SINAIS DISCRETOS, CONVOLUÇÃO E TRANSFORMADA DE FOURIER

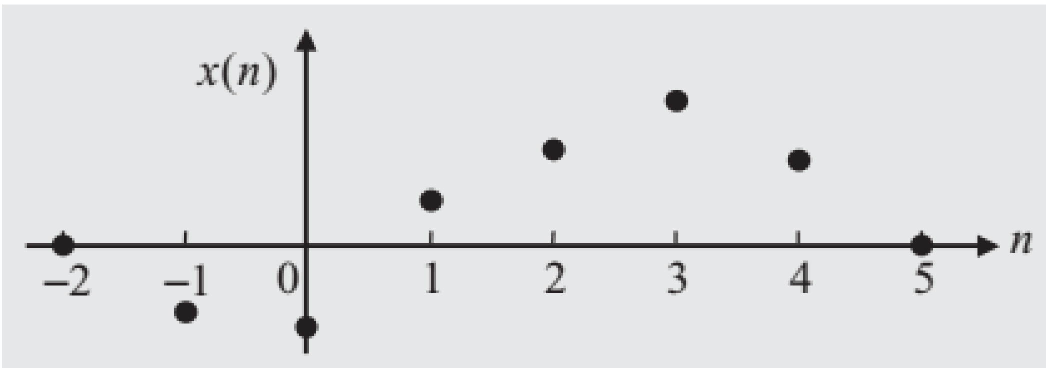
SEQUÊNCIAS

Um **sinal discreto**, também dito uma **sequência**, é uma função definida num conjunto discreto de pontos. Aqui indicada por x(n), ela resulta de:

(i) um processo naturalmente discreto (p.ex., temperatura máxima diária);

(ii) amostragem de um sinal analógico, em intervalo uniforme de (Δt) s.

A figura abaixo ilustra uma sequência.



Sequência (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

SEQUÊNCIA IMPULSO UNITÁRIO

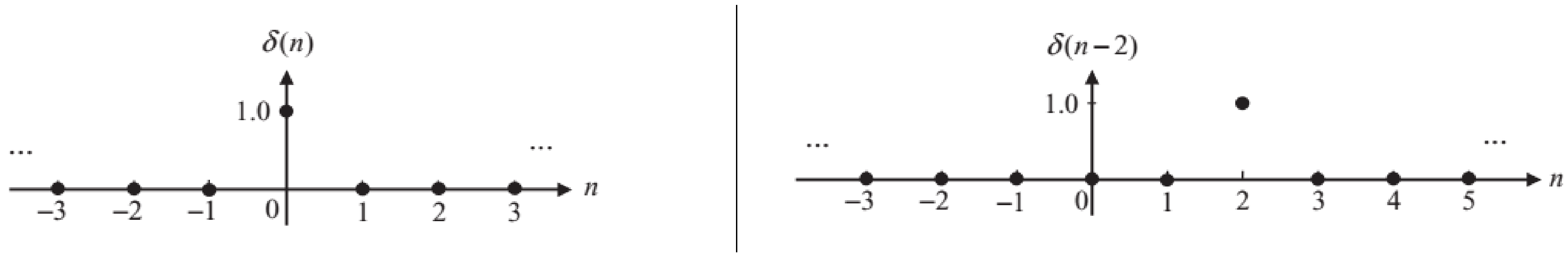
A **sequência impulso unitário** (ou função **delta de Kronecker**), que é o equivalente discreto da função delta de Dirac δ(t), é definida como

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ 0, & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

Se a sequência δ(n) é deslocada de k, então

$$\boxed{\delta(n-k) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = k \\ 0, & \text{se } n \neq k \end{cases}} \qquad (1)$$

Na figura abaixo, são ilustradas as sequências δ(n) e δ(n-2).

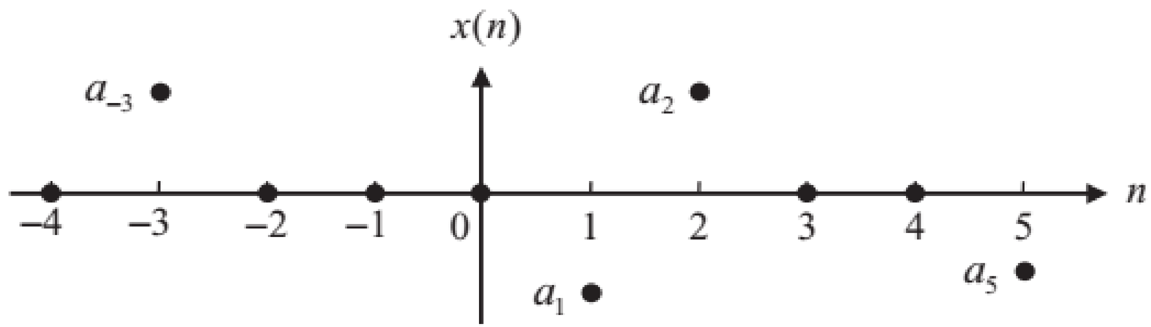


Sequências impulso unitário (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

SEQUÊNCIA ARBITRÁRIA

Uma **sequência arbitrária** pode ser expressa por um somatório de sequências impulso unitário, devidamente escalonadas e deslocadas.

Considere-se, por exemplo, a sequência ilustrada na figura ao lado, em que seus valores são indicados por a_n.



Sequência arbitrária (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

Essa sequência pode ser escrita como

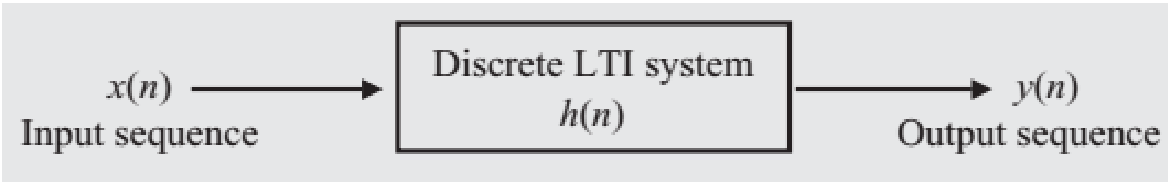
$$x(n) = a_{-3}\delta(n+3) + a_1\delta(n-1) + a_2\delta(n-2) + a_5\delta(n-5)$$

ou, de forma geral, como

$$\boxed{x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)} \qquad (2)$$

SISTEMAS LTI DISCRETOS

A relação entrada-saída para um **sistema LTI discreto** (dito também um filtro digital linear) é mostrada na figura abaixo.



Relação entrada-saída para um sistema discreto LTI (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

De forma similar ao já exposto para sistemas contínuos, denota-se a sequência resposta ao impulso de um sistema LTI discreto como h(n).

Se a entrada no sistema for um impulso escalonado e deslocado de k, ou seja,

$$x(n) = x(k)\delta(n-k),$$

então a resposta (saída) do sistema (que é LTI) em n será

$$y(n) = x(k)\,h(n-k)\ .$$

SISTEMAS LTI DISCRETOS (cont.)

Ora, como já visto, uma entrada arbitrária e geral pode ser expressa como um somatório de impulsos unitários escalonados e deslocados.

Então, a **resposta total** y(n) **a** uma **sequência de entrada arbitrária** x(n) é

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)\,h(n-k) \qquad (3a), \qquad \text{se o } \textbf{sistema} \text{ é } \textbf{causal},$$

ou

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,h(n-k) \qquad (3b), \qquad \text{se o } \textbf{sistema} \text{ é } \textbf{não causal}.$$

A Eq. (3a) é um caso especial da Eq. (3b) quando $h(n) = 0$, para $n < 0$ (ou seja, o sistema só responde após ter sido excitado). A Eq. (3b) é chamada de **soma de convolução** e descreve a relação entre entrada e saída em sistemas LTI discretos.

SOMA DE CONVOLUÇÃO

Assim, a **relação entrada-saída** de um **sistema LTI discreto** é expressa pela convolução entre duas sequências x(n) e h(n), de modo que a saída y(n) é tal que

$$\boxed{y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)} \qquad (4)$$

Como a <u>convolução</u> é <u>comutativa</u>, tem-se também que

$$\boxed{y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(r)x(n-r)} \qquad (5)$$

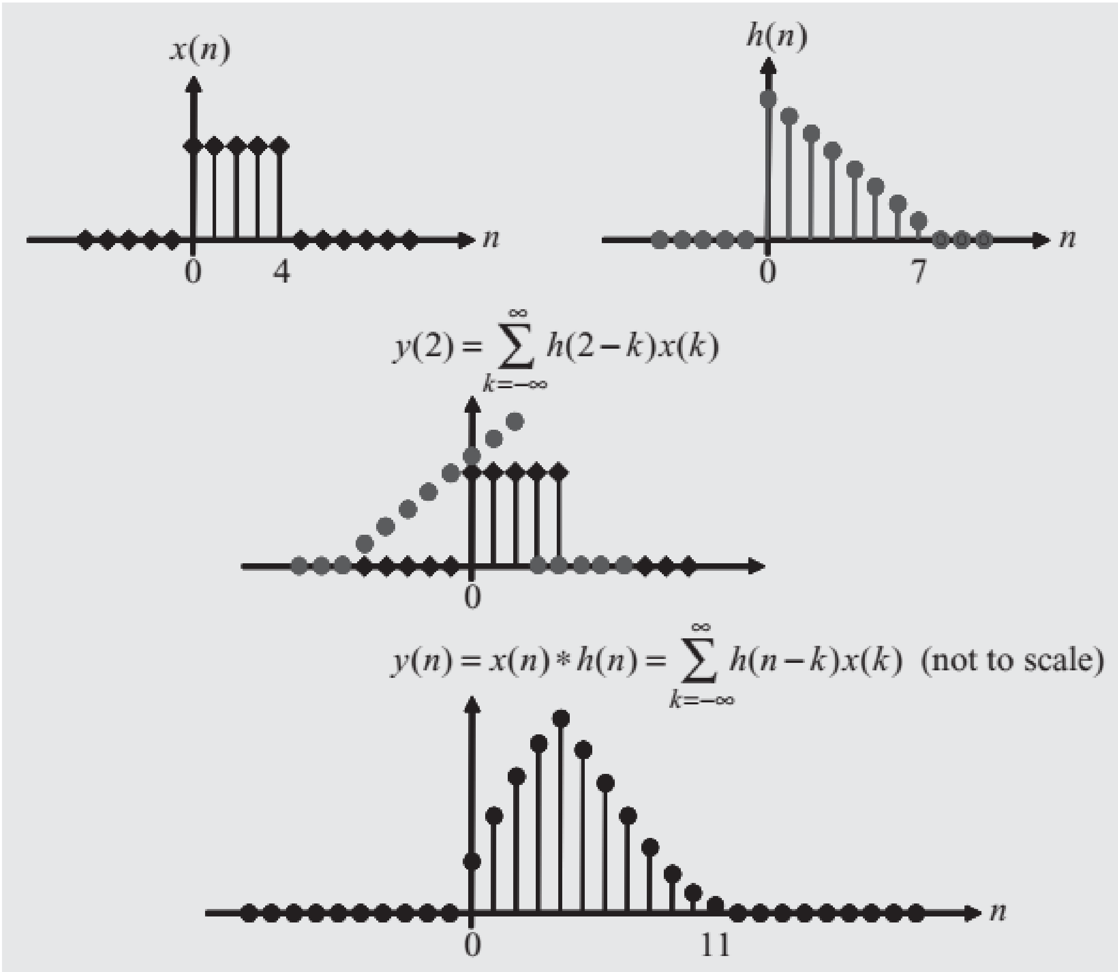
Escolhe-se, assim, qual sequência se mantém e qual é deslocada e invertida, pois

$$\boxed{y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)} \qquad (6)$$

As expressões apresentadas acima são análogas à integral de convolução para sistemas contínuos, vista anteriormente.

SOMA DE CONVOLUÇÃO (cont.)

Um exemplo particular de soma de convolução é mostrado na figura abaixo.



Soma de convolução (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

RELAÇÃO COM SISTEMAS LTI CONTÍNUOS – CONVOLUÇÃO

Seja agora a resposta de um sistema LTI contínuo dada por

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \qquad (7)$$

Considere-se, a seguir, um processo de amostragem uniforme tal que

$$y(t) \to y(n\Delta t), \quad h(t) \to h(r\Delta t) \quad \text{e} \quad x(t) \to x(r\Delta t).$$

Ou seja, as sequências $y(n\Delta t)$, $h(r\Delta t)$ e $x(r\Delta t)$ resultam, para um sistema LTI discreto, da amostragem de $y(t)$, $h(t)$ e $x(t)$ para um sistema LTI contínuo.

Então, a aproximação da integral de convolução, expressa pela Eq. (7), resulta em

$$y(n\Delta t) \cong \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(r\Delta t)x[(n-r)\Delta t]\Delta t \qquad (8)$$

RELAÇÃO COM SISTEMAS LTI CONTÍNUOS – CONVOLUÇÃO (cont.)

Como Δt é constante, pode-se escrever a Eq. (8) da seguinte forma:

$$y(n\Delta t) \cong \left\{ \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(r\Delta t)x[(n-r)\Delta t] \right\} \Delta t \qquad (9)$$

O <u>termo entre chaves</u> na Eq. (9) é a <u>soma de convolução</u> da Eq. (5). Portanto,

$$\boxed{y(n\Delta t) \cong y(n)\Delta t} \qquad (10)$$

onde $y(n) = h(n) * x(n)$, conforme a Eq. (6).

Ou seja, se um LTI sistema discreto é representado pela amostragem uniforme da resposta ao impulso do sistema contínuo correspondente e ...

... a entrada no sistema também é uma versão amostrada da entrada de interesse, ...

→ então há um **fator de escala** Δt entre as saídas $y(n\Delta t)$ e $y(n)$.

RELAÇÃO COM SISTEMAS LTI CONTÍNUOS – TRANSFORMADA

No caso da transformada de Fourier, sabe-se que a transformada discreta de Fourier $\overline{H}(j)$ de uma sequência finita h(n), com N pontos, é dada por

$$\overline{H}(j)=\sum_{k=0}^{N-1}h(k)e^{-i\left(j\frac{2\pi}{N}k\right)} \qquad (11)$$

Já a relação entre a transformada contínua de Fourier $\overline{H}(\omega)$ de h(t), o sinal contínuo de duração T associado a h(n), e a transformada discreta $\overline{H}(j)$ de h(n), é tal que

$$\boxed{\overline{H}\left(j\frac{2\pi}{T}\right)\cong\left(\frac{T}{N}\right)\overline{H}(j)=\overline{H}(j)\Delta t} \qquad (12) \qquad \left[\Delta t=\frac{1}{f_s} \quad \text{e} \quad \frac{2\pi}{T}=\Delta\omega \quad \left(\therefore\frac{1}{T}=\Delta f\right)\right]$$

→ também aqui há um **fator de escala** Δt entre $\overline{H}(\omega)$ e $\overline{H}(j)$!

A transformada discreta de Fourier (TDF) é computada, via de regra, pela transformada rápida de Fourier (FFT), abordada em apêndice, na sequência.

APÊNDICE – TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER (FFT)

CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

Um conjunto de algoritmos, conhecido como **transformada rápida de Fourier** (FFT – fast Fourier transform), tem sido desenvolvido para reduzir o tempo computacional requerido para calcular a TDF.

O algoritmo FFT original foi redescoberto por Cooley e Tukey em 1965. Esse mesmo algoritmo tinha sido usado por Gauss, em 1805, para interpolar trajetórias de asteroides.

Devido à alta eficiência computacional da FFT, o assim chamado processamento de sinal em tempo real se tornou possível.

Na sequência, será brevemente introduzido o método básico da *decimation in time* para FFT com base 2 (*decimation* = dizimação, redução).

TDF DE UMA SEQUÊNCIA

A TDF de uma sequência x(n), com N pontos, é definida por

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i(2\pi/N)nk}, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1 \qquad (A1)$$

Definindo $W_N = e^{-i(2\pi/N)}$, tem-se que

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{nk}, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1 \qquad (A2)$$

Verifica-se que W_N^{nk} é periódico com período N, tanto em k quanto em n. De fato, da definição, verifica-se que

$$W_N^{nk} = W_N^{(n+N)k} = W_N^{n(k+N)} \qquad (A3)$$

TDF DE UMA SEQUÊNCIA (cont.)

Em particular, tem-se que

$$W_N^{Nk} = e^{-i2\pi k} = 1 \qquad \text{(A4)}$$

Verifica-se também que

$$W_N^{(N-n)k} = W_N^{-nk} = \left(W_N^{nk}\right)^* \qquad \text{(A5)}$$

onde $\left(W_N^{nk}\right)^*$ é o complexo conjugado de W_N^{nk}.

O número de operações de multiplicação no cômputo de uma TDF é igual a N^2.

Os algoritmos FFT usam a periodicidade e a simetria de W_N^{nk}(vide Eqs. (A3) e (A5)) e reduzem esse número de operações para cerca de $[N\log_2(N)]$. Assim, para $N = 1024$, o número de operações é reduzido por um fator quase igual a 100.

FFT DE BASE 2 VIA *DECIMATION IN TIME*

Seja, em particular, o caso em que N é uma potência de 2. Ou seja, $N = 2^m$. Isso conduz aos algoritmos FFT de base 2.

O princípio básico é **decompor sucessivamente a computação da TDF de comprimento N em TDFs menores**. Isso pode ser feito de várias formas e uma delas é o método da *decimation in time*, em que a sequência x(n) é progressivamente decomposta em sequências menores, ditas subsequências.

Tome-se, para tanto, uma sequência geral x(n) e sejam definidas as subsequências $x_p(r)$ e $x_i(r)$ com metade do número de pontos, de forma tal que

$$x_p(r) = x(2r), \quad r = 0,\ 1,\ \ldots,\ \left(N/2\right)-1$$

$$x_i(r) = x(2r+1), \quad r = 0,\ 1,\ \ldots,\ \left(N/2\right)-1$$

FFT DE BASE 2 VIA *DECIMATION IN TIME* (cont.)

Nota-se que $x_p(r)$ contém o elemento inicial e os elementos pares de $x(n)$, enquanto $x_i(r)$ contém os elementos ímpares de $x(n)$. Dessa forma,

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, W_N^{nk} = \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \left[x(n)_{(n\ =\ 0\ \text{ou par})} + x(n)_{(n\ \text{ímpar})} \right] W_N^{nk} \right\}$$

$$= \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r)\, W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x(2r+1)\, W_N^{(2r+1)k} \qquad \text{(A6)}$$

Observa, porém, que

$$W_N^2 = e^{-i(2\pi/N)2} = e^{-i[2\pi/(N/2)]} = W_{N/2} \qquad \text{(A7)}$$

FFT DE BASE 2 VIA *DECIMATION IN TIME* (cont.)

Pode-se, então, reescrever a Eq. (A6) como

$$X(k) = \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x_p(r)\, W_{N/2}^{rk} + W_N^k \sum_{r=0}^{(N/2)-1} x_i(r)\, W_{N/2}^{rk} \qquad (A8)$$

Ou seja,

$$X(k) = X_p(k) + W_N^k X_i(k) \qquad (A9)$$

onde $X_p(k)$ e $X_i(k)$ são, pela ordem, as TDFs de $x_p(r)$ e $x_i(r)$, com (N/2) pontos.

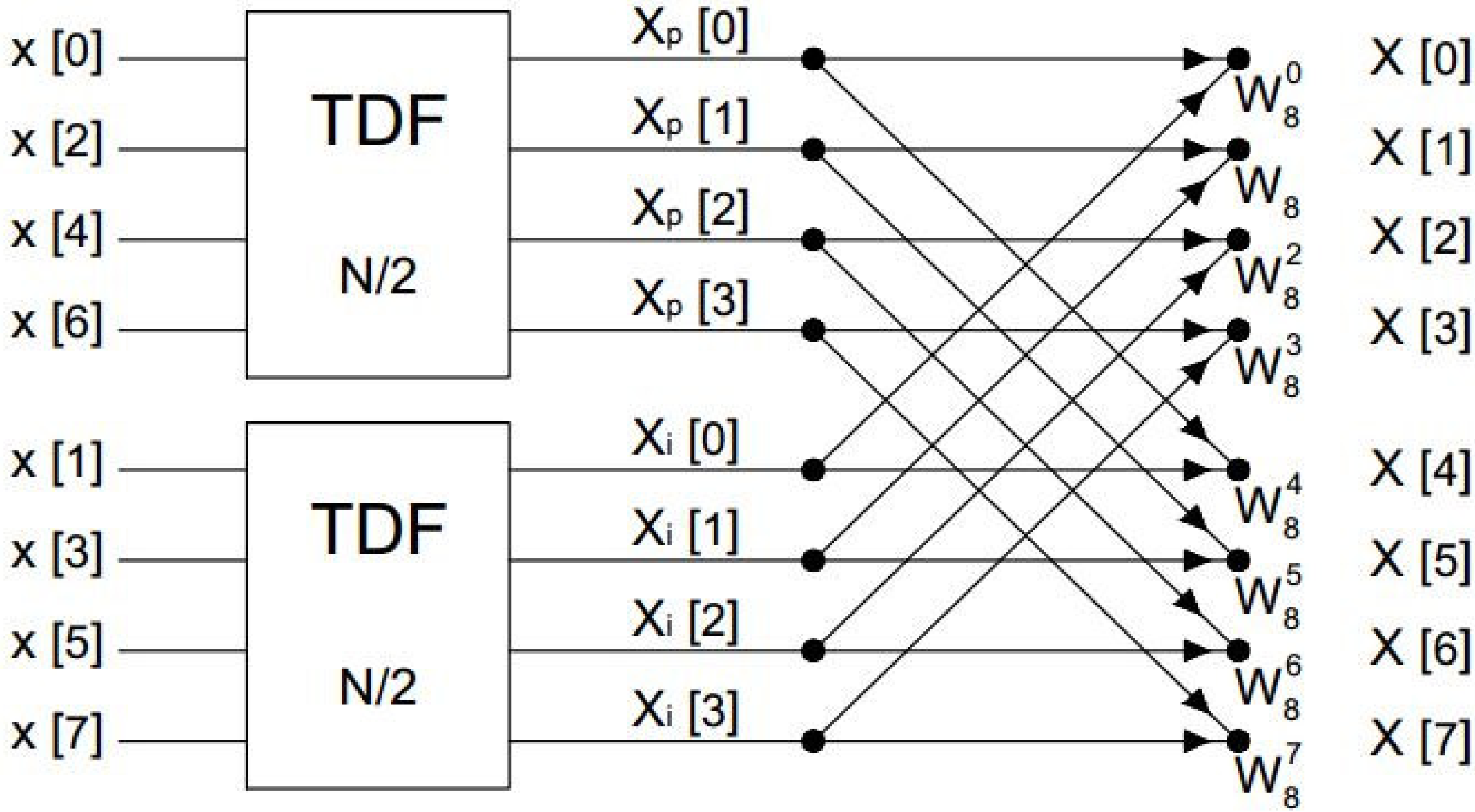
Ocorre que X(k), que é definida para $0 \le k \le N-1$, é periódica de período N.

Já $X_p(k)$ e $X_i(k)$ são periódicas de período (N/2). Então,

$$X(k) = X_p\left(k - \frac{N}{2}\right) + W_N^k X_i\left(k - \frac{N}{2}\right), \quad \frac{N}{2} \le k \le N-1 \qquad (A10)$$

FFT DE BASE 2 VIA *DECIMATION IN TIME* (cont.)

As Eqs. (9) e (10) podem, assim, ser usadas para se montar o algoritmo. Seja, por exemplo, N = 8. Tem-se, em associação, o procedimento ilustrado abaixo.



Algoritmo FFT de base 2 (primeira subdivisão)

FFT DE BASE 2 VIA *DECIMATION IN TIME* (cont.)

Observam-se, na figura anterior, $2.(N/2)^2$ multiplicações no primeiro estágio e N multiplicações no segundo estágio, resultando no total de $\left(N^2/2\right)+N$.

A divisão exposta acima pode continuar, de modo que, para cada subsequência com (N/2) pontos, sejam obtidas outras duas, com (N/4) pontos cada, e assim sucessivamente.

Dessa forma, ter-se-á, no caso mais geral de $N = 2^m$ pontos, TDFs com os seguintes números de pontos:

$$\left(\frac{N}{2}\right), \left(\frac{N}{4}\right), \ldots, \left(\frac{N}{2^{m-1}}\right),$$

até se chegar a $\left(N/2^m\right)=1$ ponto.

FFT DE BASE 2 VIA *DECIMATION IN TIME* (cont.)

O custo computacional correspondente ao procedimento acima é tal que

$$1:\ (N/2) \rightarrow 2(N/2)^2 + N = \left(N^2/2\right) + N\ ;$$

$$2:\ (N/4) \rightarrow 2\left[2(N/4)^2 + (N/2)\right] + N = \left(N^2/4\right) + 2N\ ;$$

$$3:\ (N/8) \rightarrow 2\left\{2\left[2(N/8)^2 + (N/4)\right] + (N/2)\right\} + N = \left(N^2/8\right) + 3N\ ;$$

$$p:\ \left(N/2^m\right) = 1 \rightarrow \left(N^2/2^m\right) + mN = \left(N^2/N\right) + N\log_2 N \simeq N\log_2 N\ ,$$

onde a aproximação se dá face à progressiva dominância do 2º. termo.

Por vezes, a estratégia dos algoritmos FFT é dita “dividir e conquistar”, em associação com a campanha do então general romano Júlio César na Gália.