



# **Relatório técnico final do projeto**

## ***Multiextrapolação de Richardson para reduzir e estimar o erro de discretização em CFD***

**CFD-18**

**Palavras-chave:** erro numérico, diferenças finitas, volumes finitos, erro de truncamento, verificação, Navier-Stokes

**Período de execução: 6 Jan 2012 a 5 Jan 2014**

Projeto de **PESQUISA CIENTÍFICA BÁSICA** financiado pelo  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)  
através do **Edital MCT/CNPq 14/2011 – Universal / Faixa A**

Processo CNPq 477348/2011-4

**Carlos Henrique Marchi**

(coordenador)

Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Curitiba, 5 de março de 2014.

## SUMÁRIO

1 – Resumo .....		2
2 – Metas e objetivos do projeto .....		2
3 – Resultados obtidos .....		3
4 – Material adquirido .....		7
5 – Equipe participante .....		7
6 – Conclusão .....		8

## 1 – RESUMO

O objetivo geral do projeto CFD-18 era reduzir e estimar o erro de discretização em CFD (*Computational Fluid Dynamics*) através de múltiplas extrapolações de Richardson (MER). Pretendia-se melhorar, generalizar e testar o uso de MER visando diminuir a memória computacional e o tempo de CPU necessários para se resolver problemas de CFD, bem como obter soluções numéricas de grande acurácia. Seriam considerados: problemas governados pelas equações de Poisson, advecção-difusão, Laplace, Burgers, Navier-Stokes e Reynolds; uma, duas e três dimensões espaciais e o tempo; soluções numéricas obtidas com os métodos de diferenças finitas e volumes finitos; diversos tipos de variáveis de interesse e de aproximações numéricas; precisões simples, dupla e quádrupla nos cálculos; e malhas uniformes, não uniformes, triangulares, não ortogonais e não estruturadas. O projeto foi dividido em doze etapas que foram executadas em dois anos por 24 pessoas (atualmente 15 professores doutores, 4 doutorandos, 3 mestrandos e 2 graduandos) de sete instituições (UFPR, UTFPR, UEPG, UNICENTRO, UNIBRASIL, IFPR, UP). Os principais produtos gerados foram: publicados 5 artigos em periódicos; publicados 12 artigos em congressos; e formados 5 doutores.

## 2 – METAS E OBJETIVOS DO PROJETO

O projeto foi estruturado em três metas, com 12 objetivos, para ser executado em dois anos, conforme o texto original do projeto, abaixo, de 8 Ago 2011.

### Meta 1: melhorar e testar o desempenho de MER

- 1) Melhorar o desempenho de MER em variáveis de campo que têm valores extremos locais ou globais (mínimos e máximos de funções), não-linearidades e descontinuidades.
- 2) Testar o efeito dos seguintes parâmetros que afetam o desempenho de MER: razão de refino de malha; número de dimensões das equações; número de dimensões de refino de malha; ordens do erro; perfis e campos; precisão dos cálculos; número de extrapolações; malha base.
- 3) Testar o efeito dos seguintes tipos de malha sobre o desempenho de MER: uniforme, não uniforme, triangular, não ortogonal e não estruturada.
- 4) Minimizar o efeito dos erros de iteração e de arredondamento sobre o erro numérico.
- 5) Desenvolver um estimador de erro para soluções obtidas com MER.
- 6) Aplicar MER a problemas transientes.
- 7) Aplicar MER a problemas envolvendo fluidos compressíveis.
- 8) Implementar programas computacionais para analisar o desempenho de MER e para usuários de MER.

### Meta 2: validar resultados numéricos com e sem MER

- 9) Resolver problemas de aerodinâmica de projéteis e foguetes.
- 10) Resolver problemas de propulsão de foguetes.

**Meta 3: gerar benchmarks com MER**

- 11) Obter os resultados mais acurados da literatura, com suas estimativas de erro, para o problema clássico do escoamento 2D dentro de uma cavidade quadrada causado pela sua tampa móvel.
- 12) Idem ao objetivo 11 para o escoamento 3D dentro de uma cavidade cúbica.

**3 – RESULTADOS OBTIDOS**

Os resultados obtidos com a execução deste projeto foram:

**5 artigos publicados em periódicos:**

- SUERO, R.; PINTO, M. A. V.; MARCHI, C. H.; ARAKI, L. K.; ALVES, A. C. Analysis of algebraic multigrid parameters for two-dimensional steady-state heat diffusion equations. **Applied Mathematical Modelling**, v. 36, p. 2996-3006, 2012.
- OLIVEIRA, F.; PINTO, M. A. V.; MARCHI, C. H.; ARAKI, L. K. Optimized partial semicoarsening multigrid algorithm for heat diffusion problems and anisotropic grids. **Applied Mathematical Modelling**, v. 36, p. 4665-4676, 2012.
- MARCHI, C. H.; ARAKI, L. K.; ALVES, A. C.; SUERO, R.; GONÇALVES, S. F. T.; PINTO, M. A. V. Repeated Richardson extrapolation applied to the two-dimensional Laplace equation using triangular and square grids. **Applied Mathematical Modelling**, v. 37, p. 4661-4675, 2013.
- MARCHI, C. H.; NOVAK, L. A.; SANTIAGO, C. D.; VARGAS, A. P. S. Highly accurate numerical solutions with repeated Richardson extrapolation for 2D Laplace equation. **Applied Mathematical Modelling**, v. 37, p. 7386-7397, 2013.
- MARCHI, C. H.; GERMER, E. M. Effect of ten CFD numerical schemes on repeated Richardson extrapolation (RRE). **Journal of Applied & Computational Mathematics** 2:128, 2013. DOI: 10.4172/2168-9679.1000128.

**1 artigo aceito para publicação em periódico:**

- MARCHI, C. H.; ALVES, A. C. Verification of numerical solutions of advection-diffusion and Burgers equations. Aceito por **Journal of Applied & Computational Mathematics**, 2014.

**12 artigos completos publicados em congressos:**

- MORO, D. F.; MARCHI, C. H.; ARAKI, L. K.; BERTOLDO, G.; RADTKE, J. J.; GERMER, E. M. Validação da solução numérica do escoamento de ar a 17,25 bar e 833 K em tubeira com razão de expansão 6,6. In: II Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - Sudeste (CMAC-SE). **Anais...** Bauru, 2013. 6 p.
- GERMER, E. M.; MARCHI, C. H.; ARAKI, L. K.; MORO, D. F.; BERTOLDO, G.; RADTKE, J. J. Validação da solução numérica do escoamento de ar a 8,9 bar e 289 K em tubeira com razão de expansão 2,5. In: II Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - Sudeste (CMAC-SE). **Anais...** Bauru, 2013. 5 p.
- GIACOMINI, F. F.; MARCHI, C. H.; SANTIAGO, C. D. Multiextrapolação de Richardson para reduzir o erro de discretização de campos em CFD. In: II Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - Sudeste (CMAC-SE). **Anais...** Bauru, 2013. 5 p.
- BERTOLDO, G.; MARCHI, C. H.; ARAKI, L. K.; MORO, D. F.; GERMER, E. M.; RADTKE, J. J. Verificação e validação do coeficiente de arrasto frontal para escoamento supersônico e hipersônico de ar sobre cones. In: II Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - Sudeste (CMAC-SE). **Anais...** Bauru, 2013. 5 p.
- RADTKE, J. J.; MARCHI, C. H.; ARAKI, L. K.; BERTOLDO, G.; MORO, D. F.; GERMER, E. M. Verificação e validação da solução numérica do código Mach2D para problemas de

propulsão de foguetes. In: II Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - Sudeste (CMAC-SE). **Anais...** Bauru, 2013. 5 p.

- ANUNCIACÃO, M. A. M.; PINTO, M. A. V.; ARAKI, L. K.; MARCHI, C. H.; MARTINS, M. A. Redução do erro de iteração e aceleração do método *multigrid* com o uso de extrapoladores. In: II Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - Sudeste (CMAC-SE). **Anais...** Bauru, 2013. 5 p.
- MARTINS, M. A.; MARCHI, C. H.; PINTO, M. A. V.; ARAKI, L. K.; GONÇALVES, S. F. T.; GROSSI, L.; LA GUARDIA, G. G. Efeito do tipo de norma sobre a ordem de acurácia do erro de soluções numéricas em CFD. In: II Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - Sudeste (CMAC-SE). **Anais...** Bauru, 2013. 5 p.
- MARTINS, M. A.; MARCHI, C. H.; NOVAK, L. A.; PINTO, M. A. V.; ARAKI, L. K.; GONÇALVES, S. F. T. Multiextrapolação de Richardson com interpolação para reduzir o erro de discretização em CFD. In: II Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - Sudeste (CMAC-SE). **Anais...** Bauru, 2013. 5 p.
- GONÇALVES, S. F. T.; MARCHI, C. H.; PINTO, M. A. V.; ARAKI, L. K. Efeito de componentes do *full multigrid* sobre o tempo de CPU em problemas 2D de CFD. In: II Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - Sudeste (CMAC-SE). **Anais...** Bauru, 2013. 6 p.
- CARVALHO, N. F.; MARCHI, C. H.; PERSTCHI, C. T. Methods for calculating the thermal conductivity at the control-volume surfaces. In: XXII INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING (COBEM). **Anais...** Ribeirão Preto, 2013. 6 p.
- VARGAS, A. P. S.; M.; MARCHI, C. H.; PINTO, M. A. V. Multiextrapolação de Richardson e verificação da ordem de acurácia de esquemas híbridos sobre a aquação 2D de Fourier com termo fonte. In: I Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - Sul (CMAC-Sul). **Anais...** Curitiba, 2014. 6 p.
- MARTINS, M. A.; MARCHI, C. H.; ARAKI, L. K.; PINTO, M. A. V. Estimativa para o erro de discretização com o emprego de multiextrapolação de Richardson em CFD. In: I Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - Sul (CMAC-Sul). **Anais...** Curitiba, 2014. 6 p.

#### **4 resumos de artigos publicados em congressos:**

- MORO, D. F.; MARCHI, C. H.; BERTOLDO, G.; ARAKI, L. K. Verificação e validação de soluções numéricas em tubearias de motores-foguete. In: Evento de Iniciação Científica da UFPR. **Anais...** Curitiba, 2012. p. 293. EVINCI/2012.
- DIAS, E. L. S.; MARCHI, C. H.; MORO, D. F.; ARAKI, L. K. Determinação do desempenho de motores-foguete Bandeirante dos tipos B6-4, C20-0 e D20-0 para espaçomodelos. In: Evento de Iniciação Científica da UFPR. **Anais...** Curitiba, 2012. p. 293. EVINCI/2012.
- DIAS, E. L. S.; MARCHI, C. H.; MORO, D. F. Validação da solução numérica do escoamento de ar a 8,9 bar e 289 K em tubearia de motor-foguete com razão de expansão 2,5. In: Evento de Iniciação Científica da UFPR. **Anais...** Curitiba, 2013. p. 300. EVINCI/2013.
- QUELUZ, T. P.; MARCHI, C. H. Projeto, montagem e teste de um espaçomodelo de baixo custo. In: Evento de Iniciação Científica da UFPR. **Anais...** Curitiba, 2013. p. 300. EVINCI/2013.

#### **5 teses de doutorado concluídas:**

- NOVAK, L. A. **Múltiplas extrapolações de Richardson para reduzir e estimar o erro de discretização em condução de calor.** Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2012. Tese de doutorado em Engenharia Mecânica. Orientador: MARCHI, C. H.
- GIACOMINI, F. F. **Multiextrapolação de Richardson completa para reduzir o erro de discretização.** Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2013. Tese de doutorado em Engenharia Mecânica. Orientador: MARCHI, C. H.

- GONÇALVES, S. F. T. **Estudo de parâmetros do método multigrid geométrico para equações 2D em CFD e volumes finitos**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2013. Tese de doutorado em Engenharia Mecânica. Orientador: MARCHI, C. H.
- VARGAS, A. P. S. **Multiextrapolação de Richardson e esquemas de 1ª e 2ª ordens, mistos e Crank-Nicolson sobre as equações 2D de advecção-difusão e Fourier**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2013. Tese de doutorado em Engenharia Mecânica. Orientador: MARCHI, C. H.
- MARTINS, M. A. **Multiextrapolação de Richardson com interpolação para reduzir e estimar o erro de discretização em CFD**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2013. Tese de doutorado em Engenharia Mecânica. Orientador: MARCHI, C. H.

**Dissertações de mestrado concluídas:** nenhuma

#### **6 aplicativos computacionais relevantes implementados:**

- MARCHI, C. H.; ARAKI, L. C.; BERTOLDO, G. **Mach2D 5.8** (1989-2012): solução numérica das equações de Euler e Navier-Stokes (laminar e turbulento) bidimensionais, em qualquer regime de velocidade, utilizando-se variáveis co-localizadas em coordenadas generalizadas de escoamentos não-reativos. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2012.
- MARCHI, C. H.; ARAKI, L. C.; BERTOLDO, G. **Mach2D 6.2** (1989-2012): solução numérica das equações de Euler e Navier-Stokes (laminar) bidimensionais, em qualquer regime de velocidade, utilizando-se variáveis co-localizadas em coordenadas generalizadas de escoamentos reativos (congelado, equilíbrio químico local e taxa finita de reação). Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2012.
- MARTINS, M. A.; PINTO, M. A. V.; ARAKI, L. K.; MARCHI, C. H. **Interp1D** (2011-2012): interpolação polinomial unidimensional de grau 1 a 10 para multiextrapolação de Richardson. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2012.
- MARTINS, M. A.; PINTO, M. A. V.; ARAKI, L. K.; MARCHI, C. H. **Interp2D** (2012): interpolação polinomial bidimensional de grau 1 a 6 para multiextrapolação de Richardson. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2012.
- MARCHI, C. H.; ARAKI, L. C.; BERTOLDO, G.; MORO, D. F.; GERMER, E. M.; RADTKE, J. J. **Mach2D 7.0** (1989-2013): solução numérica das equações de Euler e Navier-Stokes (laminar e turbulento) bidimensionais, em qualquer regime de velocidade, utilizando-se variáveis co-localizadas em coordenadas generalizadas de escoamentos reativos (congelado, equilíbrio químico local e taxa finita de reação). Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2013.
- MARCHI, C. H.; MARTINS, M. A. **Richardson 4.0** (1998-2013): analisador e estimador de erros de discretização com base na extrapolação de Richardson. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2013.

#### **4 relatórios de pesquisa preparados:**

- MARCHI, C. H.; BERTOLDO, G. **Relatório técnico do projeto CFD-14/UFPR: modelagem de escoamento turbulento (Baldwin-Lomax) do código Mach2D**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2012. 26 p.
- MORO, D. F.; BERTOLDO, G.; MARCHI, C. H. **Relatório técnico do projeto CFD-14/UFPR: solução de escoamentos invíscidos, laminares e turbulentos com o código Mach2D 5.8**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2012. 16 p.
- MORO, D. F.; BERTOLDO, G.; MARCHI, C. H. **Relatório técnico do projeto CFD-14/UFPR: testes de paralelização do código Mach2D**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2012. 7 p.

- ARAKI, L. K.; BERTOLDO, G.; MARCHI, C. H. **Relatório técnico do projeto CFD-14/UFPR: solução de escoamentos reativos com o código Mach2D 6.2**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2012. 39 p.

### **3 projetos (qualificações) de doutorado aprovados:**

- RADTKE, J. J. **Otimização do bocal divergente de tubeiras de foguetes**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2012. Projeto de tese de doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia. Orientador: MARCHI, C. H.
- GERMER, E. M. **Efeito da geometria do bocal convergente de tubeiras de motor-foguete**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2012. Projeto de tese de doutorado em Engenharia Mecânica. Orientador: MARCHI, C. H.
- BERTOLDO, G. **Otimização aerodinâmica do nariz de foguetes nos regimes supersônico e hipersônico**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2012. Projeto de tese de doutorado em Engenharia Mecânica. Orientador: MARCHI, C. H.

### **1 projeto (qualificação) de mestrado aprovado:**

- MORO, D. F. **Otimização teórico-experimental do empuxo de micromotor-foguete**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2013. Projeto de dissertação de mestrado em Engenharia Mecânica. Orientador: MARCHI, C. H.

### **1 trabalho de fim de curso de graduação concluído:**

- MORO, D. F. **Simulação numérica de escoamento em motor-foguete**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2013. Trabalho de fim de curso de graduação em engenharia mecânica. Orientador: MARCHI, C. H.

### **2 orientações de iniciação científica concluídas:**

- MORO, D. F. **Simulação numérica de escoamento em tubeira de motor-foguete; e Efeito do hardware e software sobre o erro de arredondamento em CFD**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2012 e 2013. Trabalho de iniciação científica de aluno de graduação em engenharia mecânica. Orientador: MARCHI, C. H.
- DIAS, E. L. S. **Validação da solução numérica do escoamento de ar a 8,9 bar e 289 K em tubeira de motor-foguete com razão de expansão 2,5**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2013. Trabalho de iniciação científica de aluno de graduação em engenharia mecânica. Orientador: MARCHI, C. H.

### **5 artigos submetidos a periódicos:**

- ARAKI, L. K.; MARCHI, C. H. Verification and validation of numerical solutions of two-dimensional reactive flow in rocket engine nozzles. Submetido a **International Journal for Numerical Methods in Fluids**.
- MARCHI, C. H.; MARTINS, M. A.; PINTO, M. A. V.; GROSSI, L.; LA GUARDIA, G. G.; ARAKI, L. K.; GONÇALVES, S. F. T. Effect of norms on the accuracy order of numerical solution errors in CFD. Submetido a **Mathematics and Computers in Simulation**.
- CARVALHO, N. F.; MARCHI, C. H.; PERSTCHI, C. T. Numerical schemes to calculate the thermal conductivity at the faces of volume controls. Submetido a **International Journal of Computer Mathematics**.
- SANTIAGO, C. D.; MARCHI, C. H.; SOUZA, L. F. Performance of geometric multigrid method for coupled two-dimensional systems in CFD. Submetido a **Applied Mathematical Modelling**.
- MARCHI, C. H.; GIACOMINI, F. F.; SANTIAGO, C. D. Repeated Richardson extrapolation to reduce field discretization error in computational fluid dynamics. Submetido a **Applied Mathematical Modelling**.

### **5 artigos submetidos a congressos:**

- VARGAS, A. P. S.; M.; MARCHI, C. H.; PINTO, M. A. V. Multiextrapolação de Richardson e Verificação da Ordem de Acurácia de Esquema Híbrido sobre a Equação 2D de Advecção-Difusão com Termo Fonte. In: XXXV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC). **Anais...** Curitiba, 2014. 7 p.
- GIACOMINI, F. F.; MARCHI, C. H. Efeito da razão de refino de malha sobre o uso de multiextrapolação de Richardson em CFD. In: XXXV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC). **Anais...** Curitiba, 2014. 7 p.
- OLIVEIRA, F.; PINTO, M. A. V.; MARCHI, C. H. The effect of the schedule on the CPU time for 2D Poisson equation. In: XXXV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC). **Anais...** Curitiba, 2014. 7 p.
- RADTKE, J. J.; BERTOLDO, G.; MARCHI, C. H. Avaliação do código computacional DEPP na otimização de problemas de propulsão e aerodinâmica de foguetes. In: XXXV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC). **Anais...** Curitiba, 2014. 7 p.
- MARTINS, M. A.; MARCHI, C. H. Multiextrapolação de Richardson com interpolação aplicada às equações de Navier-Stokes 2D. In: XXXV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC). **Anais...** Curitiba, 2014. 6 p.

## **4 – MATERIAL ADQUIRIDO**

A infra estrutura do grupo de pesquisa em CFD, da UFPR, foi melhorada com os recursos financeiros deste projeto. Foram adquiridos:

- 4 computadores i5 para formar um cluster
- 7 nobreaks
- 2 monitores
- 2 licenças do software Fortran Intel

## **5 – EQUIPE PARTICIPANTE**

A equipe que efetivamente participou da execução do projeto soma 24 pessoas, e foi a seguinte:

### **5 professores doutores, da UFPR**

Carlos Henrique Marchi  
 Luciano Kiyoshi Araki  
 Márcio Augusto Villela Pinto  
 Leandro Alberto Novak  
 Simone de Fátima Tomazzoni Gonçalves

### **10 professores doutores, colaboradores de outras 6 instituições**

Giuliano Gadioli La Guardia (UEPG)  
 Luciane Grossi (UEPG)  
 Arileide Cristina Alves (UP)  
 Fabiane de Oliveira (UEPG)  
 Roberta Suero (IFPR)  
 Cosmo Damião Santiago (UTFPR)  
 Neil Franco de Carvalho (UP)  
 Fabiana de Fátima Giacomini (UTFPR)  
 Ana Paula da Silveira Vargas (UNIBRASIL)  
 Márcio André Martins (UNICENTRO)

**4 doutorandos**

Guilherme Bertoldo  
Jonas Joacir Radtke  
Eduardo Matos Germer  
Ana Eliza Gonçalves Ferreira

**3 mestrandos**

Diego Fernando Moro  
Carlos Alberto Rezende de Carvalho Junior  
Inajara da Silva Freitas

**2 graduandos**

Éderson Luiz dos Santos Dias  
Tobias Pinheiro Queluz

## **6 – CONCLUSÃO**

Em resumo, os resultados obtidos durante a execução deste projeto foram:

- Publicados 5 artigos em periódicos.
- Aceito 1 artigo para publicação em periódico
- Publicados 12 artigos completos em congressos.
- Publicados 4 resumos de artigos em congressos.
- Formados 5 doutores.
- Implementados 6 aplicativos computacionais relevantes.
- Preparados 4 relatórios técnicos de pesquisa.
- Aprovados 3 projetos de tese de doutorado.
- Aprovado 1 projeto de dissertação de mestrado.
- Concluída 1 orientação de trabalho de fim de curso de graduação.
- Concluídas 2 orientações de trabalho de iniciação científica.

Além disso:

- Foram submetidos 5 artigos para publicação em periódicos.
- Foram submetidos 5 artigos completos para publicação em congressos.
- Estão em andamento a orientação de 5 teses de doutorado, 2 dissertações de mestrado e 7 trabalhos de iniciação científica.
- Foram obtidas 15 citações de artigos publicados em periódicos.
- Este projeto está sendo continuado através de um novo financiamento do CNPq, por meio de uma bolsa de produtividade em pesquisa PQ-2, no período Mar/14 a Fev/17.

Material relativo aos resultados deste projeto estão disponíveis na internet em <ftp://ftp.demec.ufpr.br/CFD/>.

Agradecemos o apoio do CNPq a este projeto, que motivou a equipe e proporcionou avançar nas pesquisas realizadas no grupo de CFD da UFPR.