

Condições de contorno para Mach2D-5.8.2.1 - aerodinâmica

Guilherme Bertoldo

12 de Novembro de 2012

Conteúdo

1	Condições de contorno exatas	1
1.1	Contorno norte	2
1.2	Contorno sul	2
1.3	Contorno leste	2
1.4	Contorno oeste	2
2	Aproximações para as condições de contorno	2
2.1	Contorno norte	2
2.2	Contorno sul	3
2.3	Contorno leste	4
2.4	Contorno oeste	4
2.5	Canto sudoeste	5
2.6	Canto sudeste	5
2.7	Canto noroeste	5
2.8	Canto nordeste	5
3	Implementações	5
3.1	Código base - SVN-112	6
3.1.1	Contorno sul	6
3.1.2	Contorno leste	6
3.1.3	Contorno oeste	6
3.2	SVN-113	6
3.3	SVN-114	7
3.4	SVN-115	7
3.5	SVN-116	7
3.6	SVN-117	8
3.7	SVN-118	9
3.8	SVN-119	9
3.9	SVN-120	10
3.10	SVN-121	11
3.11	SVN-123	12
3.12	SVN-124	12
4	Conclusões	13
A	Propriedades geométricas no sistema $\xi\eta$	14

1 Condições de contorno exatas

As condições de contorno exatas para as variáveis u , v , T e p , referentes aos contornos ilustrados na Fig. 1, são apresentadas a seguir.

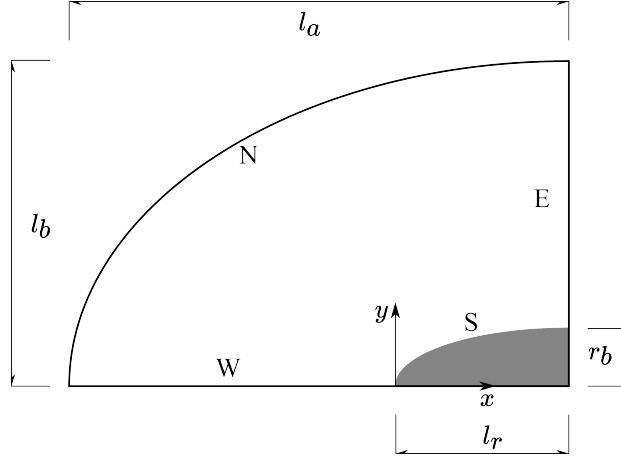


Figura 1: Esquema dos contornos do domínio de cálculo.

1.1 Contorno norte

$$p = p_\infty \quad (1)$$

$$T = T_\infty \quad (2)$$

$$u = u_\infty \quad (3)$$

$$v = 0 \quad (4)$$

1.2 Contorno sul

$$(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)p = 0 \quad (5)$$

$$(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)T = 0 \quad (6)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (7)$$

1.3 Contorno leste

Escoamento localmente parabólico:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\phi = 0, \quad \phi \in \{p, T, u, v\} \quad (8)$$

1.4 Contorno oeste

$$(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla)\phi = 0, \quad \phi \in \{p, T, u\} \quad (9)$$

$$v = 0 \quad (10)$$

2 Aproximações para as condições de contorno

2.1 Contorno norte

Neste contorno é possível escrever

$$\phi_s = \phi_\infty, \quad \phi \in \{p, T, u, v\}, \quad (11)$$

onde

$$v_\infty = 0. \quad (12)$$

Utilizando a discretização

$$\frac{\phi_p + \phi_s}{2} = \phi_\infty \quad (13)$$

e lembrando que $p = p_\infty + p'$, obtém-se

- $p' = 0$:

$$A_p^{p'} = 1, \quad A_s^{p'} = 1, \quad \text{demais } A^{p'} = 0, \quad b_p^{p'} = 0. \quad (14)$$

- $T = T_\infty$:
$$A_P^T = 1, \quad A_S^T = 1, \quad \text{demais} \quad A^T = 0, \quad b_P^T = 2T_\infty. \quad (15)$$

- $u = u_\infty$:
$$A_P^u = 1, \quad A_S^u = 1, \quad \text{demais} \quad A^u = 0, \quad b_P^u = 2u_\infty. \quad (16)$$

- $v = 0$:
$$A_P^v = 1, \quad A_S^v = 1, \quad \text{demais} \quad A^v = 0, \quad b_P^v = 0. \quad (17)$$

2.2 Contorno sul

- $\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla p = 0$

Observando que o contorno sul é uma linha de η constante¹, tem-se que o vetor unitário $\hat{\mathbf{n}}$ normal ao contorno é dado por

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{E}^\eta}{\|\mathbf{E}^\eta\|}. \quad (18)$$

Combinando a Eq. (99), isto é,

$$\nabla\phi = \mathbf{E}^\xi \frac{\partial\phi}{\partial\xi} + \mathbf{E}^\eta \frac{\partial\phi}{\partial\eta},$$

com a Eq. (18), obtém-se para a condição de contorno da pressão

$$\left(g^{\xi\eta} \frac{\partial p}{\partial\xi} + g^{\eta\eta} \frac{\partial p}{\partial\eta} \right)_n = 0 \quad (19)$$

ou

$$-\beta_n \left(\frac{\partial p}{\partial\xi} \right)_n + \gamma_n \left(\frac{\partial p}{\partial\eta} \right)_n = 0. \quad (20)$$

onde foram usadas as eqs. (97) e (98).

Aplicando a aproximação

$$\left(\frac{\partial p}{\partial\eta} \right)_n = \frac{p_N - p_P}{\Delta\eta}, \quad (21)$$

na Eq. (20) e observando que $p = p^* + p'$, obtém-se

$$A_P^{p'} = \frac{1}{\Delta\eta}, \quad A_N^{p'} = \frac{-1}{\Delta\eta}, \quad \text{demais} \quad A^{p'} = 0, \quad b_P^{p'} = \frac{p_N^* - p_P^*}{\Delta\eta} - \frac{\beta_n}{\gamma_n} \left(\frac{\partial p}{\partial\xi} \right)_n^m, \quad (22)$$

onde o índice m indica o valor da variável obtido da última iteração. A aproximação para

$$\left(\frac{\partial p}{\partial\xi} \right)_n$$

será dada nas seções de implementação.

- $\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla T = 0$

Analogamente ao caso anterior, tem-se

$$A_P^T = \frac{1}{\Delta\eta}, \quad A_N^T = \frac{-1}{\Delta\eta}, \quad \text{demais} \quad A^T = 0, \quad b_P^T = -\frac{\beta_n}{\gamma_n} \left(\frac{\partial T}{\partial\xi} \right)_n^m. \quad (23)$$

- $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u} = 0$

Em termos das componentes contravariantes, o vetor velocidade \mathbf{u} pode ser escrito como

$$\mathbf{u} = J(U\mathbf{E}_\xi + V\mathbf{E}_\eta). \quad (24)$$

No contorno sul o vetor normal é dado pela Eq. (18), logo, sobre este contorno vale

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u} = V_n = v_n(x_\xi)_n - u_n(y_\xi)_n = 0. \quad (25)$$

A condição de contorno (25) é utilizada diretamente nas equações de transporte e não fornece uma fórmula para se determinar explicitamente u_n e v_n . De fato, estas grandezas são irrelevantes na obtenção dos campos nos nós dos volumes de controle. O que realmente importa é a condição $V_n = 0$. Apesar disso, u_n e v_n são necessárias para se determinar os coeficientes e fontes dos sistemas lineares de u e v nos volumes fictícios do contorno sul. Para contornar este problema são necessárias algumas aproximações, que serão apresentadas seções de implementação.

¹Detalhes sobre as propriedades geométricas no sistema $\xi\eta$ são dadas no Apêndice A.

2.3 Contorno leste

Escoamento localmente parabólico para todas as variáveis

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0, \quad \phi \in \{p, T, u, v\}. \quad (26)$$

Utilizando as eqs. (24) e (99), obtém-se

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla \phi)_w = \left(U \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + V \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_w = 0. \quad (27)$$

Aplicando a aproximação

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta \xi}, \quad (28)$$

à Eq. (27), obtém-se para T , u e v

$$A_P^\phi = \frac{1}{\Delta \xi}, \quad A_W^\phi = \frac{-1}{\Delta \xi}, \quad \text{demais} \quad A^\phi = 0, \quad b_P^\phi = -\frac{V_w}{U_w} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_w^m, \quad \phi \in \{T, u, v\}, \quad (29)$$

onde

$$U_w = u_w (y_\eta)_w - v_w (x_\eta)_w, \quad V_w = v_w (x_\xi)_w - u_w (y_\xi)_w. \quad (30)$$

No caso da pressão, deve-se levar em conta a relação $p = p^* + p'$, o que produz

$$A_P^{p'} = \frac{1}{\Delta \xi}, \quad A_W^{p'} = \frac{-1}{\Delta \xi}, \quad \text{demais} \quad A^{p'} = 0, \quad b_P^{p'} = -\frac{p_P^* - p_W^*}{\Delta \xi} - \frac{V_w}{U_w} \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)_w^m. \quad (31)$$

2.4 Contorno oeste

Para p , T e u a condição de simetria é

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi = 0, \quad \phi \in \{p, T, u\}, \quad (32)$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor normal ao contorno oeste. Uma vez que o contorno oeste é uma linha de ξ constante, tem-se

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{E}^\xi}{\|\mathbf{E}^\xi\|} \quad (33)$$

Combinando a Eq. (99), isto é,

$$\nabla \phi = \mathbf{E}^\xi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \mathbf{E}^\eta \frac{\partial \phi}{\partial \eta},$$

com a Eq. (33), obtém-se para a condição de contorno (32)

$$\left(g^{\xi\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + g^{\xi\eta} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_e = 0 \quad (34)$$

ou

$$\alpha_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_e - \beta_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_e = 0. \quad (35)$$

onde foram usadas as eqs. (96) e (97).

Aplicando a aproximação

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta \xi} \quad (36)$$

à Eq. (35), obtém-se

$$A_P^\phi = \frac{1}{\Delta \xi}, \quad A_E^\phi = \frac{-1}{\Delta \xi}, \quad \text{demais} \quad A^\phi = 0, \quad b_P^\phi = -\frac{\beta_e}{\alpha_e} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_e^m, \quad \phi \in \{T, u\}. \quad (37)$$

No caso da pressão, deve-se levar em conta a relação $p = p^* + p'$, o que produz

$$A_P^{p'} = \frac{1}{\Delta \xi}, \quad A_E^{p'} = \frac{-1}{\Delta \xi}, \quad \text{demais} \quad A^{p'} = 0, \quad b_P^{p'} = \frac{p_E^* - p_P^*}{\Delta \xi} - \frac{\beta_e}{\alpha_e} \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)_e^m. \quad (38)$$

A condição de contorno para v é aproximada por

$$v_e = \frac{v_E + v_P}{2} = 0, \quad (39)$$

de modo que

$$A_P^v = 1, \quad A_E^v = 1, \quad \text{demais} \quad A^v = 0, \quad b_P^v = 0. \quad (40)$$

2.5 Canto sudoeste

No volume fictício do canto sudoeste é feita a extrapolação

$$\phi_P = \frac{\phi_N + \phi_E + \phi_{NE}}{3} + \mathcal{O}(\Delta\xi) + \mathcal{O}(\Delta\eta), \quad \phi \in \{p, T, u, v\}, \quad (41)$$

de modo que os coeficientes dos sistemas lineares de T , u e v são dados por

$$A_P^\phi = 1, \quad \text{demais} \quad A^\phi = 0, \quad b_P^\phi = \frac{\phi_N^m + \phi_E^m + \phi_{NE}^m}{3}, \quad \phi \in \{T, u, v\}. \quad (42)$$

No caso da pressão, levando-se em conta a relação $p = p^* + p'$, tem-se

$$A_P^{p'} = 1, \quad \text{demais} \quad A^{p'} = 0, \quad b_P^{p'} = \frac{p_N^m + p_E^m + p_{NE}^m}{3} - \frac{p_N^* + p_E^* + p_{NE}^*}{3}. \quad (43)$$

2.6 Canto sudeste

No volume fictício do canto sudeste é feita a extrapolação

$$\phi_P = \frac{\phi_N + \phi_W + \phi_{NW}}{3} + \mathcal{O}(\Delta\xi) + \mathcal{O}(\Delta\eta), \quad \phi \in \{p, T, u, v\}, \quad (44)$$

de modo que os coeficientes dos sistemas lineares de T , u e v são dados por

$$A_P^\phi = 1, \quad \text{demais} \quad A^\phi = 0, \quad b_P^\phi = \frac{\phi_N^m + \phi_W^m + \phi_{NW}^m}{3}, \quad \phi \in \{T, u, v\}. \quad (45)$$

No caso da pressão, levando-se em conta a relação $p = p^* + p'$, tem-se

$$A_P^{p'} = 1, \quad \text{demais} \quad A^{p'} = 0, \quad b_P^{p'} = \frac{p_N^m + p_W^m + p_{NW}^m}{3} - \frac{p_N^* + p_W^* + p_{NW}^*}{3}. \quad (46)$$

2.7 Canto noroeste

No volume fictício do canto noroeste é feita a extrapolação

$$\phi_P = \frac{\phi_S + \phi_E + \phi_{SE}}{3} + \mathcal{O}(\Delta\xi) + \mathcal{O}(\Delta\eta), \quad \phi \in \{p, T, u, v\}, \quad (47)$$

de modo que os coeficientes dos sistemas lineares de T , u e v são dados por

$$A_P^\phi = 1, \quad \text{demais} \quad A^\phi = 0, \quad b_P^\phi = \frac{\phi_S^m + \phi_E^m + \phi_{SE}^m}{3}, \quad \phi \in \{T, u, v\}. \quad (48)$$

No caso da pressão, levando-se em conta a relação $p = p^* + p'$, tem-se

$$A_P^{p'} = 1, \quad \text{demais} \quad A^{p'} = 0, \quad b_P^{p'} = \frac{p_S^m + p_E^m + p_{SE}^m}{3} - \frac{p_S^* + p_E^* + p_{SE}^*}{3}. \quad (49)$$

2.8 Canto nordeste

No volume fictício do canto nordeste é feita a extrapolação

$$\phi_P = \frac{\phi_S + \phi_W + \phi_{SW}}{3} + \mathcal{O}(\Delta\xi) + \mathcal{O}(\Delta\eta), \quad \phi \in \{p, T, u, v\} \quad (50)$$

de modo que os coeficientes dos sistemas lineares de T , u e v são dados por

$$A_P^\phi = 1, \quad \text{demais} \quad A^\phi = 0, \quad b_P^\phi = \frac{\phi_S^m + \phi_W^m + \phi_{SW}^m}{3}, \quad \phi \in \{T, u, v\}. \quad (51)$$

No caso da pressão, levando-se em conta a relação $p = p^* + p'$, tem-se

$$A_P^{p'} = 1, \quad \text{demais} \quad A^{p'} = 0, \quad b_P^{p'} = \frac{p_S^m + p_W^m + p_{SW}^m}{3} - \frac{p_S^* + p_W^* + p_{SW}^*}{3}. \quad (52)$$

3 Implementações

A seguir são apresentadas as aproximações utilizadas no código base Mach2D-5.8.2.1-SVN-r112 (Branch: transient) e as modificações feitas neste código para eliminar as simplificações das condições de contorno.

3.1 Código base - SVN-112

O código base utiliza algumas simplificações das aproximações listadas na Seq. 2, utilizadas para garantir a convergência do processo iterativo. Estas simplificações são listadas abaixo.

3.1.1 Contorno sul

O termo

$$\frac{\beta_n}{\gamma_n} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_n^m \quad (53)$$

é desprezado nas Eqs. (22) e (23). Esta simplificação é correta somente para malhas ortogonais, caso em que $\beta_n = 0$.

Para determinar os coeficientes e termos fontes para os sistemas lineares de u e v , considera-se

$$u_n = u_N, \quad v_n = v_N, \quad (54)$$

que combinadas com as aproximações

$$u_n = \frac{u_P + u_N}{2}, \quad v_n = \frac{v_P + v_N}{2}, \quad (55)$$

levam a

$$A_P^u = 1, \quad A_N^u = -1, \quad \text{demais} \quad A^u = 0, \quad b_P^u = 0 \quad (56)$$

e

$$A_P^v = 1, \quad A_N^v = -1, \quad \text{demais} \quad A^v = 0, \quad b_P^v = 0. \quad (57)$$

Esta aproximação não garante que a velocidade do fluido sobre a parede seja tangente à parede.

3.1.2 Contorno leste

O termo

$$\frac{V_w}{U_w} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_w^m \quad (58)$$

é desprezado nas Eqs. (29) e (31). Esta simplificação é correta somente para o caso em que $V_w = 0$.

3.1.3 Contorno oeste

O termo

$$\frac{\beta_e}{\alpha_e} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_e^m \quad (59)$$

é desprezado nas Eqs. (37) e (38). Esta simplificação é correta somente para malhas ortogonais, caso em que $\beta_e = 0$.

3.2 SVN-113

Implementada a condição de contorno (23) para T no contorno sul, isto é,

$$A_P^T = \frac{1}{\Delta \eta}, \quad A_N^T = \frac{-1}{\Delta \eta}, \quad \text{demais} \quad A^T = 0, \quad b_P^T = -\frac{\beta_n}{\gamma_n} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_n^m, \quad (23)$$

considerando

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \right)_n = \frac{T_E + T_{NE} - T_W - T_{NW}}{4\Delta \xi}. \quad (60)$$

Esta aproximação envolve volumes fictícios e reais².

Para avaliar o efeito da alteração das CC no resultado final, algumas variáveis foram selecionadas: o coeficiente de arrasto invíscido frontal (variável global) e a máxima diferença entre os campos u , v , T e p da revisão atual e da anterior (variáveis locais). No caso das variáveis locais, também são apresentadas as coordenadas i e j da malha onde ocorreu a máxima diferença. Os resultados são apresentados a seguir.

²As extrapolações para os fictícios são feitas de modo consistente com as condições de contorno aplicadas em todas as revisões listadas neste relatório.

Cdfi
=====
7.852045220515882E-02 ...: SVN-112
7.852045220515882E-02 ...: SVN-113

Variáveis locais
=====

(reais)				SVN-112	SVN-113	dif. relativa(%)
var	i	j	np			
u	2	2	34	1.3353188681793949E+03	1.3353188681793949E+03	0.0E+00
v	2	2	34	1.9433319561331419E+02	1.9433319561331419E+02	0.0E+00
T	2	2	34	3.4944391904016413E+02	3.4944391904016413E+02	0.0E+00
p	2	2	34	1.7597348511392082E+05	1.7597348511392082E+05	0.0E+00

(fictícios)				SVN-112	SVN-113	dif. relativa(%)
var	i	j	np			
u	1	1	1	1.3353188681793949E+03	1.3353188681793949E+03	0.0E+00
v	1	1	1	1.2955546374220947E+02	1.2955546374220947E+02	0.0E+00
T	3	1	3	3.5278877286111225E+02	3.5285724655139489E+02	1.9E-02
p	1	1	1	1.7597348511392079E+05	1.7597348511392079E+05	0.0E+00

Destes resultados observa-se que a modificação da CC para a temperatura no contono sul não alterou o Cdfi e causou uma variação pequena no campo de temperatura somente nos volumes fictícios.

3.3 SVN-114

Implementada a condição de contorno (37) para T no contorno oeste, isto é,

$$A_P^\phi = \frac{1}{\Delta\xi}, \quad A_E^\phi = \frac{-1}{\Delta\xi}, \quad \text{demais } A^\phi = 0, \quad b_P^\phi = -\frac{\beta_e}{\alpha_e} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right)_e^m, \quad \phi \in \{T, u\}, \quad (37)$$

considerando

$$\left(\frac{\partial T}{\partial\eta} \right)_e = \frac{T_N + T_{NE} - T_S - T_{SE}}{4\Delta\eta}. \quad (61)$$

Esta aproximação envolve volumes reais e fictícios. **Com este esquema o programa divergiu.**

3.4 SVN-115

Para tentar contornar a divergência presente na revisão anterior, adotou-se o seguinte esquema numérico

$$\left(\frac{\partial T}{\partial\eta} \right)_e = \frac{-(T_{NN} + T_{NNE}) + 4(T_N + T_{NE}) - 3(T_P + T_E)}{4\Delta\eta}, \quad i = 1, \quad j = 2. \quad (62)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial\eta} \right)_e = \frac{T_N + T_{NE} - T_S - T_{SE}}{4\Delta\eta}, \quad i = 1, \quad 3 \leq j \leq n_y - 2. \quad (63)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial\eta} \right)_e = \frac{(T_{SS} + T_{SSE}) - 4(T_S + T_{SE}) + 3(T_P + T_E)}{4\Delta\eta}, \quad i = 1, \quad j = n_y - 1. \quad (64)$$

Esta aproximação envolve volumes reais e fictícios, exceto os volumes fictícios dos cantos. **Ainda assim o programa divergiu.**

3.5 SVN-116

Para tentar contornar a divergência presente na revisão anterior, adotou-se o seguinte esquema numérico

$$\left(\frac{\partial T}{\partial\eta} \right)_e = \frac{-T_{NNE} + 4T_{NE} - 3T_E}{2\Delta\eta}, \quad i = 1, \quad j = 2. \quad (65)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial\eta} \right)_e = \frac{T_{NE} - T_{SE}}{2\Delta\eta}, \quad i = 1, \quad 3 \leq j \leq n_y - 2. \quad (66)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial\eta} \right)_e = \frac{T_{SSE} - 4T_{SE} + 3T_E}{2\Delta\eta}, \quad i = 1, \quad j = n_y - 1. \quad (67)$$

Esta aproximação envolve apenas volumes reais. Neste caso o programa convergiu. Os resultados são apresentados a seguir.

Cdfi

====

7.852045220515882E-02 ...: SVN-112
7.852045220515882E-02 ...: SVN-113
7.852045220515882E-02 ...: SVN-116

Variáveis locais

=====

(reais)

var	i	j	np	SVN-113	SVN-116	dif. relativa(%)
u	2	2	34	1.3353188681793949E+03	1.3353188681793949E+03	0.0E+00
v	2	2	34	1.9433319561331419E+02	1.9433319561331419E+02	0.0E+00
T	2	2	34	3.4944391904016413E+02	3.4944391904016413E+02	0.0E+00
p	2	2	34	1.7597348511392082E+05	1.7597348511392082E+05	0.0E+00

(fictícios)

var	i	j	np	SVN-113	SVN-116	dif. relativa(%)
u	1	1	1	1.3353188681793949E+03	1.3353188681793949E+03	0.0E+00
v	1	1	1	1.2955546374220947E+02	1.2955546374220947E+02	0.0E+00
T	1	4	97	3.3427165714084174E+02	1.9034847487649870E+02	-4.3E+01
p	1	1	1	1.7597348511392079E+05	1.7597348511392079E+05	0.0E+00

Com os resultados das revisões 114-116, observa-se que o uso de volumes fictícios nas derivadas “cruzadas” pode levar à divergência. Além disso, a implementação desta revisão não alterou o Cdfi, mas causou uma variação de 43% no campo de temperatura nos volumes fictícios. Não houve variação dos campos nos volumes reais.

3.6 SVN-117

Implementada a condição de contorno (29) para a temperatura no contorno leste, isto é,

$$A_p^\phi = \frac{1}{\Delta\xi}, \quad A_w^\phi = \frac{-1}{\Delta\xi}, \quad \text{demais } A^\phi = 0, \quad b_p^\phi = -\frac{V_w}{U_w} \left(\frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right)_w^m, \quad \phi \in \{T, u, v\}, \quad (29)$$

onde se utilizou a aproximação

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_w = \frac{-T_{NNW} + 4T_{NW} - 3T_W}{2\Delta\eta}, \quad i = n_x, \quad j = 2. \quad (68)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_w = \frac{T_{NW} - T_{SW}}{2\Delta\eta}, \quad i = n_x, \quad 3 \leq j \leq n_y - 2. \quad (69)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_w = \frac{T_{SSW} - 4T_{SW} + 3T_W}{2\Delta\eta}, \quad i = n_x, \quad j = n_y - 1. \quad (70)$$

Cdfi

====

7.852045220515882E-02 ...: SVN-112
7.852045220515882E-02 ...: SVN-113
7.852045220515882E-02 ...: SVN-116
7.852045220515882E-02 ...: SVN-117

Variáveis locais

=====

(reais)

var	i	j	np	SVN-116	SVN-117	dif. relativa(%)
u	2	2	34	1.3353188681793949E+03	1.3353188681793949E+03	0.0E+00
v	2	2	34	1.9433319561331419E+02	1.9433319561331419E+02	0.0E+00
T	2	2	34	3.4944391904016413E+02	3.4944391904016413E+02	0.0E+00
p	2	2	34	1.7597348511392082E+05	1.7597348511392082E+05	0.0E+00

(fictícios)

var	i	j	np	SVN-116	SVN-117	dif. relativa(%)
u	1	1	1	1.3353188681793949E+03	1.3353188681793949E+03	0.0E+00
v	1	1	1	1.2955546374220947E+02	1.2955546374220947E+02	0.0E+00
T	32	8	256	3.3951998594577952E+02	3.4038849098401238E+02	2.6E-01
p	1	1	1	1.7597348511392079E+05	1.7597348511392079E+05	0.0E+00

A implementação desta revisão não alterou o Cdfi e causou uma variação menor que 0.5% no campo de temperatura. Não houve variação dos campos nos volumes reais.

3.7 SVN-118

Implementada a condição de contorno (22) para a pressão no contorno sul, isto é,

$$A_P' = \frac{1}{\Delta\eta}, \quad A_N' = \frac{-1}{\Delta\eta}, \quad \text{demais } A^{p'} = 0, \quad b_P' = \frac{p_N^* - p_P^*}{\Delta\eta} - \frac{\beta_n}{\gamma_n} \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_n^m, \quad (22)$$

onde as seguintes aproximações foram utilizadas

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_n = \frac{-p_{NEE} + 4p_{NE} - 3p_N}{2\Delta\xi}, \quad i = 2, \quad j = 1. \quad (71)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_n = \frac{p_{NE} - p_{NW}}{2\Delta\xi}, \quad 3 \leq i \leq n_x - 2, \quad j = 1. \quad (72)$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \right)_n = \frac{p_{NWW} - 4p_{NW} + 3p_W}{2\Delta\xi}, \quad i = n_x - 1, \quad j = 1. \quad (73)$$

Cdfi

====

7.852045220515882E-02 ...: SVN-112
7.852045220515882E-02 ...: SVN-113
7.852045220515882E-02 ...: SVN-116
7.852045220515882E-02 ...: SVN-117
7.852096563133239E-02 ...: SVN-118 (0.00065% dif. rel. com SVN-117)

Variáveis locais

=====

(reais)

var	i	j	np	SVN-117	SVN-118	dif. relativa(%)
u	2	2	34	1.3353188681793949E+03	1.3350771481225952E+03	-1.8E-02
v	2	2	34	1.9433319561331419E+02	1.9578299096697060E+02	7.5E-01
T	2	4	98	3.3427165714084174E+02	3.3423870266341299E+02	-9.9E-03
p	2	3	66	1.5924603902000125E+05	1.5918095311389668E+05	-4.1E-02

(fictícios)

var	i	j	np	SVN-117	SVN-118	dif. relativa(%)
u	1	1	1	1.3353188681793949E+03	1.3350771481225952E+03	-1.8E-02
v	2	1	2	1.9433319561331419E+02	1.9578299096697060E+02	7.5E-01
T	1	2	33	3.0956036506722785E+02	3.0965929545190789E+02	3.2E-02
p	2	1	2	1.7597348511392082E+05	1.7620442990888451E+05	1.3E-01

A implementação desta revisão causou uma pequena variação em Cdfi e alterou todos os campos u , v , T e p em menos de 1%.

3.8 SVN-119

Aplicada a condição de contorno (38) para a pressão no contorno oeste, isto é,

$$A_P' = \frac{1}{\Delta\xi}, \quad A_E' = \frac{-1}{\Delta\xi}, \quad \text{demais } A^{p'} = 0, \quad b_P' = \frac{p_E^* - p_P^*}{\Delta\xi} - \frac{\beta_e}{\alpha_e} \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)_e^m, \quad (38)$$

onde o esquema numérico para

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)_e$$

é o mesmo das Eqs. (65)-(67).

```

Cdfi
====
7.852045220515882E-02 ...: SVN-112
7.852045220515882E-02 ...: SVN-113
7.852045220515882E-02 ...: SVN-116
7.852045220515882E-02 ...: SVN-117
7.852096563133239E-02 ...: SVN-118 (0.00065% dif. rel. com SVN-117)
7.858219442491492E-02 ...: SVN-119 (0.07798% dif. rel. com SVN-118)

```

Variáveis locais

=====

(reais)

var	i	j	np	SVN-118	SVN-119	dif. relativa(%)
u	2	2	34	1.3350771481225952E+03	1.2963882327219831E+03	-2.9E+00
v	2	2	34	1.9578299096697060E+02	1.0135677676078242E+02	-4.8E+01
T	2	2	34	3.4941412101087769E+02	4.1332489444448618E+02	1.8E+01
p	2	2	34	1.7591111253577392E+05	2.4079364441019163E+05	3.7E+01

(fictícios)

var	i	j	np	SVN-118	SVN-119	dif. relativa(%)
u	1	1	1	1.3350771481225952E+03	1.2963882327219831E+03	-2.9E+00
v	2	1	2	1.9578299096697060E+02	1.0135677676078242E+02	-4.8E+01
T	1	2	33	3.0965929545190789E+02	-1.2062686460785085E+02	-1.4E+02
p	1	2	33	1.7591111253577392E+05	-8.0718621801848430E+05	-5.6E+02

A implementação desta revisão teve um impacto significativo sobre a variável global e sobre as variáveis locais. Além disso, obteve-se resultados errados (negativos) para p e T.

3.9 SVN-120

Implementada a condição de contorno (31) para a pressão no contorno leste, isto é,

$$A_p' = \frac{1}{\Delta\xi}, \quad A_w' = \frac{-1}{\Delta\xi}, \quad \text{demais } A_p' = 0, \quad b_p^\phi = -\frac{p_p^* - p_w^*}{\Delta\xi} - \frac{V_w}{U_w} \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)_w^m, \quad (31)$$

onde o esquema numérico para

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)_w$$

é o mesmo das Eqs. (68)-(70).

Cdfi

====

```

7.852045220515882E-02 ...: SVN-112
7.852045220515882E-02 ...: SVN-113
7.852045220515882E-02 ...: SVN-116
7.852045220515882E-02 ...: SVN-117
7.852096563133239E-02 ...: SVN-118 (0.00065% dif. rel. com SVN-117)
7.858219442491492E-02 ...: SVN-119 (0.07798% dif. rel. com SVN-118)
7.859913003663684E-02 ...: SVN-120 (0.02155% dif. rel. com SVN-119)

```

Variáveis locais

=====

(reais)

var	i	j	np	SVN-119	SVN-120	dif. relativa(%)
u	31	8	255	1.3550841558503598E+03	1.3541363458311107E+03	-7.0E-02
v	31	9	287	7.8621830321939186E+01	7.8890252785384945E+01	3.4E-01
T	31	8	255	3.3952642097223952E+02	3.4078532868424594E+02	3.7E-01
p	31	7	223	1.6336153085368659E+05	1.6399870782893314E+05	3.9E-01

(fictícios)

var	i	j	np	SVN-119	SVN-120	dif. relativa(%)
u	31	8	255	1.3550841558503598E+03	1.3541363458311107E+03	-7.0E-02
v	31	9	287	7.8621830321939186E+01	7.8890252785384945E+01	3.4E-01
T	31	8	255	3.3952642097223952E+02	3.4078532868424594E+02	3.7E-01
p	31	7	223	1.6336153085368659E+05	1.6399870782893314E+05	3.9E-01

u	32	8	256	1.3550841558503598E+03	1.3541363458311107E+03	-7.0E-02
v	32	9	288	7.8621830321939186E+01	7.8890252785384945E+01	3.4E-01
T	32	8	256	3.4039429587585391E+02	3.4166837248331444E+02	3.7E-01
p	32	7	224	1.6336153085368659E+05	1.6535555607900882E+05	1.2E+00

A implementação desta revisão produziu uma pequena variação tanto na variável global quanto nas locais.

3.10 SVN-121

A condição de contorno para o campo de velocidades no contorno sul é satisfeita através da relação

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u} = V_n = 0. \quad (25)$$

Como já apontado, a condição de contorno (25) é utilizada diretamente nas equações de transporte e não fornece uma fórmula para se determinar explicitamente u_n e v_n . Embora estas grandezas não influenciem na solução final, são necessárias para se definir os coeficientes dos sistemas lineares para u e v nos volumes fictícios do contorno sul. No código base (SVN-112) o problema foi parcialmente resolvido com a aproximação

$$u_n = u_N, \quad v_n = v_N. \quad (74)$$

Esta aproximação é desvantajosa porque não garante que o vetor velocidade do fluido sobre a parede seja tangencial à parede.

Para corrigir este problema, a seguinte proposta é utilizada. Uma vez que o contorno sul é uma linha de η constante e que o vetor velocidade do fluido sobre a parede deve ser tangencial à parede, é possível escrever

$$\mathbf{u}_n = u_n \hat{\mathbf{i}} + v_n \hat{\mathbf{j}} = \lambda (\mathbf{E}_\xi)_n, \quad (75)$$

onde \mathbf{E}_ξ é um vetor tangencial à linha de η constante, isto é,

$$\mathbf{E}_\xi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} = x_\xi \hat{\mathbf{i}} + y_\xi \hat{\mathbf{j}}, \quad (84)$$

e λ é uma constante a ser determinada.

Para determinar λ deve-se observar que, com o refino da malha,

$$\mathbf{u}_N \rightarrow \mathbf{u}_n, \quad (76)$$

o que também implica em

$$\|\mathbf{u}_N\| \rightarrow \|\mathbf{u}_n\|. \quad (77)$$

Combinando as Eqs. (76) e (77) à Eq. (75), obtém-se

$$\lambda \simeq \text{sgn}(\mathbf{u}_N \cdot (\mathbf{E}_\xi)_n) \sqrt{\frac{u_N^2 + v_N^2}{(x_\xi)_n^2 + (y_\xi)_n^2}}. \quad (78)$$

Deste modo

$$u_n = \frac{u_P + u_N}{2} = \lambda (x_\xi)_n \quad (79)$$

e

$$v_n = \frac{v_P + v_N}{2} = \lambda (y_\xi)_n. \quad (80)$$

Com base nas Eqs. (79) e (80), os coeficientes e fontes dos sistemas lineares para u e v no contorno sul ficam

$$A_P^u = 1, \quad A_N^u = 1, \quad \text{demais} \quad A^u = 0, \quad b_P^u = 2\lambda (x_\xi)_n \quad (81)$$

e

$$A_P^v = 1, \quad A_N^v = 1, \quad \text{demais} \quad A^v = 0, \quad b_P^v = 2\lambda (y_\xi)_n. \quad (82)$$

As aproximações (81) e (82) levam às condições de contorno exatas com o refino da malha.

Cdfi

====

7.852045220515882E-02 ... : SVN-112
7.852045220515882E-02 ... : SVN-113
7.852045220515882E-02 ... : SVN-116
7.852045220515882E-02 ... : SVN-117

7.852096563133239E-02 ...: SVN-118 (0.00065% dif. rel. com SVN-117)
 7.858219442491492E-02 ...: SVN-119 (0.07798% dif. rel. com SVN-118)
 7.859913003663684E-02 ...: SVN-120 (0.02155% dif. rel. com SVN-119)
 7.859913003663684E-02 ...: SVN-121

Variáveis locais

=====

(reais)

var	i	j	np	SVN-120	SVN-121	dif. relativa(%)
u	2	2	34	1.2963882327219835E+03	1.2963882327219835E+03	0.0E+00
v	2	2	34	1.0135677676078259E+02	1.0135677676078259E+02	0.0E+00
T	2	2	34	4.1332489444448612E+02	4.1332489444448612E+02	0.0E+00
p	2	2	34	2.4079364441019174E+05	2.4079364441019174E+05	0.0E+00

(fictícios)

var	i	j	np	SVN-120	SVN-121	dif. relativa(%)
u	2	1	2	1.2963882327219835E+03	1.2805892798488878E+03	-1.2E+00
v	2	1	2	1.0135677676078259E+02	2.2580244124337833E+02	1.2E+02
T	1	1	1	2.3797636826628013E+02	2.3797636826628013E+02	0.0E+00
p	1	1	1	-1.0904887105697706E+05	-1.0904887105697706E+05	-0.0E+00

A implementação desta revisão, como previsto, não alterou Cdf, nem os campos de pressão e temperatura. As variações apareceram nos volumes fictícios do contorno sul para *u* e *v*.

3.11 SVN-123

As condições de contorno para *u* e *v* no contorno leste foram implementadas com o mesmo esquema utilizado para a temperatura (SVN-117) neste contorno.

Cdfi

====

7.852045220515882E-02 ...: SVN-112
 7.852045220515882E-02 ...: SVN-113
 7.852045220515882E-02 ...: SVN-116
 7.852045220515882E-02 ...: SVN-117
 7.852096563133239E-02 ...: SVN-118 (0.00065% dif. rel. com SVN-117)
 7.858219442491492E-02 ...: SVN-119 (0.07798% dif. rel. com SVN-118)
 7.859913003663684E-02 ...: SVN-120 (0.02155% dif. rel. com SVN-119)
 7.859913003663684E-02 ...: SVN-121
 7.860480580291811E-02 ...: SVN-123 (0.00722% dif. rel. com SVN-121)

Variáveis locais

=====

(reais)

var	i	j	np	SVN-121	SVN-123	dif. relativa(%)
u	31	8	255	1.3541363458311107E+03	1.3540398347328014E+03	-7.1E-03
v	31	9	287	7.8890252785384945E+01	7.8960798071167517E+01	8.9E-02
T	31	8	255	3.4078532868424594E+02	3.4091011813551313E+02	3.7E-02
p	31	7	223	1.6399870782893314E+05	1.6416372951973692E+05	1.0E-01

(fictícios)

var	i	j	np	SVN-121	SVN-123	dif. relativa(%)
u	32	8	256	1.3541363458311107E+03	1.3531412737130770E+03	-7.3E-02
v	32	7	224	1.3375619506241711E+02	1.3650473880925924E+02	2.1E+00
T	32	8	256	3.4166837248331444E+02	3.4181696148045432E+02	4.3E-02
p	32	7	224	1.6535555607900882E+05	1.6554873844827956E+05	1.2E-01

A implementação desta revisão produziu uma pequena variação tanto na variável global quanto nas locais.

3.12 SVN-124

As condições de contorno para *u* no contorno oeste foram implementadas com o mesmo esquema utilizado para a temperatura (SVN-116) neste contorno.

```

Cdfi
====
7.852045220515882E-02 ...: SVN-112
7.852045220515882E-02 ...: SVN-113
7.852045220515882E-02 ...: SVN-116
7.852045220515882E-02 ...: SVN-117
7.852096563133239E-02 ...: SVN-118 (0.00065% dif. rel. com SVN-117)
7.858219442491492E-02 ...: SVN-119 (0.07798% dif. rel. com SVN-118)
7.859913003663684E-02 ...: SVN-120 (0.02155% dif. rel. com SVN-119)
7.859913003663684E-02 ...: SVN-121
7.860480580291811E-02 ...: SVN-123 (0.00722% dif. rel. com SVN-121)
7.860480580291811E-02 ...: SVN-124

```

Variáveis locais

```
=====
```

(reais)

var	i	j	np	SVN-123	SVN-124	dif. relativa(%)
u	2	2	34	1.2963882327219828E+03	1.2963882327219828E+03	0.0E+00
v	2	2	34	1.0135677676078235E+02	1.0135677676078235E+02	0.0E+00
T	2	2	34	4.1332489444448612E+02	4.1332489444448612E+02	0.0E+00
p	2	2	34	2.4079364441019148E+05	2.4079364441019148E+05	0.0E+00

(fictícios)

var	i	j	np	SVN-123	SVN-124	dif. relativa(%)
u	1	3	65	1.3234811541042977E+03	1.7391284967138693E+03	3.1E+01
v	1	1	1	1.0905307266805352E+02	1.0905307266805352E+02	0.0E+00
T	1	1	1	2.3797636826628013E+02	2.3797636826628013E+02	0.0E+00
p	1	1	1	-1.0904887105697735E+05	-1.0904887105697735E+05	-0.0E+00

A implementação desta revisão produziu uma variação significativa em u nos volumes fictícios. As demais variáveis se mantiveram inalteradas.

4 Conclusões

1. A aplicação das condições de contorno exatas para o campo de temperatura em todos os contornos não teve efeito sobre Cdfi, pois somente o campo de temperatura nos volumes fictícios foi alterado. Tudo se passou como se houvesse um desacoplamento entre o campo de temperatura e os demais campos.
2. A aplicação das condições de contorno exatas para o campo de pressão em todos os contornos teve efeito sobre todas as variáveis. Particularmente o contorno oeste necessita de um tratamento especial, pois o esquema numérico aplicado levou a valores negativos para p e T .
3. A aplicação das condições de contorno exatas para u e v no contorno sul não alterou os campos de pressão e temperatura. De fato, o esquema para o cálculo de u e v no contorno sul altera apenas o valor destas variáveis nos nós dos volumes fictícios deste contorno, desde que $V = 0$.
4. O uso de volumes fictícios para o cálculo de derivadas “cruzadas” pode levar à divergências.

A Propriedades geométricas no sistema $\xi\eta$

Seja \mathbf{r} o vetor posição de um ponto cujas coordenadas são (x, y) . Em termos dos vetores unitários \mathbf{i} e \mathbf{j} , nas direções do eixo x e y , respectivamente, e lembrando que $x = x(\xi, \eta)$ e $y = y(\xi, \eta)$, o vetor posição é dado por

$$\mathbf{r} = x(\xi, \eta)\mathbf{i} + y(\xi, \eta)\mathbf{j}. \quad (83)$$

Com base na Eq. (83), os vetores \mathbf{E}_ξ e \mathbf{E}_η , tangentes às linhas de η e ξ constantes, respectivamente, são dados por

$$\mathbf{E}_\xi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} = x_\xi \mathbf{i} + y_\xi \mathbf{j}, \quad (84)$$

$$\mathbf{E}_\eta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} = x_\eta \mathbf{i} + y_\eta \mathbf{j}. \quad (85)$$

Por outro lado, os vetores \mathbf{E}^ξ e \mathbf{E}^η , normais às linhas de ξ e η constantes, respectivamente, são dados por

$$\mathbf{E}^\xi = \nabla \xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \mathbf{j} = J(y_\eta \mathbf{i} - x_\eta \mathbf{j}), \quad (86)$$

$$\mathbf{E}^\eta = \nabla \eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \mathbf{j} = J(-y_\xi \mathbf{i} + x_\xi \mathbf{j}), \quad (87)$$

onde foram usadas as relações de transformação[1]

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = J y_\eta, \quad (88)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = -J x_\eta, \quad (89)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -J y_\xi, \quad (90)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = J x_\xi, \quad (91)$$

lembrando que J é o jacobiano da transformação

$$J = [x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi]^{-1}.$$

O produto interno entre os vetores das eqs. (84) e (87) satisfazem às seguintes propriedades

$$\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}^j = \delta_i^j, \quad \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j = g_{ij}, \quad \mathbf{E}^i \cdot \mathbf{E}^j = g^{ij}, \quad (92)$$

onde

$$g_{\xi\xi} = \gamma = x_\xi^2 + y_\xi^2, \quad (93)$$

$$g_{\xi\eta} = \beta = g_{\eta\xi} = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta, \quad (94)$$

$$g_{\eta\eta} = \alpha = x_\eta^2 + y_\eta^2 \quad (95)$$

e

$$g^{\xi\xi} = J^2 \alpha = J^2 (x_\eta^2 + y_\eta^2), \quad (96)$$

$$g^{\xi\eta} = -J^2 \beta = g^{\eta\xi} = -J^2 (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta), \quad (97)$$

$$g^{\eta\eta} = J^2 \gamma = J^2 (x_\xi^2 + y_\xi^2). \quad (98)$$

No sistema coordenado $\xi\eta$, o gradiente de uma função $\phi(\xi, \eta)$ fica

$$\nabla \phi = \mathbf{E}^\xi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \mathbf{E}^\eta \frac{\partial \phi}{\partial \eta}. \quad (99)$$

Referências

- [1] C R Maliska. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional*. LTC, Rio de Janeiro, 2 edition, 2004.