



IDENTIFICAÇÃO DA PROPOSTA

Título do projeto:

Multiextrapolação de Richardson para reduzir e estimar o erro de discretização em CFD - III

CFD-26

Período de execução previsto: 3 anos (Mar/2017 a Fev/2020)

Palavras-chave: erro numérico, diferenças finitas, volumes finitos, erro de discretização, verificação, validação.

Projeto de **PESQUISA CIENTÍFICA** submetido ao
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)
para concorrer ao **Edital Produtividade em Pesquisa – PQ – 12/2016**
visando renovar uma bolsa de produtividade em pesquisa (PQ)

DADOS DO PROPONENTE

Proponente/Coordenador: **Carlos Henrique Marchi** (bolsista PQ-2/CNPq desde 2005)

Doutor em engenharia mecânica pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) em 2001

Professor associado da Universidade Federal do Paraná (UFPR)

Caixa postal 19040, CEP 81531-980, Curitiba, PR

Telefone: (41) 3361-3126; Fax: (41) 3361-3701; chmcfid@gmail.com

Curitiba, 11 de agosto de 2016.

SUMÁRIO

1) Instituições participantes	2
2) Dados gerais do projeto	2
3) Áreas do conhecimento	3
4) Metodologia	4
5) Relevância do projeto para o desenvolvimento científico	8
6) Resultados e impactos esperados	11
7) Atividades de pesquisa mais relevantes	12
8) Demais informações relevantes	13
9) Referências bibliográficas	17

1) INSTITUIÇÕES PARTICIPANTES

- Universidade Federal do Paraná (UFPR) [executora]
Campus de Curitiba (PR)
- Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) [colaboradora]
Campi de Curitiba (PR), Francisco Beltrão (PR) e Apucarana (PR)
- Universidade Estadual do Centro-Oeste (UNICENTRO) [colaboradora]
Campus de Guarapuava (PR)
- Universidade Positivo (UP) [colaboradora]
Campus de Curitiba (PR)

2) DADOS GERAIS DO PROJETO

Título do projeto em português:

Multiextrapolação de Richardson para reduzir e estimar o erro de discretização em CFD - III

Título do projeto em inglês:

Repeated Richardson extrapolation to reduce and estimate the discretization error in CFD - III

Palavras-chave em português:

Erro numérico, diferenças finitas, volumes finitos, erro de discretização, verificação, validação

Palavras-chave em inglês:

Numerical error, finite difference, finite volume, discretization error, verification, validation

Resumo em português

O objetivo geral deste projeto de pesquisa científica é desenvolver técnicas para reduzir e estimar o erro de discretização em CFD (*Computational Fluid Dynamics*) através de múltiplas extrapolações

de Richardson (MER). Pretende-se melhorar, generalizar e testar o uso de MER visando diminuir a memória computacional e o tempo de CPU necessários para se resolver problemas de CFD, bem como obter soluções numéricas de grande acurácia. Serão considerados: problemas governados pelas equações de Poisson, advecção-difusão, Laplace, Burgers e Navier-Stokes; fluidos incompressíveis e compressíveis; uma, duas e três dimensões espaciais; soluções numéricas obtidas com os métodos de diferenças finitas e volumes finitos; diversos tipos de variáveis de interesse e de aproximações numéricas; precisões dupla e quádrupla nos cálculos; e malhas uniformes, não uniformes e não ortogonais. O projeto está dividido em doze etapas que deverão ser executadas em três anos por 17 pessoas (8 pesquisadores-doutores, 8 doutorandos e 1 mestrando) de quatro instituições.

Resumo em inglês

The aim of this scientific research project is to develop techniques to reduce and estimate the discretization error in CFD (Computational Fluid Dynamics) with repeated Richardson extrapolation (RRE). It is intended to improve, generalize and to test the use of RRE to reduce the computational memory and CPU time required to solve CFD problems and obtain numerical solutions of high accuracy. Will be considered: problems governed by the Poisson, advection-diffusion, Laplace, Burgers and Navier-Stokes equations; compressible and incompressible fluids; one, two and three spatial dimensions; numerical solutions obtained with finite difference and finite volume; various types of variables of interest and numerical approximations; double and quadruple precision in the calculations; and uniform, non-uniform and non-orthogonal grids. The project is divided into twelve steps that should be completed in three years by 17 people (8 researchers, 8 PhD students and one master student) of four institutions.

Objetivo geral em português

O objetivo geral deste projeto é desenvolver técnicas para reduzir e estimar o erro de discretização em CFD através do método denominado múltiplas extrapolações de Richardson (MER). Para tanto, pretende-se melhorar, generalizar e testar o uso de MER. Com isso, visa-se diminuir a memória computacional e o tempo de CPU necessários para se resolver problemas de CFD, bem como obter soluções numéricas de grande acurácia.

Objetivo geral em inglês

The aim of this project is to develop techniques to reduce and estimate the discretization error in CFD through the method called repeated Richardson extrapolation (RRE). Therefore, it is intended to improve, generalize and to test the use of RRE. With this, it aims to reduce the computational memory and CPU time required to solve CFD problems and obtain numerical solutions of high accuracy.

3) ÁREAS DO CONHECIMENTO

Predominante: Princípios Variacionais e Métodos Numéricos

Correlatas:

Análise numérica
Mecânica dos fluidos
Dinâmica dos gases
Aerodinâmica de aeronaves espaciais
Propulsão de foguetes

4) METODOLOGIA

OBJETIVOS ESPECÍFICOS E METAS A SEREM ALCANÇADOS

As metas e objetivos específicos deste projeto são:

Meta 1: melhorar e testar o desempenho de MER

- 1) Melhorar o desempenho de MER em variáveis de campo que têm valores extremos locais ou globais (mínimos e máximos de funções), não linearidades e descontinuidades.
- 2) Testar o efeito dos seguintes parâmetros que afetam o desempenho de MER: tipo de equação; razão de refino de malha; número de dimensões das equações; número de dimensões de refino de malha; ordens do erro; perfis e campos; precisão dos cálculos; número de extrapolações; malha base.
- 3) Testar o efeito dos seguintes tipos de malha sobre o desempenho de MER: uniforme, não uniforme e não ortogonal.
- 4) Acelerar a convergência de processos iterativos com MER.
- 5) Melhorar e desenvolver estimadores do erro de discretização baseados em MER.
- 6) Desenvolver um estimador do erro de iteração baseado em MER.
- 7) Aplicar MER a problemas envolvendo fluidos compressíveis.
- 8) Implementar programas computacionais para analisar o desempenho de MER e para usuários de MER.

Meta 2: validar resultados numéricos com e sem MER

- 9) Resolver problemas de aerodinâmica de foguetes.
- 10) Resolver problemas de propulsão de foguetes.

Meta 3: gerar benchmarks com MER

- 11) Obter os resultados mais acurados da literatura, com suas estimativas de erro, para o problema clássico do escoamento 2D dentro de uma cavidade quadrada causado pela sua tampa móvel.
- 12) Idem ao objetivo 11 para o escoamento 3D dentro de uma cavidade cúbica.

METODOLOGIA A SER EMPREGADA

Para atingir os objetivos propostos, o projeto está estruturado em doze etapas, uma para cada objetivo específico. Do ponto de vista prático, o interesse é aplicar múltiplas extrapolações de Richardson (MER) para reduzir e estimar o erro de discretização em problemas bi (2D) e tridimensionais (3D) de CFD, representados pelas etapas 9 a 12. As demais etapas são dedicadas a melhorar e testar o desempenho de MER.

As principais características da metodologia a ser usada no projeto são:

- a) Todos os programas computacionais serão implementados pela equipe do projeto. Estes programas empregarão a linguagem de programação Fortran 2008.
- b) Serão usados os métodos numéricos de diferenças finitas (Tannehill et al., 1997) e volumes finitos (Maliska, 2004; Versteeg e Malalasekera, 2007) com diversos tipos de aproximações numéricas.
- c) Serão considerados problemas governados pelas equações de Poisson, advecção-difusão, Laplace, Burgers e Navier-Stokes em uma (1D), duas (2D) e três (3D) dimensões espaciais.
- d) Para discretizar os domínios de cálculo, serão usadas malhas desde as mais grossas até as mais finas possíveis para os computadores disponíveis no laboratório do proponente deste projeto. Em problemas 1D, devem ser usadas malhas com até a ordem de 10^8 nós; em 2D, até 10^4 nós em cada direção; e em 3D, até 1025 nós em cada direção. Essas malhas permitirão realizar, respectivamente, cerca de 25, 15 e 9 níveis de extrapolação.

- e) Condições de contorno do tipo Dirichlet, Neumann e Robin.
- f) Será usado o método *multigrid* (Wesseling, 1992) para reduzir o tempo computacional necessário para obter a solução numérica dos problemas 2D e 3D em cada malha.
- g) Com base em experimentos numéricos e em função da métrica (h) de cada malha, serão verificados o valor verdadeiro e estimado do erro de discretização, o valor da ordem efetiva (p_E) do erro de discretização verdadeiro e o valor da ordem aparente (p_U) do erro de discretização estimado (Marchi et al., 2008).
- h) As análises deverão ser feitas para os seguintes tipos de variáveis de interesse: as variáveis dependentes nos modelos matemáticos (por exemplo: velocidade, temperatura) e variáveis secundárias obtidas por diferenciação ou integração das variáveis dependentes (por exemplo: fluxos de massa e calor, média da variável dependente, forças), bem como de variáveis independentes.
- i) Verificar a eficiência de MER na redução do erro de discretização ao se comparar a memória computacional e o tempo de CPU necessários para resolver cada problema com e sem MER.
- j) A solução analítica é conhecida para as equações e variáveis de interesse a serem consideradas nas etapas 1 a 7, bem como em alguns problemas das etapas 9 e 10. Assim, será possível verificar a acurácia e confiabilidade do estimador de erro a ser proposto e a eficiência de MER na redução do erro de discretização.

A seguir são descritas as doze etapas do trabalho, incluindo o número dos objetivos do projeto e membros da equipe envolvidos. O proponente deste projeto é citado só nas etapas 5, 6 e 8 porque atuará diretamente nelas; nas demais etapas, ele atuará no planejamento e orientação da execução e análise dos resultados.

Etapa 1: extremos, não linearidades e descontinuidades

Objetivo 1: melhorar o desempenho de MER em variáveis de campo que têm valores extremos locais ou globais (mínimos e máximos de funções), não linearidades e descontinuidades.

Responsáveis pela execução: Martins, Carvalho, Santiago, Silva e Araki.

Em relação a extremos, pretende-se testar o uso de diversos tipos de função de interpolação para tornar contínuas localmente as soluções numéricas em regiões com extremos locais. Desta forma, as soluções não variarão apenas discretamente, com os nós da malha e suas coordenadas; acredita-se que esse seja o problema ao se usar MER em variáveis com extremos; resultados preliminares confirmam essa suspeita. Também é necessário testar o uso de otimizadores.

Em relação a não linearidades, pretende-se investigar o desempenho de MER na condução de calor com condutividade térmica variável e na equação de Burgers; e no caso de descontinuidades, na condução de calor com condutividade térmica variável e meios compostos bem como em problemas com ondas de choque.

Etapa 2: parâmetros de MER

Objetivo 2: testar o efeito dos seguintes parâmetros que afetam o desempenho de MER: tipo de equação; razão de refino de malha; número de dimensões das equações; número de dimensões de refino de malha; ordens do erro; perfis e campos; precisão dos cálculos; número de extrapolações; malha base.

Responsáveis pela execução: Moro, Silva, Giacomini, Ferreira e Foltran.

Pretende-se testar diversos valores de razão de refino. Acredita-se que quanto menor é a razão de refino, maior é a redução do erro com o refino da malha. Contudo, o erro de arredondamento poderá ser um fator limitante.

Número de dimensões das equações: comparar o desempenho de MER ao se resolver um mesmo problema em 1, 2 e 3 dimensões espaciais.

Número de dimensões de refino de malha: pretende-se verificar se MER funciona adequadamente em problemas com mais de uma dimensão, ao se fazer o refino de malha separadamente em cada dimensão.

Ordens do erro: pretende-se investigar o impacto sobre o desempenho de MER ao se usar ordens do erro incorretas, comparando-as às corretas. Isso é importante nos casos em que não se consegue estimar a priori ou a posteriori as ordens do erro.

Perfis e campos: este objetivo se refere a investigar como aplicar MER em perfis e campos inteiros de temperatura, velocidades, pressão etc, em vez de apenas pontos específicos ou variáveis globais.

Precisão dos cálculos: pretende-se verificar o desempenho de MER ao se usar precisão dupla e quádrupla nos cálculos.

Número de extrapolações: neste objetivo deseja-se ver o impacto do número de níveis de extrapolação sobre o desempenho de MER, comparando-se estimativas a priori e a posteriori das ordens do erro.

Malha base: pretende-se verificar se o desempenho de MER é muito sensível à malha mais grossa, do conjunto de malhas usadas, para se fazer as diversas extrapolações. Isso é importante em problemas nos quais as características físicas são captadas apenas com malhas suficientemente finas.

Etapa 3: tipo de malha

Objetivo 3: testar o efeito dos seguintes tipos de malha sobre o desempenho de MER: uniforme, não uniforme e não ortogonal.

Responsáveis pela execução: Moro, Silva, Dall' Agnol, Carvalho Jr e Martins.

Pretende-se verificar se o desempenho de MER é sensível ao tipo de malha empregado. Resultados preliminares indicam que MER tem o mesmo desempenho em malhas uniformes e triangulares.

Etapa 4: acelerar a convergência

Objetivo 4: acelerar a convergência de processos iterativos com MER.

Responsáveis pela execução: Moro e Santiago.

O objetivo desta etapa é testar técnicas de aceleração de convergência, como *multigrid* e uma variação de MER para erros de iteração, visando reduzir o tempo computacional necessário para obter as soluções numéricas, principalmente em malhas muito finas.

Etapa 5: estimadores de erro de discretização

Objetivo 5: melhorar e desenvolver estimadores do erro de discretização baseados em MER.

Responsáveis pela execução: Moro, Martins e Marchi.

Pretende-se melhorar um estimador de erro, já desenvolvido no grupo do proponente, para ser utilizado com soluções numéricas obtidas através de MER. E pretende-se desenvolver um novo estimador para erros de discretização, baseado em MER, mas para soluções numéricas obtidas sem MER; o objetivo é melhorar o desempenho dos estimadores atualmente disponíveis na literatura.

Etapa 6: estimador de erro de iteração

Objetivo 6: desenvolver um estimador do erro de iteração baseado em MER.

Responsáveis pela execução: Moro e Marchi.

Esta etapa será dedicada ao desenvolvimento de um estimador de erro de iteração baseado no estimador que já foi desenvolvido para soluções numéricas obtidas com MER, e que funciona muito bem.

Etapa 7: fluidos compressíveis

Objetivo 7: aplicar MER a problemas envolvendo fluidos compressíveis.

Responsáveis pela execução: Bertoldo, Moro, Germer, Queluz, Medeiros, Oliveira Jr e Araki.

Esta etapa será dedicada a estender o uso de MER a problemas que envolvem fluidos compressíveis. Pretende-se investigar a aplicação de MER em escoamentos através de bocais do

tipo convergente-divergente (tubeira), usados em motores-foguete, e sobre foguetes. Os testes deverão envolver escoamentos subsônicos, transônicos e supersônicos, bem como ondas de choque.

Etapa 8: programas para aplicar MER

Objetivo 8: implementar programas computacionais para analisar o desempenho de MER e para usuários de MER.

Responsáveis pela execução: Moro e Marchi.

Desde 2007 existe um programa computacional que vem sendo usado em pesquisas envolvendo MER. Nesta etapa, pretende-se melhorar este programa principalmente para atender à etapa 2. Além disso, pretende-se melhorar outro programa feito em 2013 para ser empregado por usuários de MER. Estas novas versões dos programas, juntamente com seus manuais contendo teoria e tutoriais, incluirão os principais resultados obtidos nas etapas 1 a 7.

Etapa 9: aerodinâmica de foguetes

Objetivo 9: resolver problemas de aerodinâmica de foguetes.

Responsáveis pela execução: Silva, Oliveira Jr, Queluz, Medeiros, Diógenes e Bertoldo.

Nesta etapa pretende-se aplicar o processo de validação a soluções numéricas de problemas de aerodinâmica de foguetes. Para isso deverão ser usados resultados experimentais da literatura para os quais seja conhecida a incerteza experimental. A validação deverá ser feita com e sem o uso de MER para mostrar em casos práticos a importância de se aplicar MER.

Etapa 10: propulsão de foguetes

Objetivo 10: resolver problemas de propulsão de foguetes.

Responsáveis pela execução: Bertoldo, Moro, Diógenes e Germer.

Nesta etapa pretende-se aplicar o processo de validação a soluções numéricas de problemas envolvendo o escoamento em tuberias de foguetes. Para isso deverão ser usados resultados experimentais da literatura para os quais seja conhecida a incerteza experimental. A validação deverá ser feita com e sem o uso de MER para mostrar em casos práticos a importância de se aplicar MER.

Etapa 11: benchmark 2D

Objetivo 11: obter os resultados mais acurados da literatura, com suas estimativas de erro, para o problema clássico do escoamento 2D dentro de uma cavidade quadrada causado pela sua tampa móvel (Bruneau e Saad, 2006; Marchi et al., 2009).

Responsáveis pela execução: Martins, Moro, Carvalho Jr e Santiago.

Este problema, que não tem solução analítica conhecida, é muito usado como referência para teste de novas funções de interpolação, novas formulações matemáticas, novos modelos numéricos e códigos computacionais.

Nesta etapa será usado MER com malhas de até 8.192×8.192 volumes de controle, diversos tipos de variáveis e número de Reynolds de 1000 a 5000. Serão feitas comparações dos resultados com os disponíveis em farta literatura sobre este problema cuja malha mais fina é de 2.024×2.024 e sem MER.

Etapa 12: benchmark 3D

Objetivo 12: obter os resultados mais acurados da literatura, com suas estimativas de erro, para o problema do escoamento 3D dentro de uma cavidade cúbica causado pela sua tampa móvel (Freitas et al., 1985; Wu e Shu, 2010).

Responsáveis pela execução: Moro e Santiago.

Nesta etapa será usado MER com malhas de até $1025 \times 1025 \times 1025$ volumes, diversos tipos de variáveis e número de Reynolds de 100 a 3200. Serão feitas comparações dos resultados com os disponíveis na literatura sobre este problema cuja malha mais fina é $121 \times 121 \times 121$ e sem MER.

Atualmente não existe *benchmark* deste problema, que não tem solução analítica conhecida, e tem importância equivalente ao problema 2D em aplicações 3D.

Cronograma físico

Na tabela abaixo, é apresentado o cronograma de execução física das atividades previstas nas etapas 1 a 12, organizado em períodos quadrimestrais.

Início: março/2017.

Término: fevereiro/2020.

Duração: 3 anos

Meta	Etapa	Título	2017			2018			2019			2020
			1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º
1	Melhorar e testar o desempenho de MER											
	1	Extremos, não linearidades e descontinuidades	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	2	Parâmetros de MER	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	3	Tipo de malha	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	4	Acelerar a convergência	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	5	Estimadores de erro de discretização	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	6	Estimador de erro de iteração	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	7	Fluidos compressíveis	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
2	Validar resultados numéricos com e sem MER											
	9	Aerodinâmica de foguetes	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	10	Propulsão de foguetes	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
3	Gerar benchmarks com MER											
	11	Benchmark 2D	x	x	x	x	x	x				
	12	Benchmark 3D					x	x	x	x	x	x

5) RELEVÂNCIA DO PROJETO PARA O DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO

Definição do problema

A extrapolação de Richardson (ER) pode ser usada em problemas práticos de CFD para reduzir tão significativamente o erro numérico quanto em problemas simples?

O erro numérico (E) pode ser definido (Knupp e Salari, 2003) pela diferença entre a solução analítica exata (Φ) e a solução numérica (ϕ) de uma determinada variável de interesse, isto é,

$$E(\phi) = \Phi - \phi \quad (1)$$

Exemplos de variáveis de interesse em dinâmica dos fluidos são: velocidade, temperatura, pressão, massa específica, fluxo de massa, fluxo de calor e força. As fontes do erro numérico (Roache, 1998) são os erros de discretização, de iteração, de arredondamento e outros, sendo o primeiro geralmente o de maior magnitude.

A extrapolação de Richardson (Burden e Faires, 2003; Roache, 1994, 1998; Richardson, 1910; Richardson e Gaunt, 1927) é dada por

$$\phi_{\infty} = \phi_1 + \frac{(\phi_1 - \phi_2)}{(r^p - 1)} \quad (2)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são as soluções numéricas obtidas em duas malhas (h_2 grossa e h_1 fina) com número diferente de nós, sendo cada uma destas malhas representada pelo tamanho dos seus volumes de

controle (h), no caso do método de volumes finitos; $r = h_2/h_1$ é a razão de refino entre as duas malhas; p é a ordem assintótica (p_L) do erro de discretização; e ϕ_∞ é o valor extrapolado da variável de interesse, que geralmente é uma aproximação de Φ melhor do que ϕ_1 e ϕ_2 , isto é, $|E(\phi_\infty)| < |E(\phi_1, \phi_2)|$. A Eq. (2) é adequada para reduzir a magnitude do erro de discretização.

MER significa aplicar a Eq. (2) de forma recursiva. Cada aplicação da Eq. (2) representa um nível de extrapolação. No livro de Burden e Faires (2003) é apresentado um exemplo de cálculo da derivada de primeira ordem de uma função através de diferença central; com base em três aplicações desta aproximação numérica, para três valores de h , onde a melhor aproximação das três tem $E > 1,5 \times 10^{-2}$, usando-se apenas dois níveis de ER obtém-se $E < 1,0 \times 10^{-6}$, ou seja, o erro é reduzido em mais de 15 mil vezes.

Com base na Eq. (2), pode-se obter (Roache, 1998)

$$U(\phi_1) = \frac{(\phi_1 - \phi_2)}{(r^p - 1)} \quad (3)$$

onde U é uma estimativa do erro numérico, causado por erros de discretização, para a solução numérica ϕ_1 na malha fina (h_1). A Eq. (3) é o estimador de Richardson, que é a base para outros estimadores de erro, como o GCI (*Grid Convergence Index*) de Roache (1994).

Revisão bibliográfica

O próprio criador de ER (Richardson e Gaunt, 1927) aplicou MER com dois níveis de extrapolação em problemas bidimensionais (2D) de condução de calor, antes da era do computador. Joyce (1971) apresenta um extenso estudo sobre processos de extrapolação em análise numérica; quase todos são baseados em ER ou variantes dele.

Alguns trabalhos (Benjamin e Denny, 1979; Schreiber e Keller, 1983; Erturk et al., 2005) obtiveram ótimos resultados ao empregar MER para diminuir o erro de discretização do valor mínimo da função de corrente no problema da cavidade quadrada com tampa móvel, clássico em CFD. Porém, estes autores utilizaram este procedimento com no máximo quatro malhas, resultando em até três níveis de extrapolação para a malha mais fina usada; e só abordaram problemas 2D. Nestes trabalhos, MER foi usado como ferramenta; não foram realizados estudos para seu aperfeiçoamento. Além disso, em nenhum destes trabalhos foi proposto um estimador de erro associado ao uso de MER.

O habitual é aplicar ER de forma simples, isto é, com apenas um nível de extrapolação; por exemplo, De Vahl Davis (1983) em convecção natural; Wang e Zhang (2009) na equação de Poisson 2D; e Ma e Ge (2010) na equação de advecção-difusão 3D.

Originalidade

Até hoje, MER foi muito pouco empregado em CFD. Talvez isso tenha ocorrido por dificuldades pouco compreendidas, exploradas e relatadas na literatura (Burg e Erwin, 2009). Estudos (Marchi et al., 2008) preliminares deste projeto já encontraram algumas destas dificuldades, que são: (1) a redução do erro com MER é bem mais modesta no caso dos valores de variáveis com extremos (máximo/mínimo); (2) para as coordenadas de variáveis com extremos, MER parece não se aplicar, às vezes, até há um aumento do erro ao se usar MER; (3) com alguns níveis de extrapolação o erro de arredondamento pode se tornar maior que o erro de discretização, com isso MER perde sua eficiência; e (4) o uso incorreto das ordens do erro pode prejudicar muito a efetividade de MER.

Com a execução deste projeto, além de eliminar ou minimizar as dificuldades acima, pretende-se formalizar matematicamente a técnica de MER, aplicá-la a problemas bi e tridimensionais de CFD, aplicá-la a diversos tipos de variáveis de interesse, estudar o efeito de

diversos parâmetros que afetam o uso de MER, desenvolver um estimador de erro para soluções obtidas com MER (inexistente na literatura), realizar dois processos de validação (Roache, 1998), gerar dois *benchmarks* para exemplificar o uso prático de MER em CFD, e implementar e disponibilizar um *software* para interessados em usar MER.

Algumas contribuições iniciais da equipe deste projeto foram feitas em cinco trabalhos já publicados em eventos (Marchi et al., 2008; Marchi e Germer, 2009) e periódicos (Marchi et al., 2009; Marchi et al., 2013a; Marchi et al., 2013b), e três teses (Alves, 2010; Novak, 2012; Giacomini, 2013). Outros trabalhos já foram submetidos ou estão em preparação para serem submetidos a eventos e periódicos; e duas teses de doutorado devem ser concluídas neste segundo semestre de 2013. Nestes trabalhos foram usados mais de 10 níveis de extrapolação, reduzindo de forma surpreendente o erro de discretização, conforme alguns resultados apresentados abaixo. Com base nestes trabalhos da equipe do projeto, a pergunta do início da seção “Definição do problema” pode agora ser respondida: tudo indica que a extrapolação de Richardson (ER) pode ser usada em problemas práticos de CFD para reduzir tão significativamente o erro numérico quanto em problemas simples.

Importância do projeto

A execução deste projeto provocará uma revolução tão grande, ou maior, nos métodos numéricos quanto o método *multigrid*.

Do ponto de vista matemático, idealmente uma solução numérica deve ter erro numérico nulo, ou seja, ela deve resultar na solução analítica. Portanto, estudar técnicas que sejam eficientes na redução do erro numérico ou de suas fontes é importante para que seja possível medir adequadamente o erro de modelagem, isto é, o erro de um modelo matemático usado para representar um fenômeno físico real.

Algumas formas para reduzir o erro numérico causado por erros de discretização são: (1) refinar a malha, cuja desvantagem é aumentar as necessidades de memória e tempo computacionais; (2) aumentar a ordem de acurácia das aproximações numéricas, cuja desvantagem é aumentar a complexidade do modelo numérico; e (3) usar técnicas de extrapolação cuja principal delas é a de Richardson, para a qual algumas de suas dificuldades já foram apontadas na seção anterior.

As principais vantagens do uso da extrapolação de Richardson são:

- 1) É um pós-processamento simples, ou seja, não interfere diretamente na obtenção da solução numérica em uma dada malha h .
- 2) Seu custo computacional é muito baixo em termos de memória e tempo de CPU.
- 3) Pode ser aplicada a códigos computacionais já existentes ou a resultados já obtidos.
- 4) Aplica-se a diversos métodos numéricos, aproximações numéricas e variáveis de interesse.
- 5) Independe de análises a priori e do conhecimento da solução analítica do problema.

Sabendo-se que as soluções numéricas contêm erros, é importante estimá-los pelos seguintes motivos: (1) na prática não se conhece a solução analítica do problema bem como o erro verdadeiro; (2) quando o erro é maior do que o aceitável compromete-se a confiabilidade do uso da solução numérica; (3) quando o erro é menor do que o necessário há desperdício de recursos computacionais, isto é, de tempo de processamento e de quantidade de memória pois ambos são inversamente proporcionais ao nível de erro; (4) para validar e melhorar modelos matemáticos já existentes, e desenvolver novos, que visem explicar fenômenos físicos ainda não modelados adequadamente e cujas soluções analíticas são desconhecidas (um exemplo típico é a modelagem de escoamentos turbulentos); e (5) para otimizar o uso da malha, isto é, adaptá-la visando homogeneizar o nível de erro no domínio de cálculo.

A técnica de MER é extremamente efetiva na redução do erro de discretização, conforme resultados preliminares obtidos pela equipe deste projeto e apresentados abaixo. O exemplo refere-se à solução numérica da equação de Laplace 2D, obtida por diferenças finitas para uma determinada variável de interesse. Em princípio, pode-se dividir em duas formas o uso de MER:

1. **Obter o mesmo erro de discretização com uma malha que tem muito menos nós, resultando na redução do esforço computacional (memória e tempo de CPU). Esta forma é indicada especialmente para aplicações práticas (validações).** Isso é exemplificado na Tabela 1 para três níveis específicos de erro. Por exemplo, para o nível de erro -9×10^{-7} , sem MER é necessário usar a malha 513×513 para atingir este nível de erro, e a malha 17×17 com MER. Portanto, com MER a malha necessária é 911 vezes menor. Esta razão entre o número de nós das malhas sem e com MER indica o nível de redução do esforço computacional (memória e tempo de CPU) ao se usar MER em relação a não o usar. A Tabela 1 mostra que quanto menor é o nível de erro desejado, melhor é o desempenho de MER.

Tabela 1. Desempenho de MER para erros específicos.

Nível do erro	-2×10^{-4}	-9×10^{-7}	-3×10^{-9}
Malha necessária sem MER	33x33	513x513	8.193x8.193
Malha necessária com MER	9x9	17x17	33x33
Número de níveis de extrapolação	1	2	3
Razão entre o número de nós das malhas sem e com MER	13,4	911	61.639

2. **Reduzir o erro de discretização em uma malha com o mesmo número de nós, resultando em erros muito menores e maior confiabilidade da solução. Esta forma é indicada especialmente para se gerar benchmarks (resultados de referência).** Isso é exemplificado na Tabela 2 para três malhas específicas. Por exemplo, na malha 33×33 , mesmo com apenas três níveis de extrapolação, o erro já é reduzido em 143 mil vezes. A Tabela 2 mostra que quanto maior é o número de nós da malha, melhor é o desempenho de MER.

Tabela 2. Desempenho de MER para malhas específicas.

Malha	33x33	129x129	1.025x1.025
Erro sem MER	$-2,30 \times 10^{-4}$	$-1,44 \times 10^{-5}$	$-2,25 \times 10^{-7}$
Erro com MER	$-1,61 \times 10^{-9}$	$-1,21 \times 10^{-16}$	$-9,83 \times 10^{-32}$
Número de níveis de extrapolação	3	5	8
Razão entre o erro sem e com MER	$1,43 \times 10^5$	$1,19 \times 10^{11}$	$2,29 \times 10^{24}$

6) RESULTADOS E IMPACTOS ESPERADOS

Os resultados e impactos que se pretende alcançar ao final da execução deste projeto são:

- 1) Mostrar a importância prática do uso de MER em CFD para reduzir o erro de discretização, suas limitações e os procedimentos que devem ser seguidos para se obter melhores resultados.
- 2) Estimadores de erro acurados e confiáveis para soluções numéricas obtidas com e sem MER.
- 3) Programas computacionais para pesquisadores e usuários de MER. Estes programas serão disponibilizados gratuitamente na internet aos interessados, juntamente com seu manuais e tutoriais.
- 4) Validações de soluções numéricas em aerodinâmica e propulsão de foguetes para exemplificar na prática o uso de MER.
- 5) Dois *benchmarks* para exemplificar na prática o uso de MER, de dois problemas clássicos de CFD: escoamentos dentro de cavidades quadrada e cúbica causados pela tampa móvel. Pretende-se que as soluções numéricas obtidas nestes dois problemas sejam as mais acuradas da literatura, que incluirão suas estimativas de erro.
- 6) Publicar ou submeter para publicação cerca de doze trabalhos em eventos e periódicos internacionais para divulgar os resultados deste projeto.
- 7) Divulgar a técnica de MER no Brasil e no exterior através dos artigos a serem publicados e apresentados, *site* do projeto na internet, palestras, reuniões com os demais membros do grupo de pesquisa do proponente, e das disciplinas sobre CFD que o proponente leciona na graduação e na pós-graduação na UFPR.

8) Concluir as orientações de um mestrado (Queluz) e oito doutorados (Ferreira, Oliveira Jr, Moro, Silva, Carvalho Jr, Dall' Agnol, Foltran e Medeiros). Este projeto também servirá para manter a integração entre os pesquisadores do grupo de pesquisa em CFD da UFPR que atuam em outras instituições (Bertoldo, Martins, Santiago, Giacomini, Diógenes e Germer) e na UFPR (Araki).

Os resultados dos itens 1, 2, 4, 5 e 8 acima serão materializados através dos artigos que deverão ser publicados em eventos e periódicos da área. Todos os programas computacionais implementados serão disponibilizados no *site* do projeto na internet, bem como os resultados obtidos.

7) ATIVIDADES DE PESQUISA MAIS RELEVANTES

Publicações em periódicos mais relevantes (no ISI Web of Science)

- 1) MARCHI, C. H.; MARTINS, M. A.; NOVAK, L. A.; ARAKI, L. K.; PINTO, M. A. V.; GONÇALVES, S. F. T.; MORO, D. F.; FREITAS, I. S. Polynomial interpolation with repeated Richardson extrapolation to reduce discretization error in CFD. Publicado online por **Applied Mathematical Modelling**, 2016.
- 2) FOLTRAN, A. C.; MORO, D. F.; SILVA, N. D. P.; FERREIRA, A. E. G.; ARAKI, L. K.; MARCHI, C. H. Burning rate measurement of KNSu propellant obtained by mechanical press. **Journal of Aerospace Technology and Management**, 7:193-199, 2015.
- 3) SANTIAGO, C. D.; MARCHI, C. H.; SOUZA, L. F. Performance of geometric multigrid method for coupled two-dimensional systems in CFD. **Applied Mathematical Modelling**, 39:2602-2616, 2014.
- 4) MARCHI, C. H.; ARAKI, L. K.; ALVES, A. C.; SUERO, R.; GONÇALVES, S. F. T.; PINTO, M. A. V. Repeated Richardson extrapolation applied to the two-dimensional Laplace equation using triangular and square grids. **Applied Mathematical Modelling**, 37: 4661-4675, 2013.
- 5) MARCHI, C. H.; NOVAK, L. A.; SANTIAGO, C. D.; VARGAS, A. P. S. Highly accurate numerical solutions with repeated Richardson extrapolation for 2D Laplace equation. **Applied Mathematical Modelling**, 37:7386-7397, 2013.
- 6) SUERO, R.; PINTO, M. A. V.; MARCHI, C. H.; ARAKI, L. K.; ALVES, A. C. Analysis of algebraic multigrid parameters for two-dimensional steady-state heat diffusion equations. **Applied Mathematical Modelling**, 36:2996-3006, 2012.
- 7) OLIVEIRA, F.; PINTO, M. A. V.; MARCHI, C. H.; ARAKI, L. K. Optimized partial semicoarsening multigrid algorithm for heat diffusion problems and anisotropic grids. **Applied Mathematical Modelling**, 36:4665-4676, 2012.
- 8) MARCHI, C. H.; SUERO, R.; ARAKI, L. K. The lid-driven square cavity flow: numerical solution with a 1024x1024 grid. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. XXXI, n. 3, p. 186-198, 2009.
- 9) MARTINS, M. A.; MARCHI, C. H. Estimate of iteration errors in computational fluid dynamics. **Numerical Heat Transfer, Part B**, v. 53, p. 234-245, 2008.

- 10) MARCHI, C. H.; SILVA, A. F. C. Multi-dimensional discretization error estimation for convergent apparent order. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. XXVII, p. 432-439, 2005.
- 11) MARCHI, C. H.; LAROCA, F.; SILVA, A. F. C.; HINCKEL, J. N. Numerical solutions of flows in rocket engines with regenerative cooling. **Numerical Heat Transfer. Part A, Applications**, 45:699-717, 2004.
- 12) MARCHI, C. H.; SILVA, A. F. C. Unidimensional numerical solution error estimation for convergent apparent order. **Numerical Heat Transfer. Part B, Fundamentals**, v. 42, n.2, p. 167-188, 2002.
- 13) MARCHI, C. H.; AZEVEDO, J. L. F.; MORAES JUNIOR, P.; MALISKA, C. R.; SILVA, A. F. C. Code validation for high-speed flow simulation over satellite launch vehicle. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 33, p. 15-21, 1996.
- 14) MARCHI, C. H.; MALISKA, C. R. A nonorthogonal finite volume method for the solution of all speed flows using co-located variables. **Numerical Heat Transfer. Part B, Fundamentals**, v. 26, p. 293-311, 1994.

Projetos vigentes com financiamento coordenados pelo proponente

- **Multiextrapolação de Richardson para reduzir e estimar o erro de discretização em CFD - II.** Período: Mar/2014 a Fev/2017. Financiador: CNPq (processo 309365/2013-9). Total: R\$ 39.600,00.
- **Validação em propulsão e aerodinâmica de foguetes.** Período: Jul/2012 a Set/2017. Financiador: CAPES. Total: R\$ 600.000,00.

Orientações em andamento com financiamento

- 1) Pós-Doutorado: Cosmo Damião Santiago (CAPES)
- 2) Doutorado: Antonio Carlos Foltran (Universidade Positivo)
- 3) Doutorado: Diego Fernando Moro (CAPES)
- 4) Doutorado: Nicholas Dicati Pereira da Silva (CAPES)
- 5) Doutorado: Ana Eliza Gonçalves Ferreira (Colégio Militar do Paraná)
- 6) Doutorado: Carlos Alberto Rezende de Carvalho Júnior (CAPES)
- 7) Doutorado: Abimael Alves de Oliveira Júnior (Simepar)
- 8) Doutorado: Caroline Dall' Agnol (UTFPR)
- 9) Doutorado: Josenei Godoi de Medeiros (CAPES)
- 10) Mestrado: Izabel Cecília Ferreira de Souza Vicentin (CAPES)

8) DEMAIS INFORMAÇÕES RELEVANTES

IDENTIFICAÇÃO DOS PARTICIPANTES DO PROJETO

O projeto será executado pela seguinte equipe:

Carlos Henrique Marchi

- Título: doutor em engenharia mecânica, UFSC, 2001
- Professor associado da Universidade Federal do Paraná (UFPR)
- Função no projeto: coordenador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 20

Guilherme Bertoldo

- Título: doutor em engenharia mecânica, UFPR, 2014
- Professor da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
- Função no projeto: pesquisador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 4

Cosmo Damião Santiago

- Título: doutor em engenharia mecânica, UFPR, 2010
- Professor da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
- Função no projeto: pesquisador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 4

Márcio André Martins

- Título: doutor em engenharia mecânica, UFPR, 2013
- Professor da Universidade Estadual do Centro-Oeste (UNICENTRO)
- Função no projeto: pesquisador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 3

Fabiana de Fátima Giacomini

- Título: doutora em engenharia mecânica, UFPR, 2013
- Professora da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
- Função no projeto: pesquisadora
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 2

Luciano Kiyoshi Araki

- Título: doutor em métodos numéricos em engenharia, UFPR, 2007
- Professor adjunto da Universidade Federal do Paraná (UFPR)
- Função no projeto: pesquisador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 2

Eduardo Matos Germer

- Título: doutor em engenharia mecânica, UFPR, 2014
- Professor adjunto da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
- Função no projeto: pesquisador
- Dedicção no projeto (horas por semana): 2

Alysson Nunes Diógenes

- Título: doutor em engenharia mecânica, UFSC, 2009
- Professor da Universidade Positivo (UP)
- Função no projeto: pesquisador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 2

Diego Fernando Moro

- Título: mestre em engenharia mecânica, UFPR, 2014
- Doutorando no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFPR
- Bolsista da CAPES
- Função no projeto: colaborador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 30

Nicholas Dicati Pereira da Silva

- Título: mestre em engenharia mecânica, UFPR, 2015
- Doutorando no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFPR
- Bolsista da CAPES
- Função no projeto: colaborador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 30

Carlos Alberto Rezende de Carvalho Júnior

- Título: mestre em métodos numéricos em engenharia, UFPR, 2015
- Doutorando no Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia da UFPR
- Bolsista da CAPES
- Função no projeto: colaborador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 30

Caroline Dall' Agnol

- Título: mestre em matemática aplicada e computacional, UEL, 2014
- Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFPR
- Bolsista da CAPES
- Função no projeto: colaboradora
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 30

Josenei Godoi de Medeiros

- Título: mestre em ciências e tecnologias espaciais, ITA, 2015
- Doutorando no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFPR
- Bolsista da CAPES
- Função no projeto: colaborador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 30

Antonio Carlos Foltran

- Título: mestre em engenharia mecânica, UFPR, 2015
- Professor da Universidade Positivo (UP)
- Doutorando no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFPR
- Função no projeto: colaborador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 20

Abimael Alves de Oliveira Júnior

- Título: mestre em métodos numéricos em engenharia, UFPR, 2012
- Doutorando no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFPR
- Função no projeto: colaborador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 20

Ana Eliza Gonçalves Ferreira

- Título: mestra em matemática, UEPG, 2013
- Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFPR
- Função no projeto: colaboradora
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 20

Tobias Pinheiro Queluz

- Graduando em engenharia mecânica, UFPR
- Mestrando em engenharia mecânica, UFPR, a partir de março de 2017
- Função no projeto: colaborador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 20

DISPONIBILIDADE EFETIVA DE INFRAESTRUTURA E DE APOIO TÉCNICO PARA O DESENVOLVIMENTO DO PROJETO

O projeto será desenvolvido principalmente no Laboratório de Experimentação Numérica (LENA), do Departamento de Engenharia Mecânica (DEMEC), da Universidade Federal do Paraná (UFPR), que é coordenado pelo proponente deste projeto. A infraestrutura atual disponível no LENA é suficiente para desenvolver todas as etapas do projeto, e é a seguinte:

- Quatro salas que totalizam 110 m² para executar o projeto e servir de gabinete para os professores e alunos envolvidos no projeto. Nestas salas temos 15 computadores operacionais com processadores de 2, 4 e 8 núcleos, bem como impressoras e uma workstation.
- Anfiteatros para a realização de reuniões, palestras e workshops relacionados ao projeto.
- Códigos computacionais próprios para simulação do escoamento em tubeiras e sobre foguetes, reações químicas de propelentes, trajetória de foguetes etc.
- *Softwares* Linux, Windows, Word, Wgnuplot, Notepad, Origin, Fortran 11.1 da Intel, Maple e Matlab.
- Material de expediente: luz, telefone etc.

Além disso, o projeto contará com a infraestrutura das outras três instituições nas quais atuam seis pesquisadores da equipe.

VIABILIDADE DO PROJETO

Acredita-se que são grandes as possibilidades de se atingir os objetivos deste projeto porque:

- 1) A tese de doutorado do proponente deste projeto tratou sobre verificação de soluções numéricas em problemas resolvidos com o método de diferenças finitas (Marchi, 2001; Marchi e Silva, 2002). Além disso, o proponente deste projeto continua trabalhando desde 2001 com o tema de sua tese, o que pode ser visto através do seu currículo Lattes, nos artigos publicados, projetos em andamento e executados, e orientações concluídas e em andamento.
- 2) Vários pesquisadores e estudantes da equipe atuam diretamente nos temas envolvidos nas etapas do presente projeto.
- 3) O projeto será executado por uma equipe de 17 pessoas, sendo 8 professores-doutores e 9 alunos de pós-graduação. Todos os membros da equipe integram o grupo de pesquisa em *CFD, propulsão e aerodinâmica de foguetes*, da UFPR, criado em 2002, que está registrado no CNPq e é liderado pelo proponente desse projeto.
- 4) As pesquisas sobre MER da equipe desse projeto vem sendo realizadas desde 2007. Vários resultados já foram publicados em periódicos (Marchi et al., 2009; Marchi et al., 2013a; Marchi et al., 2013b; Marchi et al., 2016), e cinco teses (Alves, 2010; Novak, 2012; Giacomini, 2013; Vargas, 2013; Martins, 2013) e uma dissertação (Carvalho Jr, 2015) foram concluídas.
- 5) Já estão em execução as etapas 1 a 11.

9) REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALVES, A. C. **Verificação de soluções numéricas da equação de Laplace 2D com malhas triangulares e múltiplas extrapolações de Richardson**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2010. Tese de doutorado em Engenharia Mecânica.
- ARAKI, L. K. **Verificação de soluções numéricas de escoamentos reativos em motores-foguete**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2007. Tese de doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia.
- BENJAMIN, A. S.; DENNY, V. E. On the convergence of numerical solutions for 2-D flows in a cavity at large Re. **Journal of Computational Physics**, v. 33, p. 340-358, 1979.
- BRUNEAU, C. H.; SAAD, M. The 2D lid-driven cavity problem revisited. **Computers & Fluids**, v. 35, p. 326-348, 2006.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise numérica**. São Paulo: Thomson, 2003.
- BURG, C.; ERWIN, T. Application of Richardson extrapolation to the numerical solution of partial differential equations. **Numer. Methods Partial Differential Eq.**, v. 25, p. 810-832, 2009.
- CARVALHO JR, C. A. R. **Interpolação polinomial com multiextrapolação de Richardson para reduzir o erro de discretização em malhas não uniformes 1D**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2015. Dissertação de mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia.
- De VAHL DAVIS, G. Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 3, p. 249-264, 1983.
- ERTURK, E.; CORKE, T. C.; GÖKÇÖL, C. Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers. **Int. J. Numer. Meth. Fluids**, v. 48, p. 747-774, 2005.
- FERZIGER, J. H.; PERIC, M. **Computational methods for fluid dynamics**. 3. ed. Berlin: Springer, 2001.
- FREITAS, C. J.; STREET, R. L.; FINDIKAKIS, A. N.; KOSEFF, J. R. Numerical simulation of three-dimensional flow in a cavity. **Int. J. Numer. Meth. Fluids**, v. 5, p. 561-575, 1985.
- GIACOMINI, F. F. **Multiextrapolação de Richardson completa para reduzir o erro de discretização**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2013. Tese de doutorado em Engenharia Mecânica.
- JOYCE, D. C. Survey of extrapolation processes in numerical analysis. **SIAM Review**, v. 13, p. 435-490, 1971.
- KNUPP, P.; SALARI, K. **Verification of computer codes in computational science and engineering**. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2003.
- MA, Y.; GE, Y. A high order finite difference method with Richardson extrapolation for 3D convection diffusion equation. **Applied Mathematics and Computation**, v. 215, p. 3408-3417, 2010.
- MALISKA, C. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.
- MARCHI, C. H. **Verificação de soluções numéricas unidimensionais em dinâmica dos fluidos**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2001. Tese de doutorado em Engenharia Mecânica.
- MARCHI, C. H.; ARAKI, L. K.; ALVES, A. C.; SUERO, R.; GONÇALVES, S. F. T.; PINTO, M. A. V. Repeated Richardson extrapolation applied to the two-dimensional Laplace equation using triangular and square grids. **Applied Mathematical Modelling**, v. 37, p. 4661-4675, 2013a.
- MARCHI, C. H.; GERMER, E. M. Verificação de esquemas advectivo-difusivos 1D com e sem múltiplas extrapolações de Richardson. In: Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering. **Anais...** Armação de Búzios, 2009. 20 p. XXX CILAMCE.
- MARCHI, C. H.; MARTINS, M. A.; NOVAK, L. A.; ARAKI, L. K.; PINTO, M. A. V.; GONÇALVES, S. F. T.; MORO, D. F.; FREITAS, I. S. Polynomial interpolation with repeated Richardson extrapolation to reduce discretization error in CFD. Publicado online por **Applied Mathematical Modelling**, 2016.
- MARCHI, C. H.; NOVAK, L. A.; SANTIAGO, C. D. Múltiplas extrapolações de Richardson para reduzir e estimar o erro de discretização da equação de Laplace 2D. In: Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering. **Anais...** Maceió, 2008. 14 p. XXIX CILAMCE.
- MARCHI, C. H.; NOVAK, L. A.; SANTIAGO, C. D.; VARGAS, A. P. S. Highly accurate numerical solutions with repeated Richardson extrapolation for 2D Laplace equation. **Applied Mathematical Modelling**, v. 37, p. 7386-7397, 2013b.
- MARCHI, C. H.; SILVA, A. F. C. Unidimensional numerical solution error estimation for convergent apparent order. **Numerical Heat Transfer, Part B**, v. 42, p. 167-188, 2002.
- MARCHI, C. H.; SUERO, R.; ARAKI, L. K. The lid-driven square cavity flow: numerical solution with a 1024x1024 grid. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. XXXI, p. 186-198, 2009.
- MARTINS, M. A. **Multiextrapolação de Richardson com interpolação para reduzir e estimar o erro de discretização em CFD**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2013. Tese de doutorado em Engenharia Mecânica.

- NOVAK, L. A. **Múltiplas extrapolações de Richardson para reduzir e estimar o erro de discretização em condução de calor**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2012. Tese de doutorado em Engenharia Mecânica.
- OLIVEIRA, F. **Efeito de malhas anisotrópicas bidimensionais sobre o desempenho do método multigrid geométrico**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2010. Tese de doutorado em Engenharia Mecânica.
- PINTO, M. A. V. **Comportamento do multigrid geométrico em problemas de transferência de calor**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2006. Tese de doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia.
- RICHARDSON, L. F. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam. **Philosophical Proceedings of the Royal Society of London Serial A**, v. 210, p. 307-357, 1910.
- RICHARDSON, L. F.; GAUNT, J. A. The deferred approach to the limit. **Philosophical Proceedings of the Royal Society of London Serial A**, v. 226, p. 299-361, 1927.
- ROACHE, P. J. Perspective: a method for uniform reporting of grid refinement studies. **ASME Journal of Fluids Engineering**, v. 116, p. 405-413, 1994.
- ROACHE, P. J. **Verification and validation in computational science and engineering**, Albuquerque: Hermosa, 1998.
- SCHREIBER, R.; KELLER, H. B. Driven cavity flows by efficient numerical techniques. **Journal of Computational Physics**, v. 49, p. 310-333, 1983.
- SUERO, R. **Otimização de parâmetros do método multigrid algébrico para problemas difusivos bidimensionais**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2010. Tese de doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia.
- TANNEHILL, J. C.; ANDERSON, D. A.; PLETCHER, R. H. **Computational fluid mechanics and heat transfer**. 2. ed. Washington: Taylor & Francis, 1997.
- VARGAS, A. P. S. **Multiextrapolação de Richardson e esquemas de 1ª e 2ª ordens, mistos e Crank-Nicolson sobre as equações 2D de advecção-difusão e Fourier**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2013. Tese de doutorado em Engenharia Mecânica.
- VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **An introduction to computational fluid dynamics; the finite volume method**. 2. ed. Harlow, England: Pearson/Prentice Hall, 2007.
- WANG, Y.; ZHANG, J. Sixth order compact scheme combined with multigrid method and extrapolation technique for 2D poisson equation. **Journal of Computational Physics**, v. 228, p. 137-146, 2009.
- WESSELING, P. **An introduction to multigrid methods**. New York: Wiley, 1992.
- WU, J.; SHU, C. An improved immersed boundary-lattice Boltzmann method for simulating three-dimensional incompressible flows. **Journal of Computational Physics**, v. 229, p. 5022-5042, 2010.