



TÍTULO DO PROJETO:

Multiextrapolação de Richardson para reduzir e estimar o erro de discretização em CFD - IV

CFD-28

Período de execução previsto: 3 anos (Mar/2020 a Fev/2023)

Palavras-chave: erro numérico, diferenças finitas, volumes finitos, erro de discretização, verificação, validação.

Projeto de **PESQUISA CIENTÍFICA** submetido ao
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)
para concorrer à **Chamada CNPq 6/2019 – Bolsas de Produtividade em Pesquisa**
visando renovar uma bolsa de produtividade em pesquisa (PQ)

DADOS DO PROPONENTE

Proponente/Coordenador: **Carlos Henrique Marchi** (bolsista PQ-2/CNPq desde 2005)

Doutor em engenharia mecânica pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) em 2001

Professor titular da Universidade Federal do Paraná (UFPR)

chmcf@gmail.com

Curitiba, 30 de julho de 2019.

SUMÁRIO

1) Projeto em curso	2
2) Justificativa para 6 artigos em periódicos relevantes	2
3) Resumo	3
4) Definição do problema	3
5) Objetivos Geral e Específicos	4
6) Metodologia	5
7) Resultados esperados	8
8) Relevância e impacto do projeto para o desenvolvimento científico	9
9) Atividades de pesquisa mais relevantes	11
10) Demais informações relevantes	13
11) Referências	17

O item 1 do sumário segue o solicitado no formulário online do CNPq. Os itens 3 e 5 a 10 do sumário seguem o roteiro recomendado pelo CNPq no item 6.6.1 da Chamada 6/2019.

1 – PROJETO EM CURSO

Em relação à proposta anterior, seguem os resultados efetivamente obtidos no período Mar/2017 a Jul/2019 (detalhes no currículo Lattes):

- 4 artigos completos publicados em periódicos
- 1 artigo completo aceito para publicação em periódico
- 2 artigos completos submetidos a periódicos (em análise)
- 4 artigos completos publicados em congressos
- 4 orientações de teses de doutorado concluídas
- 1 vez lecionada a disciplina CFD na graduação
- 1 vez lecionada a disciplina Verificação e Validação de CFD na pós-graduação

Mais duas orientações serão concluídas até o fim do projeto em Fev/2020: 1 mestrado e 1 doutorado.

2 – JUSTIFICATIVA PARA 6 ARTIGOS

EM PERIÓDICOS RELEVANTES

Com base na observação C.1, dos Critérios de Julgamento (CA-EM), Vigência: 2018 a 2020, da COENG – EM – Engenharia Mecânica, Naval e Oceânica e Aeroespacial, que estão no ANEXO I – Critérios dos Comitês de Assessoramento da Chamada CNPq 6/2019 – Bolsas de Produtividade em Pesquisa, eu gostaria que a análise do meu pedido de renovação levasse em conta o seguinte:

- 1) Tenho 6 artigos em periódicos com JCR nos últimos cinco anos, que atendem ao critério mínimo vigente em 2017 da COENG quando a minha atual bolsa PQ foi implementada.
- 2) Só tomei conhecimento nesse mês (julho/2019) do critério de se ter no mínimo 9 artigos em periódicos com JCR quando fui preparar o novo projeto de renovação. Para quem é PQ-2, um aumento de 50% na exigência de artigos, cujo projeto tem que ser renovado a cada 3 anos e leva em conta apenas 5 anos de produção, é um impacto muito grande pois no meu caso, em média, o tempo entre se gerar um artigo e publicá-lo leva de 2 a 4 anos. Portanto, essa mudança abrupta de critério não permitiu qualquer reação para reverter o nível de publicação que se tinha.

- 3) O periódico JATM (Journal of Aerospace Technology and Management), que atualmente não está no Web of Science, estava quando foram publicados 2 artigos meus em 2015 e quando submeti outro que só foi publicado em 2018. Portanto, mesmo com o novo critério, levando-se em conta estes 3 artigos do JATM eu atingiria o critério mínimo de 9 artigos em periódicos.
- 4) Tenho atualmente 2 artigos submetidos a periódicos com JCR.
- 5) Até dezembro/2019 outros 4 artigos, que estão em fase final de redação, serão submetidos a periódicos com JCR.
- 6) Até dezembro/2020 mais 7 artigos, que estão em fase final de obtenção de resultados, serão submetidos a periódicos com JCR.
- 7) Tenho 12 orientações de mestrado (M) e 20 de doutorado (D) concluídas. Esse total está muito acima até das quantidades exigidas atualmente para bolsistas PQ da categoria 1 do nível A que são 12 M e 7 D.

3 – RESUMO

O objetivo geral deste projeto de pesquisa científica é desenvolver técnicas para reduzir e estimar o erro de discretização em CFD (*Computational Fluid Dynamics*) através de Múltiplas Extrapolações de Richardson (MER). Pretende-se melhorar, generalizar e testar o uso de MER visando diminuir a memória computacional e o tempo de CPU necessários para se resolver problemas de CFD, bem como obter soluções numéricas de grande acurácia. Serão considerados: problemas governados pelas equações de Poisson, advecção-difusão, Laplace, Burgers e Navier-Stokes; fluidos incompressíveis e compressíveis; escoamentos invíscidos, laminares e turbulentos; uma, duas e três dimensões espaciais; soluções numéricas obtidas com os métodos de diferenças finitas e volumes finitos; diversos tipos de variáveis de interesse e de aproximações numéricas; precisões dupla e quádrupla nos cálculos; e malhas uniformes, não uniformes e não ortogonais. O projeto está dividido em nove etapas que serão executadas em três anos por 19 pessoas (8 pesquisadores-doutores, 6 doutorandos e 5 mestrandos) de sete instituições.

4 – DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

A extrapolação de Richardson (ER) pode ser usada em problemas práticos de CFD para reduzir tão significativamente o erro numérico quanto em problemas simples?

O erro numérico (E) pode ser definido (Knupp e Salari, 2003) pela diferença entre a solução analítica exata (Φ) e a solução numérica (ϕ) de uma determinada variável de interesse, isto é,

$$E(\phi) = \Phi - \phi \quad (1)$$

Exemplos de variáveis de interesse em dinâmica dos fluidos são: velocidade, temperatura, pressão, massa específica, fluxo de massa, fluxo de calor e força. As fontes do erro numérico (Roache, 1998) são os erros de discretização, de iteração, de arredondamento e outros, sendo o primeiro geralmente o de maior magnitude.

A extrapolação de Richardson (Burden e Faires, 2003; Roache, 1994, 1998; Richardson, 1910; Richardson e Gaunt, 1927) é dada por

$$\phi_{\infty} = \phi_1 + \frac{(\phi_1 - \phi_2)}{(r^p - 1)} \quad (2)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são as soluções numéricas obtidas em duas malhas (h_2 grossa e h_1 fina) com número diferente de nós, sendo cada uma destas malhas representada pelo tamanho dos seus volumes de controle (h) no caso do método de volumes finitos; $r = h_2/h_1$ é a razão de refino entre as duas malhas; p é a ordem assintótica (p_L) do erro de discretização; e ϕ_∞ é o valor extrapolado da variável de interesse, que geralmente é uma aproximação de Φ melhor do que ϕ_1 e ϕ_2 , isto é, $|E(\phi_\infty)| < |E(\phi_1, \phi_2)|$. A Eq. (2) é adequada para reduzir a magnitude do erro de discretização.

MER (Múltiplas Extrapolações de Richardson) significa aplicar a Eq. (2) de forma recursiva. Cada aplicação da Eq. (2) representa um nível de extrapolação. No livro de Burden e Faires (2003) é apresentado um exemplo de cálculo da derivada de primeira ordem de uma função através de diferença central; com base em três aplicações desta aproximação numérica, para três valores de h , onde a melhor aproximação das três tem $E > 1,5 \times 10^{-2}$, usando-se apenas dois níveis de ER obtém-se $E < 1,0 \times 10^{-6}$, ou seja, o erro é reduzido em mais de 15 mil vezes.

Com base na Eq. (2), pode-se obter (Roache, 1998)

$$U(\phi_1) = \frac{(\phi_1 - \phi_2)}{(r^p - 1)} \quad (3)$$

onde U é uma estimativa do erro numérico, causado por erros de discretização, para a solução numérica ϕ_1 na malha fina (h_1). A Eq. (3) é o estimador de Richardson, que é a base para outros estimadores de erro, como o GCI (*Grid Convergence Index*) de Roache (1994).

Revisão bibliográfica

O próprio criador de ER (Richardson e Gaunt, 1927) aplicou MER com dois níveis de extrapolação em problemas bidimensionais (2D) de condução de calor, antes da era do computador. Joyce (1971) apresenta um extenso estudo sobre processos de extrapolação em análise numérica; quase todos são baseados em ER ou variantes dele.

Alguns trabalhos (Benjamin e Denny, 1979; Schreiber e Keller, 1983; Erturk et al., 2005) obtiveram ótimos resultados ao empregar MER para diminuir o erro de discretização do valor mínimo da função de corrente no problema da cavidade quadrada com tampa móvel, clássico em CFD. Porém, estes autores utilizaram este procedimento com no máximo quatro malhas, resultando em até três níveis de extrapolação para a malha mais fina usada; e só abordaram problemas 2D. Nestes trabalhos, MER foi usado como ferramenta; não foram realizados estudos para seu aperfeiçoamento. Além disso, em nenhum destes trabalhos foi proposto um estimador de erro associado ao uso de MER.

O habitual é aplicar ER de forma simples, isto é, com apenas um nível de extrapolação; por exemplo, De Vahl Davis (1983) em convecção natural; Wang e Zhang (2009) na equação de Poisson 2D; e Ma e Ge (2010) na equação de advecção-difusão 3D.

5 – OBJETIVOS GERAL E ESPECÍFICOS

Objetivo geral

O objetivo geral deste projeto é desenvolver técnicas para reduzir e estimar o erro de discretização em CFD através do método denominado Múltiplas Extrapolações de Richardson (MER). Para tanto, pretende-se melhorar, generalizar e testar o uso de MER. Com isso, visa-se diminuir a memória computacional e o tempo de CPU necessários para se resolver problemas de CFD, bem como obter soluções numéricas de grande acurácia.

Objetivos específicos

Os objetivos específicos deste projeto são:

- 1) Testar o efeito dos seguintes tipos de malha sobre o desempenho de MER: uniforme, não uniforme e não ortogonal.
- 2) Reduzir e estimar o erro de iteração com base em MER.
- 3) Aplicar o processo de verificação em problemas de radiação térmica.
- 4) Otimizar o coeficiente de empuxo de tubeira de foguete.
- 5) Otimizar o coeficiente de arrasto do nariz de foguete.
- 6) Melhorar o desempenho de MER em ondas de choque.
- 7) Obter os resultados mais acurados da literatura, com suas estimativas de erro, para o problema clássico do escoamento 2D dentro de uma cavidade quadrada causado pela sua tampa móvel.
- 8) Idem ao objetivo 7 para o escoamento 3D dentro de uma cavidade cúbica.
- 9) Gerar um novo tipo de *benchmark* para o escoamento 2D axissimétrico de fluido compressível em tubeira de motor-foguete, com MER e estimativa de erro.

6 – METODOLOGIA

Para atingir os objetivos propostos, o projeto está estruturado em nove etapas, uma para cada objetivo específico. As principais características da metodologia a ser usada no projeto são:

- a) Vários programas computacionais serão implementados pela equipe do projeto. Estes programas empregarão a linguagem de programação Fortran 2008.
- b) Serão usados os métodos numéricos de diferenças finitas (Tannehill et al., 1997) e volumes finitos (Maliska, 2004; Versteeg e Malalasekera, 2007) com diversos tipos de aproximações numéricas.
- c) Serão considerados problemas governados pelas equações de Poisson, advecção-difusão, Laplace, Burgers e Navier-Stokes em uma (1D), duas (2D) e três (3D) dimensões espaciais. Em alguns problemas serão considerados escoamentos turbulentos para testar o efeito de modelos de turbulência sobre MER.
- d) Para discretizar os domínios de cálculo, serão usadas malhas desde as mais grossas até as mais finas possíveis para os computadores disponíveis no laboratório do proponente deste projeto ou viáveis através do CENAPAD. Em problemas 1D, devem ser usadas malhas com até a ordem de 10^8 nós; em 2D, até 16384 nós em cada direção; e em 3D, até 1025 nós em cada direção. Essas malhas permitirão realizar, respectivamente, cerca de 25, 14 e 9 níveis de extrapolação.
- e) Condições de contorno do tipo Dirichlet, Neumann e Robin.
- f) Será usado o método *multigrid* (Wesseling, 1992) para reduzir o tempo computacional necessário para obter a solução numérica dos problemas 2D e 3D em cada malha.
- g) Com base em experimentos numéricos e em função da métrica (h) de cada malha, serão verificados o valor verdadeiro e estimado do erro de discretização, o valor da ordem efetiva (p_E) do erro de discretização verdadeiro e o valor da ordem aparente (p_U) do erro de discretização estimado (Marchi et al., 2008).
- h) As análises deverão ser feitas para os seguintes tipos de variáveis de interesse: as variáveis dependentes nos modelos matemáticos (por exemplo: velocidade, temperatura) e variáveis secundárias obtidas por diferenciação ou integração das variáveis dependentes (por exemplo: fluxos de massa e calor, média da variável dependente, forças), bem como de variáveis independentes.
- i) Verificar a eficiência de MER na redução do erro de discretização ao se comparar a memória computacional e o tempo de CPU necessários para resolver cada problema com e sem MER.
- j) Em alguns problemas a solução analítica é conhecida para as equações e variáveis de interesse. Assim, será possível verificar a acurácia e confiabilidade do estimador de erro a ser proposto e a eficiência de MER na redução do erro de discretização.

A seguir são descritas as nove etapas do trabalho, incluindo o respectivo objetivo do projeto e membros da equipe envolvidos.

Etapa 1: tipo de malha

Objetivo 1: testar o efeito dos seguintes tipos de malha sobre o desempenho de MER: uniforme, não uniforme e não ortogonal. Esta etapa constitui-se no tema de tese de Carvalho Jr.

Responsáveis pela execução: Carvalho Jr e Marchi.

Pretende-se verificar se o desempenho de MER é sensível ao tipo de malha empregado. Resultados preliminares indicam que MER tem o mesmo desempenho entre malhas uniformes e triangulares, bem como entre malhas uniformes e não uniformes 1D. Atualmente, está em fase final a investigação em problemas 2D dos resultados de MER em malhas uniformes, não uniformes e não ortogonais. Na revisão bibliográfica sobre o assunto, praticamente não foram encontrados trabalhos sobre esse tema.

Etapa 2: erro de iteração

Objetivo 2: reduzir e estimar o erro de iteração com base em MER. Esta etapa constitui-se no tema de tese de Dall'Agnol.

Responsáveis pela execução: Dall'Agnol, Moro e Marchi.

O objetivo desta etapa é testar técnicas de aceleração de convergência baseadas em MER para erros de iteração, visando reduzir o tempo computacional necessário para obter as soluções numéricas, principalmente em malhas muito finas. Outro objetivo é desenvolver um estimador do erro de iteração baseado em MER. O desenvolvimento teórico já foi realizado. Atualmente a teoria está sendo testada em alguns problemas. Na revisão bibliográfica sobre o assunto, foram encontrados apenas três estimadores de erro de iteração, todos baseados no mesmo princípio, e todos apresentam dificuldades em prever corretamente o erro de iteração, principalmente quando se usa método *multigrid* para acelerar a convergência.

Etapa 3: radiação térmica

Objetivo 3: aplicar o processo de verificação em problemas de radiação térmica. Esta etapa constitui-se no tema de tese de Foltran.

Responsáveis pela execução: Foltran, Moura e Marchi.

O objetivo desta etapa é testar sobre problemas de radiação térmica o processo de verificação habitualmente empregado em problemas de condução e convecção de calor. Serão abordados problemas com meio participante ou não. Resultados preliminares já foram obtidos em relação ao uso de métodos numéricos de integração usados em alguns problemas de radiação térmica. Pretende-se analisar principalmente se as técnicas usadas em verificação para reduzir e estimar o erro de discretização aplicam-se diretamente sobre problemas de radiação térmica ou são necessárias adaptações. Na revisão bibliográfica sobre o assunto, praticamente não foram encontrados trabalhos sobre esse tema.

Etapa 4: otimização do empuxo

Objetivo 4: otimizar o coeficiente de empuxo de tubeira de foguete. Esta etapa constitui-se nos temas da tese de Vicentin e da dissertação de Dene-Iorio.

Responsáveis pela execução: Vicentin, Dene-Iorio, Bertoldo e Marchi.

O objetivo desta etapa é melhorar o desempenho teórico de tuberias ou bocais convergente-divergente usados em motores-foguete ao se alterar o contorno ou perfil geométrico da superfície interna. Pretende-se usar técnicas de otimização modernas para melhorar tanto o bocal convergente quanto o divergente. Normalmente, na literatura, quase a totalidade dos trabalhos abordam a

otimização do bocal divergente, com pouca atenção ao bocal convergente. Pretende-se testar o efeito do número de variáveis de otimização sobre o resultado, bem como escoamento invíscido, laminar e turbulento com vários modelos.

Etapa 5: otimização do arrasto

Objetivo 5: otimizar o coeficiente de arrasto do nariz de foguete. Esta etapa constitui-se nos temas da tese de Rosa e da dissertação de Augusto-Iorio.

Responsáveis pela execução: Rosa, Augusto-Iorio, Bertoldo e Marchi.

O objetivo desta etapa é reduzir o arrasto aerodinâmico teórico do nariz de foguetes em escoamento supersônico ao se alterar o contorno ou perfil geométrico da superfície externa do nariz. Pretende-se usar técnicas de otimização modernas. Pretende-se testar o efeito do número de variáveis de otimização sobre o resultado, bem como escoamento invíscido, laminar e turbulento com vários modelos.

Etapa 6: onda de choque

Objetivo 6: melhorar o desempenho de MER em ondas de choque.

Responsáveis pela execução: Silva, Dicati, Suero, Meneguette e Marchi.

O objetivo desta etapa é melhorar o desempenho de MER em problemas de fluidos compressíveis que envolvem ondas de choque. A tese de Dicati abordou este tipo de problema no qual MER funciona para reduzir o erro de discretização mas não é tão efetivo como em problemas sem onda de choque, mesmo envolvendo fluidos compressíveis. Portanto, pretende-se aprofundar o estudo para definir um procedimento que resulte na melhoria do uso de MER quando existem ondas de choque no escoamento. Serão consideradas variáveis como a posição da onda de choque bem como as variáveis dependentes nas equações diferenciais, para reduzir o erro do campo completo do escoamento. Nessa etapa também pretende-se investigar o uso do método SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) associado à MER.

Etapa 7: benchmark 2D

Objetivo 7: obter os resultados mais acurados da literatura, com suas estimativas de erro, para o problema clássico do escoamento 2D dentro de uma cavidade quadrada causado pela sua tampa móvel (Bruneau e Saad, 2006; Marchi et al., 2009).

Responsáveis pela execução: Moro, Carvalho Jr, Santiago e Marchi.

Este problema, que não tem solução analítica conhecida, é muito usado como referência para teste de novas funções de interpolação, novas formulações matemáticas, novos modelos numéricos e códigos computacionais bem como para verificar novos códigos computacionais. Nesta etapa será usado MER com malhas de até 16.384×16.384 volumes de controle, diversos tipos de variáveis e número de Reynolds de 1 a 5000. Serão feitas comparações dos resultados com os disponíveis em farta literatura sobre este problema cuja malha mais fina é de 2.024×2.024 e sem MER. As simulações já foram executadas. Atualmente está sendo feita a aplicação de MER. Resultados preliminares de algumas variáveis foram publicados em Marchi et al. (2016).

Etapa 8: benchmark 3D

Objetivo 8: obter os resultados mais acurados da literatura, com suas estimativas de erro, para o problema do escoamento 3D dentro de uma cavidade cúbica causado pela sua tampa móvel (Freitas et al., 1985; Wu e Shu, 2010).

Responsáveis pela execução: Moro, Carvalho Jr, Santiago e Marchi.

Nesta etapa será usado MER com malhas de até $512 \times 512 \times 512$ volumes, diversos tipos de variáveis e número de Reynolds de 1 a 1000. Serão feitas comparações dos resultados com os

disponíveis na literatura sobre este problema cuja malha mais fina é 121x121x121 e sem MER. Atualmente não existe *benchmark* deste problema, que não tem solução analítica conhecida, e tem importância equivalente ao problema 2D em aplicações 3D. O código a ser usado já foi implementado e testado em comparações com resultados de outros autores.

Etapa 9: benchmark tubeira

Objetivo 9: gerar um novo tipo de *benchmark* para o escoamento 2D axissimétrico de fluido compressível em tubeira de motor-foguete, com MER e estimativa de erro.

Responsáveis pela execução: Américo, Aguiar, Bertoldo e Marchi.

Será proposto um novo tipo de *benchmark*, especificamente para tubeira de motor-foguete. Para isso será resolvido o escoamento 2D axissimétrico de fluido compressível em bocal convergente-divergente com vários graus de refino de malha do tipo não ortogonal. Será usado MER e feita a estimativa de erro das variáveis de interesse do problema. Pretende-se mostrar o efeito do escoamento invíscido, laminar e turbulento com vários modelos.

Cronograma físico

Na tabela abaixo é apresentado o cronograma de execução física das atividades previstas nas etapas 1 a 9, organizado em períodos quadrimestrais.

Início: março/2020.

Término: fevereiro/2023.

Duração: 3 anos

Etapa	Título	2020			2021			2022			2023
		1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º	2º	3º	1º
1	Tipo de malha	x	x	x							
2	Erro de iteração	x	x	x	x	x	x				
3	Radiação térmica	x	x	x	x	x	x				
4	Otimização do empuxo	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
5	Otimização do arrasto	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
6	Onda de choque	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
7	<i>Benchmark</i> 2D	x	x	x	x						
8	<i>Benchmark</i> 3D	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
9	<i>Benchmark</i> tubeira	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

7 – RESULTADOS ESPERADOS

Os resultados e impactos que se pretende alcançar ao final da execução deste projeto são:

- 1) Mostrar como usar MER em malhas não uniformes e não ortogonais para se ter o mesmo desempenho obtido com malhas uniformes.
- 2) Obter um procedimento baseado em MER para reduzir e estimar o erro de iteração.
- 3) Mostrar se os procedimentos de verificação podem ser aplicados diretamente a problemas de radiação térmica; caso não, que adaptações devem ser feitas.
- 4) Obter uma geometria para bocal convergente-divergente que resulte em empuxo maior que qualquer outra técnica da literatura.
- 5) Obter uma geometria para nariz de foguete que resulte em arrasto aerodinâmico menor que qualquer outra técnica da literatura.
- 6) Melhorar o desempenho de MER para ondas de choque de tal forma que resulte na melhor definição da geometria e posição do choque do que qualquer outra técnica da literatura.
- 7) Obter os resultados mais acurados da literatura para o problema clássico de CFD do escoamento 2D dentro de uma cavidade quadrada causado pela sua tampa móvel.

- 8) Obter os resultados mais acurados da literatura para o problema de CFD do escoamento 3D dentro de uma cavidade cúbica causado pela sua tampa móvel.
- 9) Gerar resultados de referência para um novo tipo de *benchmark* referente ao escoamento 2D axissimétrico de fluido compressível em um bocal convergente-divergente.
- 10) Publicar ou submeter para publicação dez trabalhos em periódicos internacionais para divulgar os resultados deste projeto.
- 11) Divulgar a técnica de MER no Brasil e no exterior através dos artigos a serem publicados e apresentados, *site* do projeto na internet, palestras, reuniões com os demais membros do grupo de pesquisa do proponente, e das disciplinas sobre CFD que o proponente leciona na graduação e na pós-graduação na UFPR.
- 12) Concluir as orientações de quatro mestrados (Queluz, Américo, Augusto-Iorio e Dene-Iorio) e cinco doutorados (Dall’Agnol, Foltran, Vicentin, Rosa e Silva). Este projeto também servirá para manter a integração entre os pesquisadores do grupo de pesquisa em CFD da UFPR que atuam em outras instituições (Bertoldo, Santiago, Suero, Dicati e Moro).

8 – RELEVÂNCIA E IMPACTO DO PROJETO

PARA O DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO

Originalidade

Até hoje, MER foi muito pouco empregado em CFD. Talvez isso tenha ocorrido por dificuldades pouco compreendidas, exploradas e relatadas na literatura (Burg e Erwin, 2009). Estudos (Marchi et al., 2008 e 2009) preliminares deste projeto já encontraram algumas destas dificuldades, que são: (1) a redução do erro com MER é bem mais modesta no caso dos valores de variáveis com extremos (máximo/mínimo); (2) para as coordenadas de variáveis com extremos, MER parece não se aplicar, às vezes até há um aumento do erro ao se usar MER; (3) com alguns níveis de extrapolação o erro de arredondamento pode se tornar maior que o erro de discretização, com isso MER perde sua eficiência; e (4) o uso incorreto das ordens do erro pode prejudicar muito a efetividade de MER.

Com a execução deste projeto, além de eliminar ou minimizar as dificuldades acima, pretende-se formalizar matematicamente a técnica de MER, aplicá-la a problemas bi e tridimensionais de CFD, aplicá-la a diversos tipos de variáveis de interesse, estudar o efeito de diversos parâmetros que afetam o uso de MER, desenvolver um estimador de erro para soluções obtidas com MER (inexistente na literatura), realizar dois processos de validação (Roache, 1998), gerar três *benchmarks* para exemplificar o uso prático de MER em CFD, e implementar e disponibilizar um *software* para interessados em usar MER.

Algumas contribuições iniciais da equipe deste projeto foram feitas em oito trabalhos já publicados em eventos (Marchi et al., 2008; Marchi e Germer, 2009) e periódicos (Marchi et al., 2009; Marchi et al., 2013a; Marchi et al., 2013b; Marchi et al., 2016a; Marchi et al., 2016b; Silva et al. 2019), cinco teses (Alves, 2010; Novak, 2012; Giacomini, 2013; Vargas, 2013; Martins, 2013) e uma dissertação (Carvalho Jr, 2015). Outros trabalhos já foram submetidos ou estão em preparação para serem submetidos a eventos e periódicos; e várias dissertações e teses de doutorado devem ser concluídas durante o projeto. Nestes trabalhos foram usados mais de 10 níveis de extrapolação, reduzindo de forma surpreendente o erro de discretização, conforme alguns resultados apresentados abaixo. Com base nestes trabalhos da equipe do projeto, a pergunta do início da seção “Definição do problema” pode agora ser respondida: tudo indica que a extrapolação de Richardson (ER) pode ser usada em problemas práticos de CFD para reduzir tão significativamente o erro numérico quanto em problemas simples.

Importância do projeto

Os resultados da execução deste projeto provocarão uma revolução nos métodos numéricos tão grande ou maior que o método *multigrid*. Essa afirmação pode parecer pretensiosa ou exagerada. Mas quem estudar os nossos trabalhos já publicados (especialmente Marchi et al. 2013b e 2016a) entenderá e concordará com a afirmação anterior. É uma questão de tempo para haver a difusão do conhecimento e sua aplicação aos mais diversos tipos de problemas em CFD. Além disso, lembra-se que o método *multigrid* atua sobre o erro de iteração e MER sobre o erro de discretização, que é a principal causa ou fonte do erro numérico (Roache, 1998).

Do ponto de vista matemático, idealmente uma solução numérica deve ter erro numérico nulo, ou seja, ela deve resultar na solução analítica. Portanto, estudar técnicas que sejam eficientes na redução do erro numérico ou de suas fontes é importante para que seja possível medir adequadamente o erro de modelagem, isto é, o erro de um modelo matemático usado para representar um fenômeno físico real.

Algumas formas para reduzir o erro numérico causado por erros de discretização são: (1) refinar a malha, cuja desvantagem é aumentar as necessidades de memória e tempo computacionais; (2) aumentar a ordem de acurácia das aproximações numéricas, cuja desvantagem é aumentar a complexidade do modelo numérico bem como as necessidades de memória e tempo computacionais; e (3) usar técnicas de extrapolação cuja principal delas é a de Richardson, para a qual algumas de suas dificuldades já foram apontadas na seção anterior.

As principais vantagens do uso da extrapolação de Richardson são:

- 1) É um pós-processamento simples, ou seja, não interfere diretamente na obtenção da solução numérica em uma dada malha h .
- 2) Seu custo computacional é muito baixo em termos de memória e tempo de CPU.
- 3) Pode ser aplicada a códigos computacionais já existentes ou a resultados já obtidos.
- 4) Aplica-se a diversos métodos numéricos, aproximações numéricas e variáveis de interesse.
- 5) Independe de análises a priori e do conhecimento da solução analítica do problema.

Sabendo-se que as soluções numéricas contêm erros, é importante estimá-los pelos seguintes motivos: (1) na prática não se conhece a solução analítica do problema bem como o erro verdadeiro; (2) quando o erro é maior do que o aceitável compromete-se a confiabilidade do uso da solução numérica; (3) quando o erro é menor do que o necessário há desperdício de recursos computacionais, isto é, de tempo de processamento e de quantidade de memória pois ambos são inversamente proporcionais ao nível de erro; (4) para validar e melhorar modelos matemáticos já existentes, e desenvolver novos, que visem explicar fenômenos físicos ainda não modelados adequadamente e cujas soluções analíticas são desconhecidas (um exemplo típico é a modelagem de escoamentos turbulentos); e (5) para otimizar o uso da malha, isto é, adaptá-la visando homogeneizar o nível de erro no domínio de cálculo.

A técnica de MER é extremamente efetiva na redução do erro de discretização, conforme resultados preliminares obtidos pela equipe deste projeto e apresentados abaixo. O exemplo refere-se à solução numérica da equação de Laplace 2D, obtida por diferenças finitas para uma determinada variável de interesse. Em princípio, pode-se dividir em duas formas o uso de MER:

1. **Obter o mesmo erro de discretização com uma malha que tem muito menos nós, resultando na redução do esforço computacional (memória e tempo de CPU). Esta forma é indicada especialmente para aplicações práticas (validações).** Isso é exemplificado na Tabela 1 para três níveis específicos de erro. Por exemplo, para o nível de erro -9×10^{-7} , sem MER é necessário usar a malha 513×513 para atingir este nível de erro, e a malha 17×17 com MER. Portanto, com MER a malha necessária é 911 vezes menor. Esta razão entre o número de nós das malhas sem e com MER indica o nível de redução do esforço computacional (memória e tempo de CPU) ao se usar MER em relação a não usá-la. A Tabela 1 mostra que quanto menor é o nível de erro desejado, melhor é o desempenho de MER.

Tabela 1. Desempenho de MER para erros específicos.

Nível do erro	-2×10^{-4}	-9×10^{-7}	-3×10^{-9}
Malha necessária sem MER	33x33	513x513	8.193x8.193
Malha necessária com MER	9x9	17x17	33x33
Número de níveis de extrapolação	1	2	3
Razão entre o número de nós das malhas sem e com MER	13,4	911	61.639

2. **Reduzir o erro de discretização em uma malha com o mesmo número de nós, resultando em erros muito menores e maior confiabilidade da solução. Esta forma é indicada especialmente para se gerar *benchmarks* (resultados de referência).** Isso é exemplificado na Tabela 2 para três malhas específicas. Por exemplo, na malha 33x33, mesmo com apenas três níveis de extrapolação, o erro já é reduzido em 143 mil vezes. A Tabela 2 mostra que quanto maior é o número de nós da malha, melhor é o desempenho de MER.

Tabela 2. Desempenho de MER para malhas específicas.

Malha	33x33	129x129	1.025x1.025
Erro sem MER	$-2,30 \times 10^{-4}$	$-1,44 \times 10^{-5}$	$-2,25 \times 10^{-7}$
Erro com MER	$-1,61 \times 10^{-9}$	$-1,21 \times 10^{-16}$	$-9,83 \times 10^{-32}$
Número de níveis de extrapolação	3	5	8
Razão entre o erro sem e com MER	$1,43 \times 10^5$	$1,19 \times 10^{11}$	$2,29 \times 10^{24}$

9 – ATIVIDADES DE PESQUISA MAIS RELEVANTES

Publicações em periódicos mais relevantes (com JCR no ISI Web of Science)

- 1) SILVA, N. D. P.; MARCHI, C. H.; ARAKI, L. K.; BORGES, R. B. R.; BERTOLDO, G.; SHU, C. W. Completed repeated Richardson extrapolation for compressible fluid flows. Publicado online em **Applied Mathematical Modelling** em 17 Jul 2019.
- 2) BERTOLDO, G.; MARCHI, C. H. Verification and validation of the foredrag coefficient for supersonic and hypersonic flow of air over a cone of fineness ratio 3. **Applied Mathematical Modelling**, 44:409-424, 2017.
- 3) ARAKI, L. K.; MARCHI, C. H. Verification and validation of numerical solutions of two-dimensional reactive flow in rocket engine nozzles. **Applied Mathematical Modelling**, 52:544-557, 2017.
- 4) MARCHI, C. H.; MARTINS, M. A.; NOVAK, L. A.; ARAKI, L. K.; PINTO, M. A. V.; GONÇALVES, S. F. T.; MORO, D. F.; FREITAS, I. S. Polynomial interpolation with repeated Richardson extrapolation to reduce discretization error in CFD. **Applied Mathematical Modelling**, 40:8872-8885, 2016.
- 5) MARCHI, C. H.; GIACOMINI, F. F.; SANTIAGO, C. D. Repeated Richardson extrapolation to reduce the field discretization error in computational fluid dynamics. **Numerical Heat Transfer Part B-Fundamentals**, 70:340-353, 2016.
- 6) SANTIAGO, C. D.; MARCHI, C. H.; SOUZA, L. F. Performance of geometric multigrid method for coupled two-dimensional systems in CFD. **Applied Mathematical Modelling**, 39:2602-2616, 2015.
- 7) MARCHI, C. H.; ARAKI, L. K.; ALVES, A. C.; SUERO, R.; GONÇALVES, S. F. T.; PINTO, M. A. V. Repeated Richardson extrapolation applied to the two-dimensional Laplace equation using triangular and square grids. **Applied Mathematical Modelling**, 37: 4661-4675, 2013.
- 8) MARCHI, C. H.; NOVAK, L. A.; SANTIAGO, C. D.; VARGAS, A. P. S. Highly accurate numerical solutions with repeated Richardson extrapolation for 2D Laplace equation. **Applied Mathematical Modelling**, 37:7386-7397, 2013.

- 9) SUERO, R.; PINTO, M. A. V.; MARCHI, C. H.; ARAKI, L. K.; ALVES, A. C. Analysis of algebraic multigrid parameters for two-dimensional steady-state heat diffusion equations. **Applied Mathematical Modelling**, 36:2996-3006, 2012.
- 10) OLIVEIRA, F.; PINTO, M. A. V.; MARCHI, C. H.; ARAKI, L. K. Optimized partial semicoarsening multigrid algorithm for heat diffusion problems and anisotropic grids. **Applied Mathematical Modelling**, 36:4665-4676, 2012.
- 11) ARAKI, L. K.; MARCHI, C. H. Verification of numerical solutions for reactive flows in a regeneratively cooled nozzle. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. XXXII, n. 3, p. 267-275, 2010.
- 12) MARCHI, C. H.; SUERO, R.; ARAKI, L. K. The lid-driven square cavity flow: numerical solution with a 1024x1024 grid. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. XXXI, n. 3, p. 186-198, 2009.
- 13) MARTINS, M. A.; MARCHI, C. H. Estimate of iteration errors in computational fluid dynamics. **Numerical Heat Transfer, Part B**, v. 53, p. 234-245, 2008.
- 14) MARCHI, C. H.; SILVA, A. F. C. Multi-dimensional discretization error estimation for convergent apparent order. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. XXVII, p. 432-439, 2005.
- 15) MARCHI, C. H.; LAROCA, F.; SILVA, A. F. C.; HINCKEL, J. N. Numerical solutions of flows in rocket engines with regenerative cooling. **Numerical Heat Transfer. Part A, Applications**, 45:699-717, 2004.
- 16) MARCHI, C. H.; SILVA, A. F. C. Unidimensional numerical solution error estimation for convergent apparent order. **Numerical Heat Transfer. Part B, Fundamentals**, v. 42, n.2, p. 167-188, 2002.
- 17) MARCHI, C. H.; AZEVEDO, J. L. F.; MORAES JUNIOR, P.; MALISKA, C. R.; SILVA, A. F. C. Code validation for high-speed flow simulation over satellite launch vehicle. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 33, p. 15-21, 1996.
- 18) MARCHI, C. H.; MALISKA, C. R. A nonorthogonal finite volume method for the solution of all speed flows using co-located variables. **Numerical Heat Transfer. Part B, Fundamentals**, v. 26, p. 293-311, 1994.

Projeto vigente com financiamento e coordenado pelo proponente:

- **Multiextrapolação de Richardson para reduzir e estimar o erro de discretização em CFD - III.** Período: Mar/2017 a Fev/2020. Financiador: CNPq (processo 307936/2016-3). Total: R\$ 39.600,00 referente a uma bolsa PQ nível 2.

Orientações de pós-graduação em andamento:

- 1) Mestrado: Tobias Pinheiro Queluz
- 2) Mestrado: Filipe Melo de Aguiar
- 3) Mestrado: Carlos Eduardo Américo
- 4) Mestrado: Dener Augusto Iorio
- 5) Mestrado: Giovanne Deni Iorio
- 6) Doutorado: Carlos Alberto Rezende de Carvalho Júnior
- 7) Doutorado: Caroline Dall' Agnol
- 8) Doutorado: Antonio Carlos Foltran
- 9) Doutorado: Izabel Cecília Ferreira de Souza Vicentin
- 10) Doutorado: Phillipe Mendes Rosa
- 11) Doutorado: Luciano Pereira da Silva

10 – DEMAIS INFORMAÇÕES RELEVANTES

Identificação dos participantes do projeto

O projeto será executado por uma equipe de 19 pessoas composta de 8 pesquisadores-doutores, 6 doutorandos e 5 mestrandos:

Carlos Henrique Marchi

- Título: doutor em engenharia mecânica, UFSC, 2001
- Professor titular da Universidade Federal do Paraná (UFPR)
- Função no projeto: coordenador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 20

Guilherme Bertoldo

- Título: doutor em engenharia mecânica, UFPR, 2014
- Professor da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
- Função no projeto: pesquisador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 10

Cosmo Damião Santiago

- Título: doutor em engenharia mecânica, UFPR, 2010
- Professor da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
- Função no projeto: pesquisador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 5

Diego Fernando Moro

- Título: doutor em engenharia mecânica, UFPR, 2018
- Professor da Universidade Positivo (UP)
- Função no projeto: pesquisador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 5

Nicholas Dicati Pereira da Silva

- Título: doutor em engenharia mecânica, UFPR, 2019
- Professor da Faculdade de Pato Branco (PR)
- Função no projeto: pesquisador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 5

Roberta Suero

- Título: doutora em métodos numéricos em engenharia, UFPR, 2010
- Professora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná (IFPR)
- Função no projeto: pesquisadora
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 2

Luís Mauro Moura

- Título: doutor em Thermique Et Energétique, Institut National Des Sciences Appliquées de Lyon, INSA/LYON, França, 1998.
- Professor da Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUC-PR)
- Função no projeto: pesquisador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 2

Messias Meneguette Júnior

- Título: doutor em Numerical Analysis, University of Oxford, Inglaterra, 1987.
- Professor da Universidade Estadual Paulista (UNESP)
- Função no projeto: pesquisador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 2

Carlos Alberto Rezende de Carvalho Júnior

- Título: mestre em métodos numéricos em engenharia, UFPR, 2015
- Doutorando no Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia da UFPR
- Bolsista da CAPES
- Função no projeto: colaborador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 30

Caroline Dall' Agnol

- Professora da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)
- Título: mestre em matemática aplicada e computacional, UEL, 2014
- Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFPR
- Função no projeto: colaboradora
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 20

Antonio Carlos Foltran

- Título: mestre em engenharia mecânica, UFPR, 2015
- Doutorando no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFPR
- Bolsista da CAPES
- Função no projeto: colaborador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 30

Izabel Cecília Ferreira de Souza Vicentin

- Título: mestre em engenharia mecânica, UFPR, 2016
- Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UFPR
- Bolsista da Fundação Araucária
- Função no projeto: colaboradora
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 30

Phillipe Mendes Rosa

- Título: mestre em engenharia mecânica e de materiais, UTFPR, 2014
- Doutorando no Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia da UFPR
- Bolsista da CAPES
- Função no projeto: colaborador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 30

Luciano Pereira da Silva

- Título: mestre em matemática aplicada e computacional, UNESP, 2017
- Doutorando no Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia da UFPR
- Bolsista da CAPES
- Função no projeto: colaborador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 30

Tobias Pinheiro Queluz

- Mestrando em engenharia mecânica, UFPR
- Função no projeto: colaborador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 20

Filipe Melo de Aguiar

- Mestrando em engenharia mecânica, UFPR
- Função no projeto: colaborador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 30

Carlos Eduardo Américo

- Mestrando em engenharia mecânica, UFPR
- Bolsista CAPES
- Função no projeto: colaborador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 30

Dener Augusto Iorio

- Mestrando em engenharia mecânica, UFPR
- Função no projeto: colaborador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 30

Giovane Deni Iorio

- Mestrando em engenharia mecânica, UFPR
- Função no projeto: colaborador
- Dedicção ao projeto (horas por semana): 30

Instituições participantes do projeto

- Universidade Federal do Paraná (UFPR) [executora]
Campus de Curitiba (PR)
- Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) [colaboradora]
Campi de Francisco Beltrão (PR), Apucarana (PR) e Dois Vizinhos (PR)
- Universidade Estadual Paulista (UNESP) [colaboradora]
Presidente Prudente (SP)
- Universidade Positivo (UP) [colaboradora]
Campus de Curitiba (PR)
- Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná (IFPR) [colaboradora]
Campus Paranaguá (PR)
- Faculdade de Pato Branco (PR) [colaboradora]
Pato Branco (PR)
- Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUC-PR) [colaboradora]
Curitiba (PR)

Colaborações com outros pesquisadores

- Prof. Rafael Brandão de Rezende Borges
Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)
Rio de Janeiro (PR)
- Prof. Annibal Hetem Júnior
Universidade Federal do ABC (UFABC)
Santo André (SP)
- Prof. Sergio Amado Elaskar
Universidad Nacional de Córdoba
Córdoba, Argentina
- Prof. Chi-Wang Shu
Brown University
Providence, Estados Unidos

Infraestrutura e apoio para o desenvolvimento do projeto

O projeto será desenvolvido principalmente no Laboratório de Experimentação Numérica (LENA), do Departamento de Engenharia Mecânica (DEMEC), da Universidade Federal do Paraná (UFPR), que é coordenado pelo proponente deste projeto. A infraestrutura atual disponível no LENA é suficiente para desenvolver todas as etapas do projeto, e é a seguinte:

- Quatro salas que totalizam 110 m² para executar o projeto e servir de gabinete para os professores e alunos envolvidos no projeto. Nestas salas temos 15 computadores operacionais com processadores de 2, 4 e 8 núcleos, bem como impressoras e uma workstation.
- Anfiteatros para a realização de reuniões, palestras e workshops relacionados ao projeto.
- Códigos computacionais próprios para simulação do escoamento em tubeiras e sobre foguetes, reações químicas de propelentes, trajetória de foguetes etc.
- *Softwares* Linux, Windows, Word, Wgnuplot, Notepad, Origin, Fortran 14.0 da Intel, Maple e Matlab.
- Material de expediente: luz, telefone etc.

Além disso, o projeto contará com a infraestrutura das outras seis instituições nas quais atuam sete pesquisadores da equipe.

Viabilidade do projeto

Acredita-se que são grandes as possibilidades de se atingir os objetivos deste projeto porque:

- 1) A tese de doutorado do proponente deste projeto tratou sobre verificação de soluções numéricas em problemas resolvidos com o método de diferenças finitas (Marchi, 2001; Marchi e Silva, 2002). Além disso, o proponente deste projeto continua trabalhando desde 2001 com o tema de sua tese, o que pode ser visto através do seu currículo Lattes, nos artigos publicados, projetos em andamento e executados, e orientações concluídas e em andamento.
- 2) Vários pesquisadores e estudantes da equipe atuam diretamente nos temas envolvidos nas etapas do presente projeto.
- 3) O projeto será executado por uma equipe de 19 pessoas composta de 8 pesquisadores-doutores, 6 doutorandos e 5 mestrandos. Dezesete membros da equipe integram o grupo de pesquisa em *CFD, propulsão e aerodinâmica de foguetes*, da UFPR, criado em 2002, que está registrado no CNPq e é liderado pelo proponente desse projeto.
- 4) **As pesquisas sobre MER da equipe desse projeto vem sendo realizadas desde 2007. Vários resultados já foram publicados em periódicos (Marchi et al., 2009; Marchi et al., 2013a;**

Marchi et al., 2013b; Marchi et al., 2016a; Marchi et al., 2016b; Silva et al. 2019), cinco teses (Alves, 2010; Novak, 2012; Giacomini, 2013; Vargas, 2013; Martins, 2013) e uma dissertação (Carvalho Jr, 2015).

5) Já estão em execução as etapas 1 a 8 do projeto.

11 – REFERÊNCIAS

- ALVES, A. C. **Verificação de soluções numéricas da equação de Laplace 2D com malhas triangulares e múltiplas extrapolações de Richardson**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2010. Tese de doutorado em Engenharia Mecânica.
- ARAKI, L. K. **Verificação de soluções numéricas de escoamentos reativos em motores-foguete**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2007. Tese de doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia.
- BENJAMIN, A. S.; DENNY, V. E. On the convergence of numerical solutions for 2-D flows in a cavity at large Re. **Journal of Computational Physics**, v. 33, p. 340-358, 1979.
- BRUNEAU, C. H.; SAAD, M. The 2D lid-driven cavity problem revisited. **Computers & Fluids**, v. 35, p. 326-348, 2006.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise numérica**. São Paulo: Thomson, 2003.
- BURG, C.; ERWIN, T. Application of Richardson extrapolation to the numerical solution of partial differential equations. **Numer. Methods Partial Differential Eq.**, v. 25, p. 810-832, 2009.
- CARVALHO JR, C. A. R. **Interpolação polinomial com multiextrapolação de Richardson para reduzir o erro de discretização em malhas não uniformes 1D**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2015. Dissertação de mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia.
- De VAHL DAVIS, G. Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 3, p. 249-264, 1983.
- ERTURK, E.; CORKE, T. C.; GÖKÇÖL, C. Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers. **Int. J. Numer. Meth. Fluids**, v. 48, p. 747-774, 2005.
- FERZIGER, J. H.; PERIC, M. **Computational methods for fluid dynamics**. 3. ed. Berlin: Springer, 2001.
- FREITAS, C. J.; STREET, R. L.; FINDIKAKIS, A. N.; KOSEFF, J. R. Numerical simulation of three-dimensional flow in a cavity. **Int. J. Numer. Meth. Fluids**, v. 5, p. 561-575, 1985.
- GIACOMINI, F. F. **Multiextrapolação de Richardson completa para reduzir o erro de discretização**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2013. Tese de doutorado em Engenharia Mecânica.
- JOYCE, D. C. Survey of extrapolation processes in numerical analysis. **SIAM Review**, v. 13, p. 435-490, 1971.
- KNUPP, P.; SALARI, K. **Verification of computer codes in computational science and engineering**. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2003.
- MA, Y.; GE, Y. A high order finite difference method with Richardson extrapolation for 3D convection diffusion equation. **Applied Mathematics and Computation**, v. 215, p. 3408-3417, 2010.
- MALISKA, C. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.
- MARCHI, C. H. **Verificação de soluções numéricas unidimensionais em dinâmica dos fluidos**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2001. Tese de doutorado em Engenharia Mecânica.
- MARCHI, C. H.; ARAKI, L. K.; ALVES, A. C.; SUERO, R.; GONÇALVES, S. F. T.; PINTO, M. A. V. Repeated Richardson extrapolation applied to the two-dimensional Laplace equation using triangular and square grids. **Applied Mathematical Modelling**, v. 37, p. 4661-4675, 2013a.
- MARCHI, C. H.; GERMER, E. M. Verificação de esquemas advectivo-difusivos 1D com e sem múltiplas extrapolações de Richardson. In: Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering. **Anais...** Armação de Búzios, 2009. 20 p. XXX CILAMCE.
- MARCHI, C. H.; GIACOMINI, F. F.; SANTIAGO, C. D. Repeated Richardson extrapolation to reduce the field discretization error in computational fluid dynamics. **Numerical Heat Transfer Part B-Fundamentals**, 70:340-353, 2016b.
- MARCHI, C. H.; MARTINS, M. A.; NOVAK, L. A.; ARAKI, L. K.; PINTO, M. A. V.; GONÇALVES, S. F. T.; MORO, D. F.; FREITAS, I. S. Polynomial interpolation with repeated Richardson extrapolation to reduce discretization error in CFD. **Applied Mathematical Modelling**, 40:8872-8885, 2016a.
- MARCHI, C. H.; NOVAK, L. A.; SANTIAGO, C. D. Múltiplas extrapolações de Richardson para reduzir e estimar o erro de discretização da equação de Laplace 2D. In: Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering. **Anais...** Maceió, 2008. 14 p. XXIX CILAMCE.
- MARCHI, C. H.; NOVAK, L. A.; SANTIAGO, C. D.; VARGAS, A. P. S. Highly accurate numerical solutions with repeated Richardson extrapolation for 2D Laplace equation. **Applied Mathematical Modelling**, v. 37, p. 7386-7397, 2013b.

- MARCHI, C. H.; SILVA, A. F. C. Unidimensional numerical solution error estimation for convergent apparent order. **Numerical Heat Transfer, Part B**, v. 42, p. 167-188, 2002.
- MARCHI, C. H.; SUERO, R.; ARAKI, L. K. The lid-driven square cavity flow: numerical solution with a 1024x1024 grid. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. XXXI, p. 186-198, 2009.
- MARTINS, M. A. **Multiextrapolação de Richardson com interpolação para reduzir e estimar o erro de discretização em CFD**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2013. Tese de doutorado em Engenharia Mecânica.
- NOVAK, L. A. **Múltiplas extrapolações de Richardson para reduzir e estimar o erro de discretização em condução de calor**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2012. Tese de doutorado em Engenharia Mecânica.
- OLIVEIRA, F. **Efeito de malhas anisotrópicas bidimensionais sobre o desempenho do método multigrid geométrico**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2010. Tese de doutorado em Engenharia Mecânica.
- PINTO, M. A. V. **Comportamento do multigrid geométrico em problemas de transferência de calor**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2006. Tese de doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia.
- RICHARDSON, L. F. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam. **Philosophical Proceedings of the Royal Society of London Serial A**, v. 210, p. 307-357, 1910.
- RICHARDSON, L. F.; GAUNT, J. A. The deferred approach to the limit. **Philosophical Proceedings of the Royal Society of London Serial A**, v. 226, p. 299-361, 1927.
- ROACHE, P. J. Perspective: a method for uniform reporting of grid refinement studies. **ASME Journal of Fluids Engineering**, v. 116, p. 405-413, 1994.
- ROACHE, P. J. **Verification and validation in computational science and engineering**. Albuquerque: Hermosa, 1998.
- SCHREIBER, R.; KELLER, H. B. Driven cavity flows by efficient numerical techniques. **Journal of Computational Physics**, v. 49, p. 310-333, 1983.
- SILVA, N. D. P.; MARCHI, C. H.; ARAKI, L. K.; BORGES, R. B. R.; BERTOLDO, G.; SHU, C. W. Completed repeated Richardson extrapolation for compressible fluid flows. Publicado online em **Applied Mathematical Modelling**, em 17 Jul 2019.
- SUERO, R. **Otimização de parâmetros do método multigrid algébrico para problemas difusivos bidimensionais**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2010. Tese de doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia.
- TANNEHILL, J. C.; ANDERSON, D. A.; PLETCHER, R. H. **Computational fluid mechanics and heat transfer**. 2. ed. Washington: Taylor & Francis, 1997.
- VARGAS, A. P. S. **Multiextrapolação de Richardson e esquemas de 1ª e 2ª ordens, mistos e Crank-Nicolson sobre as equações 2D de advecção-difusão e Fourier**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2013. Tese de doutorado em Engenharia Mecânica.
- VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. **An introduction to computational fluid dynamics; the finite volume method**. 2. ed. Harlow, England: Pearson/Prentice Hall, 2007.
- WANG, Y.; ZHANG, J. Sixth order compact scheme combined with multigrid method and extrapolation technique for 2D poisson equation. **Journal of Computational Physics**, v. 228, p. 137-146, 2009.
- WESSELING, P. **An introduction to multigrid methods**. New York: Wiley, 1992.
- WU, J.; SHU, C. An improved immersed boundary-lattice Boltzmann method for simulating three-dimensional incompressible flows. **Journal of Computational Physics**, v. 229, p. 5022-5042, 2010.