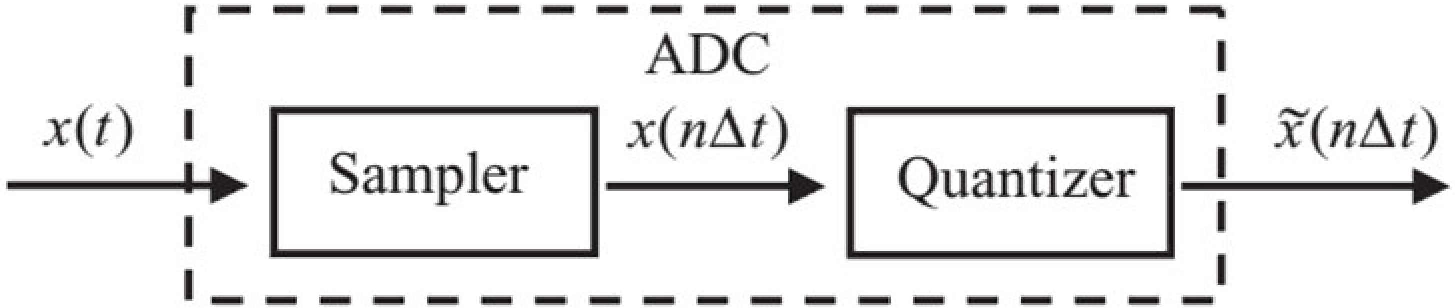
CONVERSÃO, QUANTIZAÇÃO E RECONSTRUÇÃO

CONVERSOR ANALÓGICO-DIGITAL (ADC)

Um **conversor analógico-digital** (ADC, de “analogue-to-digital converter”) é um dispositivo que recebe um sinal contínuo na entrada e produz uma sequência de números na saída, números esses que são os valores amostrais da entrada.

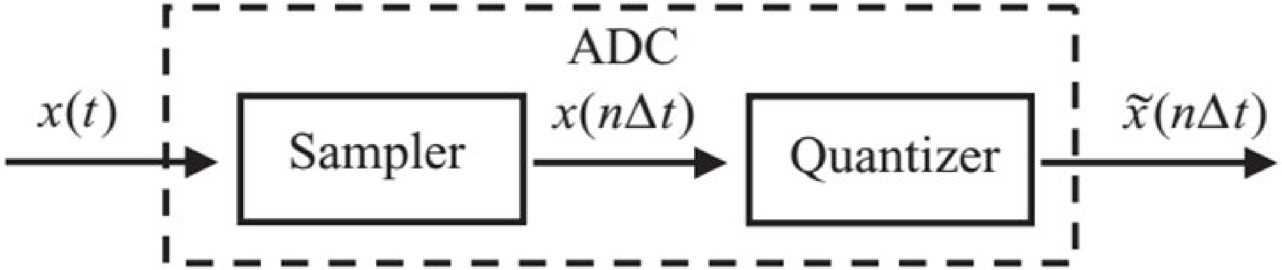
Por conveniência, descreve-se o processo de conversão analógico-digital como composto por duas etapas, a saber, amostragem e quantização, como visto abaixo.



Descrição conceitual de conversão analógico-digital (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

AMOSTRAGEM E QUANTIZAÇÃO

Na descrição conceitual, repetida abaixo por conveniência, $x(n\Delta t)$ é o valor exato do sinal de entrada $x(t)$ no tempo $t = n\Delta t$, em que Δt é o intervalo de amostragem. Ou seja, é a sequência idealmente amostrada, obtida na etapa de **amostragem**.



Descrição conceitual de conversão analógico-digital (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

Já $\tilde{x}(n\Delta t)$ é a representação de $x(n\Delta t)$ em computador, e difere desta pelo fato de que um número finito de 'bits' é usado para representar cada um dos valores da sequência amostrada. Trata-se da etapa de **quantização**.

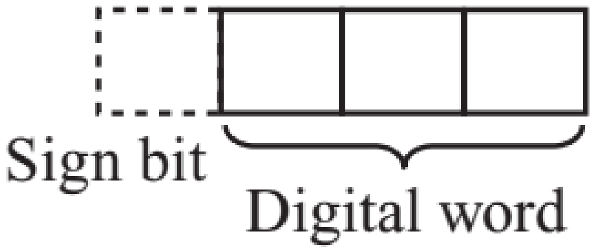
Antecipa-se que erros sejam produzidos no processo de quantização.

QUANTIZAÇÃO E REPRESENTAÇÃO BINÁRIA

O processo de quantização é ilustrado isoladamente na figura seguinte.

Processo de quantização (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

Suponha-se que o conversor represente um número usando 3 ‘bits’, com mais um ‘bit’ para o sinal. Ou seja, trata-se de um conversor de 4 ‘bits’, ilustrado abaixo.

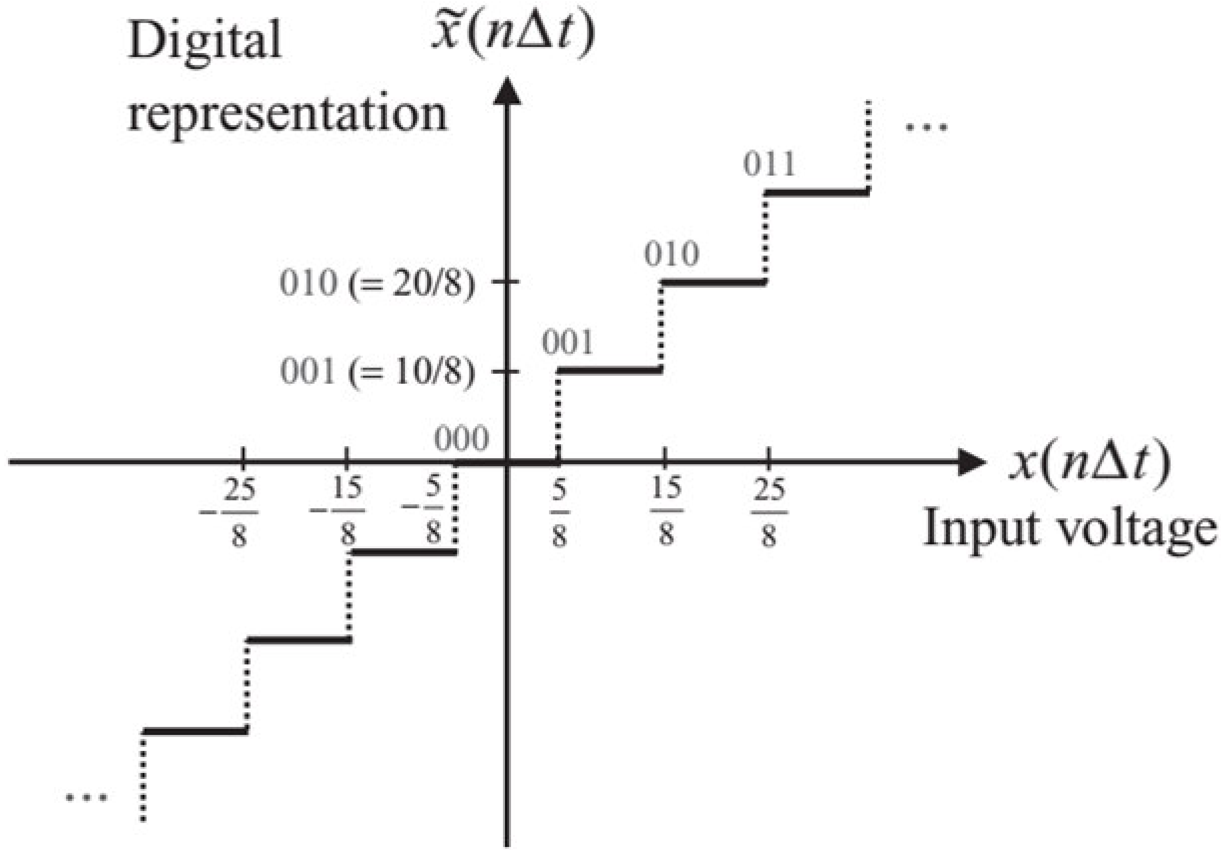


Conversor de 4 ‘bits’ (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

Como cada ‘bit’ vale 0 ou 1, o conversor acima possui $2^3 = 8$ estados possíveis.

QUANTIZAÇÃO E REPRESENTAÇÃO BINÁRIA (cont.)

Se a faixa para a tensão de entrada é ± 10V, os valores de 0 a 10 V têm que ser alocados nos 8 estados possíveis de alguma forma. Uma forma é mostrada abaixo.



Representação digital de sinal por conversor de 4 'bits' (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

ERRO DE QUANTIZAÇÃO

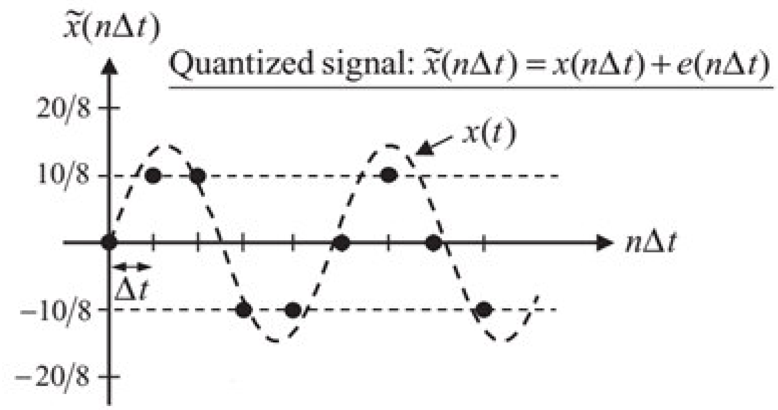
Na figura anterior, qualquer tensão de entrada entre –5/8 e 5/8 V será representada pelo estado [000]. Já entre 5/8 e 15/8 V por [001] e assim por diante. A regra de associação entre padrão de 'bits' e faixa de entrada depende do dispositivo.

No caso, os degraus são uniformes e o **erro de quantização** pode ser expresso por

$$e(n\Delta) = \tilde{x}(n\Delta) - x(n\Delta) \ ,$$

sendo que, no exemplo em tela, esse erro tem valores entre –5/8 e 5/8 V.

Na figura ao lado, representa-se um sinal harmônico de 1,5 V de amplitude num conversor de 4 bits, com uma faixa de entrada ± 10 V. Observa-se, com clareza, os erros de quantização.

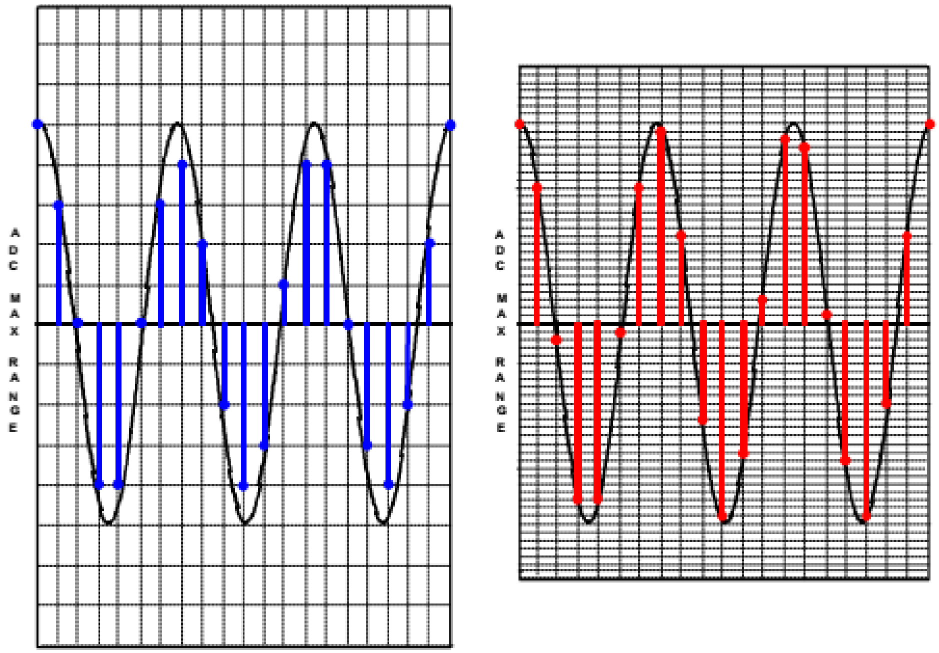


Erros de quantização (©Wiley, S&H, 2008)

ERRO DE QUANTIZAÇÃO (cont.)

O **erro de quantização** tem a ver com a **exatidão da amplitude do sinal medido** e pode ser reduzido à medida que se eleva o número de 'bits' na representação.

Nota-se abaixo que um conversor de 6 'bits' representa muito melhor o sinal de interesse, em termos de amplitude, do que um conversor de 4 'bits'.

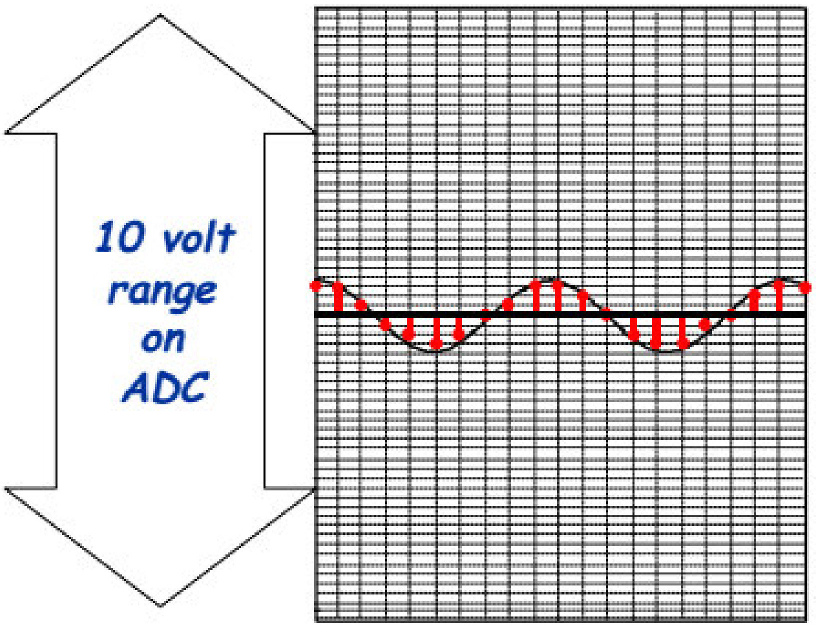


Representações por conversores de 4 e 6 'bits' (Avitabile, 2001)

USO DE FAIXA DISPONÍVEL

Se possível, deve-se **ajustar** a **faixa disponível à amplitude máxima do sinal**.

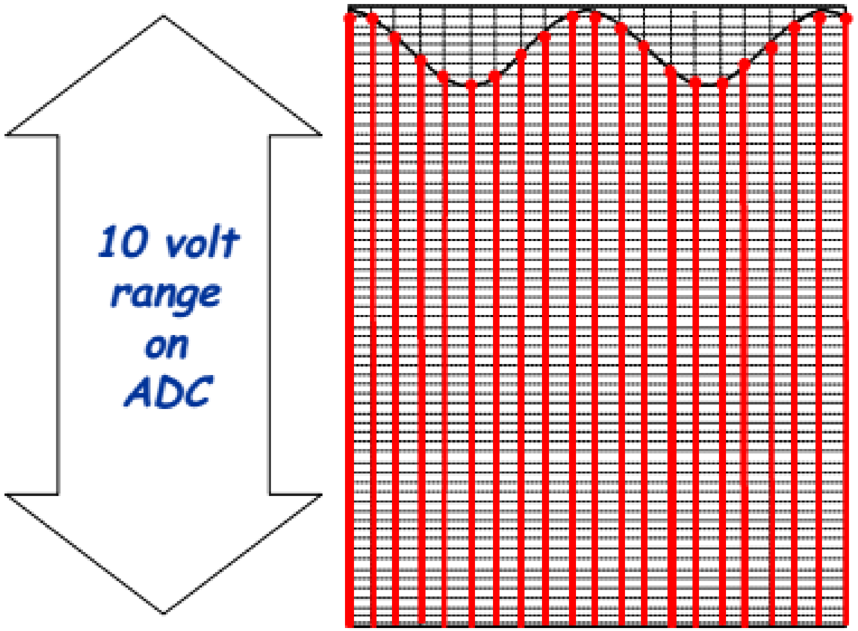
Abaixo, um sinal harmônico de 0,5 V de amplitude é descrito em um conversor com faixa disponível de ± 10 V. Nota-se que a faixa disponível não é usada efetivamente, o que causa distorções na amplitude e na fase do sinal medido.



Uso não efetivo de faixa dinâmica (Avitabile, 2001)

ACOPLAMENTO “AC”

Um componente constante (“dc”) elevado num sinal pode causar erros de quantização (amplitude) no componente alternado, visto que a faixa disponível pode ser dominada por aquele componente, como se ilustra abaixo.

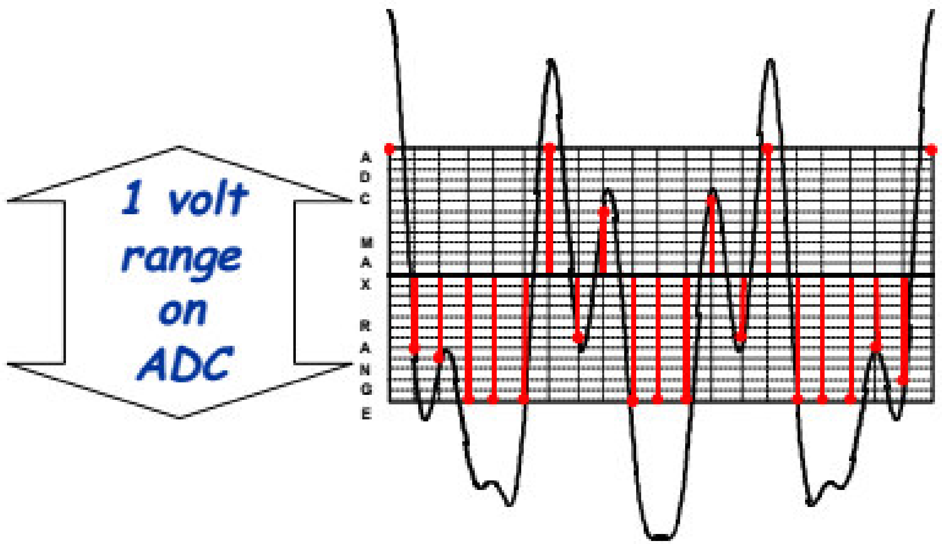


Componente “dc” elevado (Avitabile, 2001)

O acoplamento “ac” usa um filtro passa-alta para remover o componente “dc”.

“OVERLOADING” E “CLIPPING”

Erros de amplitude ocorrem ainda por saturação, quando se excede a faixa dinâmica de um conversor (dito tb. “overloading”). Na figura abaixo, um sinal harmônico de 1,5 V de amplitude é representado num conversor com faixa dinâmica de ± 1 V, com os decorrentes cortes na amplitude (“clipping”).



Saturação (Avitabile, 2001)

Deve-se **ajustar** a **faixa dinâmica** de modo apropriado **para evitar** a **saturação**.

FAIXA DINÂMICA E RELAÇÃO SINAL-RUÍDO

Nesse contexto, a **faixa dinâmica**, que é a razão entre o maior e o menor valores que uma certa grandeza pode assumir, pode ser descrita, para um conversor, pela **relação sinal-ruído** (SNR, de “signal-to-noise ratio”). Ela é definida por

$$\frac{S}{N} = 10\log_{10}\left(\frac{\text{potência do sinal}}{\text{potência do erro}}\right) \quad \text{(dB)}$$

em que as potências acima são valores médios quadráticos estimados.

Assumindo o erro como aleatório e uniformemente distribuído, tem-se, para um conversor com comprimento de palavra b (número de bits – 1), que

$$\left(S/N\right) \cong 10{,}8 + 6b \quad \text{(dB)}$$

Em termos práticos, considera-se um valor menor, por garantia. De toda forma, sempre deve-se **buscar** o **uso da faixa dinâmica máxima**.

(RE)CONSTRUÇÃO DE SINAIS

Caso não tenha havido ‘aliasing’, pode-se **reconstruir** um **sinal analógico**, **de forma exata**, a partir dos valores amostrais correspondentes.

Isso conduz ao conceito de um conversor digital-analógico (ou DAC, de “digital-to-analogue converter”), que pode ser entendido como argumentado abaixo.

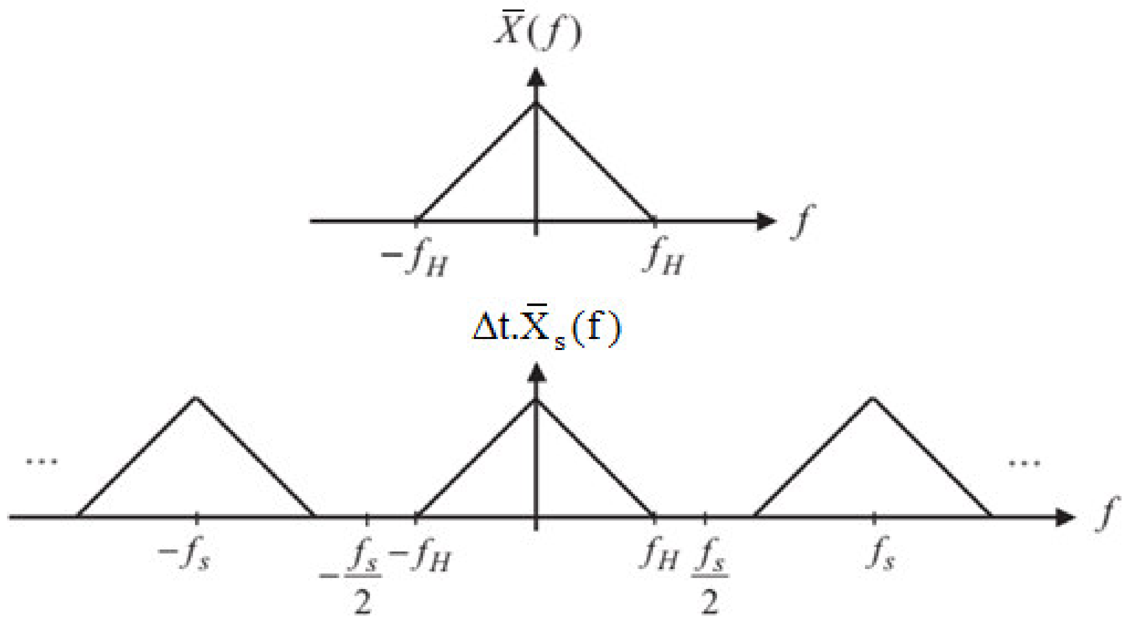
Sejam $\bar{X}(f)$ e $\bar{X}_s(f)$, respectivamente, as transformadas de Fourier de um sinal contínuo x(t) e do sinal amostrado equivalente x(nΔt). Assume-se que não há ocorrência de ‘aliasing’. Sabe-se que $\bar{X}(f)$ e $\bar{X}_s(f)$ estão relacionadas por

$$\bar{X}_s(f) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{X}(f - nf_s) \qquad (1)$$

→ transformada do sinal amostrado é a soma de versões deslocadas na frequência, e escalonadas por $1/\Delta t$, da transformada do sinal contínuo.

(RE)CONSTRUÇÃO DE SINAIS (cont.)

As representações gráficas das transformadas de Fourier $\bar{X}(f)$ e $\bar{X}_s(f)$ são ilustradas de forma típica abaixo, com o fator de escala já aplicado em $\bar{X}_s(f)$.



Transformadas de Fourier (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

Na conversão digital-analógico, deseja-se operar em $x(n\Delta t)$ para recuperar $x(t)$. Ou seja, no domínio da frequência, operar em $\bar{X}_s(f)$ para obter $\bar{X}(f)$.

(RE)CONSTRUÇÃO DE SINAIS (cont.)

Para isso, multiplica-se $\bar{X}_s(f)$ pela janela retangular $\bar{H}(f)$, tal que

$$\bar{H}(f) = \begin{cases} \Delta t \ \left(=1/f_s\right), \ |f| < f_s/2 \\ 0, \ |f| \geq f_s/2 \end{cases} \qquad (2)$$

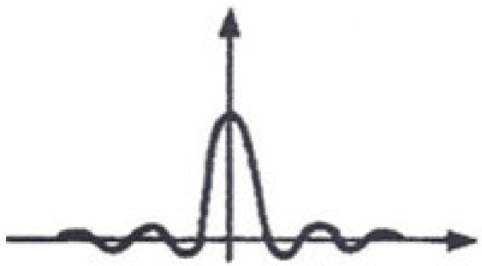
Assim sendo, tem-se que

$$\bar{X}(f) = \bar{H}(f)\bar{X}_s(f) \qquad (3)$$

Pela transformada inversa de Fourier, decorre que

$$x(t) = h(t) * x_s(t) \qquad (4)$$

onde $h(t) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\pi f_s t\right)}{\pi f_s t}$ (5) $\rightarrow$ **função sinc**



(RE)CONSTRUÇÃO DE SINAIS (cont.)

Já $x_s(t)$, que representa analiticamente $x(n\Delta t)$ na Eq. (4), pode ser descrito por

$$x_s(t) = x(t)i(t) = x(t).\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta t) \qquad (6)$$

Levando as Eqs. (5) e (6) na Eq. (4), resulta que

$$x(t) = h(t) * x_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\mathrm{sen}\left(\pi f_s t\right)}{\pi f_s t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\delta(t - n\Delta t - \tau) \right] d\tau$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\mathrm{sen}\left(\pi f_s t\right)}{\pi f_s t} x(t-\tau)\delta(t - n\Delta t - \tau) \right] d\tau \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) \frac{\mathrm{sen}\left[\pi f_s (t - n\Delta t)\right]}{\pi f_s (t - n\Delta t)}$$

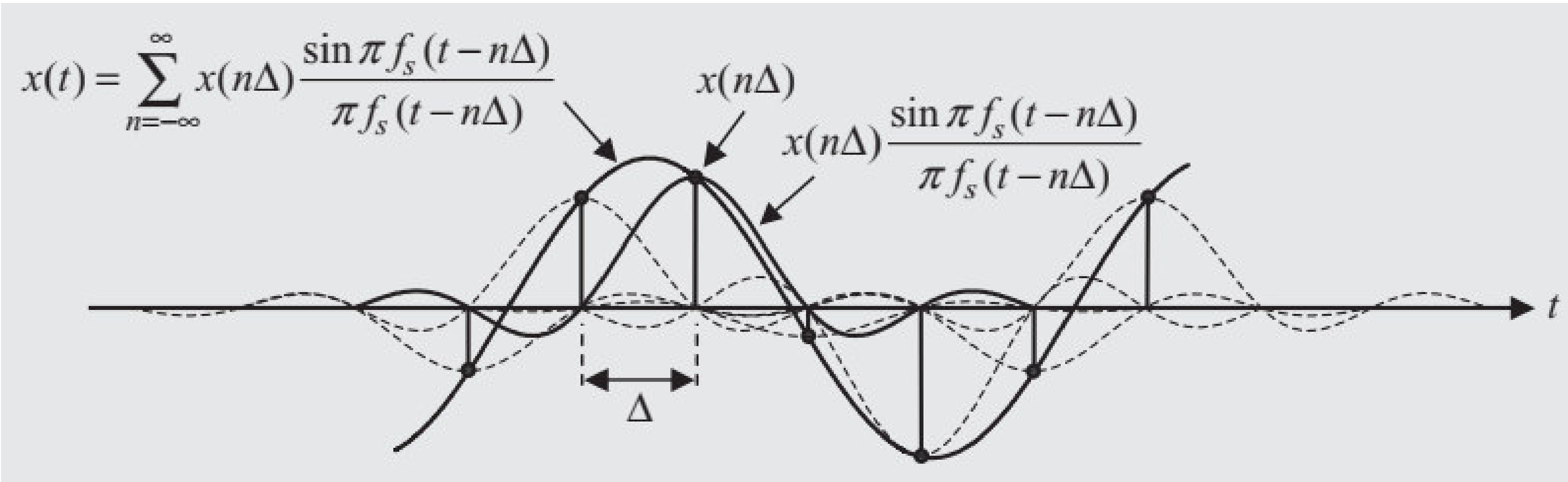
→ Ou seja, **para reconstruir x(t) de forma exata**, a partir de $x(n\Delta t)$, a **função interpoladora ideal** é a **função sinc**, na forma $\mathrm{sen}(x)/x$.

(RE)CONSTRUÇÃO DE SINAIS (cont.)

Então, analiticamente, a reconstrução é expressa por

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t)\frac{\mathrm{sen}\left[\pi f_s(t-n\Delta t)\right]}{\pi f_s(t-n\Delta t)}} \qquad (7)$$

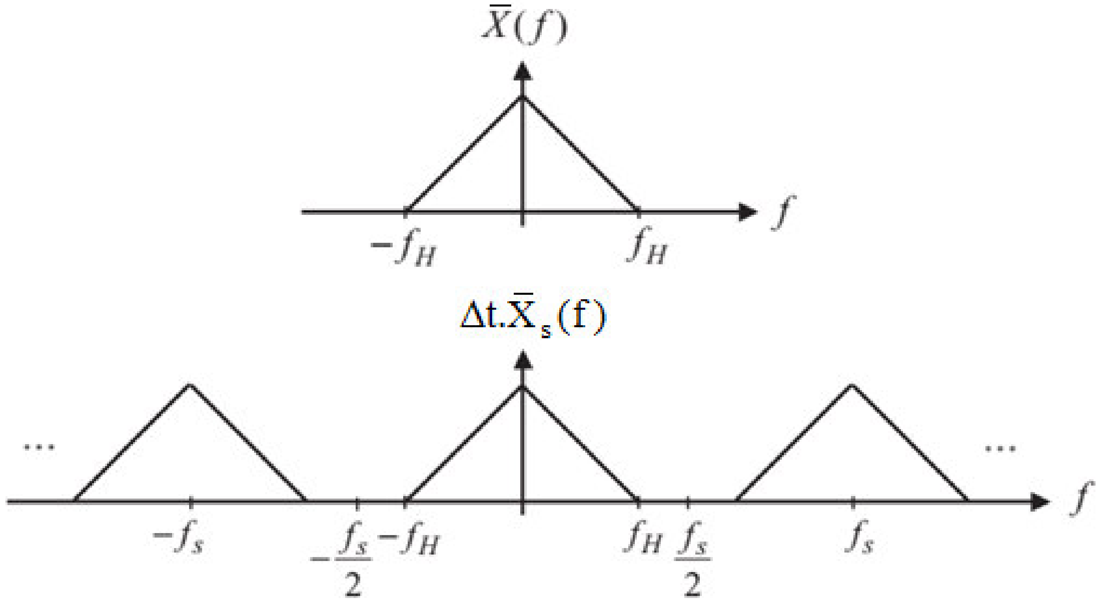
A Eq. (7) é ilustrada abaixo, em que se visualiza que, para reconstruir x(t) num dado tempo t, requer-se uma soma infinita de funções sinc escalonadas.



Reconstrução via funções sinc (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

TEOREMA DA AMOSTRAGEM DE SHANNON

Na figura das transformadas de Fourier, repetida ao lado por conveniência, nota-se que se a frequência f_H for a frequência máxima no sinal, a janela $\bar{H}(f)$ só necessita ser igual a Δt para $|f| \leq f_H$, sendo zero fora desse intervalo de frequência.



Transformadas de Fourier (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

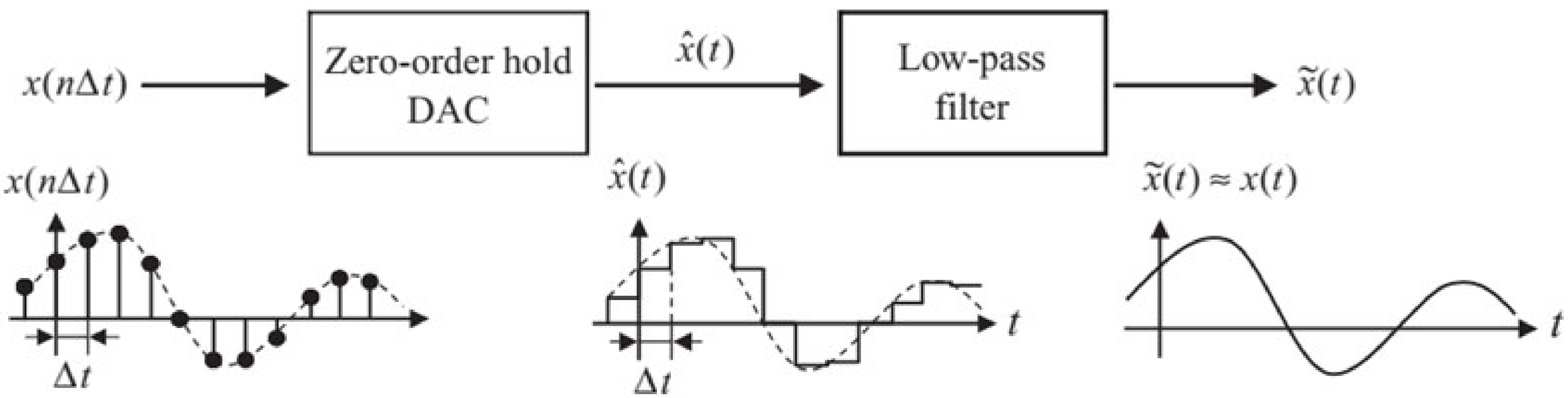
Assim, o algoritmo de reconstrução, dito **teorema da amostragem de Shannon**, é

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) \frac{2f_H}{f_s} \frac{\operatorname{sen}\left[2\pi f_H (t - n\Delta t)\right]}{2\pi f_H (t - n\Delta t)}} \qquad (8)$$

CONVERSOR DIGITAL-ANALÓGICO

Ocorre que o algoritmo de reconstrução apresentado anteriormente não é integralmente realizável face ao somatório infinito.

Um conversor digital-analógico opera de modo muito mais simples. Tem-se, tipicamente, um conversor de ordem zero, em que se gera uma sequência de pulsos retangulares, mantendo o valor de cada amostra por Δt segundos, como mostrado na figura abaixo.



Reconstrução com conversor de ordem zero (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

CONVERSOR DIGITAL-ANALÓGICO (cont.)

O uso dessa abordagem traz os seguintes efeitos indesejados:

(a) geração de grande quantidade de componentes de alta frequência;

(b) resposta em frequência do conversor não é mais plana.

No primeiro caso, podem ser aplicados filtros passa-baixo, ditos filtros de reconstrução, enquanto que, no segundo, podem ser usados filtros corretivos.

Outra alternativa é o aumento da taxa de atualização do conversor, que é a taxa com que ele atualiza seu valor, o que pode resolver ambos os efeitos indesejados.

Caso se gere uma sequência $x(n\Delta t)$ tal que $1/\Delta t$ é muito maior do que f_H e se o conversor é capaz de gerar o sinal apropriadamente, ter-se-á um sinal analógico $\hat{x}(t)$ bem mais suavizado, tal que $\hat{x}(t) \approx \tilde{x}(t)$ (vide figura acima).

→ Para bem aproximar o sinal desejado, usa-se capacidade máxima do conversor!

ERROS EM IDENTIFICAÇÃO E (RE)CONSTRUÇÃO

Caso o intervalo de amostragem e a frequência máxima não sejam corretamente especificados, podem ocorrer, de forma respectiva, erros na identificação e na reconstrução, como ilustrado abaixo.