



Simulação numérica de escoamento reativo, transferência de calor e termoelasticidade em motor-foguete – parte 2

Projeto CFD-14/AEB-3 apoiado financeiramente pela
Agência Espacial Brasileira (AEB)
Anúncio de Oportunidades 01/2006 do Programa UNIESPAÇO
Tema: Veículos Espaciais
Tópico: Processos de Combustão em Motores-Foguete

Relatório técnico do projeto CFD-14/UFPR: modelagem de escoamento turbulento (Baldwin-Lomax) do código Mach-2D

Carlos Henrique Marchi, Dr. Eng. Mec.
Universidade Federal do Paraná (UFPR)
Departamento de Engenharia Mecânica (DEMEC)

Guilherme Bertoldo, Me. Física
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
Câmpus Francisco Beltrão

Curitiba, 20 de janeiro de 2012

Conteúdo

Resumo

Lista de Símbolos

Introdução	p. 8
Modelagem	p. 10
Modelo físico	p. 10
Modelo matemático	p. 10
Sistema coordenado cartesiano	p. 10
Sistema coordenado plano ou axissimétrico	p. 11
Sistema coordenado curvilíneo	p. 11
Domínio e condições de contorno	p. 14
Turbulência	p. 15
Modelo numérico	p. 17
Discretização do domínio	p. 17
Discretização das equações de transporte	p. 18
Cálculo da viscosidade turbulenta	p. 18
Algoritmo	p. 21
Resultados numéricos	p. 23
Verificação da sub-rotina para o cálculo da viscosidade turbulenta	p. 23
Referências	p. 26

Resumo

Este relatório descreve a modelagem física, matemática e numérica utilizada na simulação do escoamento bidimensional turbulento de um gás monoespécie no interior de um motor-foguete. É dada ênfase à descrição da modelagem numérica do modelo de turbulência empregado (modelo algébrico de Baldwin-Lomax). A sub-rotina implementada para o cálculo da viscosidade turbulenta foi verificada comparando os seus resultados com os fornecidos pelo aplicativo desenvolvido por Wilcox⁽¹⁾ para o cálculo do escoamento turbulento através de um duto circular. A diferença relativa entre os resultados é da ordem de 0,03%. Os resultados relativos ao escoamento no motor-foguete serão apresentados em outro relatório.

Lista de Símbolos

A_o^+	Parâmetro do modelo de Baldwin-Lomax [adimensional]
C_{cp}	Parâmetro do modelo de Baldwin-Lomax [adimensional]
c_f	Coefficiente de fricção [adimensional]
C_{kleb}	Parâmetro do modelo de Baldwin-Lomax [adimensional]
c_p	Calor específico a pressão constante por unidade de massa [J/kg.K]
c_v	Calor específico a volume constante por unidade de massa [J/kg.K]
C^ϕ	Variável genérica utilizada para representar 1 ou c_p
C_{wk}	Parâmetro do modelo de Baldwin-Lomax [adimensional]
f	Parâmetro da geometria do escoamento ($f = 0 \rightarrow$ plano, $f = 1 \rightarrow$ axissimétrico)
F_{kleb}	Função de intermitência de Klebanoff [adimensional]
F_{max}	Variável do modelo de Baldwin-Lomax [m/s]
F_{wake}	Variável do modelo de Baldwin-Lomax [m ² /s]
g	Diferença entre a viscosidade turbulenta da camada externa e a da interna [Pa.s]
h	Entalpia por unidade de massa [J/kg]
J	Jacobiano [m ⁻²]
\dot{m}	Taxa de fluxo de massa [kg/s]
k_{BL}	Parâmetro do modelo de Baldwin-Lomax [adimensional]
L	Comprimento do motor-foguete [m]
L_c	Comprimento da câmara de combustão [m]
L_n	Comprimento do bocal [m]
l_{mix}	Comprimento característico de mistura [m]
M	Número de Mach [adimensional]
N	Número de pontos na malha para o escoamento no duto
p	Pressão [Pa]

P^ϕ	Termo genérico envolvendo a pressão nas equações da massa, momento e energia
Pr	Número de Prandtl [adimensional]
R_p^+	Número de Reynolds para o escoamento no duto [adimensional]
R	Raio do motor-foguete (função de x) [m]
\mathcal{R}	Constante do gás [J/kg.K]
R_g	Raio da garganta do bocal [m]
R_i	Raio da câmara de combustão [m]
R_p	Raio do duto [m]
x	Vetor posição [m]
x_k	Vetor posição x em notação tensorial [m]
S^ϕ	Termo dissipativo genérico das equações da massa, momento e energia
T	Temperatura [K]
t	Tempo [s]
U_{dif}	Máxima velocidade (em módulo) do vetor velocidade na camada limite ao longo de uma linha perpendicular à parede [m/s]
U	Componente contravariante da velocidade [m ² /s]
u_k	Vetor velocidade u em notação tensorial [m/s]
U_p	Média de Reynolds da componente axial da velocidade através do duto [m/s]
\bar{U}_p	Velocidade axial média numa seção reta do duto [m/s]
u_t	Componente do vetor velocidade tangencial à parede [m/s]
u_τ	Velocidade de fricção [m/s]
u	Vetor velocidade [m/s]
u	Componente da velocidade na direção de x [m/s]
v	Componente da velocidade na direção de y [m/s]
V	Componente contravariante da velocidade [m ² /s]
x	Coordenada cartesiana ($f = 0$) ou axial ($f = 1$) [m]
y	Coordenada cartesiana ($f = 0$) ou radial ($f = 1$) [m]
Letras Gregas	
α	Componente do tensor métrico [m ²]

α_{BL}	Parâmetro do modelo de Baldwin-Lomax [adimensional]
β	Componente do tensor métrico [m ²]
γ	Componente do tensor métrico [m ²]
Γ^ϕ	Variável genérica usada para representar μ ou κ
ε	Energia interna por unidade de massa [J/kg]
γ_g	Razão entre c_p e c_v [adimensional]
ζ	Distância ao longo de uma reta normal à parede [m]
ζ_m	Solução da eq. (24) [m]
ζ_{max}	Solução da eq. (32) [m]
η	Coordenada generalizada [adimensional]
κ	Coefficiente de condutividade térmica [W/m.K]
μ	Coefficiente de viscosidade [Pa.s]
ν	Segundo coeficiente de viscosidade [Pa.s]
ξ	Coordenada generalizada [adimensional]
ρ	Massa específica [kg/m ³]
τ_{wall}	Tensão de cisalhamento [Pa]
ϕ	Variável genérica usada para representar outras variáveis
ω	Vorticidade [s ⁻¹]

Subscritos

wall	Parede
in	Entrada
sw	Canto a sudoeste do volume P
se	Canto a sudeste do volume P
nw	Canto a noroeste do volume P
ne	Canto a nordeste do volume P
s	Volume ao sul do volume P
n	Volume ao norte do volume P
w	Volume a oeste do volume P
e	Volume a leste do volume P

n Face norte do volume P ou normal à uma superfície

Sobrescritos

$+$ Indica variável adimensional

n Indicador do nível iterativo

Introdução

Este relatório descreve os modelos físico, matemático e numérico utilizados na simulação do escoamento bidimensional turbulento de um gás através de um motor-foguete. A turbulência é aproximada pelo modelo de Baldwin-Lomax^(1,2).

Ao se aplicar o modelo de turbulência é necessário considerar uma média temporal das grandezas físicas. Neste caso, é apropriado aplicar a média de Favre⁽¹⁾ devido à compressibilidade do fluido. Com o promediamento, surgem nas equações de transporte termos de correlação dos desvios das propriedades médias. Esses termos devem ser aproximados para que o conjunto de equações tenha solução. Como o modelo de turbulência é algébrico, as aproximações empregadas⁽¹⁾ fazem com que as equações promediadas sejam idênticas às originais, exceto pelo fato de que aos coeficientes de transporte (viscosidade e condutividade térmica) devem ser adicionados os respectivos coeficientes de transporte turbulentos (viscosidade e condutividade térmica turbulentos).

No modelo de Baldwin-Lomax, a viscosidade turbulenta é obtida ao longo de uma linha perpendicular à superfície da parede e separada em duas camadas. A camada mais próxima à parede é chamada de interna, e a outra, por conseguinte, de externa. Tipicamente, a viscosidade turbulenta é nula sobre a parede, cresce na camada interna e decresce na camada externa.

Nas equações de transporte discretizadas é necessário conhecer a viscosidade turbulenta sobre os centroides dos volumes de controle, que não estão, necessariamente, alinhados sobre uma linha perpendicular à parede. Isto gera uma incompatibilidade entre os locais onde a viscosidade turbulenta é calculada e onde ela é utilizada. No modelo numérico utilizado neste relatório, assume-se que a viscosidade turbulenta é apreciável apenas na camada limite, uma vez que o escoamento pelo motor-foguete é de alta velocidade. Neste caso, a viscosidade turbulenta é calculada sobre os centroides dos volumes de controle, que são alinhados transversalmente ao eixo do motor-foguete (veja a Fig. 2). Naturalmente se comete um erro com esta aproximação, mas espera-se que este erro seja pequeno caso a camada limite também seja.

Para verificar a correta implementação do modelo de turbulência, os resultados fornecidos pela sub-rotina que calcula a viscosidade turbulenta foram comparados com os fornecidos por um aplicativo desenvolvido por Wilcox⁽¹⁾, donde se verificou uma discrepância da ordem de

0,03%. Os resultados do escoamento turbulento no motor-foguete serão apresentados em outro relatório.

Modelagem

Modelo físico

Neste relatório será considerado um fluido compressível, contínuo, não-reativo, viscoso ou não viscoso e termicamente perfeito, isto é, a entalpia h e a energia interna ε por unidade de massa são funções apenas da temperatura. As propriedades termodinâmicas deste fluido, isto é, os calores específico a pressão e a volume constante, c_p e c_v , respectivamente, a razão γ_g entre c_p e c_v , o coeficiente de viscosidade μ e o coeficiente de condutividade térmica κ serão considerados variáveis. A pressão p , a massa específica ρ e a temperatura T serão relacionadas através da equação de estado para gases perfeitos. Serão desconsideradas forças externas, como a força gravitacional. O fluxo difusivo de calor será descrito através da lei de Fourier. O escoamento através de uma tubeira de seção reta circular de raio variável será considerado axissimétrico, estacionário, sem radiação térmica. No caso de se considerar um fluido viscoso, o escoamento poderá ser laminar ou turbulento, sendo este baseado no modelo de Baldwin-Lomax. A parede poderá ter uma temperatura prescrita ou ser considerada adiabática.

Modelo matemático

Sistema coordenado cartesiano

Com base no modelo físico descrito acima, as equações que descrevem a dinâmica do escoamento⁽³⁾, escritas em termos das coordenadas cartesianas e utilizando a notação de soma de Einstein, são dadas por:

Equação de conservação da massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} = 0; \quad (1)$$

Equação da conservação da quantidade de movimento linear (componentes x, y, z)

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k u_i)}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \left(\frac{\nu}{\mu} - \frac{2}{3} \right) \delta_{ik} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right] \right\}; \quad (2)$$

Equação de conservação da energia térmica

$$\begin{aligned}
 c_p \left[\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_k T)}{\partial x_k} \right] &= \frac{\partial p}{\partial t} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \\
 &+ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2 \\
 &+ \mu \left(\frac{\nu}{\mu} - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)^2.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Nas eqs. (1-3), t é o tempo, ρ é a massa específica, u_k é a componente cartesiana do vetor velocidade u na direção x_k , p é a pressão, μ é o coeficiente de viscosidade, ν é o segundo coeficiente de viscosidade, que será considerado desprezível¹, κ é o coeficiente de condutividade térmica, c_p é o calor específico a pressão constante e T é a temperatura.

Sistema coordenado plano ou axissimétrico

Em escoamentos com simetria plana ou axial as eqs. (1-3) são simplificadas e podem ser escritas de maneira genérica como

$$c^\phi \left[\frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u \phi)}{\partial x} + \frac{1}{y^f} \frac{\partial(\rho y^f v \phi)}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{1}{y^f} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^f \Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + P^\phi + S^\phi. \tag{4}$$

Nesta equação, x e y representam as coordenadas cartesianas para escoamentos planos ou as coordenadas axial e radial, respectivamente, para escoamentos axissimétricos. Fazendo $f = 0$, obtém-se a simetria plana e $f = 1$, a simetria axial. Tomando $\phi = 1$, obtém-se a equação de conservação da massa, $\phi = u$ a equação de conservação da quantidade de movimento linear na direção x , $\phi = v$ a equação de conservação da quantidade de movimento linear na direção y e $\phi = T$ a equação da conservação da energia térmica. A Tab. 1 apresenta os demais símbolos usados na Eq. (4).

Sistema coordenado curvilíneo

Para efetuar o cálculo numérico, é conveniente que a Eq. (4) seja escrita em outro sistema coordenado curvilíneo $\xi \eta$ que se adapte aos contornos do domínio de cálculo. A transformação⁽⁴⁾

¹Embora, neste trabalho, o segundo coeficiente de viscosidade seja considerado desprezível, ele é mantido nas equações por uma questão de completude.

Tabela 1: Símbolos empregados na Eq. (4).

ϕ	C^ϕ	Γ^ϕ	P^ϕ	S^ϕ
1	1	0	0	0
u	1	μ	$-\frac{\partial p}{\partial x}$	$\frac{1}{y^f} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu y^f \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{v}{\mu} - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y^f} \frac{\partial (y^f v)}{\partial y} \right) \right]$
v	1	μ	$-\frac{\partial p}{\partial y}$	$\frac{1}{y^f} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu y^f \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{2f\mu v}{y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{v}{\mu} - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y^f} \frac{\partial (y^f v)}{\partial y} \right) \right]$
T	c_p	κ	$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y}$	$\mu \left(\frac{v}{\mu} - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y^f} \frac{\partial (y^f v)}{\partial y} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2\mu \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + f \left(\frac{v}{y} \right)^2 \right]$

do sistema xy para o $\xi\eta$ leva às seguintes equações

$$C^\phi \left[\frac{1}{J} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{1}{y^f} \frac{\partial(\rho y^f U\phi)}{\partial \xi} + \frac{1}{y^f} \frac{\partial(\rho y^f V\phi)}{\partial \eta} \right] = P^\phi + S^\phi + \frac{1}{y^f} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\Gamma^\phi y^f J \left(\alpha \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{1}{y^f} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\Gamma^\phi y^f J \left(\gamma \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \right], \quad (5)$$

onde J é o jacobiano da transformação

$$J = [x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi]^{-1}, \quad (6)$$

U e V são as componentes contravariantes do vetor velocidade

$$U = uy_\eta - vx_\eta, \quad V = vx_\xi - uy_\xi, \quad (7)$$

e α , β e γ são componentes do tensor métrico

$$\alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2, \quad \beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta, \quad \gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2. \quad (8)$$

O índice ξ ou η nas coordenadas x e y indica a derivada parcial. Os termos fontes S^ϕ são dados por

$$S^1 = 0; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} S^u &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[J\mu \left(\frac{v}{\mu} + \frac{1}{3} \right) \left(y_\eta^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} - y_\xi y_\eta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[J\mu \left(\frac{v}{\mu} + \frac{1}{3} \right) \left(y_\xi^2 \frac{\partial u}{\partial \eta} - y_\xi y_\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{y^f} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[Jy^f \mu x_\eta \left(y_\xi \frac{\partial v}{\partial \eta} - y_\eta \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{y^f} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[Jy^f \mu x_\xi \left(y_\eta \frac{\partial v}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[J \frac{\mu}{y^f} \left(\frac{v}{\mu} - \frac{2}{3} \right) y_\eta \left(x_\xi \frac{\partial (y^f v)}{\partial \eta} - x_\eta \frac{\partial (y^f v)}{\partial \xi} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[J \frac{\mu}{y^f} \left(\frac{v}{\mu} - \frac{2}{3} \right) y_\xi \left(x_\eta \frac{\partial (y^f v)}{\partial \xi} - x_\xi \frac{\partial (y^f v)}{\partial \eta} \right) \right]; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} S^v &= \frac{1}{y^f} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[J\mu \left(\frac{v}{\mu} + \frac{1}{3} \right) y^f \left(x_\eta^2 \frac{\partial v}{\partial \xi} - x_\xi x_\eta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{y^f} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[J\mu \left(\frac{v}{\mu} + \frac{1}{3} \right) y^f \left(x_\xi^2 \frac{\partial v}{\partial \eta} - x_\xi x_\eta \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[J\mu y_\eta \left(x_\xi \frac{\partial u}{\partial \eta} - x_\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[J\mu y_\xi \left(x_\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} - x_\xi \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[J\mu \left(\frac{v}{\mu} - \frac{2}{3} \right) x_\eta \left(y_\xi \frac{\partial u}{\partial \eta} - y_\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[J\mu \left(\frac{v}{\mu} - \frac{2}{3} \right) x_\xi \left(y_\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right] \\ &- \frac{f\mu v}{y^2 J} \left(\frac{v}{\mu} + \frac{4}{3} \right) + \frac{fv}{y} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[x_\xi \mu \left(\frac{v}{\mu} - \frac{2}{3} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[x_\eta \mu \left(\frac{v}{\mu} - \frac{2}{3} \right) \right] \right\}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} S^T &= 2\mu J \left(\frac{\partial (y_\eta u)}{\partial \xi} - \frac{\partial (y_\xi u)}{\partial \eta} \right)^2 + 2\mu J \left(\frac{\partial (x_\xi v)}{\partial \eta} - \frac{\partial (x_\eta v)}{\partial \xi} \right)^2 \\ &+ \frac{2\mu f}{J} \left(\frac{v}{y} \right)^2 + \mu J \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (vy_\eta - ux_\eta) + \frac{\partial}{\partial \eta} (ux_\xi - vy_\xi) \right)^2 \\ &+ \mu \left(\frac{v}{\mu} - \frac{2}{3} \right) J \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{fv}{yJ} \right)^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Os demais símbolos são dados na Tab. 2.

Tabela 2: Símbolos usados na Eq. (5).

ϕ	C^ϕ	Γ^ϕ	P^ϕ
1	1	0	0
u	1	μ	$\frac{\partial(py_\xi)}{\partial\eta} - \frac{\partial(py_\eta)}{\partial\xi} = y_\xi \frac{\partial p}{\partial\eta} - y_\eta \frac{\partial p}{\partial\xi}$
v	1	μ	$\frac{\partial(px_\eta)}{\partial\xi} - \frac{\partial(px_\xi)}{\partial\eta} = x_\eta \frac{\partial p}{\partial\xi} - x_\xi \frac{\partial p}{\partial\eta}$
T	c_p	κ	$\frac{1}{J} \frac{\partial p}{\partial t} - uP^u - vP^v$

Domínio e condições de contorno

O perfil do motor-foguete é ilustrado na Fig. 1. Este motor tem comprimento total L e raio interno máximo R_i . A câmara de combustão tem comprimento L_c e raio fixo R_i . A turbina tem comprimento L_n e raio dado pela expressão

$$R(x) = R_g + \frac{R_i - R_g}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi(x - L_c)}{L_n} \right) \right], \quad L_c \leq x \leq L. \quad (13)$$

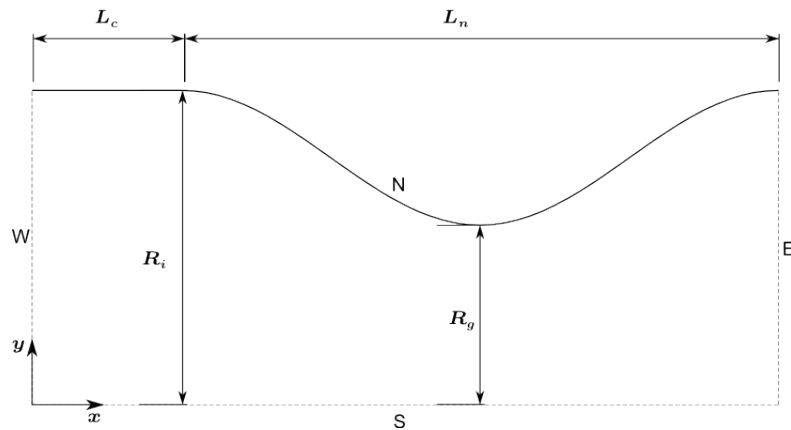


Figura 1: Esquema ilustrativo do motor-foguete.

As condições de contorno para esta geometria são:

Contorno da parede (norte)

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{ou} \quad T = T_{\text{wall}}, \quad (14)$$

onde $\frac{\partial}{\partial n}$ representa a derivada normal à superfície e T_{wall} um campo de temperatura prescrito sobre a parede.

Contorno de simetria (sul)

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0. \quad (15)$$

Contorno de entrada (oeste)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad v = 0, \quad p = p_{\text{in}}, \quad T = T_{\text{in}}, \quad (16)$$

onde p_{in} e T_{in} representam a pressão e a temperatura na entrada da câmara, respectivamente. Tanto a temperatura T_{in} , quanto a pressão p_{in} são obtidas assumindo-se um escoamento isentrópico até a entrada da câmara:

$$T_{\text{in}} = T_0 \left[1 - \frac{\gamma_g - 1}{2\gamma_g \mathcal{R} T_0} (u_{\text{in}}^2 + v_{\text{in}}^2) \right], \quad (17)$$

$$p_{\text{in}} = p_0 \left[1 + \frac{\gamma_g - 1}{2} M_{\text{in}}^2 \right]^{-\frac{\gamma_g}{\gamma_g - 1}}. \quad (18)$$

Nas eqs. (17-18), T_0 e p_0 são a temperatura e a pressão de estagnação, respectivamente, associadas ao escoamento isentrópico, u_{in} e v_{in} são as componentes do vetor velocidade na entrada da câmara e M_{in} é o número de Mach na entrada

$$M_{\text{in}} = \sqrt{\frac{u_{\text{in}}^2 + v_{\text{in}}^2}{\gamma_g \mathcal{R} T_{\text{in}}}}. \quad (19)$$

Contorno de saída (leste)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0. \quad (20)$$

Turbulência

Como já apontado, a turbulência será descrita através do modelo algébrico de Baldwin-Lomax. Para aplicar este modelo é necessário promediar as equações de Navier-Stokes com base na média de Favre, uma vez que o escoamento é compressível. Para modelos algébricos, as equações promediadas são idênticas às equações originais⁽²⁾, bastando substituir μ e κ por

$$\mu \rightarrow \mu + \mu_{\text{T}}, \quad \kappa \rightarrow \kappa + \kappa_{\text{T}}, \quad (21)$$

onde μ_T e κ_T são, respectivamente, a viscosidade e condutividade térmica turbulentas. Se μ_T for conhecida, então

$$\kappa_T = \frac{\mu_T c_p}{Pr_T}, \quad (22)$$

onde Pr_T é o número de Prandtl turbulento, que para camadas limites varia de 0,89 a 0,90.

De acordo com o modelo de Baldwin-Lomax, a viscosidade turbulenta é dada por

$$\mu_T(\zeta) = \begin{cases} \mu_{Ti}(\zeta), & \text{se } \zeta \leq \zeta_m, \\ \mu_{To}(\zeta), & \text{se } \zeta_m < \zeta, \end{cases} \quad (23)$$

onde ζ é a distância ao longo de uma linha normal à superfície, μ_{Ti} é a viscosidade da camada interna e μ_{To} a viscosidade da camada externa. O ponto ζ_m onde se faz a distinção entre as camadas é a menor raiz da equação

$$\mu_{Ti}(\zeta_m) = \mu_{To}(\zeta_m). \quad (24)$$

A viscosidade na camada interna é dada por

$$\mu_{Ti}(\zeta) = \rho(\zeta) l_{\text{mix}}(\zeta)^2 \omega(\zeta), \quad (25)$$

onde

$$l_{\text{mix}} = k_{\text{BL}} \zeta [1 - \exp(-\zeta^+/A_o^+)] \quad (26)$$

e ω é o módulo da vorticidade

$$\omega = \left| \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right|. \quad (27)$$

Na Eq. (26), k_{BL} e A_o^+ são constantes, cujos valores serão apresentados a seguir, e ζ^+ é a distância adimensional à parede:

$$\zeta^+ = \frac{u_\tau \rho_{\text{wall}}}{\mu_{\text{wall}}} \zeta. \quad (28)$$

Na última equação, ρ_{wall} e μ_{wall} representam a massa específica e viscosidade sobre a parede, respectivamente, e u_τ é a velocidade de fricção, dada por

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_{\text{wall}}}{\rho_{\text{wall}}}}, \quad (29)$$

que depende, por sua vez, da tensão de cisalhamento sobre a parede τ_{wall} .

Na camada externa, a viscosidade turbulenta é dada por

$$\mu_{To} = \rho \alpha_{\text{BL}} C_{cp} F_{\text{wake}} F_{\text{kleb}} \left(\frac{C_{\text{kleb}} \zeta}{\zeta_{\text{max}}} \right), \quad (30)$$

onde

$$F_{\text{wake}} = \min \left[\zeta_{\text{max}} F_{\text{max}}; \frac{C_{wk} \zeta_{\text{max}} U_{\text{dif}}^2}{F_{\text{max}}} \right], \quad (31)$$

ζ_{max} é o valor de ζ para o qual

$$F_{\text{max}} = \frac{1}{k_{\text{BL}}} \max_{\zeta} (l_{\text{mix}} \omega), \quad (32)$$

F_{kleb} é a função de intermitência de Klebanoff⁽¹⁾

$$F_{\text{kleb}}(x) = \frac{1}{1 + 5,5x^6}, \quad (33)$$

e U_{dif} é a maior velocidade na camada turbulenta ao longo de ζ

$$U_{\text{dif}} = \max_{\zeta} \left(\sqrt{[u(\zeta)]^2 + [v(\zeta)]^2} \right). \quad (34)$$

As constantes α_{BL} , C_{cp} , C_{kleb} e C_{wk} , que aparecem nas eqs. (30-31), bem como k_{BL} e A_o^+ , da Eq. (26), são

$$k_{\text{BL}} = 0,40, \quad \alpha_{\text{BL}} = 0,0168, \quad A_o^+ = 26, \quad C_{cp} = 1,6, \quad C_{\text{kleb}} = 0,3, \quad C_{wk} = 1. \quad (35)$$

Modelo numérico

Discretização do domínio

A discretização do domínio é mostrada esquematicamente na Fig. 2. Os volumes de controle são concentrados na borda da parede para aumentar a resolução sobre a camada limite. A discretização é uniforme na direção axial e varia conforme uma progressão geométrica ao longo do eixo radial.

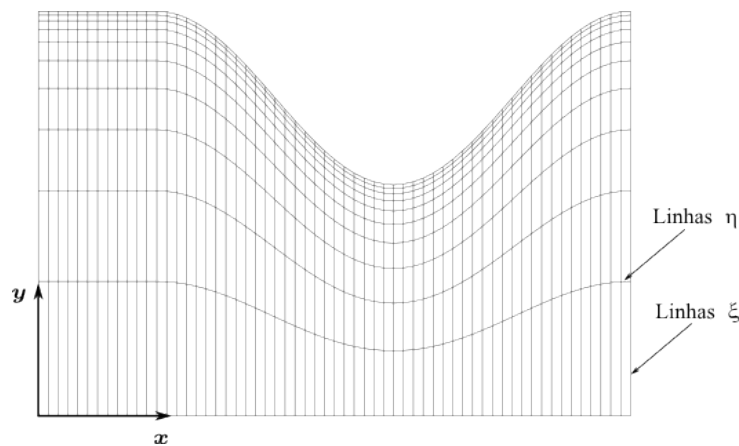


Figura 2: Esquema ilustrativo da malha utilizada.

Discretização das equações de transporte

As equações de transporte (5) são integradas sobre um volume de controle genérico e em seguida as derivadas são aproximadas por diferenças finitas. Uma descrição detalhada desta discretização é apresentada no relatório⁽⁵⁾.

Cálculo da viscosidade turbulenta

Para calcular a viscosidade turbulenta é necessário conhecer ζ , ρ , u , v e ω ao longo de uma linha perpendicular à superfície da parede (veja a Fig. 3). Por outro lado, μ_T deve ser determinada sobre o centro dos volumes de controle para ser apropriadamente empregada nas equações de transporte. Ambas as condições são satisfeitas se a malha for projetada para ser ortogonal à parede da tubeira e se a turbulência estiver restrita à camada limite, que no caso de escoamentos supersônicos será muito fina comparada com o raio do motor-foguete. Se estas

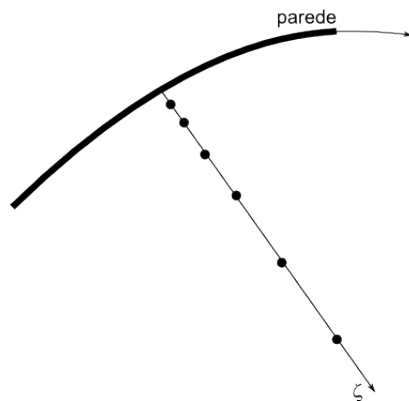


Figura 3: Esquema da malha ao longo de uma linha localmente perpendicular à parede.

condições forem satisfeitas, a linha perpendicular à parede será uma linha de ξ constante que passa pelos centroides dos volumes de controle e a distância à parede ζ_P a cada centroide P será dada pela expressão

$$\zeta_P = \sqrt{(x_{\text{wall}} - x_P)^2 + (y_{\text{wall}} - y_P)^2}, \quad (36)$$

onde $(x_{\text{wall}}, y_{\text{wall}})$ são as coordenadas do ponto onde a reta cruza a parede e (x_P, y_P) são as coordenadas do centroide do volume de controle P. No código implementado, entretanto, as linhas de ξ constante (linhas verticais da Fig. 2) não são localmente perpendiculares à superfície da parede. Esta aproximação é razoável se a curvatura do motor-foguete for pequena e deve ser melhorada nos próximos trabalhos.

As grandezas ρ_P , u_P e v_P já são conhecidas nos centroides dos volumes de controle, entretanto, a vorticidade deve ser determinada. Devido à mudança das coordenadas cartesianas

para as curvilíneas nas equações de transporte, é também conveniente expressar a vorticidade em termos das coordenadas curvilíneas. Após algumas manipulações matemáticas é possível mostrar que a Eq. (27) pode ser reescrita como

$$\omega = J \left| \frac{\partial v}{\partial \xi} y_\eta - \frac{\partial v}{\partial \eta} y_\xi + \frac{\partial u}{\partial \xi} x_\eta - \frac{\partial u}{\partial \eta} x_\xi \right|. \quad (37)$$

O valor da vorticidade no centro de um volume de controle arbitrário P (veja a Fig. 4) depende das derivadas de u , v , x e y em relação a ξ e η , que são aproximadas utilizando o esquema de diferenças finitas centrais:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_P = \frac{\phi_E - \phi_W}{2}, \quad \phi = u, v, \quad (38)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_P = \frac{\phi_N - \phi_S}{2}, \quad \phi = u, v, \quad (39)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_P = \frac{\phi_{ne} + \phi_{se} - \phi_{nw} - \phi_{sw}}{2}, \quad \phi = x, y, \quad (40)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_P = \frac{\phi_{ne} - \phi_{se} + \phi_{nw} - \phi_{sw}}{2}, \quad \phi = x, y. \quad (41)$$

Nestas expressões, foi usado $\Delta \xi = 1$ e $\Delta \eta = 1$, assim como na discretização das equações de transporte⁽⁵⁾.

Combinando as eqs. (37-41), a expressão para a vorticidade no centro do volume P é

$$\begin{aligned} \omega_P = & \frac{J_P}{4} \left| (v_E - v_W)(y_{ne} - y_{se} + y_{nw} - y_{sw}) - (v_N - v_S)(y_{ne} + y_{se} - y_{nw} - y_{sw}) \right. \\ & \left. + (u_E - u_W)(x_{ne} - x_{se} + x_{nw} - x_{sw}) - (u_N - u_S)(x_{ne} + x_{se} - x_{nw} - x_{sw}) \right|. \quad (42) \end{aligned}$$

Além das grandezas ζ , ρ , u , v e ω , também é necessário ao cálculo de μ_T conhecer μ_{wall} , ρ_{wall} e τ_{wall} . As grandezas μ_{wall} e ρ_{wall} já são calculadas nas equações de transporte, pois é necessário conhecê-las nas faces dos volumes de controle. O esquema numérico para este cálculo já foi descrito no primeiro relatório⁽⁵⁾. Resta determinar τ_{wall} .

De modo geral, a intensidade da tensão de cisalhamento sobre a parede é dada por

$$\tau_{\text{wall}} = \left| \mu \frac{\partial u_t}{\partial n} \right|_{\text{wall}}, \quad (43)$$

onde u_t é a componente do vetor velocidade na direção tangencial à parede e o índice $_{\text{wall}}$ indica que a função deve ser calculada sobre a parede. Também é conveniente expressar τ_{wall} em termos das coordenadas curvilíneas $\xi \eta$. Observando que a superfície da tubeira está sobre uma linha de η constante e que a velocidade do fluido é nula sobre a parede, é possível mostrar que a

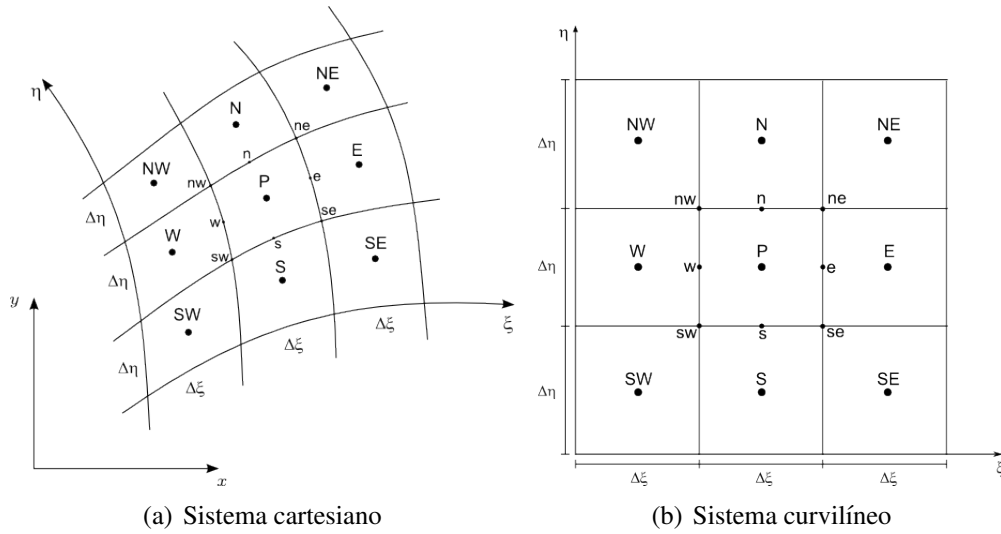


Figura 4: Volume de controle genérico P no sistema coordenado cartesiano 4(a) e no sistema curvilíneo 4(b).

expressão (43) pode ser reescrita como

$$\tau_{\text{wall}} = \mu_{\text{wall}} J_{\text{wall}} \left| \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} x_{\xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} y_{\xi} \right) \right|_{\text{wall}}. \quad (44)$$

Note que, se $x = \xi$ e $y = \eta$, então a Eq. (44) se reduz à expressão usual para a tensão de cisalhamento sobre uma placa plana no plano xz com o fluido se deslocando na direção de x .

A expressão discretizada para a Eq. (44) é (Fig. 5)

$$\tau_{\text{wall}} = \mu_n J_n \left| (u_N - u_P) (x_{\xi})_n + (v_N - v_P) (y_{\xi})_n \right|, \quad (45)$$

onde o índice n indica que a variável é calculada na face norte do volume P. O esquema numérico para o cálculo das variáveis com estes índices é descrito no primeiro relatório⁽⁵⁾.

Levando-se em consideração que a velocidade deve ser nula sobre a parede, o que conduz à aproximação

$$\frac{u_N + u_P}{2} = 0, \quad \frac{v_N + v_P}{2} = 0, \quad (46)$$

a Eq. (45) torna-se

$$\tau_{\text{wall}} = 2\mu_n J_n \left| u_P (x_{\xi})_n + v_P (y_{\xi})_n \right|. \quad (47)$$

Com estas informações, o procedimento para o cálculo da viscosidade turbulenta é como segue.

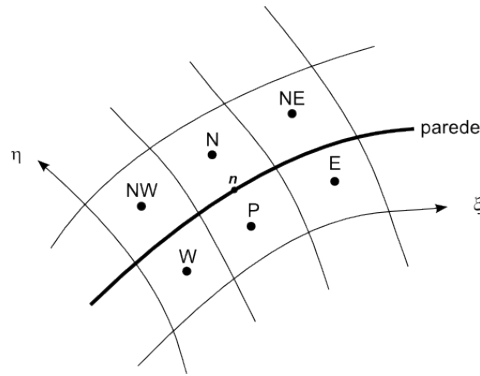


Figura 5: Esquema ilustrativo da malha utilizada.

Algoritmo

Varrer cada linha de ξ constante a partir do volume contíguo à parede até o volume mais distante e calcular:

1. *Camada interna*

$$\mu_{\text{wall}} = \mu_n, \quad (\text{somente para o volume de fronteira}) \quad (48)$$

$$\rho_{\text{wall}} = \rho_n, \quad (\text{somente para o volume de fronteira}) \quad (49)$$

$$\tau_{\text{wall}} = 2\mu_{\text{wall}} J_{\text{wall}} \left| u_p (x_\xi)_n + v_p (y_\xi)_n \right|, \quad (\text{somente para o volume de fronteira}) \quad (50)$$

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_{\text{wall}}}{\rho_{\text{wall}}}}, \quad (\text{somente para o volume de fronteira}) \quad (51)$$

$$\zeta_p = \sqrt{(x_{\text{wall}} - x_p)^2 + (y_{\text{wall}} - y_p)^2} \quad (52)$$

$$\zeta_p^+ = \frac{u_\tau \rho_{\text{wall}}}{\mu_{\text{wall}}} \zeta_p \quad (53)$$

$$l_{\text{mix},p} = k_{\text{BL}} \zeta_p \left[1 - \exp(-\zeta_p^+ / A_o^+) \right] \quad (54)$$

$$\omega_p = \text{conforme a Eq. (42)} \quad (55)$$

$$\mu_{\tau i,p} = \rho_p l_{\text{mix},p}^2 \omega_p \quad (56)$$

2. Camada externa

$$U_{\text{dif}} = \max_{\xi} \left(\sqrt{u_p^2 + v_p^2} \right) \quad (57)$$

$$F_{\text{max}} = \frac{1}{k_{\text{BL}}} \max_{\xi} (l_{\text{mix},p} \omega_p) \quad (58)$$

$$F_{\text{max}} = \frac{1}{k_{\text{BL}}} l_{\text{mix}}(\zeta_{\text{max}}) \omega(\zeta_{\text{max}}), \quad (\text{encontrar a raiz } \zeta_{\text{max}}) \quad (59)$$

$$F_{\text{wake}} = \min \left[\zeta_{\text{max}} F_{\text{max}}, \frac{C_{wk} \zeta_{\text{max}} U_{\text{dif}}^2}{F_{\text{max}}} \right] \quad (60)$$

$$\mu_{\text{TO},p} = \rho_p \alpha_{\text{BL}} C_p F_{\text{wake}} F_{\text{kleb}} \left(\frac{C_{\text{kleb}} \zeta_p}{\zeta_{\text{max}}} \right) \quad (61)$$

3. Separação das camadas

Define-se a função

$$g_p = (\mu_{\text{TO}} - \mu_{\text{Ti}})_p \quad (62)$$

e procura-se o primeiro valor de P ao longo da linha ξ constante para o qual se verifique a condição

$$g_p g_N > 0. \quad (63)$$

Para todos os pontos entre a parede e o ponto que satisfaz a condição (63), a viscosidade turbulenta é dada por (camada interna)

$$(\mu_T)_p = (\mu_{\text{Ti}})_p. \quad (64)$$

Para os demais pontos a viscosidade turbulenta é dada por (camada externa)

$$(\mu_T)_p = (\mu_{\text{TO}})_p. \quad (65)$$

O cálculo de F_{max} e ζ_{max} nas eqs. (58-59) é feito através de uma interpolação quadrática.

Resultados numéricos

Verificação da sub-rotina para o cálculo da viscosidade turbulenta

A fim de verificar a sub-rotina desenvolvida para o cálculo da viscosidade turbulenta, esta foi aplicada ao problema do escoamento turbulento através de um duto circular (escoamento de Poiseuille cilíndrico). Os detalhes podem ser encontrados em Wilcox⁽¹⁾. A dinâmica do fluido é modelada pela equação

$$(\mu + \mu_\tau) \frac{dU_p}{d\zeta} = \rho u_\tau^2 \left(1 - \frac{\zeta}{R_p} \right), \quad U_p(0) = 0, \quad 0 \leq \zeta \leq R_p, \quad (1)$$

onde U_p é a componente axial da velocidade promediada e R_p é o raio do duto. As demais grandezas tem o mesmo significado das outras seções. Uma vez conhecido o perfil da velocidade $U_p(\zeta)$, as grandezas de interesse (o fluxo de massa \dot{m} , a velocidade média \bar{U}_p e o coeficiente de fricção c_f) são calculados, respectivamente, através das seguintes expressões

$$\dot{m} = 2\pi\rho \int_0^{R_p} U_p(\zeta)(R_p - \zeta)d\zeta, \quad (2)$$

$$\bar{U}_p = \frac{\dot{m}}{\pi\rho R_p^2}, \quad (3)$$

$$c_f = \frac{2\tau_{\text{wall}}}{\rho_{\text{wall}}\bar{U}_p^2}. \quad (4)$$

Na obtenção dos resultados numéricos é conveniente introduzir as seguintes grandezas adimensionais

$$\zeta^+ = \zeta \frac{u_\tau \rho}{\mu}, \quad \mu_\tau^+ = \frac{\mu_\tau}{\mu}, \quad U_p^+ = \frac{U_p}{u_\tau}, \quad \dot{m}^+ = \frac{u_\tau \rho}{\mu^2} \dot{m}, \quad \bar{U}_p^+ = \frac{\bar{U}_p}{u_\tau}. \quad (5)$$

Com base nestas definições, a Eq. (1) torna-se

$$(1 + \mu_\tau^+) \frac{dU_p^+}{d\zeta^+} = 1 - \frac{\zeta^+}{R_p^+}, \quad U_p^+(0) = 0, \quad 0 \leq \zeta^+ \leq R_p^+, \quad (6)$$

onde R_p^+ é o número de Reynolds

$$R_p^+ = \frac{u_\tau \rho R_p}{\mu}. \quad (7)$$

A discretização do domínio de cálculo e da Eq. (6) são dados, respectivamente, pelas expressões

$$\zeta_k^+ = R_p^+ \left(\frac{k-1}{N-1} \right)^4, \quad 1 \leq k \leq N \quad (8)$$

e

$$\left(1 + \frac{(\mu_T^+)_k + (\mu_T^+)_{k-1}}{2} \right)^{(n-1)} \left(\frac{U_{pk}^+ - U_{pk-1}^+}{\zeta_k^+ - \zeta_{k-1}^+} \right)^{(n)} = 1 - \frac{\zeta_k^+ + \zeta_{k-1}^+}{2R_p^+}, \quad U_{p1}^+ = 0, \quad 2 \leq k \leq N, \quad (9)$$

onde o índice n indica o nível iterativo e N é um inteiro. É necessário resolver de modo iterativo porque a viscosidade turbulenta depende do campo de velocidade.

Verificou-se que o esquema iterativo não convergia se no cálculo da viscosidade turbulenta fosse utilizado apenas o campo de velocidade da última iteração. Porém, ao se tomar a média do campo de velocidade das duas últimas iterações, a convergência foi obtida. Uma vez obtido o campo de velocidade convergido, o fluxo de massa Eq. (2) foi calculado utilizando-se a regra dos trapézios.

Os resultados numéricos para o número Reynolds $R_p^+ = 1058$ são mostrados na Tab. 1 para vários valores de N . Em todos os resultados foram utilizadas 1000 iterações. Para este número de iterações a norma l_1 da diferença entre valores de U_p^+ entre dois níveis iterativos sucessivos é no máximo da ordem de 10^{-10} . Na última linha da tabela são mostrados os valores obtidos através do estimador de Richardson⁽⁶⁾, de acordo com o qual

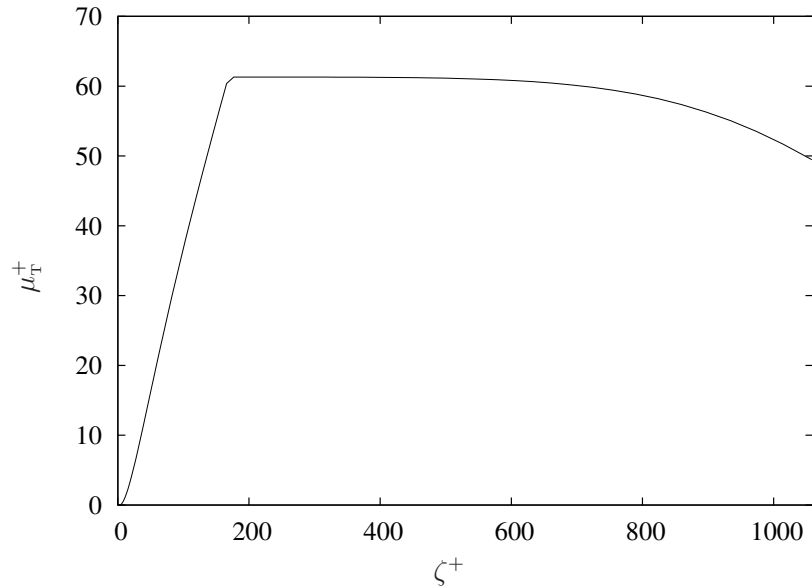
$$\phi_\infty = \phi_1 + \frac{\phi_1 - \phi_2}{r^p - 1}, \quad (10)$$

onde ϕ_∞ representa o valor extrapolado da grandeza arbitrária ϕ , ϕ_1 o valor de ϕ na malha com $N = N_1 = 1601$ e ϕ_2 o valor de ϕ obtido na malha com $N = N_2 = 801$, $r = (N_1 - 1)/(N_2 - 1)$ e $p = 2$ é a ordem do erro de truncamento da Eq. (9). Também é mostrado nesta tabela o coeficiente de fricção obtido através de um programa disponibilizado por Wilcox em seu livro⁽¹⁾. A diferença relativa entre os resultados deste trabalho e os de Wilcox, na malha mais fina e extrapolada, é da ordem de 0,03%.

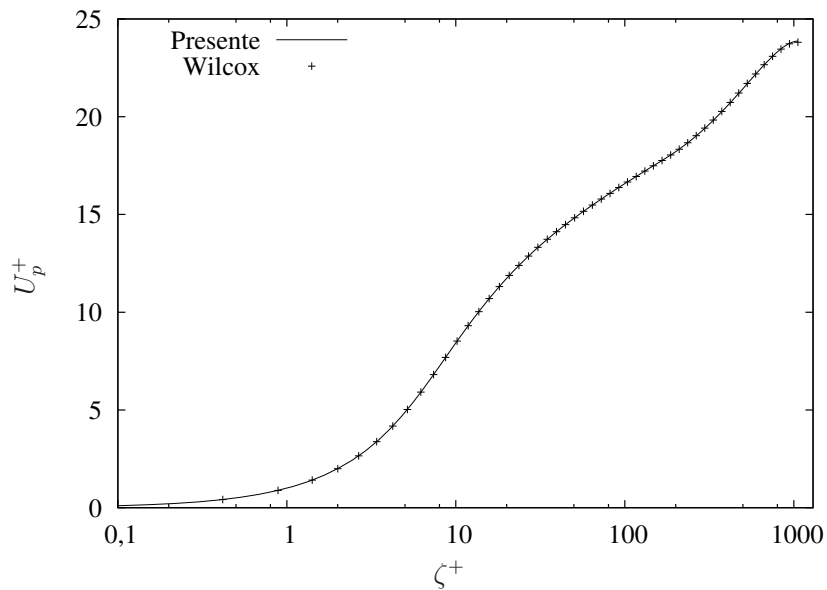
Tabela 1: Taxa de fluxo de massa, velocidade axial média e coeficiente de fricção para o escoamento turbulento no duto.

N	\dot{m}^+	\bar{U}_p^+	c_f	$c_f^{(1)}$
201	$6,7021 \times 10^7$	19,058	$5,5063 \times 10^{-3}$	$5,500 \times 10^{-3}$
401	$6,7041 \times 10^7$	19,064	$5,5030 \times 10^{-3}$	
801	$6,7046 \times 10^7$	19,066	$5,5021 \times 10^{-3}$	
1601	$6,7047 \times 10^7$	19,066	$5,5019 \times 10^{-3}$	
∞	$6,7047 \times 10^7$	19,066	$5,5018 \times 10^{-3}$	

A Fig. 1 mostra os perfis da viscosidade turbulenta e da velocidade adimensionais em termos de ζ^+ . Nesta mesma figura (1(b)) é mostrado o resultado fornecido pelo programa do Wilcox.



(a) Viscosidade turbulenta adimensional



(b) Velocidade adimensional

Figura 1: Perfis da (a) viscosidade turbulenta adimensional μ_T^+ e (b) da velocidade U_p^+ adimensional.

Referências

- 1 WILCOX, D. C. *Turbulence modeling for CFD*. 2. ed. California: DCW Industries, Inc., 1994.
- 2 BALDWIN, B. S.; LOMAX, H. Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. *AIAA*, v. 78-257, 1978.
- 3 LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Fluid mechanics*. 2. ed. Oxford: Pergamon Press, 1987.
- 4 MALISKA, C. R. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional*. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.
- 5 MARCHI, C. H.; ARAKI, L. K. *Relatório técnico do projeto CFD-10/UFPR: códigos Mach2D 6.1 e RHG2D 1.0*. Curitiba, 2009.
- 6 MARCHI, C. H.; SILVA, A. F. C. Previsão de erros de truncamento de modelos numéricos em malhas não-uniformes. In: *IV SIMMEC - Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional*. Uberlândia, MG: [s.n.], 2000. p. 481–488.