NÚMEROS E FUNÇÕES COMPLEXAS

CONTEXTUALIZAÇÃO

Números complexos ocorrem frequentemente na análise de vibrações, vindos da solução de equações diferenciais através de suas equações características.

Em particular, a solução homogênea de um sistema de um grau de liberdade é dependente dos valores de λ, satisfazendo a equação algébrica

$$\mathrm{m}\lambda^2 + \mathrm{c}\lambda + \mathrm{k} = 0 \tag{A.1}$$

Esta é uma equação quadrática familiar, que tem como solução

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4mk} \tag{A.2}$$

As raízes dadas pela Eq. (A.2) serão complexas se $c^2 - 4mk < 0$ (radicando negativo), o que corresponde ao caso de amortecimento subcrítico.

CONTEXTUALIZAÇÃO (cont.)

Defina-se, então, simbolicamente

$$\mathrm{i} = \sqrt{-1} \tag{A.3}$$

de modo que

$$\mathrm{i}^2 = -1 \tag{A.4}$$

Assim, tem-se que

$$\sqrt{\mathrm{c}^2 - 4\mathrm{mk}} = \sqrt{(-1)(4\mathrm{mk} - \mathrm{c}^2)} = \sqrt{\mathrm{i}^2(4\mathrm{mk} - \mathrm{c}^2)} = \mathrm{i}\sqrt{4\mathrm{mk} - \mathrm{c}^2} \tag{A.5}$$

onde $\sqrt{4\mathrm{mk} - \mathrm{c}^2} > 0$.

Esta representação permite que as duas raízes da Eq. (A.1) sejam dadas por

$$-\frac{c}{2m} - \mathrm{i}\frac{1}{2m}\sqrt{4mk - c^2} \quad e \quad -\frac{c}{2m} + \mathrm{i}\frac{1}{2m}\sqrt{4mk - c^2} \tag{A.6}$$

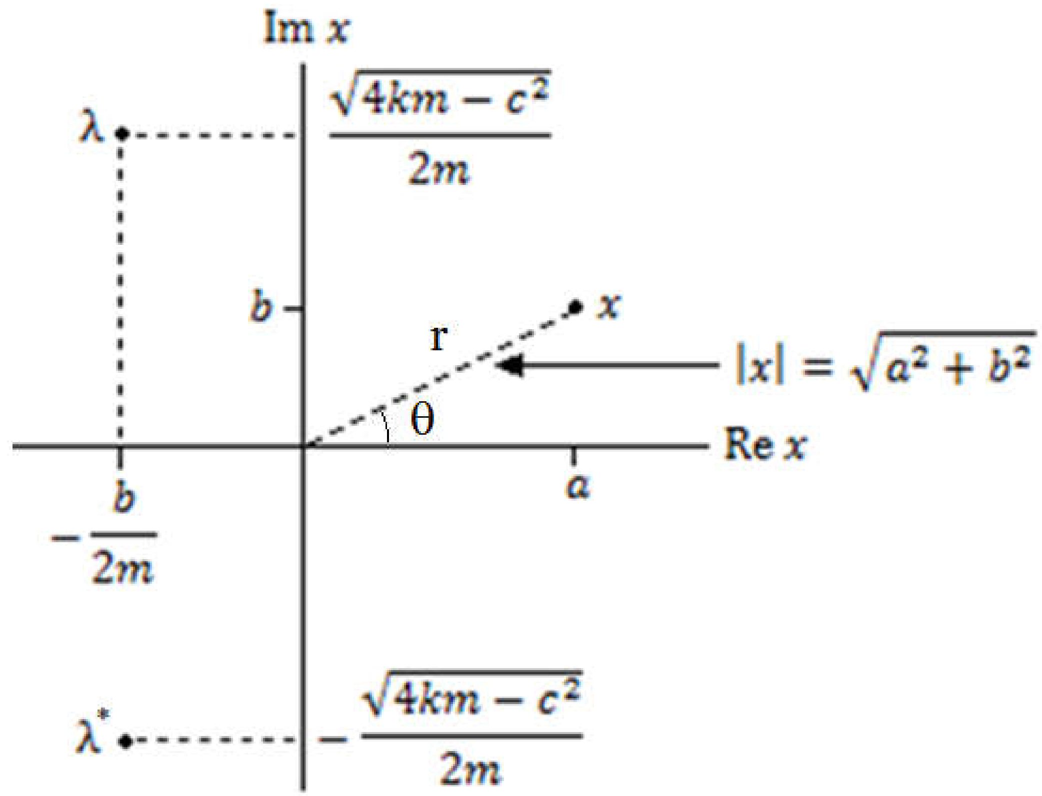
NOTAÇÃO E REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Um **número complexo** qualquer **x** pode ser escrito como $\boxed{x = a + ib}$.

O **número real a** é a **parte real** de x, enquanto o **número real b** é a **parte imaginária** de x.

Usa-se Re x para indicar a parte real (Re x = a) e Im x para a parte imaginária (Im x = b).

Os números complexos podem ser representados no plano como ilustrado na Fig. A.1, ao lado.



Essa representação é denominada **diagrama de Argand**.

NOTAÇÃO E REPRESENTAÇÃO GRÁFICA (cont.)

Os números complexos a + ib e a – ib são chamados, entre si, de **conjugados**.

A notação x^* é usada para denotar o conjugado de um número complexo x. Isto é,

$$\text{se } x = a + ib, \text{ então } x^* = a - ib.$$

As raízes da Eq. (A.1) aparecem como um par de números complexos conjugados, como se vê na Eq. (A.6) (caso de amortecimento subcrítico).

Outras propriedades dos números complexos são o seu **módulo**, indicado por $|x|$, e o seu **argumento**, indicado por arg(x). Eles são tais que

$$|x| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{A.7}$$

$$\arg(x) = \theta = \arctan(b/a) \tag{A.8}$$

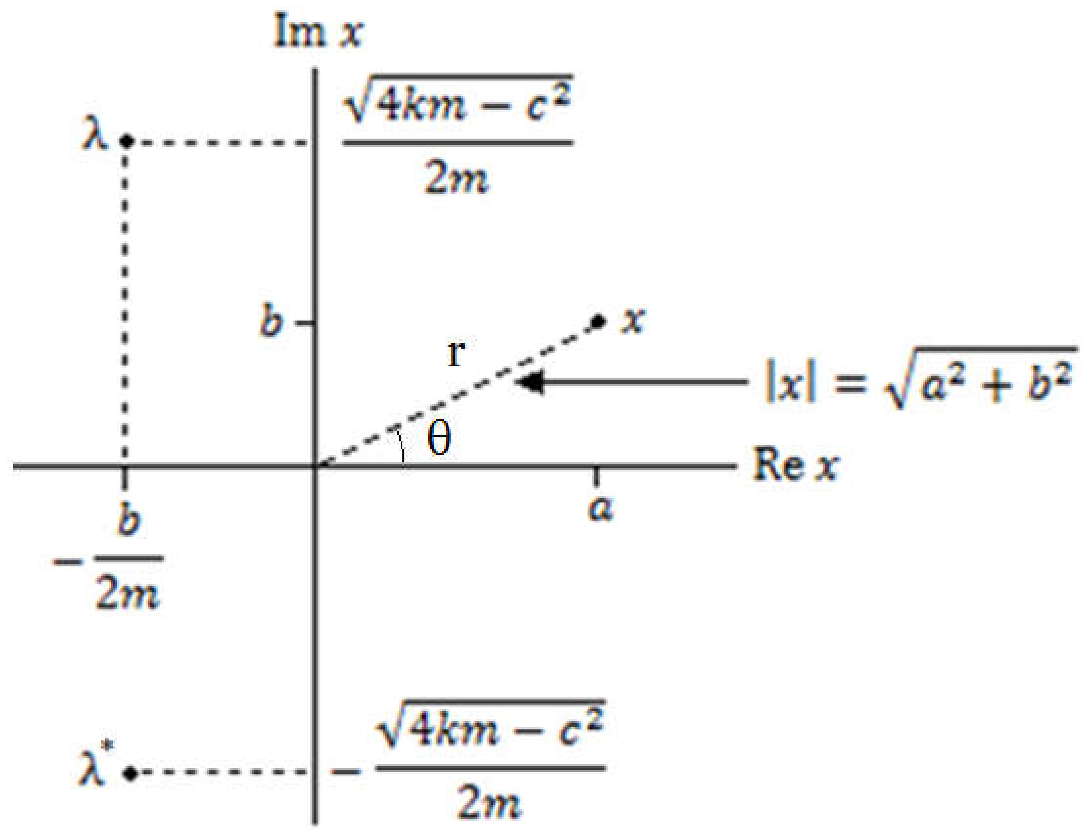
NOTAÇÃO E REPRESENTAÇÃO GRÁFICA (cont.)

O módulo de um número complexo é, na Fig. A.1, a distância r da origem até o ponto associado a x. Já o argumento é o ângulo θ cuja tangente é (b/a).

Nota-se, na Fig. A.1, que os conjugados aparecem na mesma linha vertical, pois possuem a mesma parte real.

Nota-se também que eles possuem o mesmo módulo $|x|$.

Por vezes, um número complexo x é denotado por $\overline{x}$, para realçar sua condição.



MANIPULAÇÃO

Números complexos são manipulados de forma específica, usando a aritmética de números reais e seguindo regras similares às empregadas para vetores.

A **adição de dois números complexos** é definida simplesmente pela adição das partes reais e das partes imaginárias correspondentes, como entidades separadas.

Em particular, se $x = a + ib$ e $y = c + id$, então

$$x + y = (a + c) + i(b + d) \tag{A.9}$$

De maneira consistente, sendo β um número real, então

$$\beta x = \beta a + i\beta b \tag{A.10}$$

expressa o **produto de um número real por um número complexo**.

MANIPULAÇÃO (cont.)

A **multiplicação de dois números complexos** é tal que, para os números complexos genéricos x e y definidos anteriormente, tem-se que

$$x.y = (a + ib).(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc) \qquad (A.11)$$

onde se usa a definição de que (β) vezes (i), com β real, é igual a iβ.

Assim sendo, Re xy = (ac – bc) e Im xy = (ad + bc).

O produto de x com seu conjugado x^* se torna um número real, uma vez que

$$x.x^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

Isso pode ser ligado à definição do módulo de x, dada pela Eq. (A.7), posto que

$$|x|^2 = a^2 + b^2 = x.x^* \qquad (A.12)$$

que, como já se viu, é um número real.

MANIPULAÇÃO (cont.)

Com a adição (e, consequentemente, a subtração) e a multiplicação definidas, é importante definir a divisão de um número complexo por outro.

Primeiro, nota-se que a **identidade multiplicativa** de um número complexo é simplesmente o número real 1 (ou seja, $1x = x$, para todo número complexo x). Já o **inverso de um número complexo** $x = a + ib$ é dado por

$$(a+ib)^{-1} = \frac{1}{(a+ib)} = \frac{(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{(a-ib)}{a^2+b^2} \tag{A.13}$$

sendo $x = a + ib \neq 0$.

Observa-se que

$$(a+ib)^{-1}(a+ib) = \frac{(a-ib)}{a^2+b^2}(a+ib) = 1 \ .$$

MANIPULAÇÃO (cont.)

A equação (A.13) permite a formulação da **divisão de dois números complexos**. Para tanto, considere-se a divisão de y por x, tal que

$$\frac{y}{x} = \frac{c + id}{a + ib} = (c + id)(a + ib)^{-1} \tag{A.14}$$

Da Eq. (A.13) para a inversa de x, tem-se que

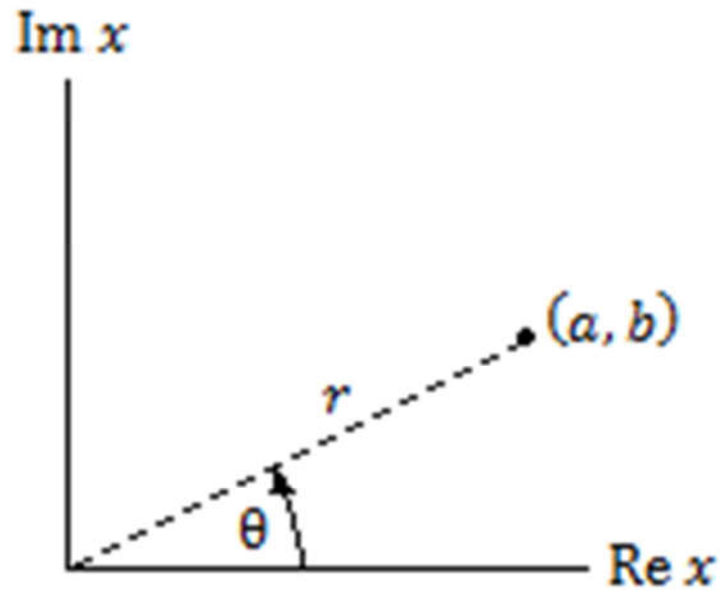
$$\frac{y}{x} = (c + id)\frac{(a - ib)}{a^2 + b^2} = \frac{1}{a^2 + b^2}\left[(ac + bd) + i(ad - cb)\right] \tag{A.15}$$

para $x \neq 0$.

Observa-se que $x = 0$ se e somente se $a = b = 0$.

FORMA POLAR

Um **número complexo x** pode também ser representado em **coordenadas polares**, como ilustrado na Fig. A.2, ao lado.



Nela, **r** é o **módulo** e **θ** é o **argumento** de x.

Como $r = |x| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\theta = \arctan(b/a)$,

o número complexo x pode ser escrito como

$$x = a + ib = (r\cos\theta) + i(r\mathrm{sen}\theta) = r(\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta) = re^{i\theta} \qquad \text{(A.16)}$$

em que

$$e^{i\theta} = (\cos\theta + i\mathrm{sen}\theta) \qquad \text{(A.17)}$$

FORMA POLAR (cont.)

A partir da equação (A.17), pode-se mostrar que

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \qquad (A.18) \qquad e \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) \qquad (A.19)$$

Essas equações são referidas como **fórmulas de Euler**.

Essas fórmulas, para funções trigonométricas, podem ser comparadas com as fórmulas correspondentes para funções hiperbólicas, que são

$$\cosh\theta = \frac{1}{2}\left(e^{\theta} + e^{-\theta}\right) \qquad (A.20) \qquad e \qquad \operatorname{senh}\theta = \frac{1}{2}\left(e^{\theta} - e^{-\theta}\right) \qquad (A.21)$$

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEIS COMPLEXAS

A formulação algébrica acima exposta para números complexos pode ser estendida para funções reais de variáveis complexas, funções complexas de variáveis reais e funções complexas de variáveis complexas.

Um exemplo de função real de variável complexa é dada pela Eq. (A.7), em que

$$f(x) = |x| = \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Essa é uma **função real de variável complexa** porque x é complexa e f(x), que é o módulo de x, é real.

Outro exemplo e dado pela Eq. (A.8), qual seja,

$$\arg(x) = \theta = \arctan\left(b/a\right).$$

Essa função corresponde ao argumento de x.

FUNÇÕES COMPLEXAS DE VARIÁVEIS REAIS

Em vibrações, lida-se corriqueiramente com **funções complexas** cuja **variável** independente é **real**.

Se x, agora, for uma variável real e f(x) tomar valores complexos, então f(x) poderá ser, de forma geral, expressa por

$$f(x) = u(x) + iv(x) \qquad (A.22)$$

onde u(x) e v(x) são funções reais.

A função conjugada será

$$f^*(x) = u(x) - iv(x) \qquad (A.23)$$

A multiplicação de funções complexas segue o padrão dado pela equação (A.11) para números complexos.

FUNÇÕES COMPLEXAS DE VARIÁVEIS REAIS (cont.)

E assim todas as fórmulas desenvolvidas anteriormente para números complexos se aplicam para funções complexas.

Em particular,

$$|f(x)| = \sqrt{f(x)f^*(x)} = \sqrt{u^2(x) + v^2(x)} \tag{A.24}$$

e, para valores de x em que f(x) ≠ 0,

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{u^2(x) + v^2(x)}\left[u(x) - iv(x)\right] \tag{A.25}$$

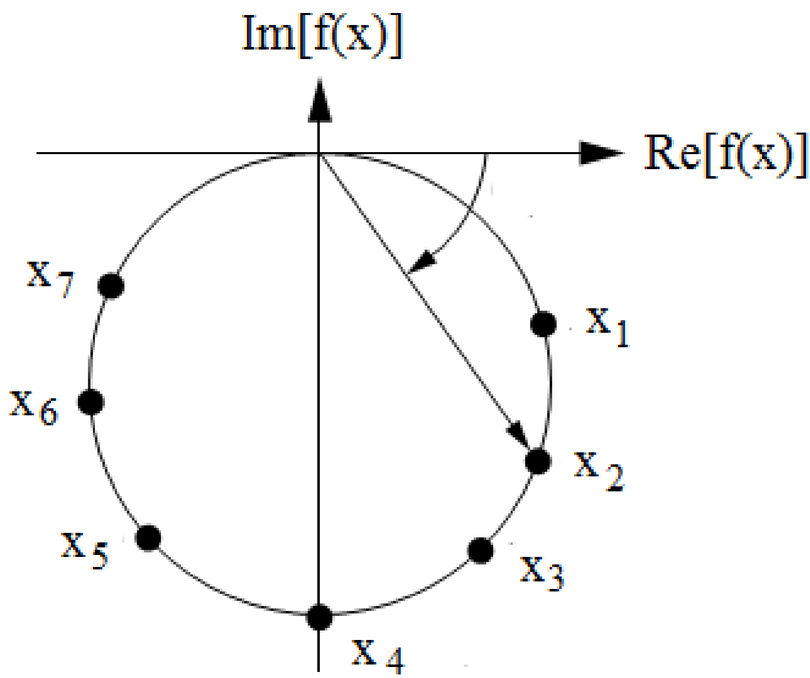
satisfazendo a relação

$$f(x)\left[\frac{1}{f(x)}\right] = 1.$$

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE FUNÇÕES COMPLEXAS

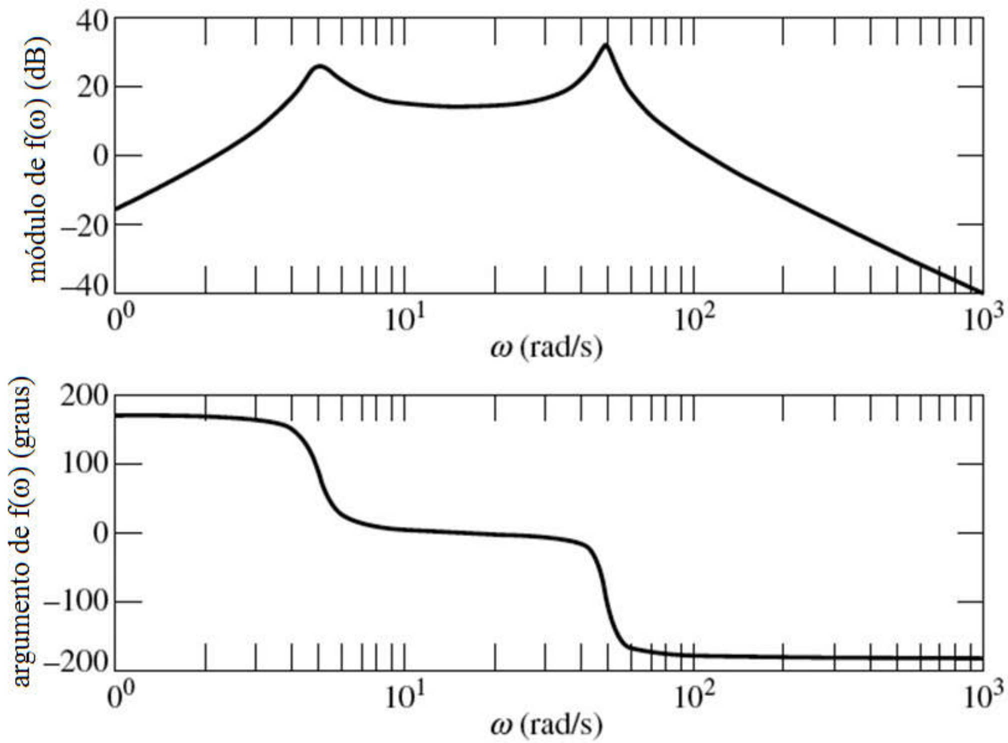
Há representações gráficas de funções complexas de variáveis reais que são frequentemente utilizadas na análise de vibrações.

Uma dessas é traçar u(x) por v(x), como ilustrado na Fig. A.3 abaixo, para diferentes valores da variável real x. Esse gráfico é dito um **gráfico de Nyquist**.



REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE FUNÇÕES COMPLEXAS (cont.)

Outra representação é examinar separadamente o módulo $\sqrt{u^2(x)+v^2(x)}$ e o argumento $\arctan\left[v(x)/u(x)\right]$, em função de x, como ilustrado na Fig. A.4 abaixo. Esses gráficos são denominados **diagramas de Bode**.



FUNÇÕES COMPLEXAS DE VARIÁVEIS COMPLEXAS

Em geral, uma **função de variável complexa** também será **complexa**. Uma teoria de limites, diferenciação e integração pode ser definida, seguindo, com algumas precauções, as mesmas linhas das funções de variáveis reais.

A maior diferença é que as partes real e imaginária da função complexa devem ter derivadas contínuas de todas as ordens no ponto determinado, mas a função em si pode não ser derivável. É necessário cuidado no cálculo de funções complexas.

Todas as **expressões** desenvolvidas anteriormente **para números complexos** também **se aplicam para funções complexas da variável complexa**.

A representação gráfica dessas funções se torna difícil, pois tanto o argumento quanto a função requerem duas dimensões. Contudo, as representações vistas acima para funções complexas da variável real também são empregadas aqui.