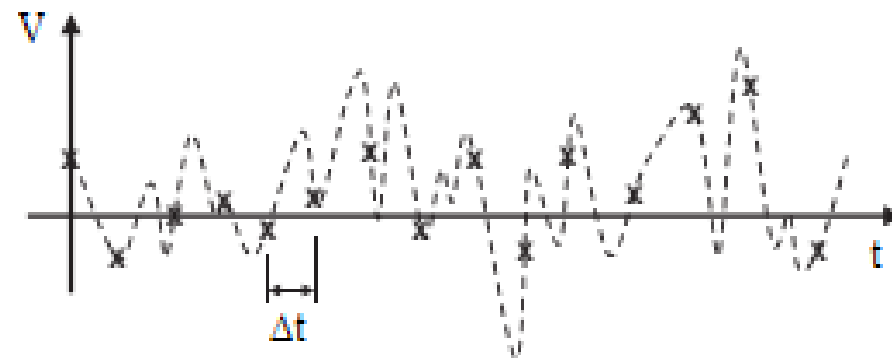


AMOSTRAGEM, “ALIASING” E JANELAMENTO

AMOSTRAGEM

Os sinais de interesse são, via de regra, adquiridos em forma contínua e processados em forma discreta. Os **valores discretos** de um sinal são obtidos por um processo dito **amostragem**.



Sinal amostrado (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

Assim, a **transformada de Fourier** de um sinal é computada pela via numérica, usando valores amostrados de sua forma contínua. Espera-se que a **versão discreta** da transformada **assemelhe-se** à **versão analítica**, de modo a representar as características em frequência do sinal adquirido, dentro da faixa pertinente.

Porém, face à amostragem, há diferenças fundamentais entre essas duas versões.

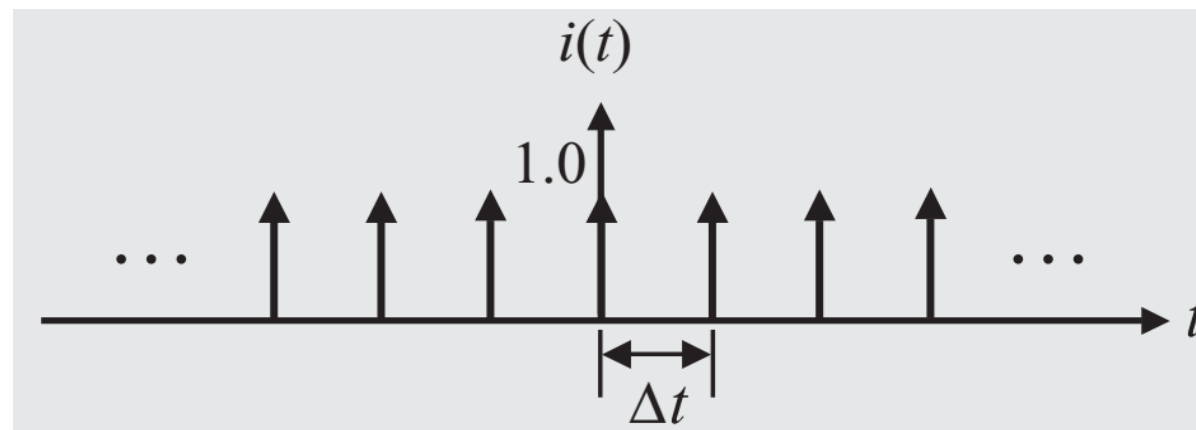
AMOSTRAGEM (cont.)

Para entender essas diferenças, considere-se um “trem” de funções generalizadas delta de Dirac $i(t)$, expresso por

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) \quad (1)$$

onde Δt é o intervalo de tempo entre as funções, dito **intervalo de amostragem**.

Esse trem de funções delta é ilustrado na figura abaixo.



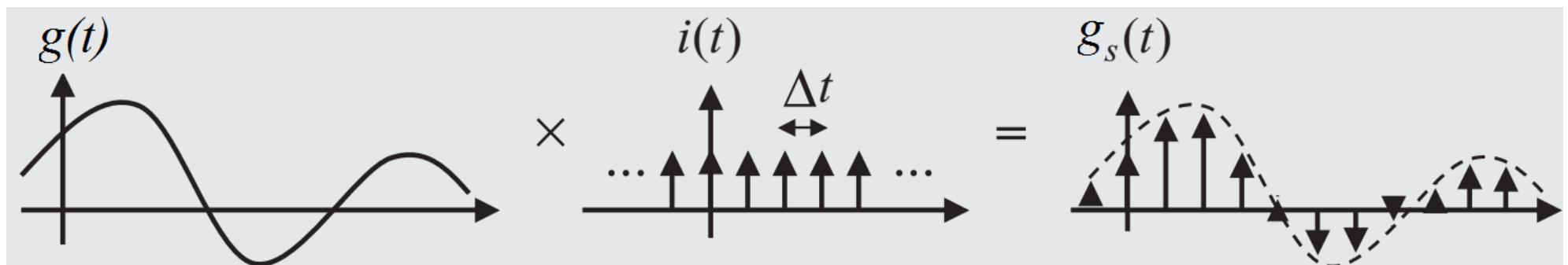
Trem de funções delta de Dirac (©Wiley, Shin&Hammond,2008)

AMOSTRAGEM (cont.)

Um sinal contínuo genérico $g(t)$, uma vez amostrado de forma uniforme (ou seja, com Δt constante), gera um sinal $g_s(t)$, que pode ser modelado matematicamente de forma tal que

$$g_s(t) = g(t) \cdot i(t) \quad (2)$$

Em decorrência, nota-se que $g_s(t)$ também é um trem de funções delta de Dirac, porém, com intensidades distintas, como ilustrado abaixo.



Representação de um sinal amostrado (©Wiley, Shin&Hammond,2008)

INTERVALO E FREQUÊNCIA DE AMOSTRAGEM

O inverso do intervalo de amostragem Δt é dito **frequência de amostragem** e indicado por f_s , de forma que

$$f_s = \frac{1}{\Delta t} \quad (3)$$

A frequência de amostragem fornece o **número de amostras por unidade de tempo**. Sua escolha, como se verá adiante, é uma decisão de importância crucial.

Se o intervalo de amostragem é constante (amostragem uniforme), a frequência de amostragem também será.

Será abordado, na sequência, o que ocorre com a **transformada de Fourier** de um **sinal amostrado**, tal como modelado acima. Salienta-se que a **frequência**, que **ainda varia de modo contínuo**, será agora considerada **em Hz**.

TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNÇÃO AMOSTRADA

A **transformada de Fourier** de $g_s(t)$, que veio de um sinal $g(t)$ genérico, é

$$\bar{G}_s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g_s(t) e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [g(t) i(t)] e^{-i2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) \right] e^{-i2\pi ft} dt$$

Manipulando a última expressão acima, tem-se que

$$\bar{G}_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [g(t) e^{-i2\pi ft}] \delta(t - n\Delta t) dt$$

donde resulta, por uma propriedade da função delta de Dirac, que

$$\bar{G}_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n\Delta t) e^{-i2\pi f(n\Delta t)} \quad (4)$$

Prova-se que $\bar{G}_s(f)$ é **periódica na frequência**, com período f_s , que é $1/\Delta t$.

TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNÇÃO AMOSTRADA (cont.)

Para tanto, seja

$$\bar{G}_s(f + f_s) = \bar{G}_s\left(f + \frac{1}{\Delta t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n\Delta t) e^{-i2\pi\left(f + \frac{1}{\Delta t}\right)n\Delta t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n\Delta t) e^{-i2\pi f n \Delta t} e^{-i2\pi\left(\frac{1}{\Delta t}\right)n\Delta t}$$

Ao cancelar Δt no último termo exponencial, tem-se que

$$\bar{G}_s\left(f + \frac{1}{\Delta t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n\Delta t) e^{-i.2\pi.f.n\Delta t} e^{-i.2\pi.n}$$

Como $e^{-i.2\pi.n} = \cos[n(2\pi)] - i\text{sen}[n(2\pi)] = 1$, resulta que

$$\bar{G}_s(f + f_s) = \bar{G}_s\left(f + \frac{1}{\Delta t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n\Delta t) e^{-i2\pi f n \Delta t} = \bar{G}_s(f) \quad (5)$$

Ou seja, a transformada de Fourier de uma função amostrada é periódica.

TRANSFORMADA DE FOURIER DE UM TREM DE FUNÇÕES DELTA

O trem de funções delta de Dirac $i(t)$ pode ser entendido como um sinal periódico, com período Δt e frequência f_s . Assim, na forma complexa da série de Fourier,

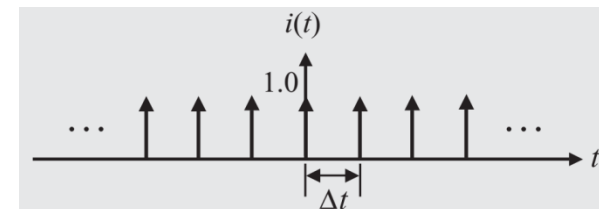
$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{I}_n e^{i\left(\frac{2\pi n}{\Delta t}\right)t} \quad (6) \quad \left[x(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{X}_j e^{i(\omega_j)t} ; \bar{X}_j = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i(\omega_j)t} dt \right]$$

onde

$$\bar{I}_n = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} i(t) e^{-i\frac{2\pi n}{\Delta t}t} dt = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) \right] e^{-i\frac{2\pi n}{\Delta t}t} dt$$

Manipulando essa última expressão e recordando a definição de $\delta(t)$, tem-se que

$$\bar{I}_n = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} e^{-i\frac{2\pi n}{\Delta t}t} \delta(t - n\Delta t) dt = \frac{1}{\Delta t} \quad (7)$$



TRANSF. DE FOURIER DE UM TREM DE FUNÇÕES DELTA (cont.)

Dessa forma, o trem de funções delta de Dirac $i(t)$ pode ser representado por

$$i(t) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi n}{\Delta t}t} \quad (8)$$

A transformada de Fourier de $i(t)$ será dada, então, por

$$\bar{I}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} i(t)e^{-i2\pi f \cdot t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi n}{\Delta t}t} \right] e^{-i2\pi ft} dt = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi n}{\Delta t}t} e^{-i2\pi ft} dt$$

Como, pela descrição alternativa da função delta, tem-se que

$$\delta(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i2\pi\sigma t} dt,$$

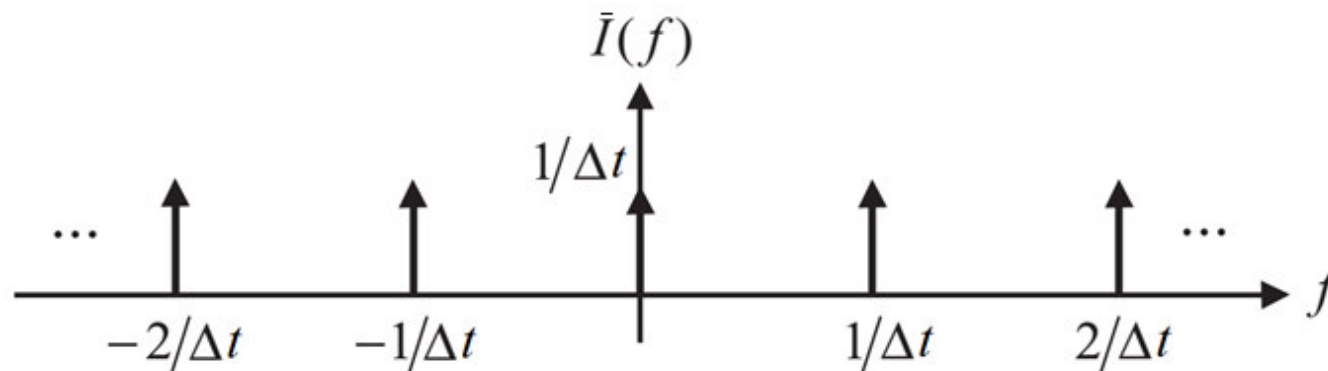
pode-se manipular a última expressão de $\bar{I}(f)$, para elucidá-la.

TRANSF. DE FOURIER DE UM TREM DE FUNÇÕES DELTA (cont.)

Através dessa manipulação, decorre que

$$\bar{I}(f) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\left(f - \frac{n}{\Delta t}\right)t} dt = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{\Delta t}\right) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s) \quad (9)$$

Ou seja, a **transformada de Fourier de um trem de funções delta de Dirac no tempo** também é um **trem de funções delta de Dirac, só que na frequência**, como mostrado abaixo.



Transformada de Fourier $\bar{I}(f)$ (©Wiley, Shin&Hammond,2008)

RELAÇÃO ENTRE TRANSF. DE SINAIS CONTÍNUO E AMOSTRADO

Como $g_s(t) = g(t).i(t)$, a transformada de Fourier $\bar{G}_s(f)$, de $g_s(t)$, é igual à convolução, no domínio da frequência, de $\bar{G}(f)$, a transformada de $g(t)$, com $\bar{I}(f)$, a transformada de $i(t)$. Ou seja, como

$$g_s(t) = g(t).i(t) \quad \rightarrow \quad \bar{G}_s(f) = \bar{G}(f) * \bar{I}(f) \quad (10)$$

Executando essa convolução (que é uma operação comutativa), decorre que

$$\bar{G}_s(f) = \bar{G}(f) * \bar{I}(f) = \bar{I}(f) * \bar{G}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{I}(\lambda) \bar{G}(f - \lambda) d\lambda$$

Substituindo o resultado da Eq. (9) na equação acima, tem-se que

$$\bar{G}_s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\lambda - nf_s) \right] \bar{G}(f - \lambda) d\lambda = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda - nf_s) \bar{G}(f - \lambda) d\lambda \right]$$

REL. ENTRE TRANSF. DE SINAIS CONTÍNUO E AMOSTRADO (cont.)

Fazendo, então, a substituição de variáveis $\gamma = f - \lambda$ e aplicando as propriedades de paridade e deslocamento da função delta, resulta que

$$\bar{G}_s(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{G}(f - nf_s) \quad (11) \quad (\rightarrow \text{válido para amostragem uniforme})$$

A Eq. (11) descreve a relação entre a transformada de Fourier $\bar{G}(f)$ de um sinal contínuo e a transformada de Fourier $\bar{G}_s(f)$ do sinal amostrado correspondente.

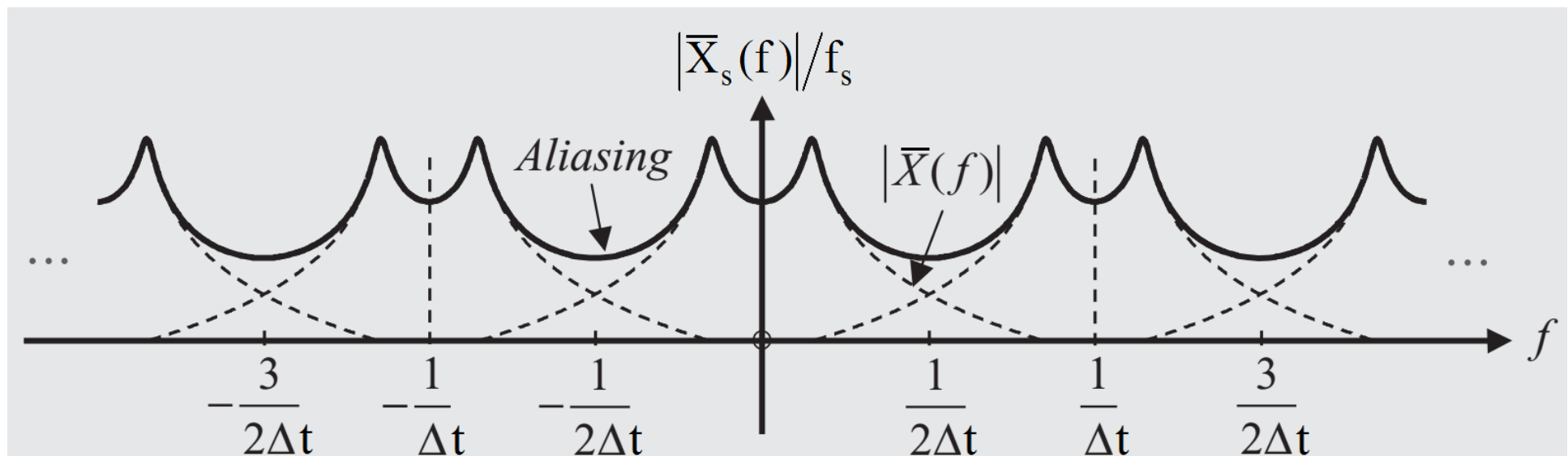
Nota-se que **a transformada do sinal amostrado é a soma de versões deslocadas na frequência da transformada do sinal contínuo.** Nota-se também o **efeito de escala** entre as transformadas, efeito esse dado por f_s .

Constata-se, pois, que a **amostragem no domínio do tempo conduz a uma transformada de Fourier periódica e contínua no domínio da frequência.**

REL. ENTRE TRANSF. DE SINAIS CONTÍNUO E AMOSTRADO (cont.)

Ilustra-se abaixo o módulo escalonado da transformada de Fourier $\bar{X}_s(f)$ de um sinal amostrado $x_s(t)$, com intervalo de amostragem Δt .

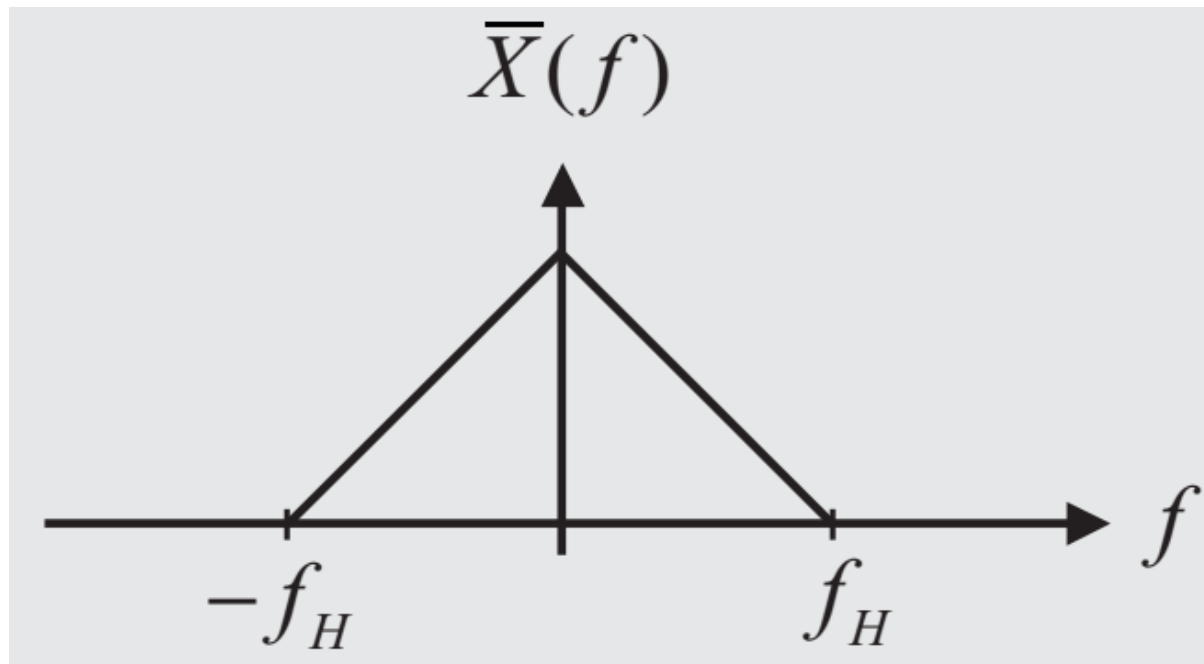
O sinal $x_s(t)$ decorre do sinal contínuo $x(t)$, cujo módulo da transformada de Fourier $\bar{X}(f)$ também é esboçado na figura.



Transformada de Fourier de função amostrada (©Wiley, Shin&Hammond,2008)

“ALIASING” (DOBRAMENTO)

Em vista do exposto anteriormente, considere-se um sinal contínuo $x(t)$ cuja transformada de Fourier $\bar{X}(f)$ seja tal que $\bar{X}(f) = 0$, para $|f| > f_H$, como ilustrado na figura abaixo. Por conveniência de exposição, $\bar{X}(f)$ é real.



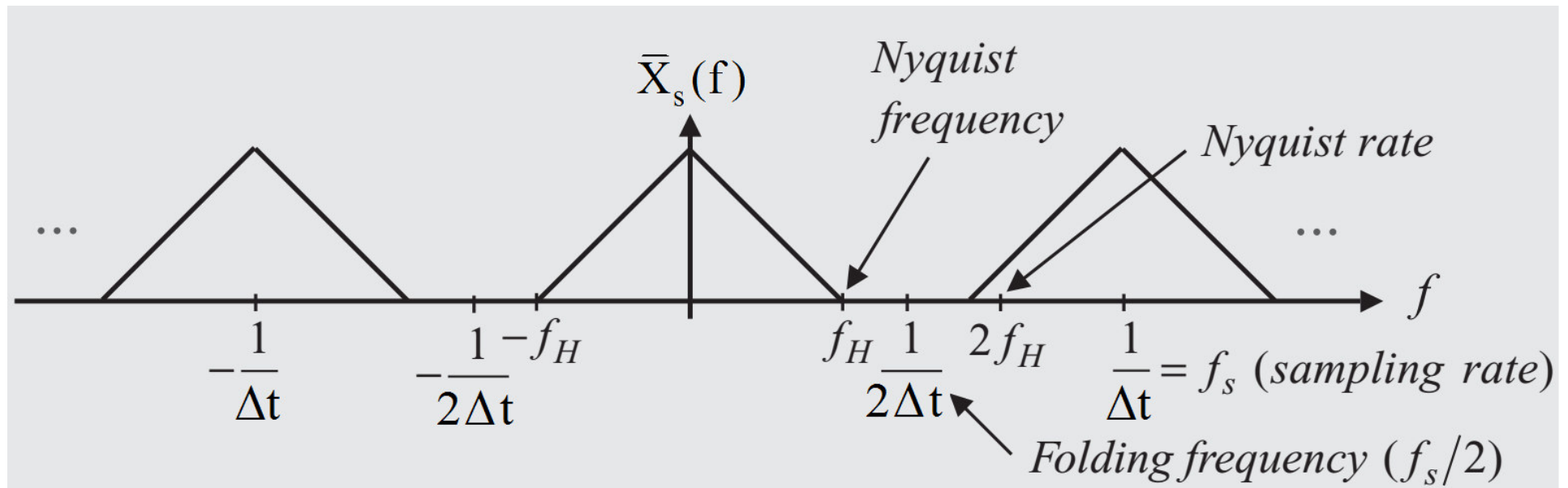
Transformada de Fourier $\bar{X}(f)$ (nula qdo. $|f| > f_H$) (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

“ALIASING” (DOBRAMENTO) (cont.)

Assumindo que a frequência (taxa) de amostragem $f_s = 1/\Delta t$ seja tal que

$$f_s > 2f_H \quad , \text{ ou seja, que } f_H < \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2\Delta t}$$

a transformada $\bar{X}_s(f)$ do sinal amostrado $x_s(t)$, cf. Eq. (11), é ilustrada abaixo.



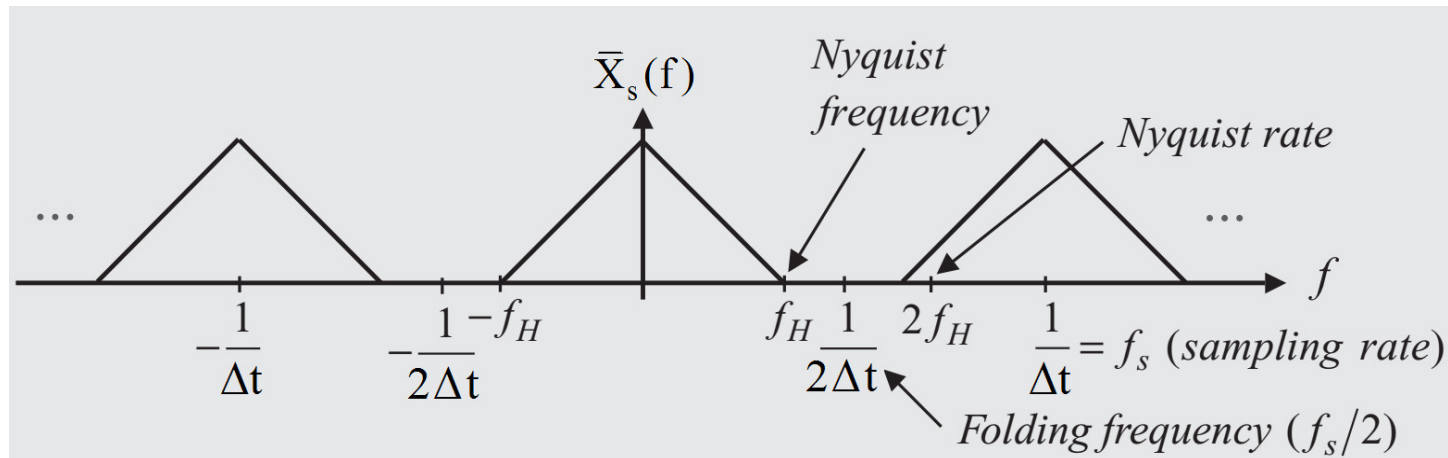
Transformada de Fourier $\bar{X}_s(f)$ (com $f_s > 2f_H$) (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

“ALIASING” (DOBRAMENTO) (cont.)

Na figura acima, repetida abaixo, destacam-se: f_s , a **frequência de amostragem**, f_H , dita **frequência de Nyquist**, e $(f_s/2)$, dita **frequência de dobramento**.

Como $f_H < f_s/2$, nota-se que $\bar{X}_s(f)$ representa $\bar{X}(f)$ de forma exata para $|f| < f_s/2$, a menos de um fator de escala $(1/f_s)$, cf. Eq. (11).

$$\bar{X}_s(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{X}(f - nf_s) \quad (11)$$

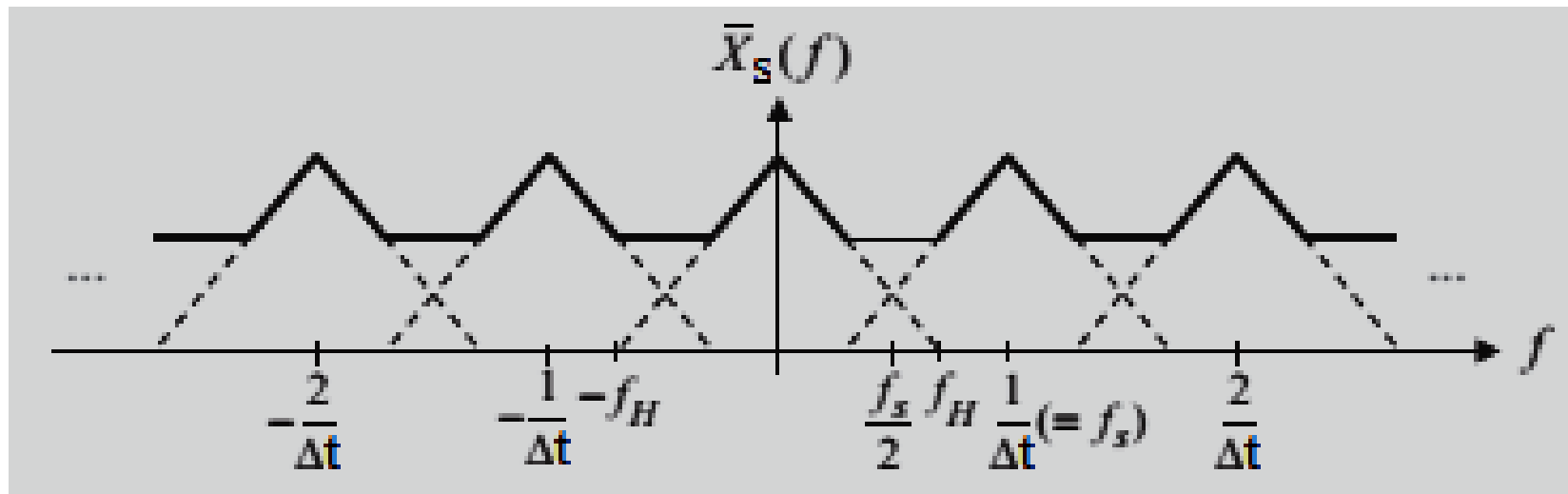


Transformada de Fourier $\bar{X}_s(f)$ (com $f_s > 2f_H$) (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

“ALIASING” (DOBRAMENTO) (cont.)

Seja agora $f_H > f_s/2$. Haverá, então, uma sobreposição das várias versões deslocadas de $\bar{X}(f)$, resultando numa distorção para $|f| < f_s/2$, como visto abaixo.

Assim, mesmo em escala, $\bar{X}_s(f)$ não mais representa $\bar{X}(f)$ de forma exata.



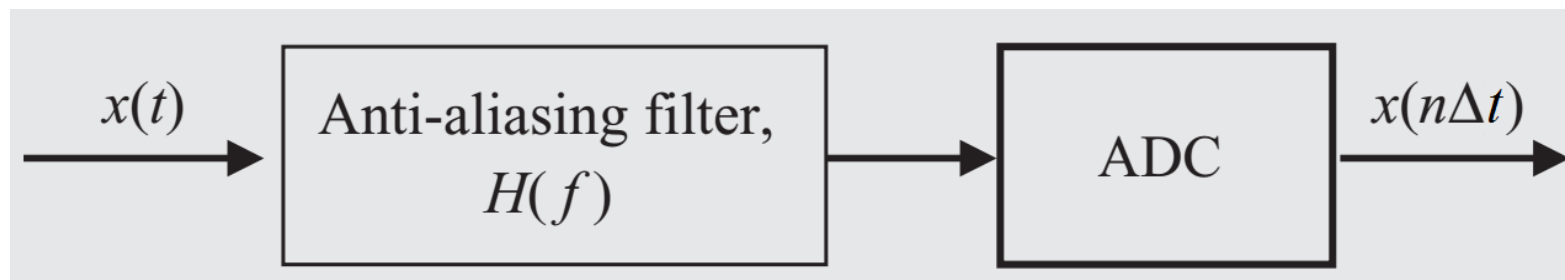
Transformada de Fourier $\bar{X}_s(f)$ (com $f_s < 2f_H$) (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

→ Essa distorção é conhecida como “**aliasing**” ou **dobramento**.

“ALIASING” (DOBRAMENTO) (cont.)

Então, para evitar o “aliasing”, ou dobramento, o sinal não deve ter qualquer componente em frequência acima de uma certa frequência $f_H = f_{\max}$.

Para tanto, o que se faz é filtrar o sinal contínuo antes de amostrá-lo, usando um filtro analógico passa-baixo (dito filtro “anti-aliasing”), como mostrado abaixo.



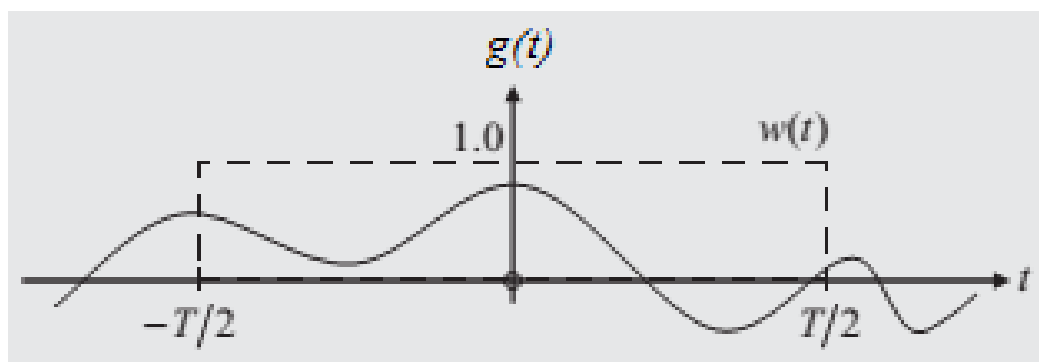
Uso de filtro “anti-aliasing” antes da amostragem (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

Além disso, deve-se escolher a frequência de amostragem f_s de forma tal que ela seja maior do que duas vezes a maior frequência contida no sinal. Ou seja,

$$f_s > 2f_H = 2f_{\max} \quad (12)$$

JANELAMENTO

Na sequência, suponha-se que $g(t)$, ainda um sinal genérico, seja conhecido apenas de $(-T/2) \leq t \leq (T/2)$. Diz-se, nesse caso, que $g(t)$ está “sendo observado através de uma janela”, descrita pela função $w(t)$, tal como mostrado abaixo.



Sinal truncado com janela retangular $w(t)$ (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

A função $w(t)$ acima, dita **janela retangular**, é definida da seguinte forma:

$$w(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases} \quad (13)$$

JANELAMENTO (cont.)

O que se tem, portanto, é um sinal truncado $g_T(t)$, tal que

$$g_T(t) = g(t) \cdot w(t) \quad (14)$$

Ao calcular a transformada de Fourier de $g_T(t)$, para obter a transformada de $g(t)$, o que resulta é a transformada do produto de dois sinais, $g(t)$ e $w(t)$, de modo que

$$\bar{G}_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} [g(t)w(t)]e^{-i2\pi ft} dt = \bar{G}(f) * \bar{W}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}(\lambda) \bar{W}(f-\lambda) d\lambda \quad (15)$$

onde $\bar{G}_T(f)$ é a transformada de $g_T(t)$, $\bar{G}(f)$ a de $g(t)$ e $\bar{W}(f)$ a de $w(t)$.

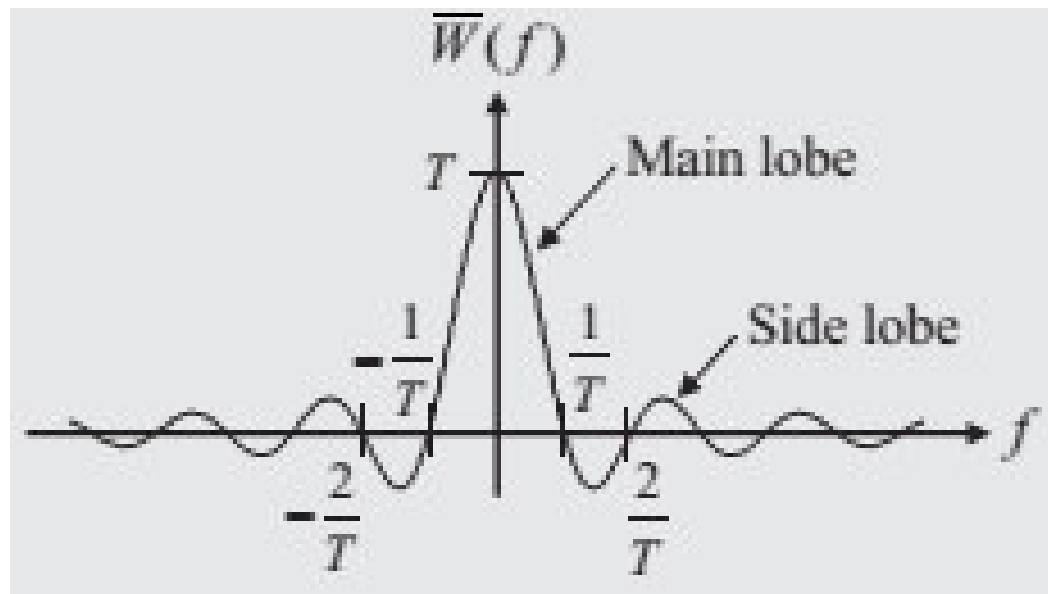
O resultado acima decorre do fato de que a transformada do produto de dois sinais no domínio do tempo é a convolução de suas transformadas na frequência.

JANELAMENTO (cont.)

A transformada de Fourier $\bar{W}(f)$ de uma janela retangular $w(t)$ é dada por

$$\bar{W}(f) = T \frac{\text{sen}(\pi f T)}{\pi f T} \quad (16)$$

Essa janela, dita genericamente **janela espectral**, é ilustrada na figura abaixo.



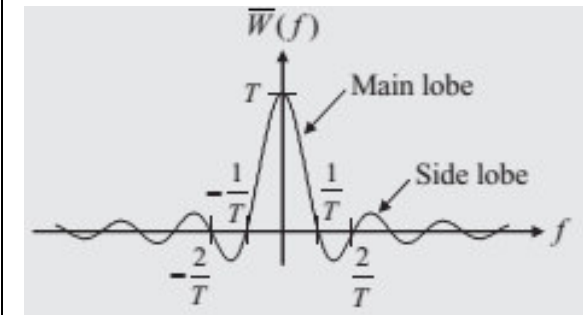
Transformada de Fourier de janela retangular $w(t)$ (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

ERRO DE TRUNCAMENTO

A operação de **convolução no domínio da frequência**, acima exposta, gera o **erro de truncamento**, o que não é restrito ao uso da janela retangular, mas observado em qualquer truncamento.

A convolução faz com que $\bar{G}_T(f)$, a transformada de Fourier do sinal truncado $g_T(t)$, seja uma **versão distorcida** de $\bar{G}(f)$, que é a transformada de $g(t)$.

A distorção associada ao lóbulo principal (“main lobe”) de uma janela é, por vezes, dita mancha ou borrão (“**smearing**”). Já a distorção associada aos lóbulos laterais (“side lobes”) é dita vazamento (“**leaking**”).



Esse nome decorre do fato dos componentes de $\bar{G}(\lambda)$ em outros valores que não $\lambda = f$ “vazarem” pelos lóbulos laterais, contribuindo para o valor de $\bar{G}_T(f)$ em f .

SINAL HARMÔNICO TRUNCADO

Considere-se, por exemplo, um sinal harmônico dado por

$$x(t) = \cos(2\pi pt) \quad (17)$$

cuja transformada de Fourier $\bar{X}(f)$ é

$$\bar{X}(f) = \frac{1}{2} [\delta(f + p) + \delta(f - p)] \quad (18)$$

A transformada $\bar{X}_T(f)$ do sinal truncado $x_T(t)$, face ao uso de uma janela $w(t)$, é

$$\bar{X}_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{X}(\lambda) \bar{W}(f - \lambda) d\lambda = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\lambda + p) + \delta(\lambda - p)] \bar{W}(f - \lambda) d\lambda$$

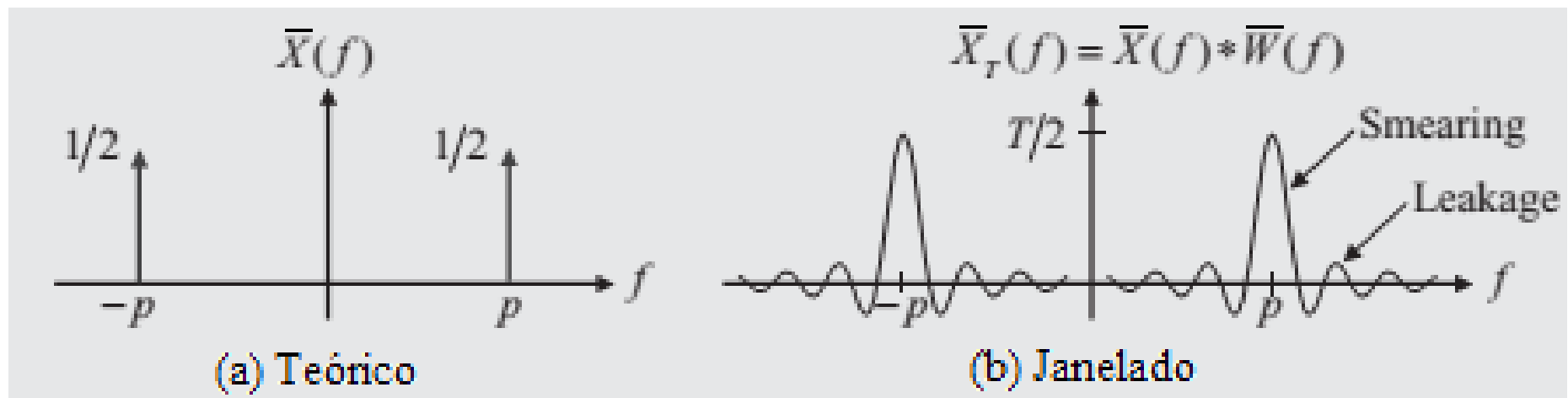
Com a substituição de variáveis $\gamma = f - \lambda$ e face às propriedades da função delta de Dirac, a integral no último termo acima pode ser resolvida de imediato.

SINAL HARMÔNICO TRUNCADO (cont.)

Dessa forma,

$$\bar{X}_T(f) = \frac{1}{2} [\bar{W}(f+p) + \bar{W}(f-p)] \quad (19)$$

Ou seja, as funções delta, no domínio da frequência, são substituídas por formas da janela espectral. Os espectros teórico e ‘janelado’ são ilustrados abaixo.

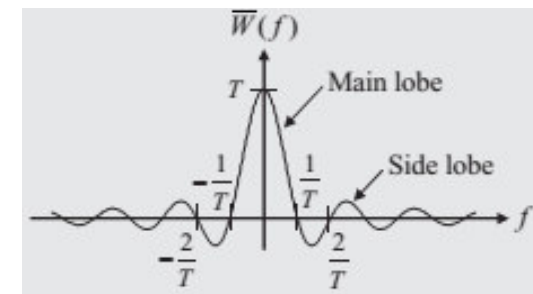
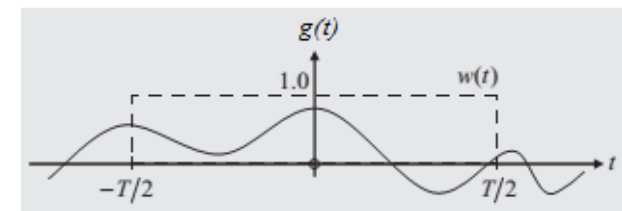
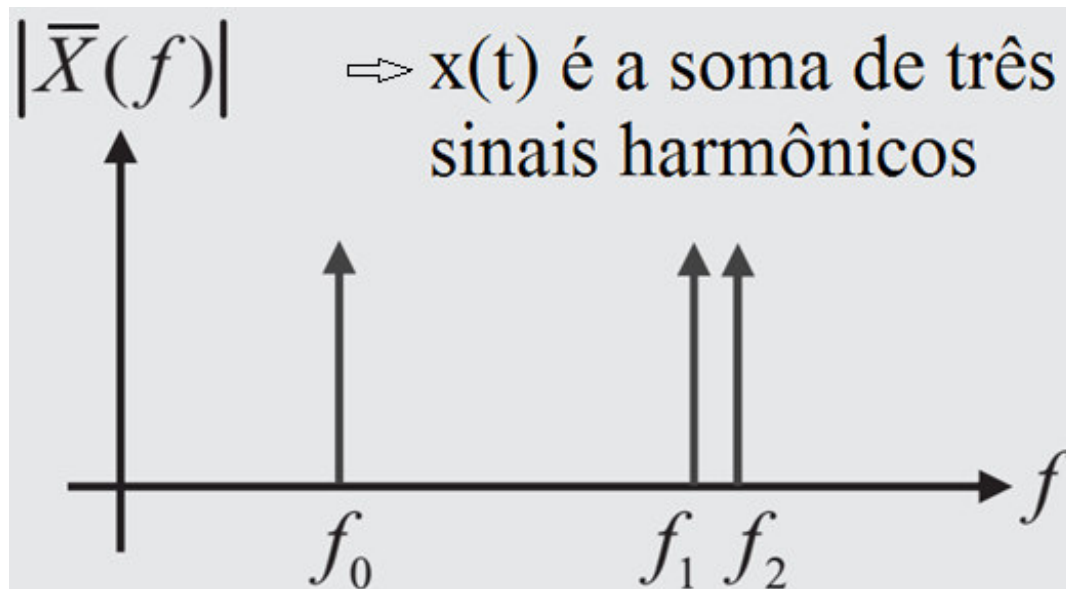


Transformadas de Fourier $\bar{X}(f)$ e $\bar{X}_T(f)$ (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

DISTINÇÃO DE COMPONENTES HARMÔNICOS

Se dois ou mais componentes harmônicos próximos estão presentes num sinal, então eles podem não ser distinguidos na frequência, em virtude do janelamento.

Uma ilustração aproximada disso é feita abaixo, para três componentes, partindo do caso ideal e tomando valores crescentes da extensão T da janela retangular.

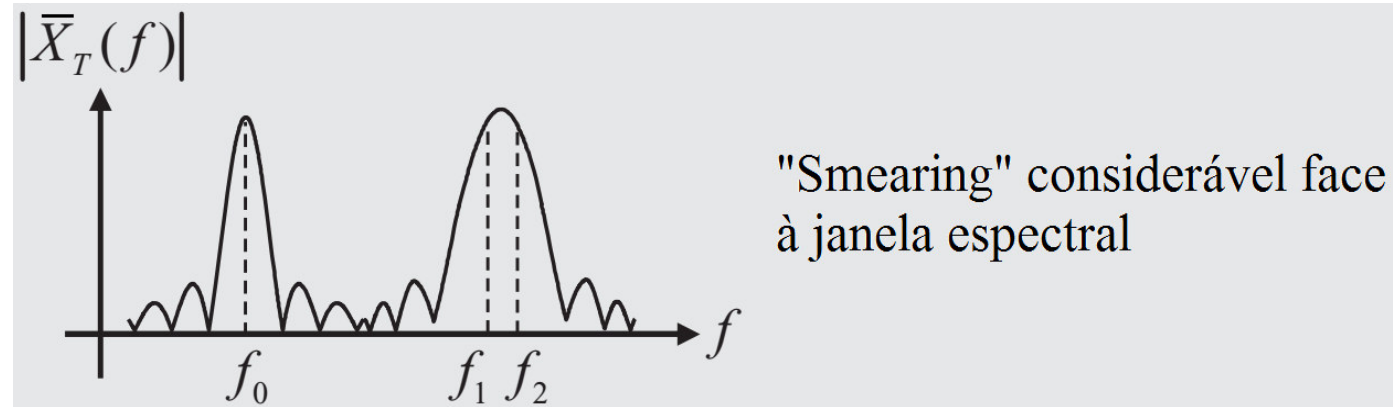


Efeitos do janelamento no módulo da transformada de Fourier – caso ideal (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

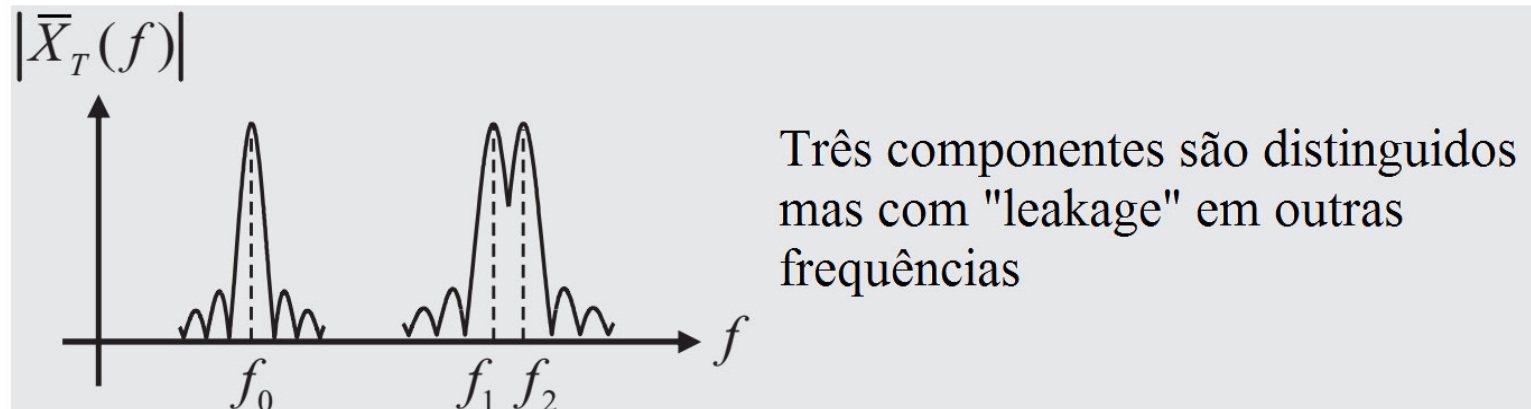
Janela retangular

(©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

DISTINÇÃO DE COMPONENTES HARMÔNICOS (cont.)



Efeitos do janelamento no módulo da transformada de Fourier – “smearing”
(©Wiley, Shin&Hammond, 2008) (ver tb. transparência acima)

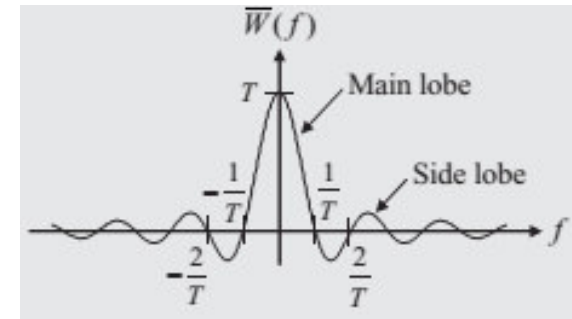


Efeitos do janelamento no módulo da transformada de Fourier – “leakage”
(©Wiley, Shin&Hammond, 2008) (ver tb. transparência acima)

DISTINÇÃO DE COMPONENTES HARMÔNICOS (cont.)

Para obter dois picos separados para os componentes de frequências f_1 e f_2 do sinal considerado acima, é necessária uma extensão temporal T dos dados tal que

$$T \geq \frac{2}{f_2 - f_1} \quad \text{de modo que} \quad f_2 - f_1 \geq \frac{2}{T}$$



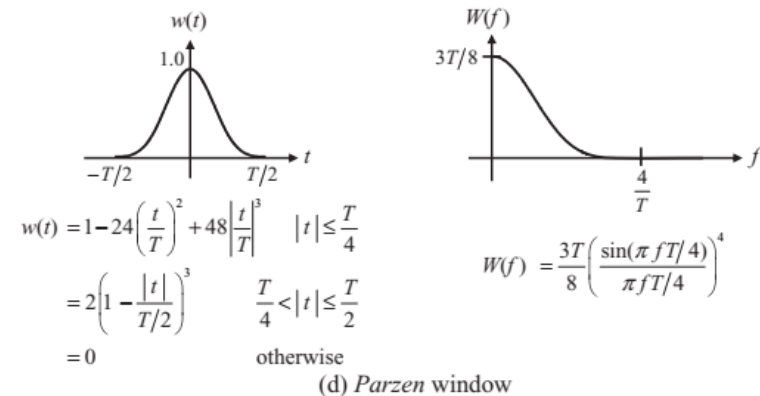
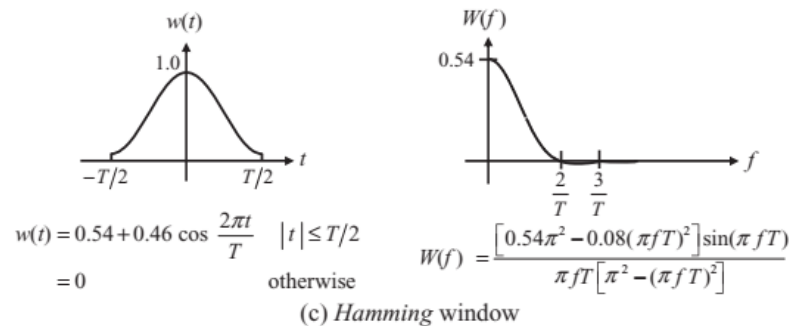
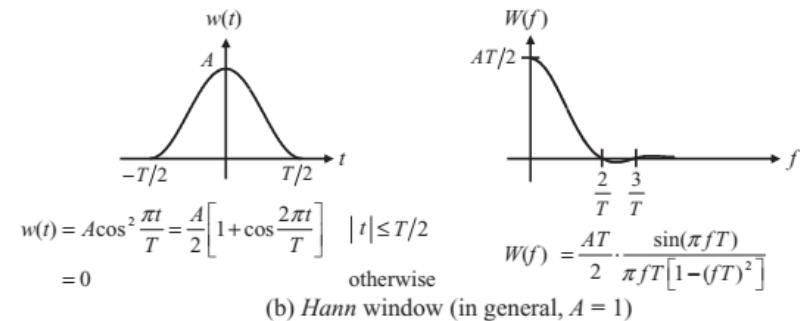
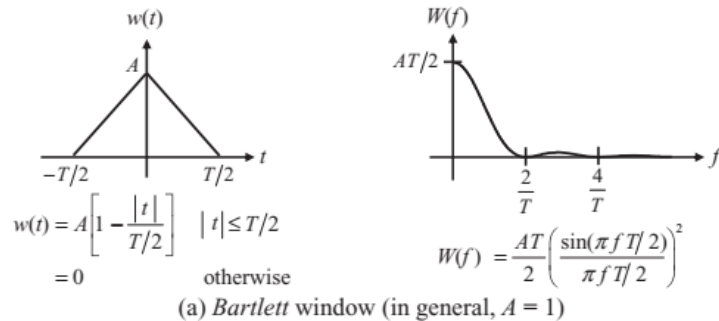
para a janela retangular (ver janela espectral da janela retangular).

Nota-se que a **janela retangular** é uma janela ruim quanto aos lóbulos laterais, pois eles são grandes e decaem devagar. Ou seja, há **expressivo vazamento**.

Por outro lado, o lóbulo principal da janela retangular é o mais estreito dentre todas as várias janelas, conferindo **bom desempenho** na **separação de componentes harmônicos próximos**.

JANELAS ESPECIAIS E FATOR DE CORREÇÃO

Há **várias janelas**, além da retangular, como as janelas Bartlett, Hann, Hamming e Parzen, ilustradas abaixo. A janela Hann é de propósito geral e uso frequente, com moderada resolução em frequência e boas características de lóbulos laterais.



Algumas janelas de uso comum (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

JANELAS ESPECIAIS E FATOR DE CORREÇÃO (cont.)

Essas janelas, às vezes ‘manufaturadas’ para aplicações específicas, buscam reduzir o vazamento à custa da largura do lóbulo principal nos cálculos de transformada de Fourier.

Um **fator de correção** deve ser aplicado às janelas especiais, para corrigir a **perda de energia** em relação à janela retangular.

Aliás, janelas especiais não são, via de regra, aplicadas a sinais transientes, face à perda significativa de energia. Uma exceção é o uso de janelas exponenciais em sinais que decaem progressivamente (em, por exemplo, testes de impacto).

→ Em resumo: (i) janelas espectrais distorcem a transformada de Fourier e introduzem vazamento; (ii) a largura e a forma da janela definem sua capacidade para distinguir componentes harmônicos próximos.

APÊNDICE – MANIPULAÇÕES COM FUNÇÕES DELTA DE DIRAC

CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

No presente módulo, foram feitas várias manipulações com funções delta de Dirac, fazendo uso de suas propriedades, de modo a obter os resultados de interesse, como, por exemplo, as Eqs. (11) e (19).

Ilustra-se aqui, para compreensão, um conjunto típico dessas manipulações, envolvendo as propriedades de paridade e deslocamento.

Para tanto, tome-se a expressão para $\bar{G}_s(f)$ anterior àquela da Eq. (11), qual seja,

$$\bar{G}_s(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda - nf_s) \bar{G}(f - \lambda) d\lambda \right]$$

Defina-se, então, uma nova variável na frequência, dada por $\gamma = f - \lambda$. Dessa forma, $d\gamma = -d\lambda$ e $\lambda = f - \gamma$, sendo f um valor constante a cada integração.

PARIDADE E DESLOCAMENTO EM FUNÇÕES DELTA DE DIRAC

Substituindo essa definição na equação acima, tem-se que

$$\bar{G}_s(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[- \int_{\infty}^{-\infty} \delta[(f - \gamma) - nf_s] \bar{G}(\gamma) d\gamma \right] = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta[-\gamma + (f - nf_s)] \bar{G}(\gamma) d\gamma \right]$$

Reescrevendo a expressão acima para o uso da paridade ($\delta(\sigma) = \delta(-\sigma)$), tem-se

$$\bar{G}_s(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta\{-[\gamma - (f - nf_s)]\} \bar{G}(\gamma) d\gamma \right] = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta\{[\gamma - (f - nf_s)]\} \bar{G}(\gamma) d\gamma \right]$$

Aplicando agora a propriedade do deslocamento, em que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\sigma - \sigma_0) g(\sigma) d\sigma = g(\sigma_0)$$

obtém-se o resultado desejado, expresso pela Eq. (11), que é

$$\bar{G}_s(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{G}(f - nf_s).$$