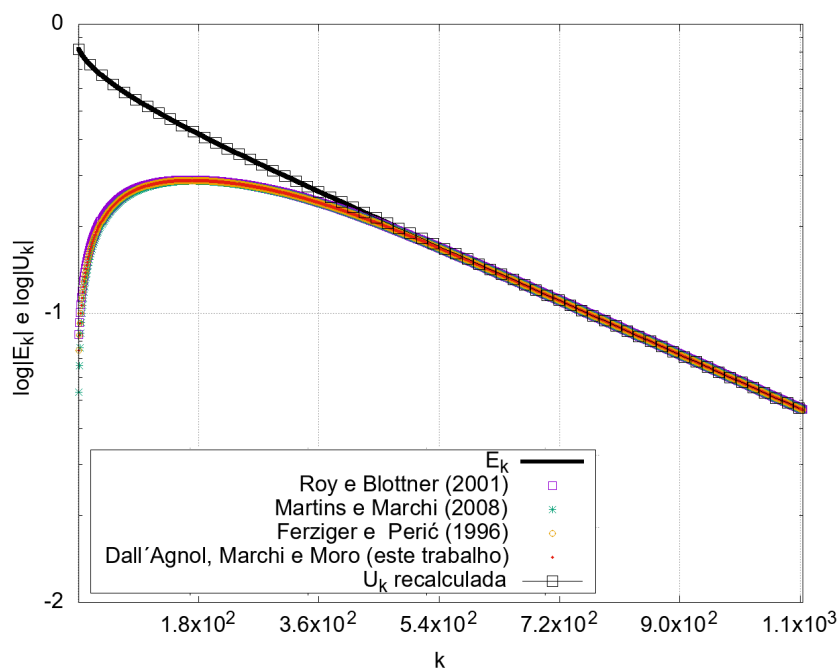
Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.158 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



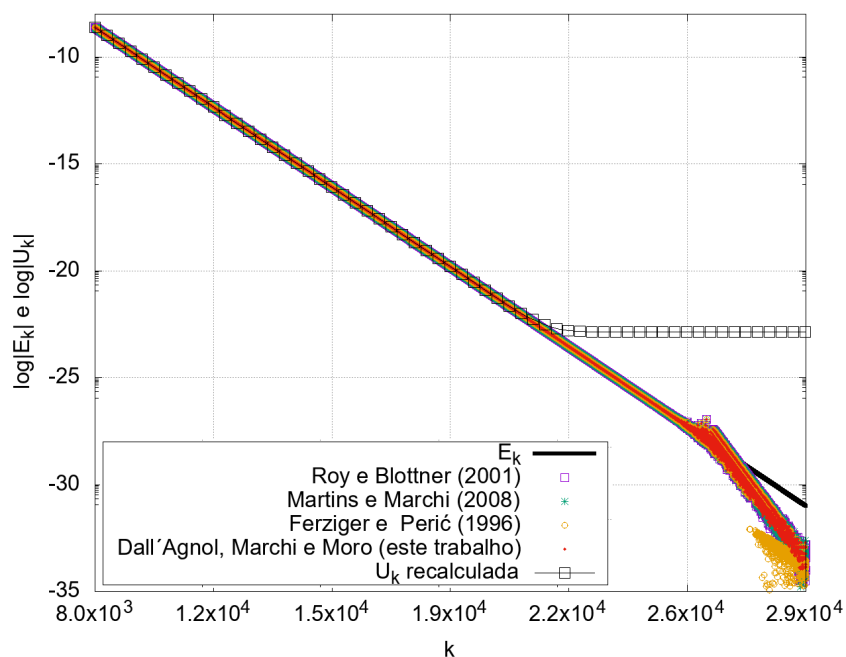
Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.159 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, NOS INTERVALOS I A III.



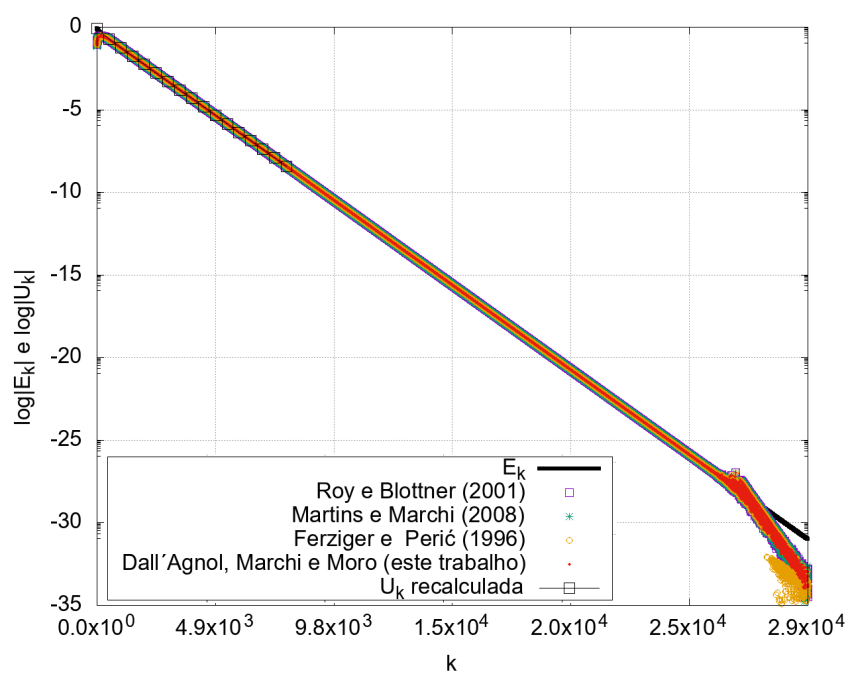
Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.160 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, NO INTERVALO IV.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.161 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $grad\ T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

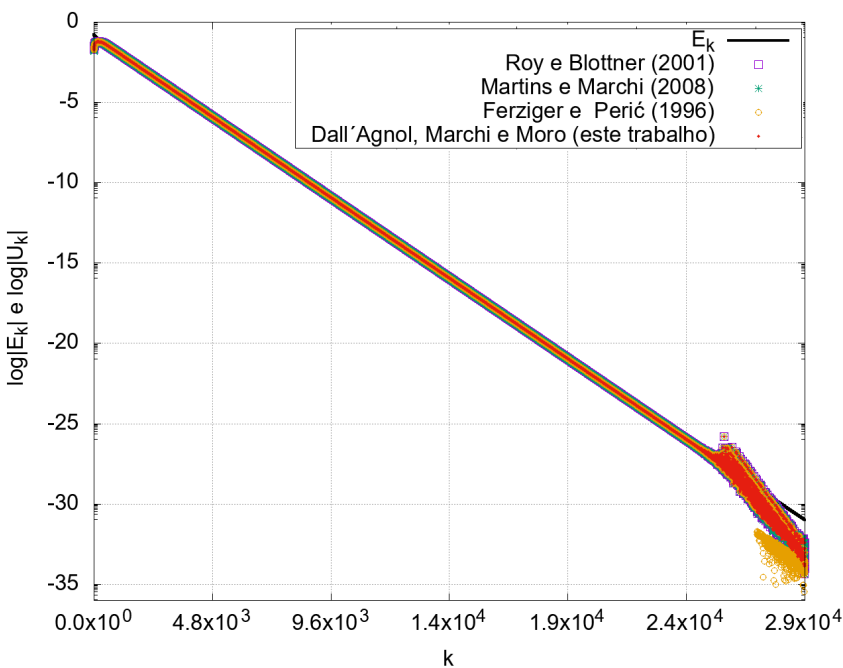
F.3 Variável 3: valor médio da função (temperatura média) T_m , sem *multigrid*

F.3.1 Caso 1

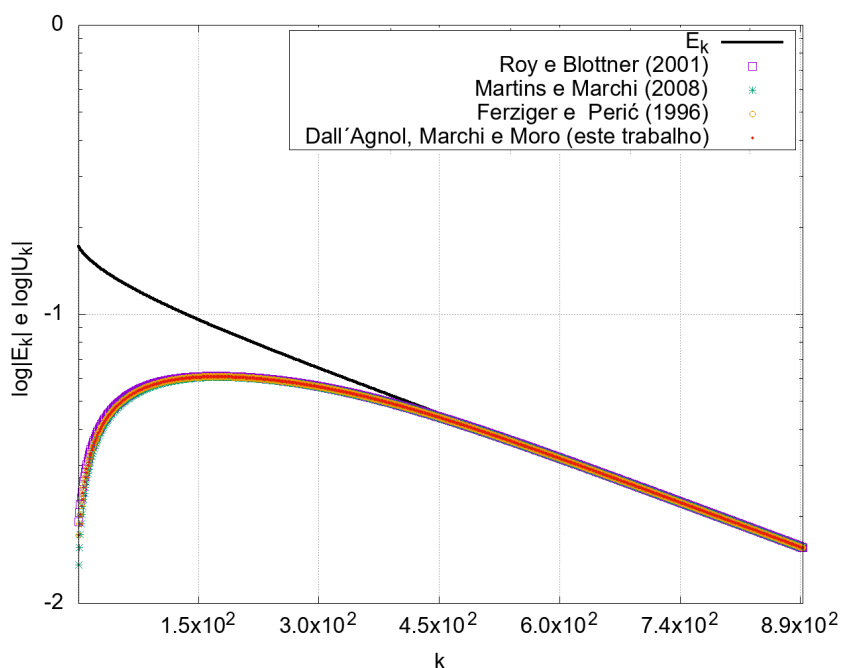
TABELA F.15 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL T_m , PROBLEMA 3.

Intervalo	Critério	Iterações
I	$\psi > 1$	3 : 730
II	$\psi > 1$ sem convergência monotônica	731 : 892
II	$\psi > 1$ com convergência monotônica	893 : 7826
IV	$\psi > 1$ com erros significativos de arredondamento	7827 : 28779

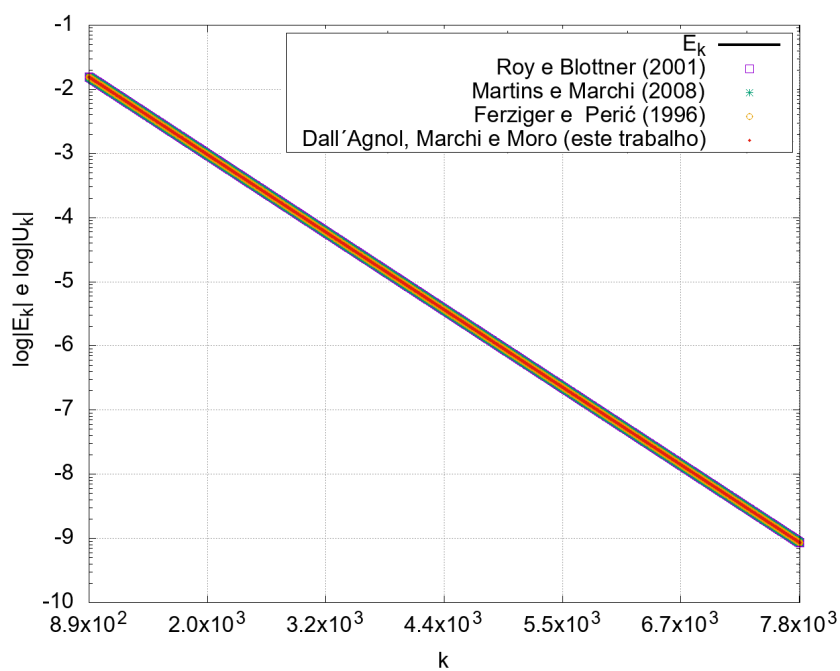
FIGURA F.162 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



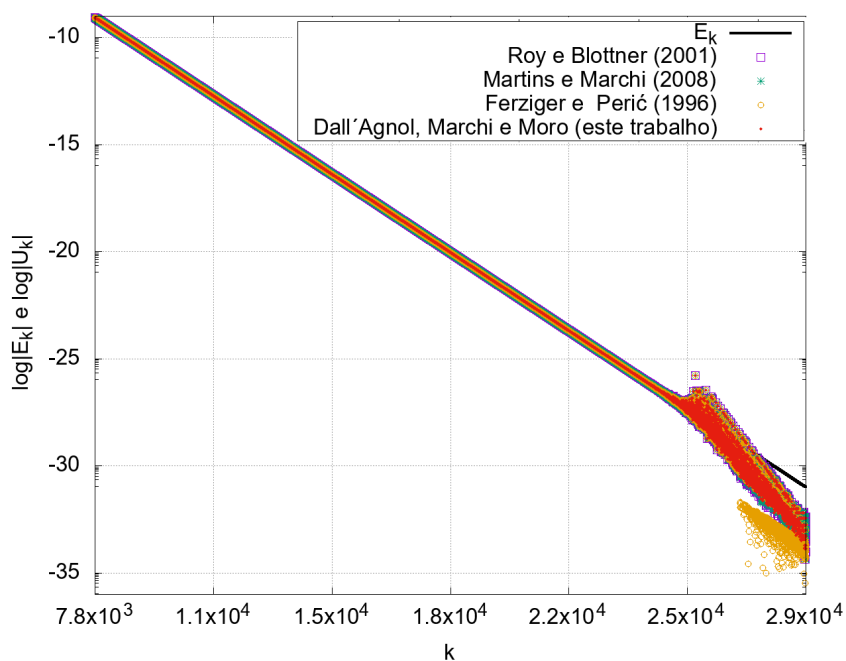
Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.163 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, NOS INTERVALOS I A III.

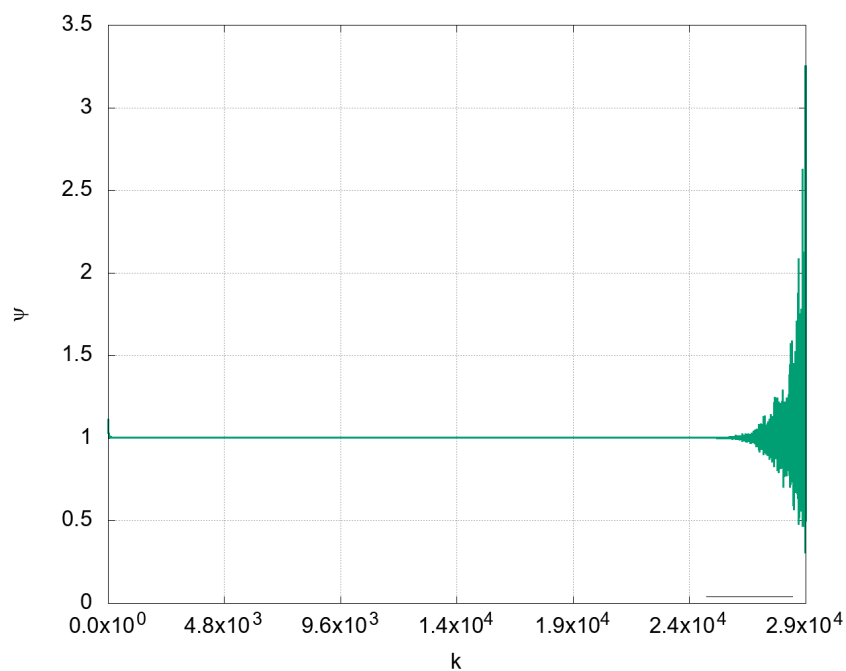
Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.164 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, NO INTERVALO III.

Fonte: a autora (2020).

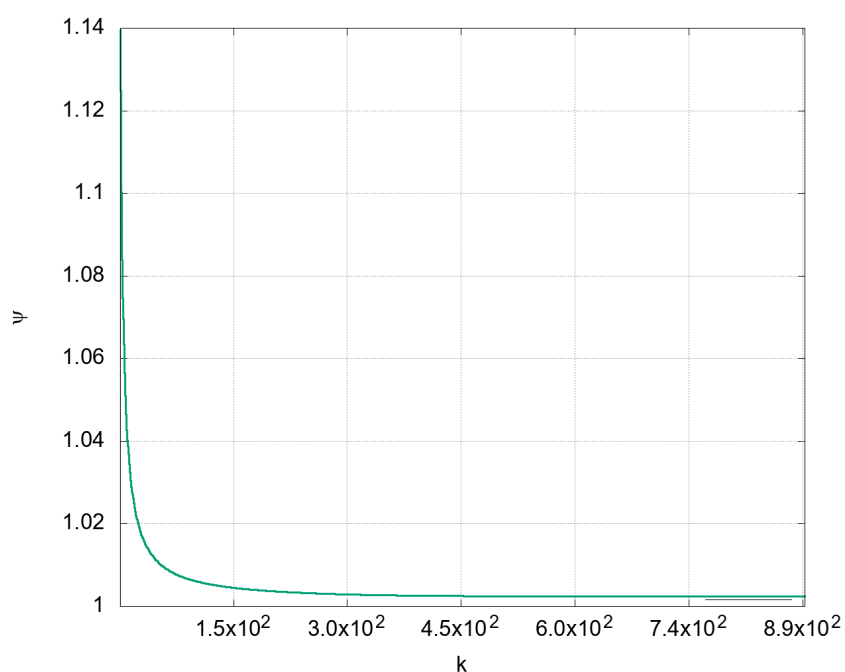
FIGURA F.165 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, NO INTERVALO IV.

Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.166 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.

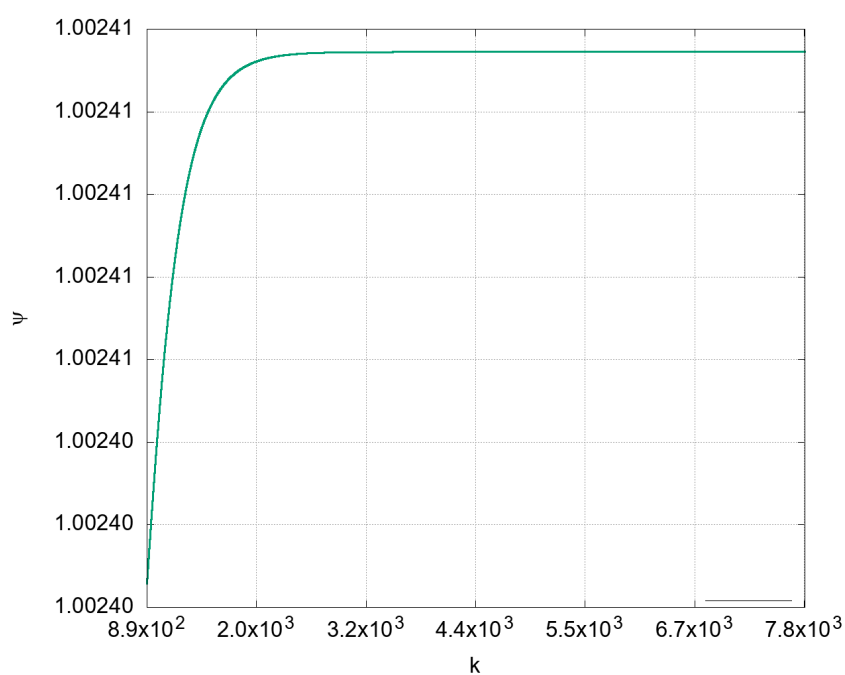
Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.167 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, NOS INTERVALOS I A III.



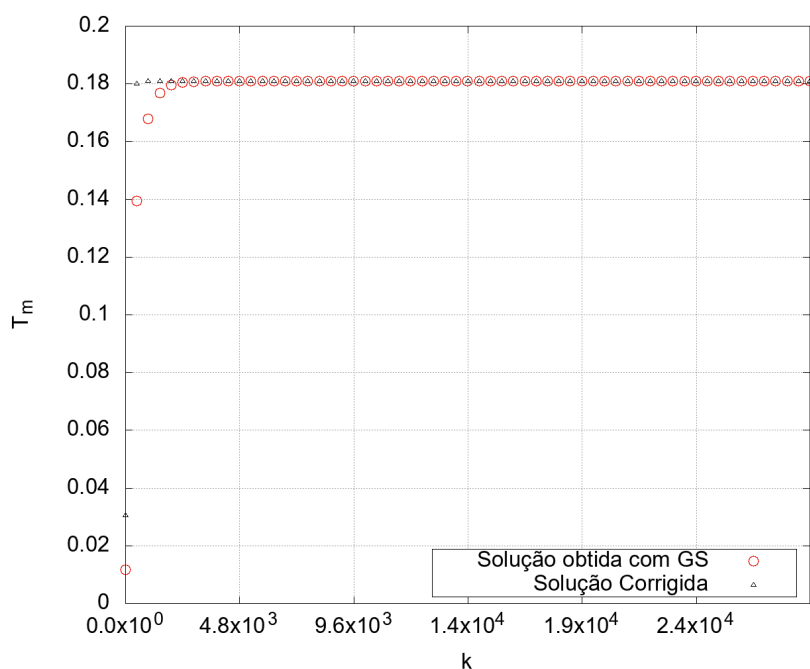
Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.168 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, NO INTERVALO III.



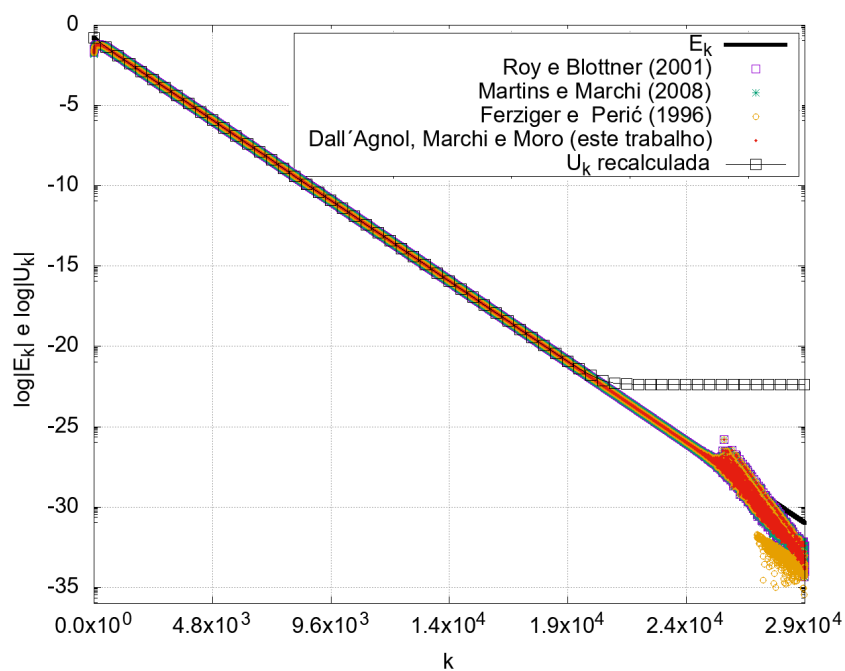
Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.169 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



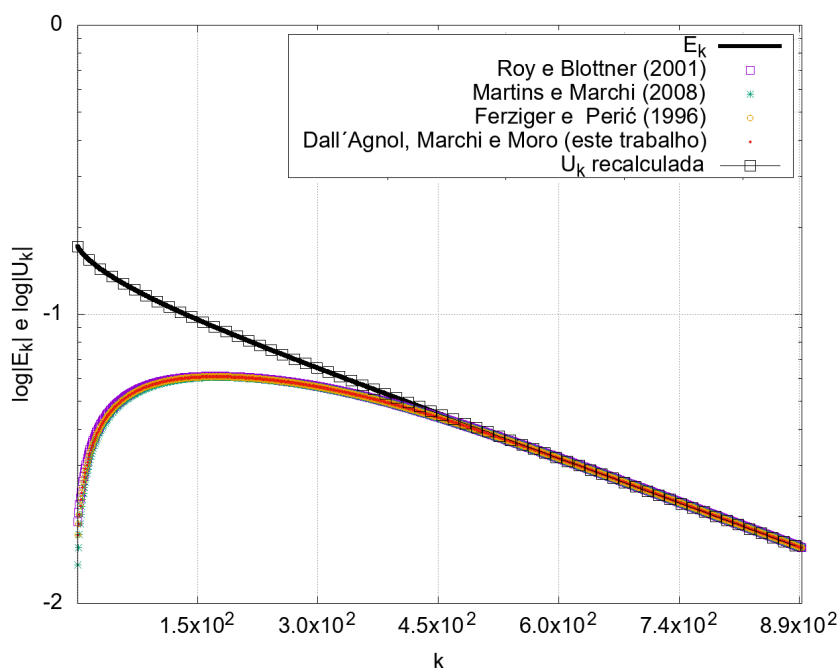
Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.170 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



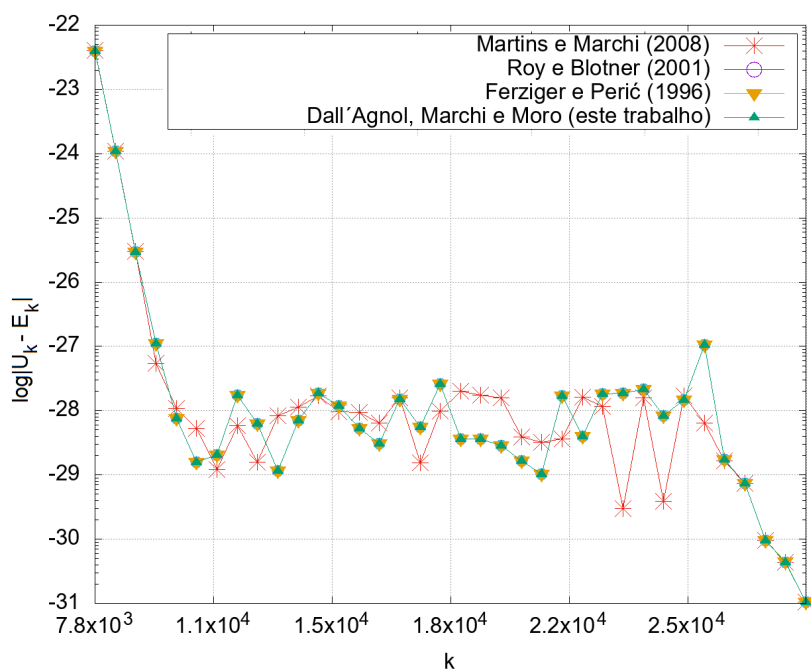
Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.171 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, NOS INTERVALOS I A III.



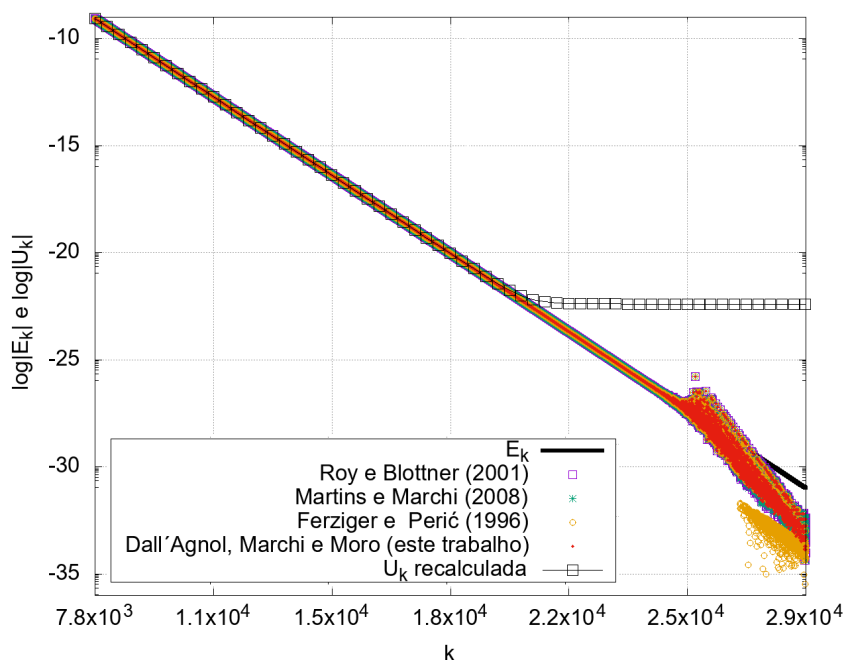
Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.172 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, NO INTERVALO IV.



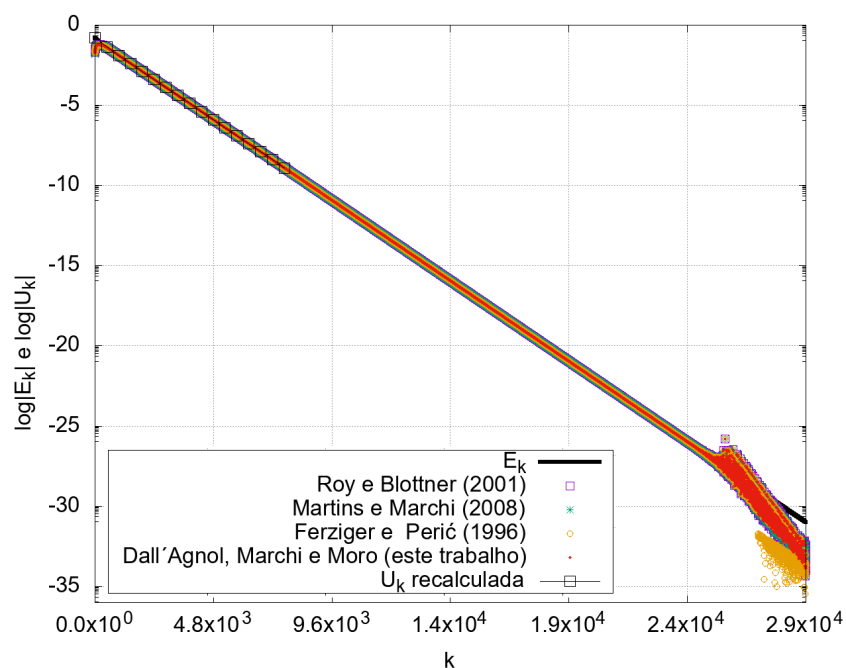
Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.173 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, NO INTERVALO IV.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA F.174 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

APÊNDICE G – RESULTADOS DO PROBLEMA 3 COM MG, CASOS 1 E 2

G.1 Variável 1: valor da função (temperatura) no ponto central do domínio de cálculo $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, com *multigrid*

G.1.1 Caso 1

TABELA G.16 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, PROBLEMA 3, COM *MULTIGRID*.

Intervalo	Critério	Iterações
I	$\psi < -1$ com convergência monotônica	3 : 6
II	$\psi < -1$ sem convergência monotônica	7 : 21

FIGURA G.175 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1.

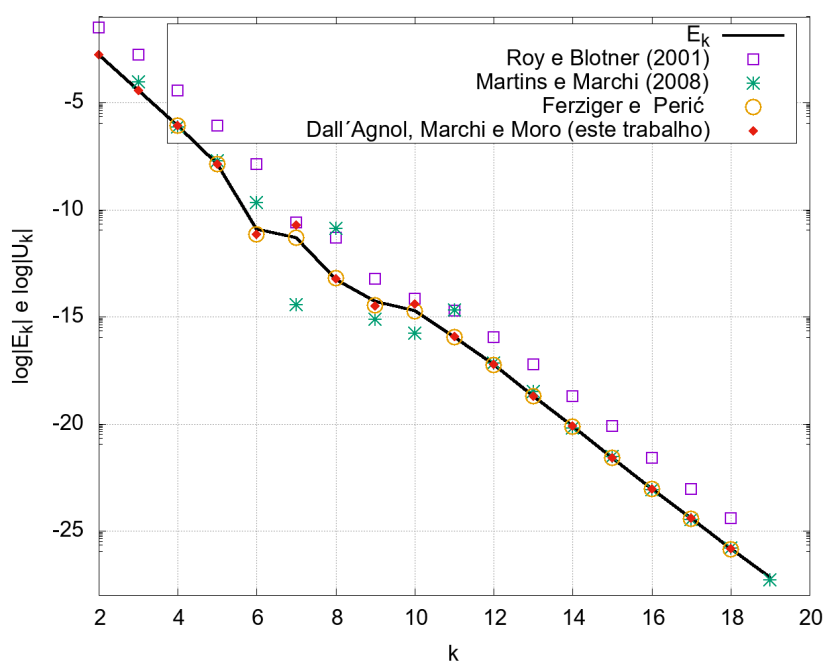
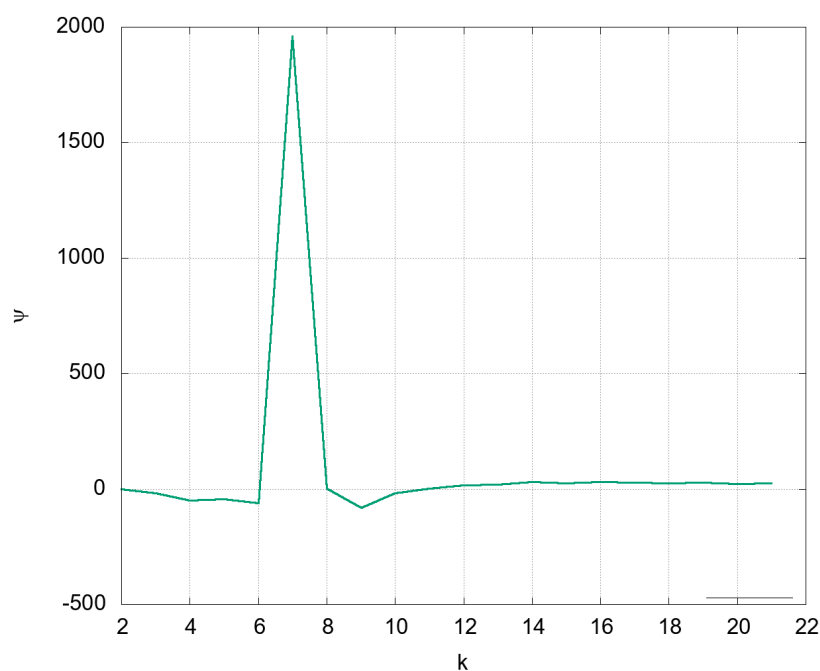
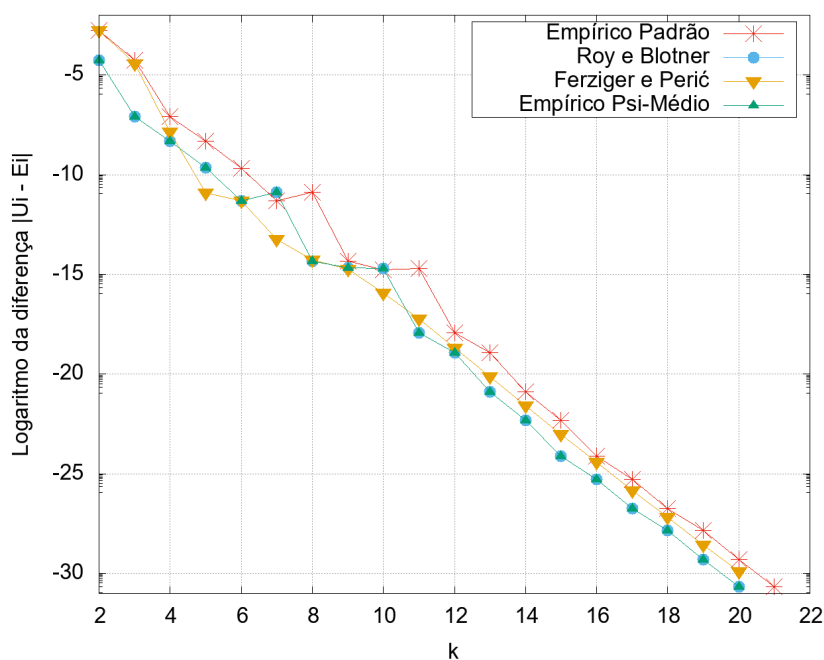


FIGURA G.176 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1.



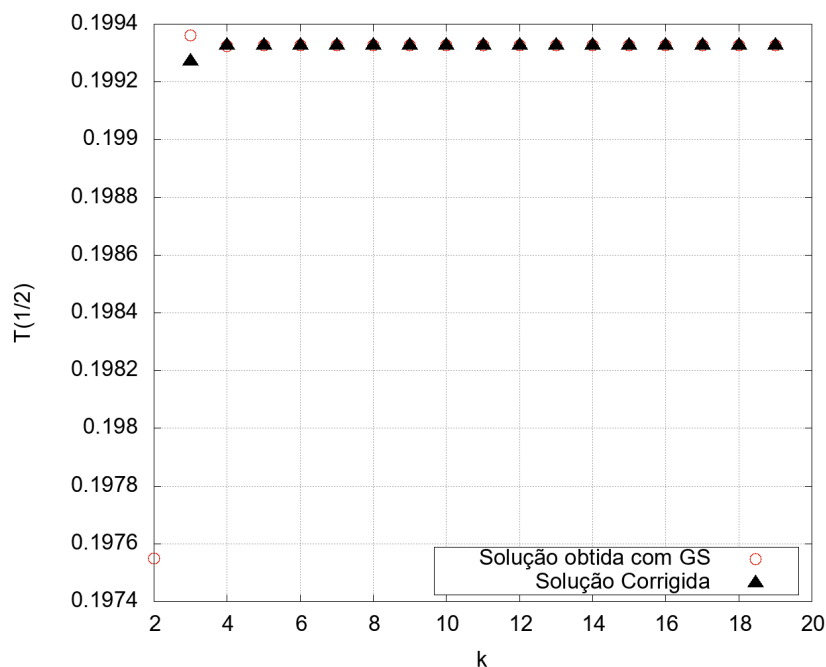
Fonte: a autora (2020).

FIGURA G.177 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



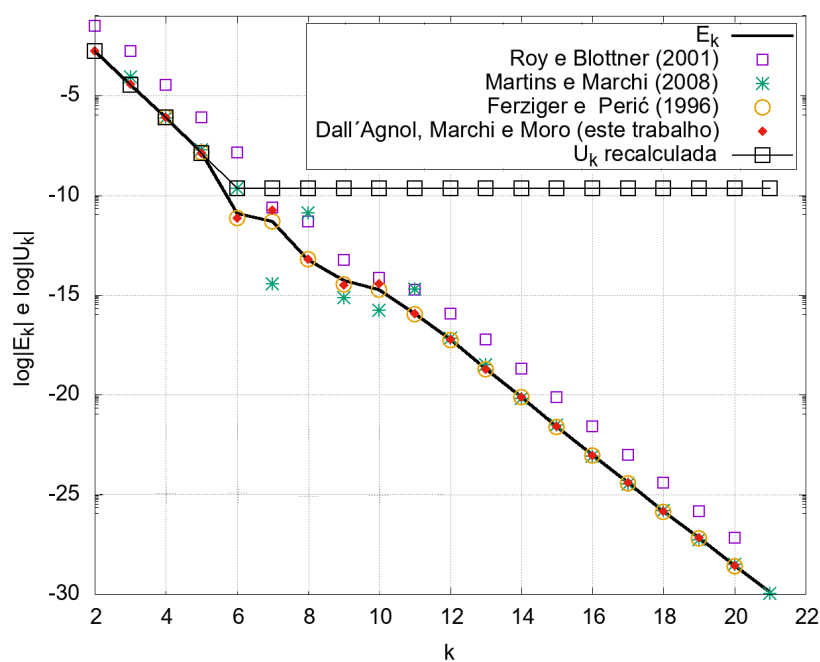
Fonte: a autora (2020).

FIGURA G.178 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS ASSOCIADO AO *MULTIGRID* E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



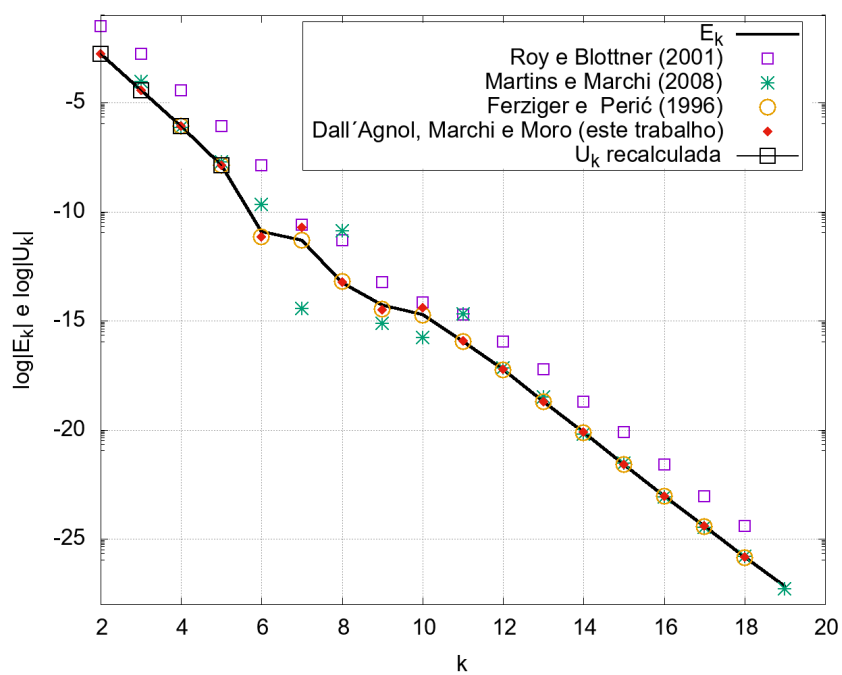
Fonte: a autora (2020).

FIGURA G.179 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA G.180 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, EM TODOS OS INTERVALOS.



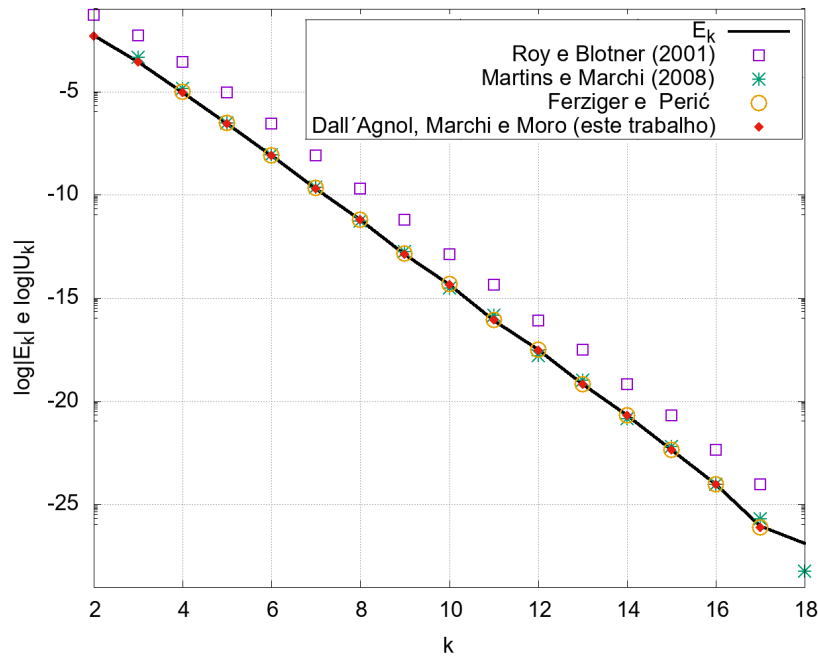
Fonte: a autora (2020).

G.1.2 Caso 2

TABELA G.17 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, PROBLEMA 3, COM *MULTIGRID* .

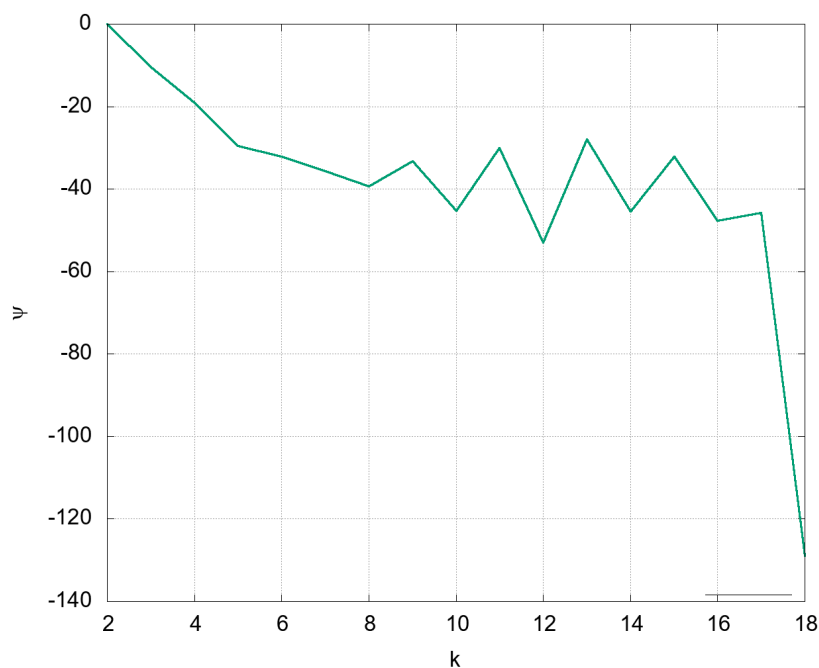
Intervalo	Critério	Iterações
I	$\psi < -1$ com convergência monotônica	3 : 8
II	$\psi < -1$ sem convergência monotônica	9 : 18

FIGURA G.181 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2.



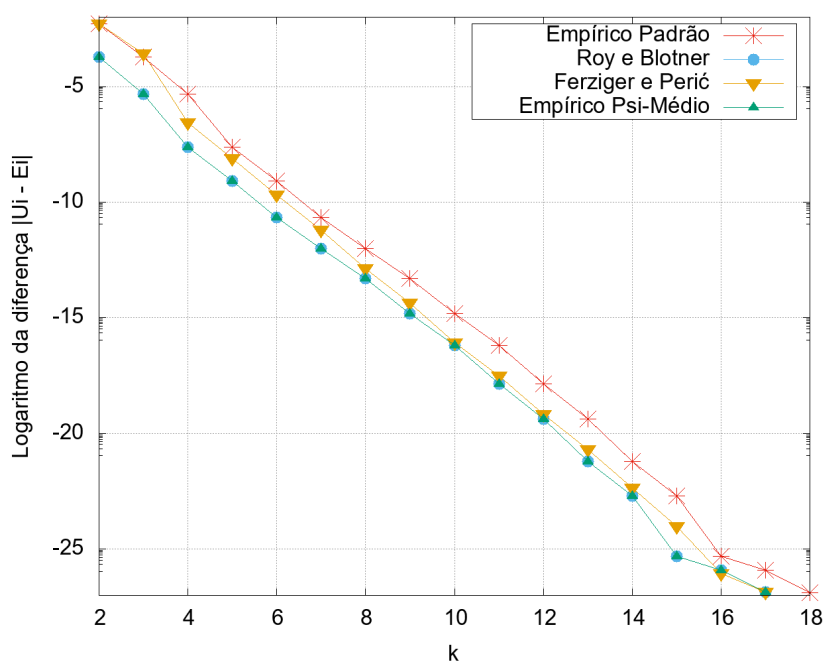
Fonte: a autora (2020).

FIGURA G.182 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2.



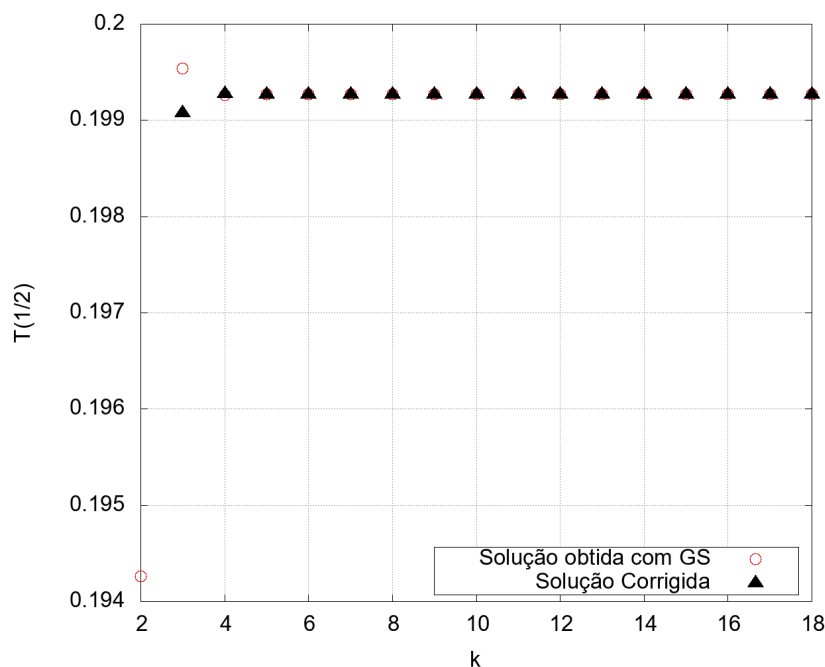
Fonte: a autora (2020).

FIGURA G.183 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



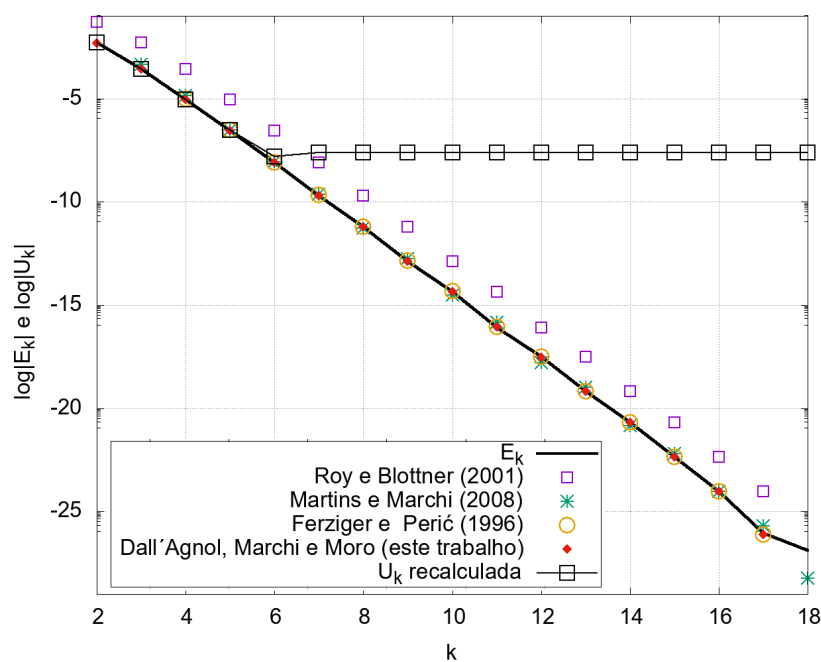
Fonte: a autora (2020).

FIGURA G.184 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS ASSOCIADO AO *MULTIGRID* E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



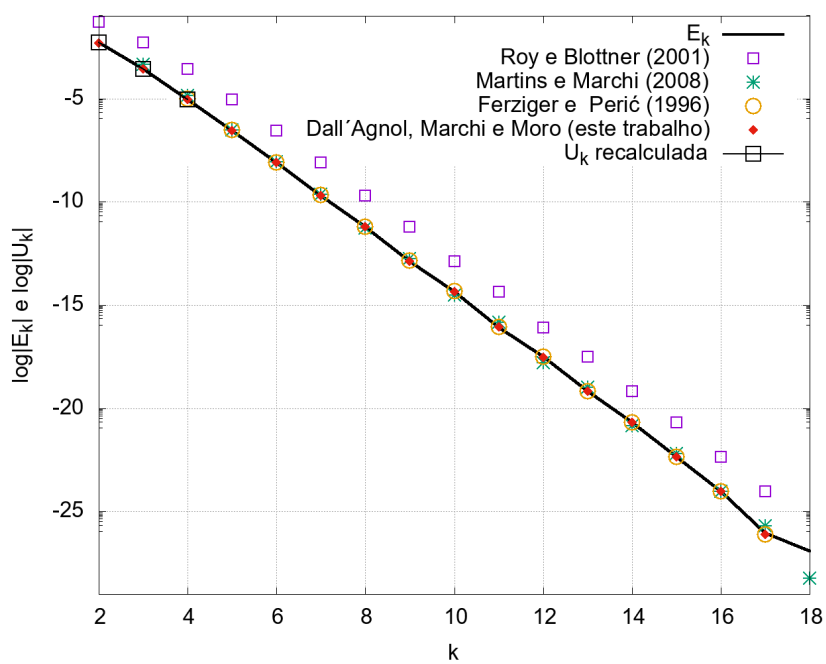
Fonte: a autora (2020).

FIGURA G.185 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA G.186 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $T(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODOS OS INTERVALOS.



Fonte: a autora (2020).

G.2 Variável 2: gradiente no contorno leste (direito) do domínio de cálculo $\text{grad } T(1,y)$, com *multigrid*

G.2.1 Caso 1

TABELA G.18 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$, PROBLEMA 3, COM *MULTIGRID* .

Intervalo	Critério	Iterações
I	$\psi < -1$ com convergência monotônica	3 : 8
II	$\psi < -1$ sem convergência monotônica	9 : 21

FIGURA G.187 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1.

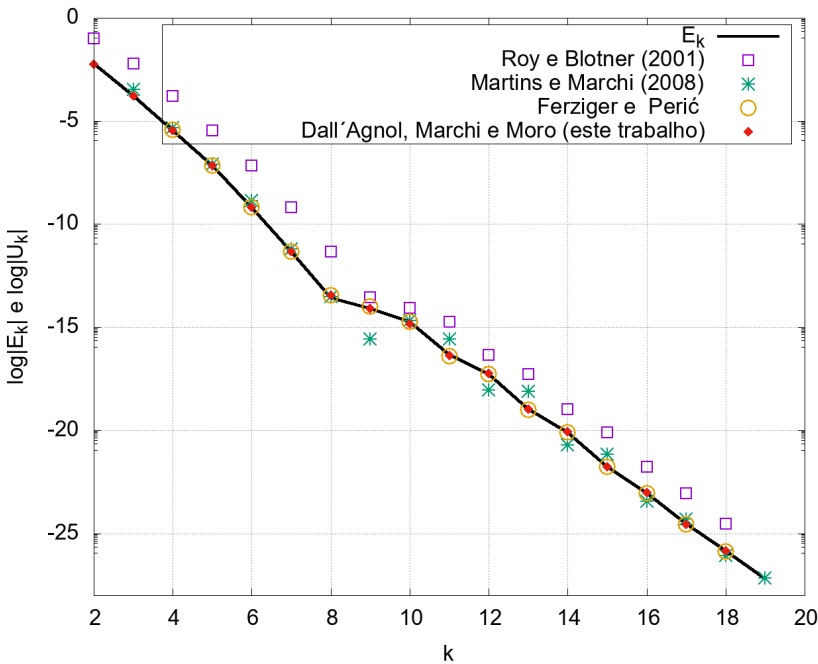
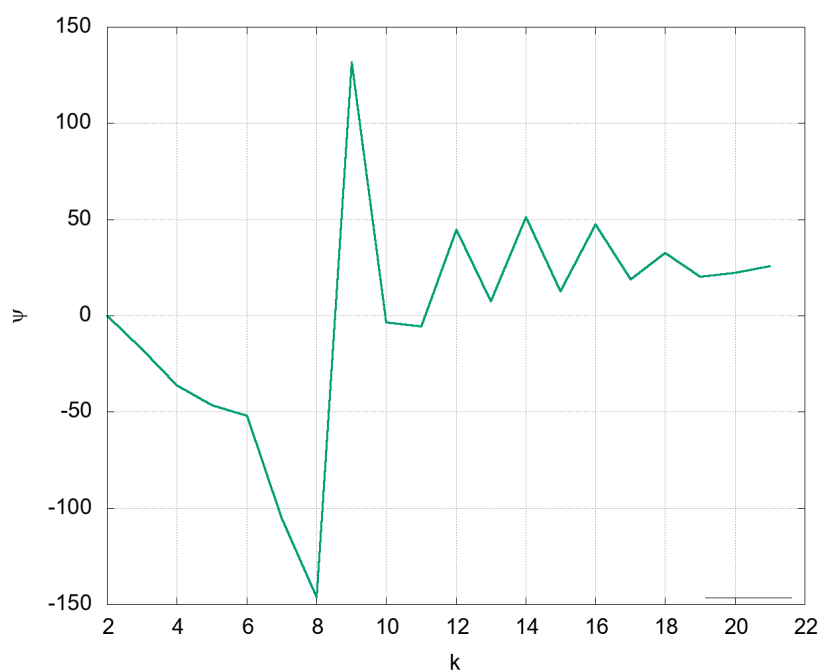
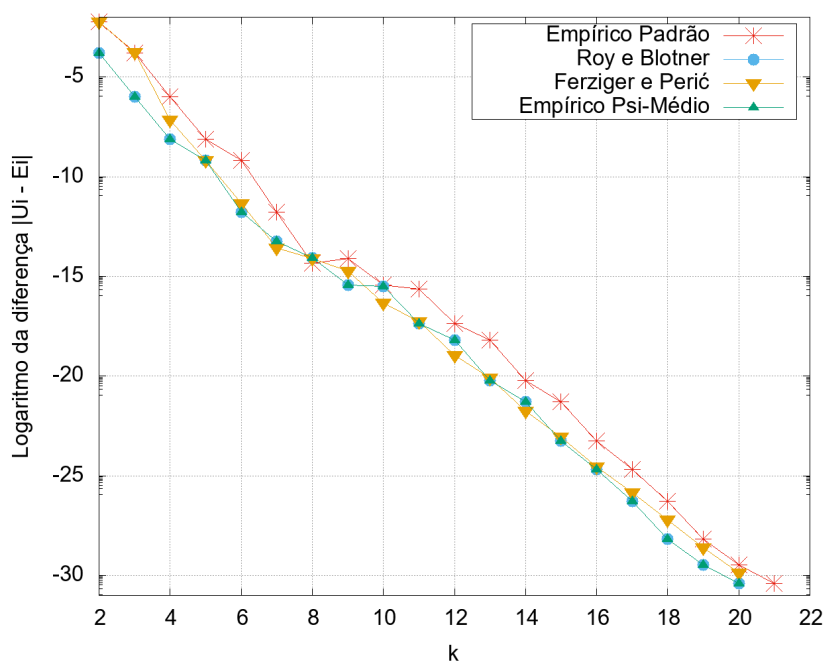


FIGURA G.188 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1.



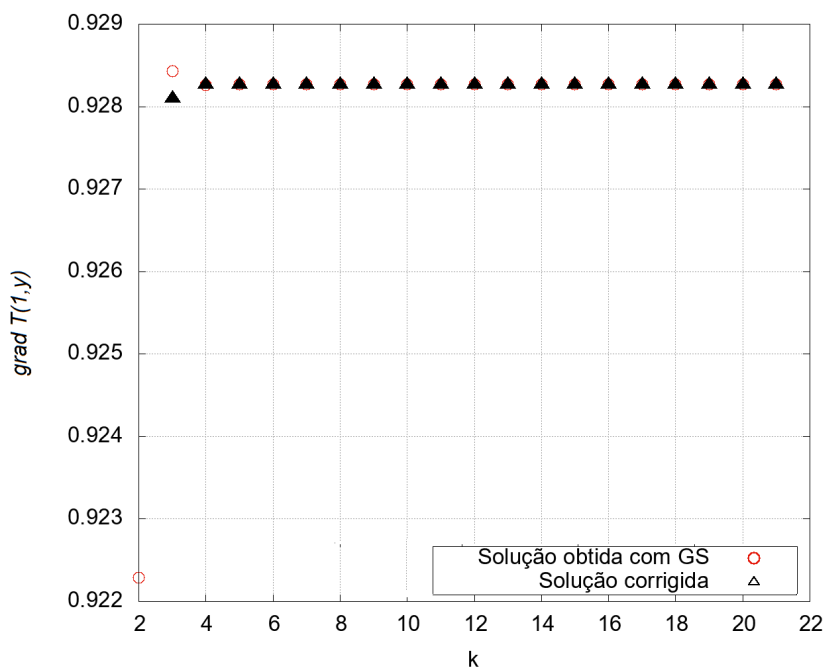
Fonte: a autora (2020).

FIGURA G.189 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



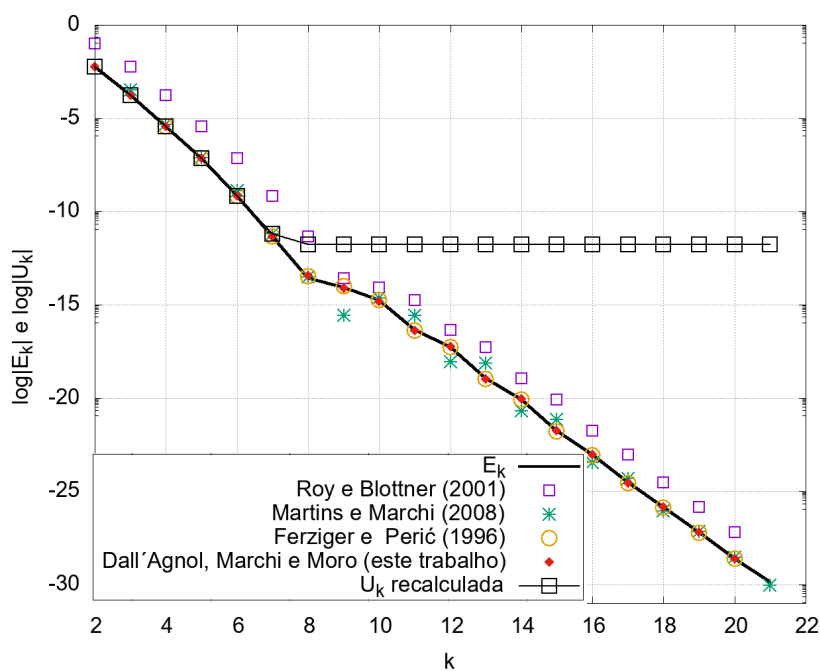
Fonte: a autora (2020).

FIGURA G.190 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS ASSOCIADO AO *MULTIGRID* E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



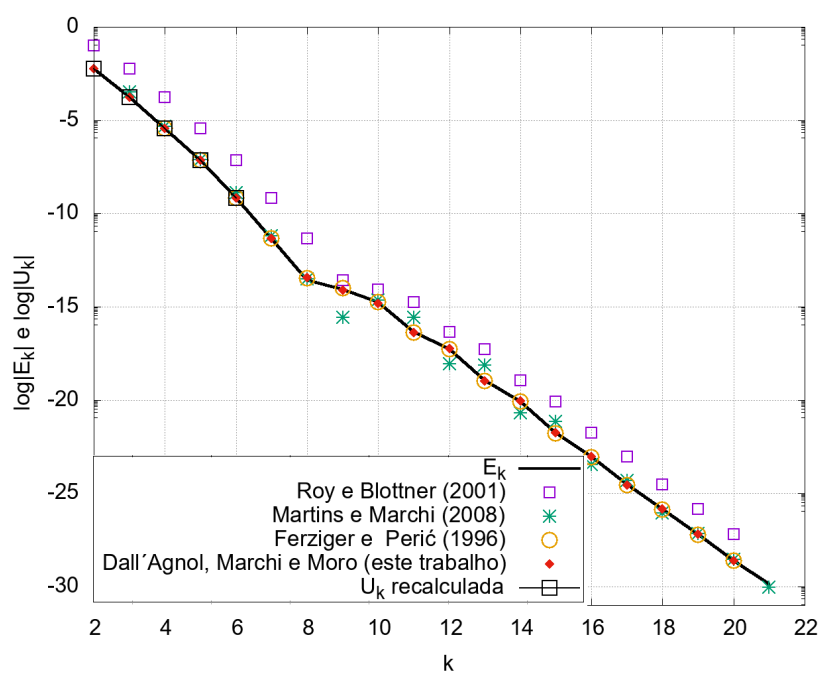
Fonte: a autora (2020).

FIGURA G.191 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA G.192 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 1, EM TODOS OS INTERVALOS.



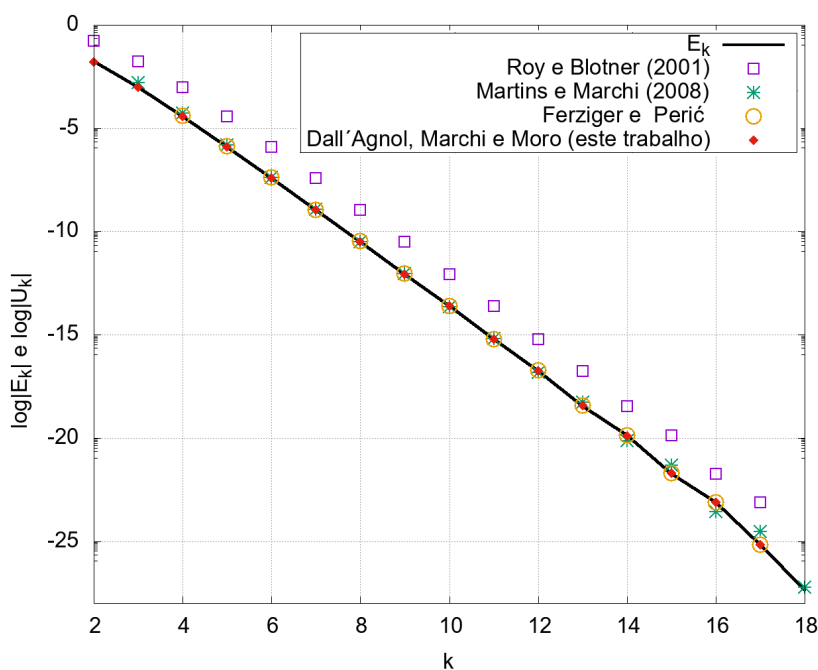
Fonte: a autora (2020).

G.2.2 Caso 2

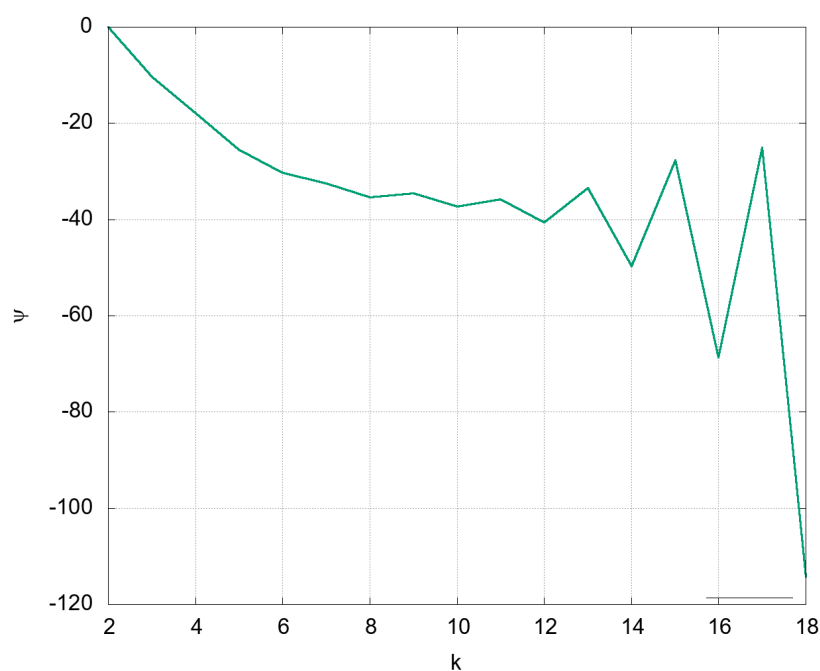
TABELA G.19 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$, PROBLEMA 3, COM *MULTIGRID* .

Intervalo	Critério	Iterações
I	$\psi < -1$ com convergência monotônica	3 : 8
II	$\psi < -1$ sem convergência monotônica	9 : 18

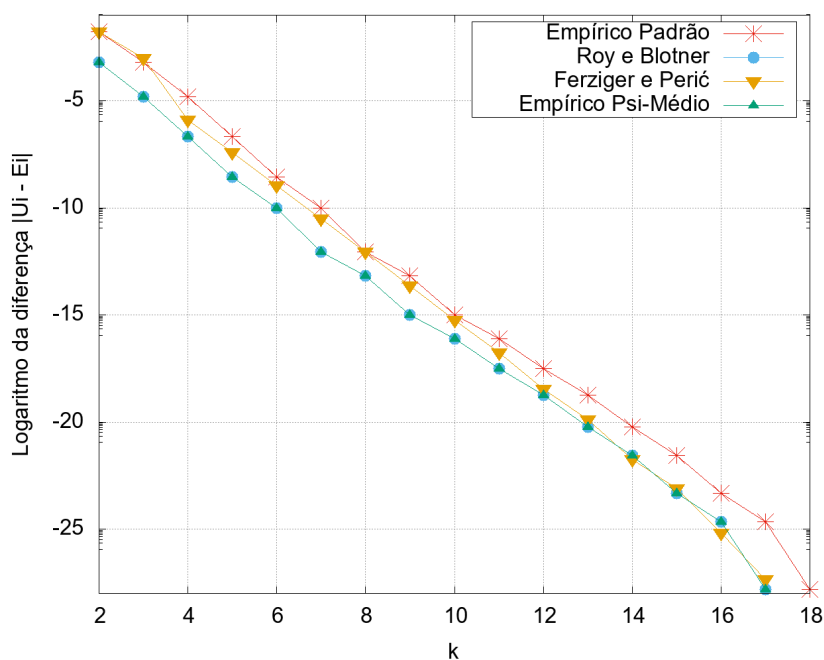
FIGURA G.193 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2.



Fonte: a autora (2020).

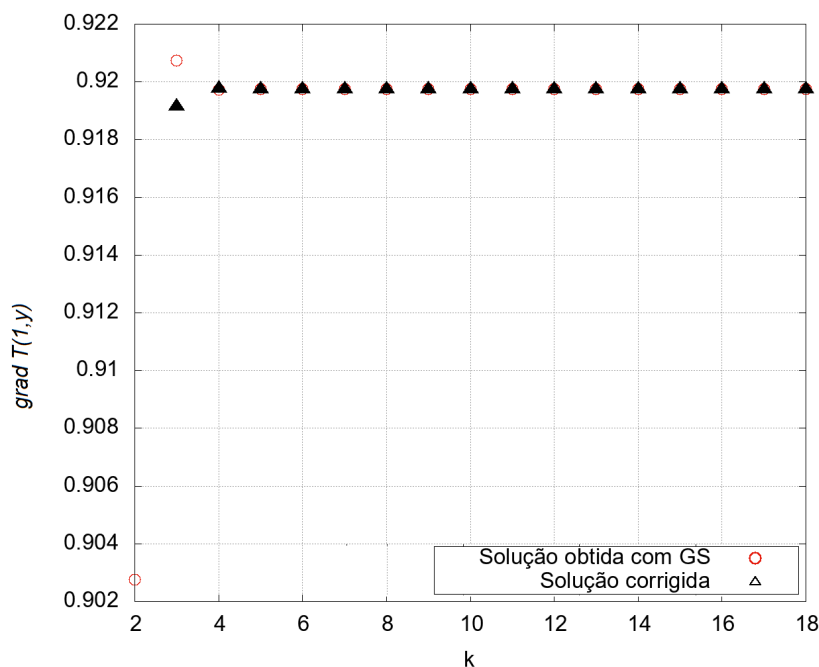
FIGURA G.194 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2.

Fonte: a autora (2020).

FIGURA G.195 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.

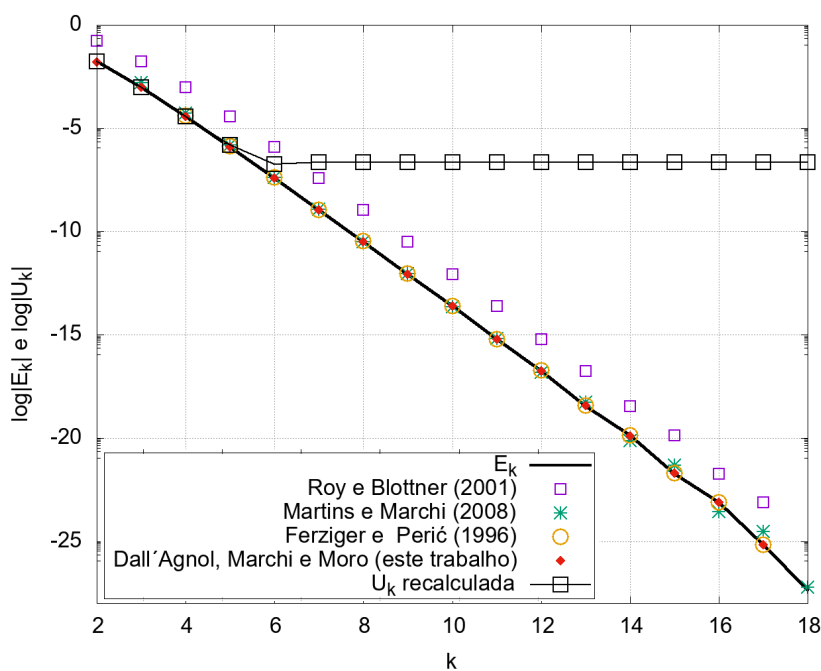
Fonte: a autora (2020).

FIGURA G.196 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS ASSOCIADO AO *MULTIGRID* E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



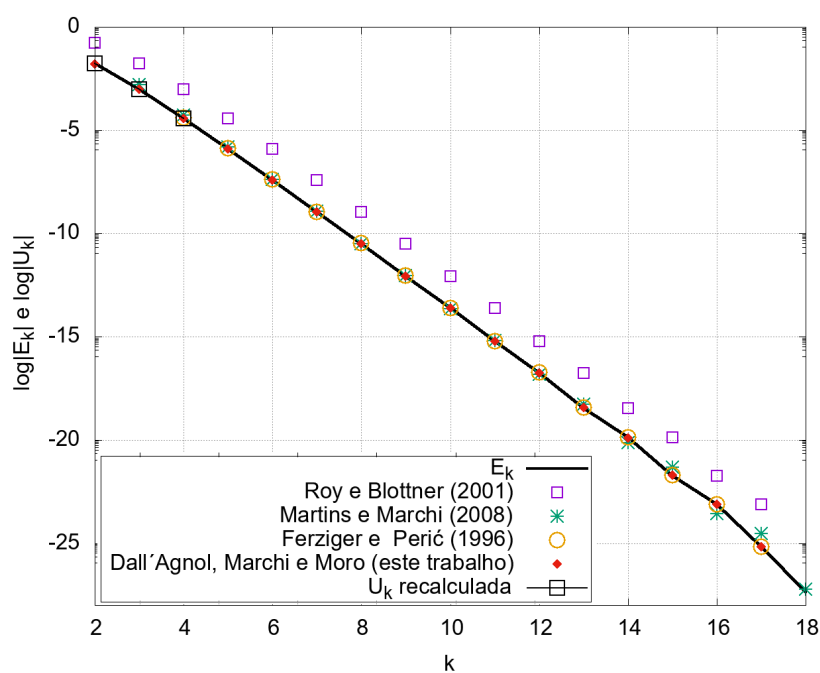
Fonte: a autora (2020).

FIGURA G.197 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA G.198 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL $\text{grad } T(1,y)$ DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODOS OS INTERVALOS.



Fonte: a autora (2020).

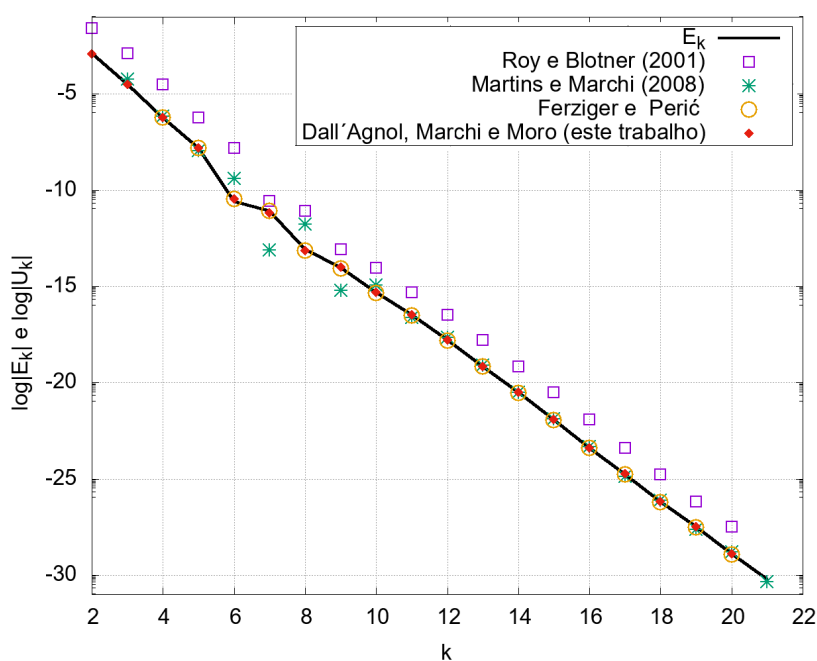
G.3 Variável 3: valor médio da função (temperatura média) T_m

G.3.1 Caso 1

TABELA G.20 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL T_m , PROBLEMA 3, COM *MULTIGRID* .

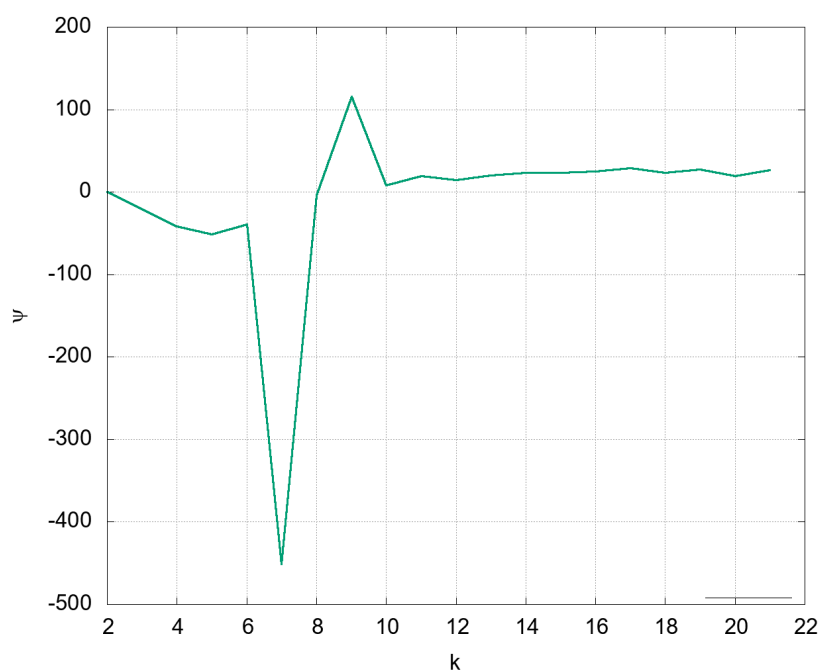
Intervalo	Critério	Iterações
I	$\psi < -1$ com convergência monotônica	3 : 5
II	$\psi < -1$ sem convergência monotônica	6 : 21

FIGURA G.199 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1.



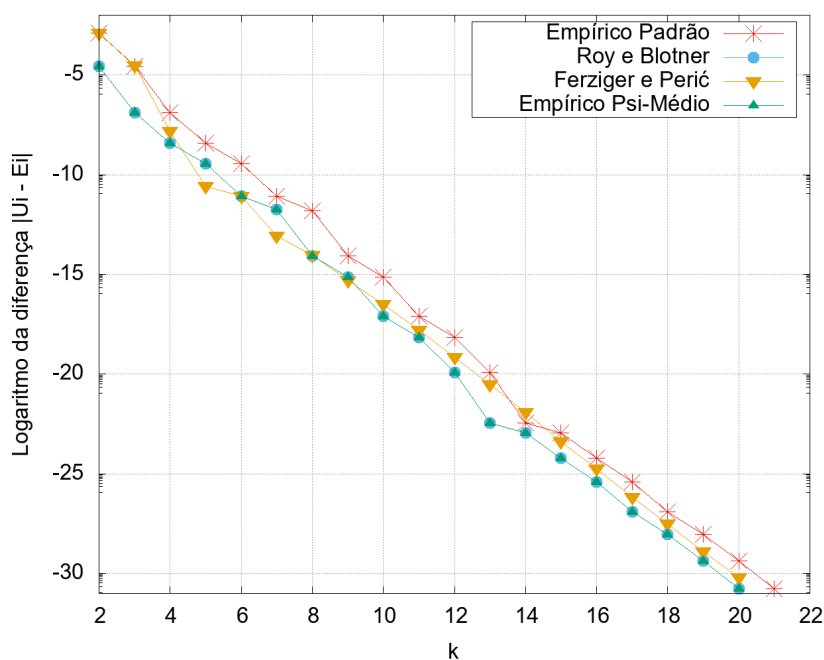
Fonte: a autora (2020).

FIGURA G.200 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1.



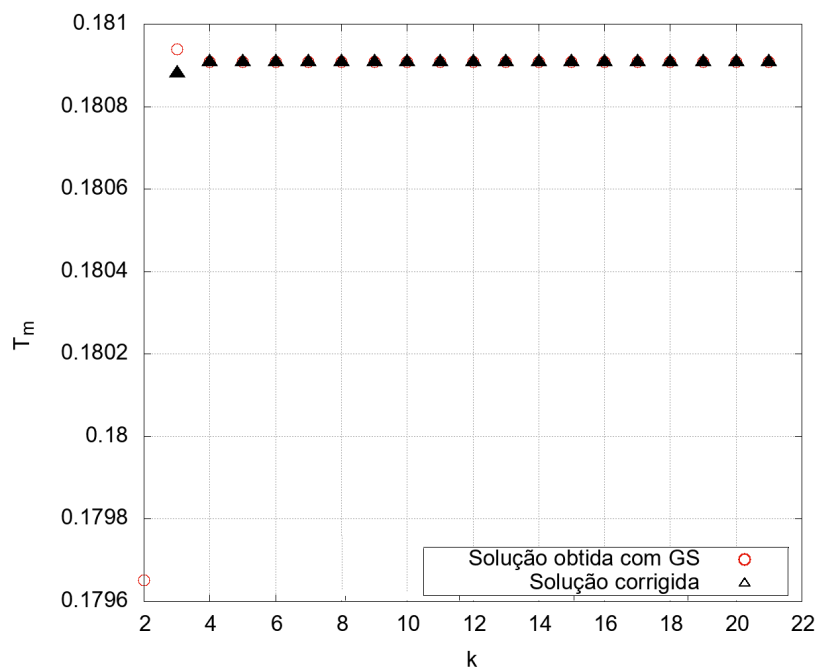
Fonte: a autora (2020).

FIGURA G.201 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



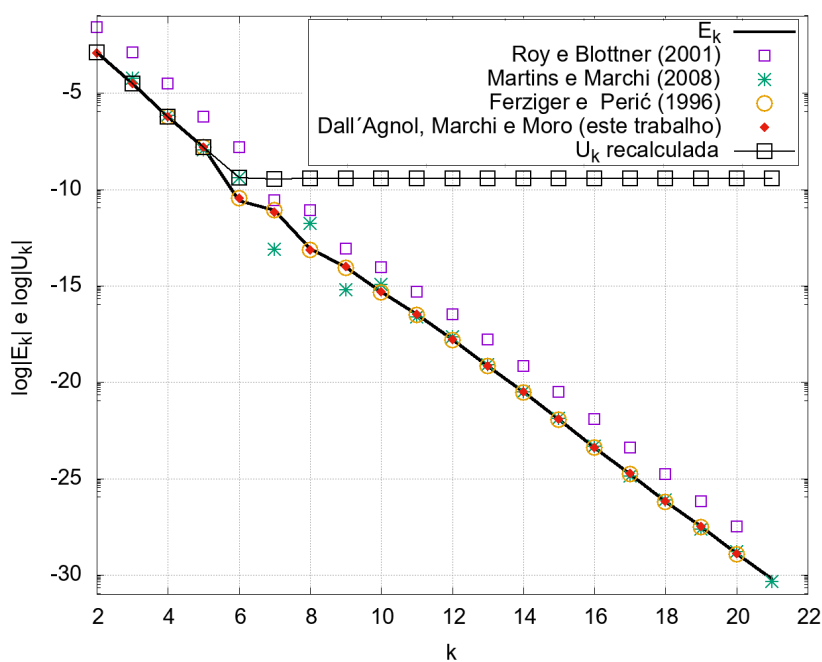
Fonte: a autora (2020).

FIGURA G.202 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS ASSOCIADO AO *MULTIGRID* E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



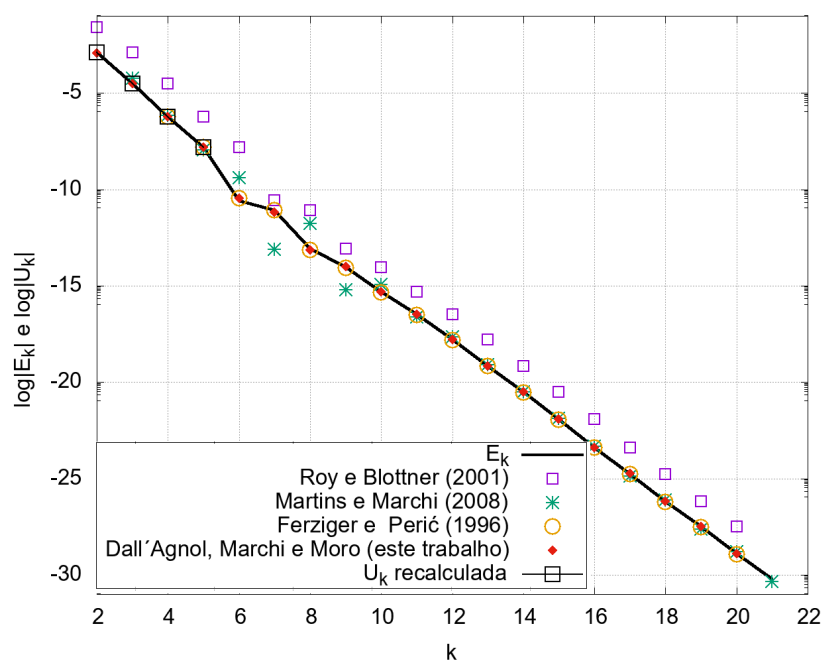
Fonte: a autora (2020).

FIGURA G.203 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA G.204 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 1, EM TODOS OS INTERVALOS.



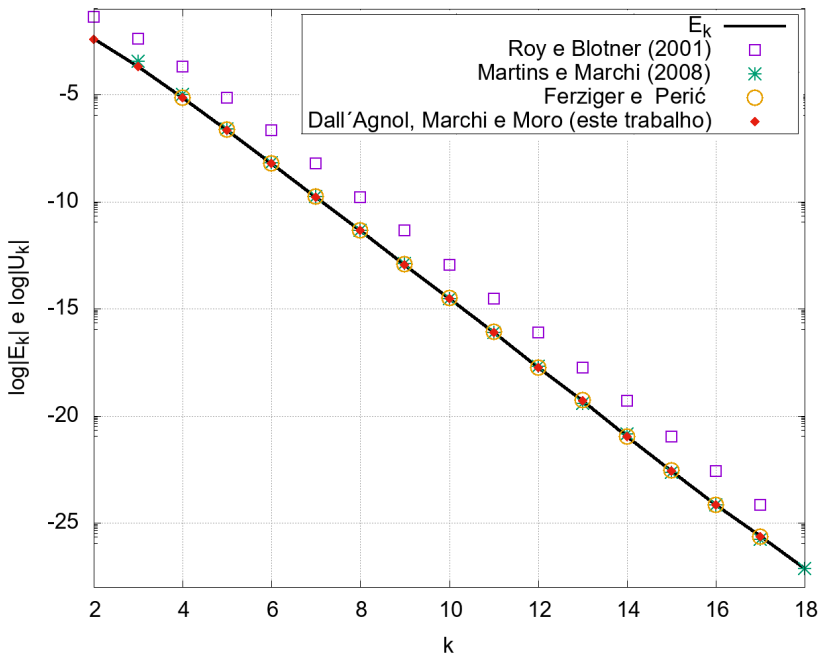
Fonte: a autora (2020).

G.3.2 Caso 2

TABELA G.21 – INTERVALOS DE ITERAÇÕES DELIMITADOS PARA ANÁLISE DO DESEMPENHO DO ESTIMADOR PROPOSTO PARA A VARIÁVEL T_m , PROBLEMA 3, COM *MULTIGRID* .

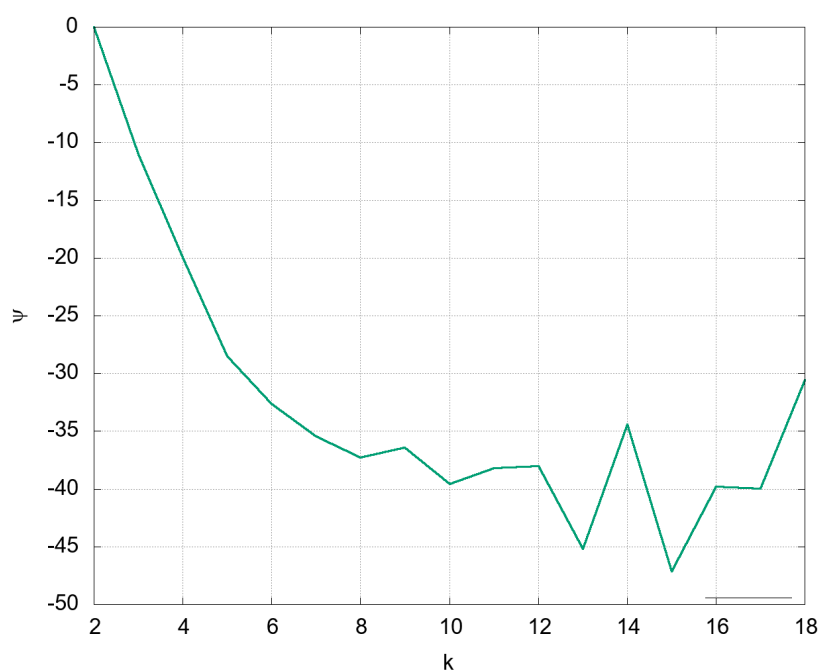
Intervalo	Critério	Iterações
I	$\psi < -1$ com convergência monotônica	3 : 8
II	$\psi < -1$ sem convergência monotônica	9 : 18

FIGURA G.205 – ESTIMATIVAS E ERRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2.



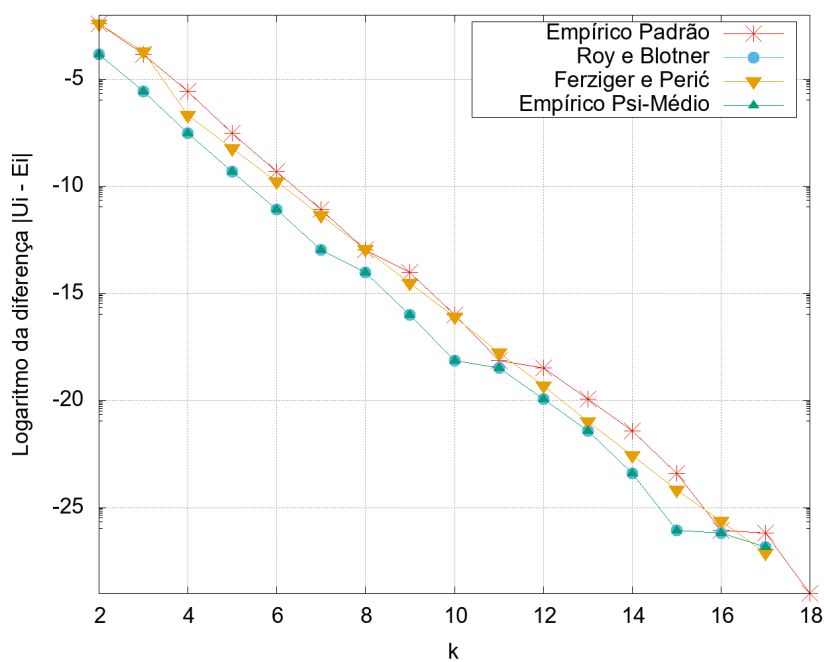
Fonte: a autora (2020).

FIGURA G.206 – TAXA DE CONVERGÊNCIA ψ A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2.



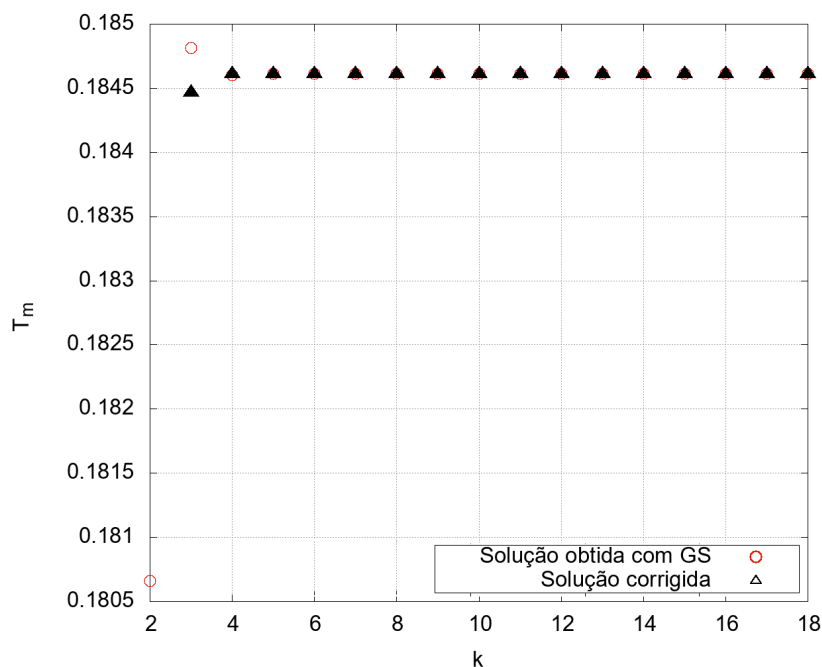
Fonte: a autora (2020).

FIGURA G.207 – MÓDULO DA DIFERENÇA ENTRE A ESTIMATIVAS DO ESTIMADOR EMPÍRICO PSI-MÉDIO E O ERRO VERDADEIRO DE ITERAÇÃO A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



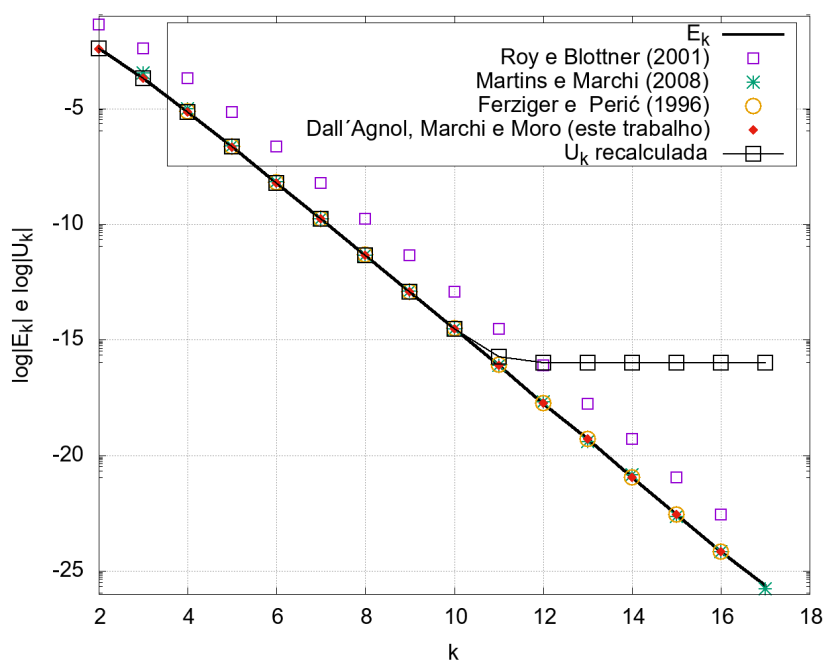
Fonte: a autora (2020).

FIGURA G.208 – SOLUÇÃO NUMÉRICA OBTIDA COM GS ASSOCIADO AO *MULTIGRID* E SOLUÇÃO NUMÉRICA CORRIGIDA A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, PARA TODAS AS ITERAÇÕES.



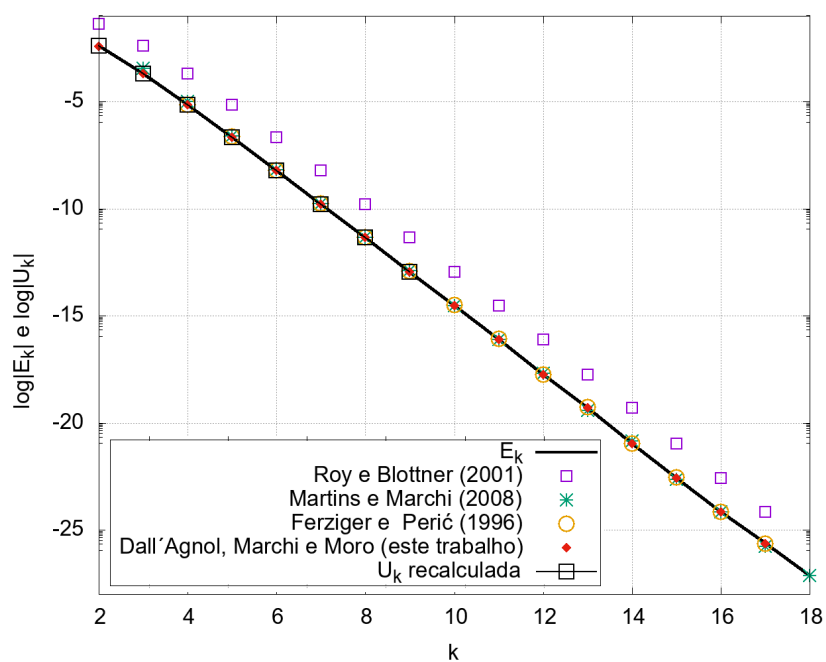
Fonte: a autora (2020).

FIGURA G.209 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODAS AS ITERAÇÕES.



Fonte: a autora (2020).

FIGURA G.210 – ESTIMATIVAS, ERRO DE ITERAÇÃO E ESTIMATIVAS MELHORADAS A CADA ITERAÇÃO PARA A VARIÁVEL T_m DO PROBLEMA 3, CASO 2, EM TODOS OS INTERVALOS.



Fonte: a autora (2020).