ENERGIA, POTÊNCIA E CORRELAÇÃO DE SINAIS

SINAIS DE ENERGIA E SINAIS DE POTÊNCIA

A **energia total** E de um sinal x(t) pode ser dada por

$$\boxed{E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt} \quad (1)$$

Sinais cuja **energia** E é **finita** são ditos **sinais de energia** (→ transientes).

Porém, há sinais cuja energia é infinita. Para eles, usa-se o conceito de potência.

A **potência média** P de um sinal y(t) pode ser dada por

$$\boxed{P = \lim_{T \to \infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y^2(t)dt \right]} \quad (2)$$

Sinais de **potência média** P **finita** são ditos **sinais de potência** (→ harmônicos).

DENSIDADE ESPECTRAL DE ENERGIA

Seja um sinal de energia f(t), cuja transformada de Fourier é $\overline{F}(\omega)$. Portanto,

$$\overline{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = F(\omega)e^{i\phi(\omega)} \quad (3)$$

em que $F(\omega)$ é o módulo (que corresponde ao espectro de amplitude) e $\phi(\omega)$ é o argumento (que corresponde ao espectro de fase).

A **densidade espectral de energia** $E_{ff}(\omega)$ do sinal f(t) é definida por

$$\boxed{E_{ff}(\omega) = \left|\overline{F}(\omega)\right|^2 = \overline{F}(\omega)\overline{F}^*(\omega)} \quad (4)$$

Ocorre que

$$\overline{F}^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt = \overline{F}(-\omega) = F(-\omega)e^{i\phi(-\omega)} = F(\omega)e^{-i\phi(\omega)} \quad (5)$$

DENSIDADE ESPECTRAL DE ENERGIA (cont.)

Portanto, tem-se que

$$E_{ff}(\omega) = \left|\overline{F}(\omega)\right|^2 = \overline{F}(\omega)\overline{F}^*(\omega) = F(\omega)e^{i\phi(\omega)}F(\omega)e^{-i\phi(\omega)} = \left[F(\omega)\right]^2 e^{i\left[\phi(\omega)-\phi(\omega)\right]}$$

ou seja,

$$\boxed{E_{ff}(\omega) = \left[F(\omega)\right]^2} \quad (6)$$

onde $\left[F(\omega)\right]^2$, doravante representado apenas por $F^2(\omega)$, é o espectro de amplitude do sinal f(t) ao quadrado.

→ A expressão acima mostra que a **densidade espectral de energia** de um sinal de energia é igual ao **espectro de amplitude** desse sinal **ao quadrado**.

Portanto, a <u>densidade espectral de energia</u> é uma <u>função real da frequência</u>.

AUTOCORRELAÇÃO

A **autocorrelação** $R_{ff}(t)$ de um sinal de energia f(t) é definida por

$$\boxed{R_{ff}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)f(t+\tau)d\tau} \quad (7)$$

Mostra-se que a **autocorrelação** de um sinal de energia é igual à **transformada inversa de Fourier** de sua **densidade espectral de energia**. Ou seja,

$$\boxed{R_{ff}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E_{ff}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega} \quad (8)$$

Isso decorre do fato de que, a princípio, tem-se

$$R_{ff}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E_{ff}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\bar{F}(\omega)\bar{F}^{*}(\omega)\right]e^{i\omega t}\,d\omega$$

AUTOCORRELAÇÃO (cont.)

Ocorre que, pela propriedade de inversão da transformada de Fourier,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\overline{F}(\omega)\overline{F}^{*}(\omega)\right]e^{i\omega t}\,d\omega = f(t)*f(-t)$$

Assim,

$$R_{ff}(t) = f(t)*f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\sigma)f(-\sigma)d\sigma$$

Por $\tau = -\sigma$, vem $d\tau = -d\sigma$. Levando na expressão acima, chega-se na Eq. (7), pois

$$R_{ff}(t) = \int_{\infty}^{-\infty} f(t+\tau)f(\tau)(-d\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)f(t+\tau)d\tau\ .$$

→ A **autocorrelação** é uma **medida da autossimilaridade de um sinal** (ou seja, ele com ele próprio) **após** um certo **deslocamento temporal**, dado acima por t.

EXEMPLO – AUTOCORRELAÇÃO DE PULSO RETANGULAR

Seja f(t) um pulso retangular, mostrado ao lado.

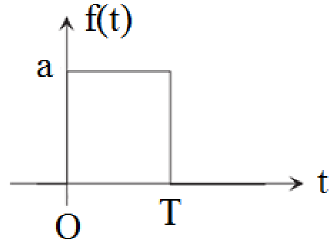
Trata-se de um sinal de energia, cuja autocorrelação pode ser dada por

$$R_{ff}(t) = \int_0^T f(\tau)f(t+\tau)d\tau$$

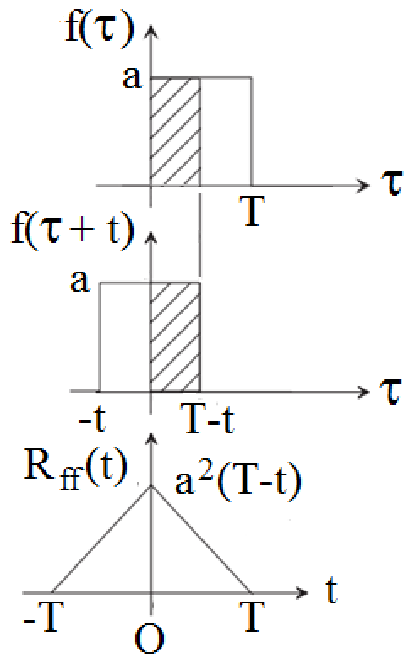
Ocorre que a autocorrelação é uma função par (vide Apêndice). Resulta, então, que

$$R_{ff}(t) = \int_0^{T-t} a^2 d\tau = \begin{cases} a^2(T-|t|), & |t| \le T \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Essa autocorrelação é ilustrada ao lado.



Pulso retangular (© D.Rowell, 2008)



Autocorrelação (© D.Rowell, 2008)

DENSIDADE ESPECTRAL DE ENERGIA CRUZADA E CORRELAÇÃO CRUZADA

Sejam agora f(t) e g(t) dois sinais de energia, cujas transformadas de Fourier são denotadas, respectivamente, por $\bar{F}(\omega)$ e $\bar{G}(\omega)$.

A **densidade espectral de energia cruzada** $\bar{E}_{fg}(\omega)$ de f(t) e g(t) é definida por

$$\boxed{\bar{E}_{fg}(\omega) = \bar{F}^*(\omega)\bar{G}(\omega)} \quad (9)$$

Em geral, a densidade espectral de energia cruzada é uma função complexa da frequência.

Já a **correlação cruzada** $R_{fg}(t)$ entre os sinais f(t) e g(t) é definida por

$$\boxed{R_{fg}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t+\tau)d\tau} \quad (10)$$

DENSIDADE ESPECTRAL DE ENERGIA CRUZADA

E CORRELAÇÃO CRUZADA (cont.)

Mostra-se que a **correlação cruzada** é igual à **transformada inversa de Fourier** da **densidade espectral de energia cruzada**.

Ou seja,

$$\boxed{R_{fg}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{E}_{fg}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega} \qquad (11)$$

Isso decorre do fato de que

$$R_{fg}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{E}_{fg}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\overline{F}^{*}(\omega)\,\overline{G}(\omega)\right] e^{i\omega t}\, d\omega = f(-t) * g(t)$$

DENSIDADE ESPECTRAL DE ENERGIA CRUZADA

E CORRELAÇÃO CRUZADA (cont.)

Portanto,

$$R_{fg}(t) = f(-t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(-\sigma)\, g(t-\sigma)\, d\sigma$$

De $\tau = -\sigma$ e $d\tau = -d\sigma$ na expressão acima, chega-se na Eq. (10), pois

$$R_{fg}(t) = \int_{\infty}^{-\infty} f(\tau)\, g(t+\tau)(-d\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t+\tau)\, d\tau \;.$$

→ A **correlação cruzada** mede a **similaridade entre dois sinais distintos com um certo deslocamento temporal** entre eles, indicado acima por t.

Conceitos análogos de autocorrelação, correlação cruzada e densidades espectrais de potência e potência cruzada também são formulados **para sinais de potência**. Nesses casos, introduz-se nas definições o divisor T, como exposto a seguir.

SINAIS DE POTÊNCIA – CORRELAÇÕES E DENSIDADES ESPECTRAIS

Para sinais de potência u(t) e v(t), são empregadas as seguintes definições:

autocorrelação

$$R_{uu}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(\tau)\,u(t+\tau)\,d\tau \qquad (12)$$

densidade espectral de potência

$$S_{uu}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{uu}(t)\,e^{-i\omega t}\,dt \qquad (13)$$

correlação cruzada

$$R_{uv}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(\tau)\,v(t+\tau)\,d\tau \qquad (14)$$

densidade espectral de potência cruzada

$$S_{uv}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{uv}(t)\,e^{-i\omega t}\,dt \qquad (15)$$

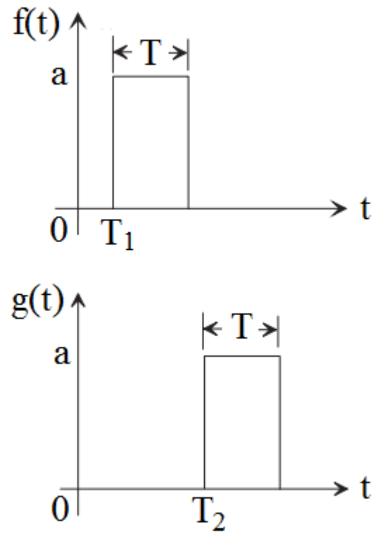
EXEMPLO – CORRELAÇÃO CRUZADA DE PULSOS RETANGULARES

De início, considere-se o caso de dois pulsos retangulares, f(t) e g(t), mostrados ao lado, em que g(t) é uma versão deslocada de f(t).

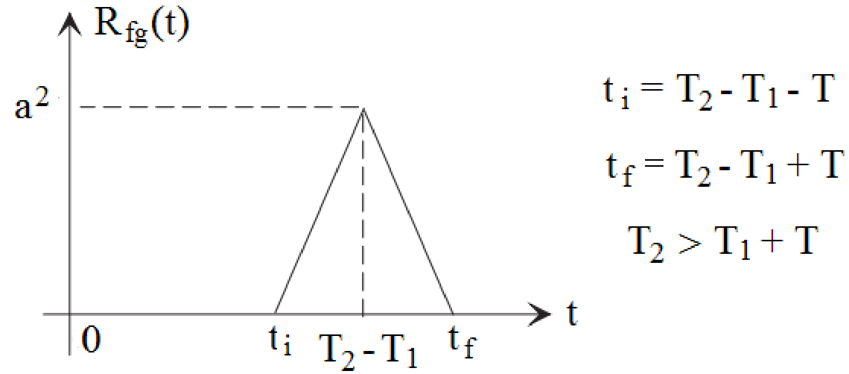
São sinais de energia, cuja correlação cruzada pode ser dada por

$$R_{fg}(t) = \int_{T_1}^{T_1+T} f(\tau)\, g(t+\tau)\, d\tau$$

A correlação cruzada passa a ser diferente de 0 quando $t = T_2 - (T_1 + T)$, alcança valor máximo quando $t = T_2 - T_1$ e volta a ser 0 a partir de $t = T_2 + T - T_1$, como visto ao lado.



Pulsos retangulares (© D.Rowell, 2008)



Correlação cruzada (© D.Rowell, 2008)

EXEMPLO – AUTOCORRELAÇÃO DE SINAL HARMÔNICO

Seja um sinal harmônico $x(t) = X\text{sen}(\omega t + \phi)$. Tem-se, agora, um sinal de potência finita, cuja autocorrelação pode ser calculada ao longo de um período T por

$$R_{xx}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T x(\tau)\,x(t+\tau)\,d\tau$$

Decorre, então, que

$$R_{xx}(t) = \frac{\omega}{2\pi}.X^2 \int_0^{2\pi/\omega} \text{sen}(\omega\tau + \phi)\,\text{sen}\left[\omega(t+\tau) + \phi\right] d\tau$$

Como $\text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta) = 0,5\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right]$, resulta que

$$R_{xx}(t) = \frac{X^2}{2}\cos(\omega t)\ .$$

→ Esta autocorrelação possui frequência ω e é independente da fase ϕ !

EXEMPLO – CORRELAÇÃO CRUZADA DE SINAIS HARMÔNICOS

Sejam agora os sinais harmônicos $x(t) = X\text{sen}(\omega t + \phi_x)$ e $y(t) = Y\text{sen}(\omega t + \phi_y)$.

Para tais sinais de potência finita, a correlação cruzada pode ser calculada por

$$R_{xy}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T x(\tau)\,y(t+\tau)d\tau$$

Tem-se, então, que

$$R_{xy}(t) = \frac{\omega}{2\pi}.XY\int_0^{2\pi/\omega} \text{sen}(\omega\tau + \phi_x)\text{sen}\left[\omega(t+\tau) + \phi_y\right]d\tau$$

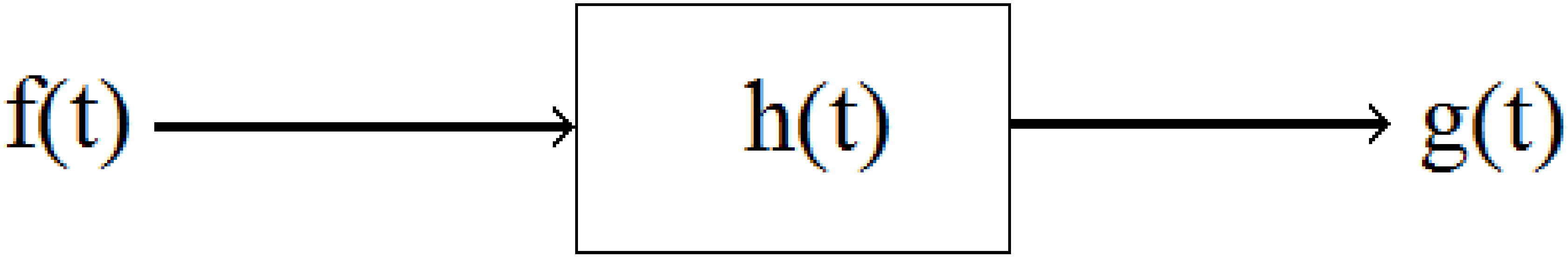
Como $\text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta) = 0{,}5\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$, resulta que

$$R_{xy}(t) = \frac{XY}{2}\cos\left[\omega t - (\phi_x - \phi_y)\right].$$

→ Esta correlação cruzada possui frequência ω e ‘indica’ a fase relativa $\phi_x - \phi_y$!

IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMA LTI

Seja um sistema LTI, cuja função resposta ao impulso é h(t). Esse sistema é submetido a uma entrada f(t), com saída correspondente igual a g(t), como mostrado abaixo. Considera-se que tanto f(t) quanto g(t) são sinais de energia.



Entrada e saída em um sistema LTI

Sabe-se que, para sistemas LTI,

$$\boxed{g(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau} \quad (16) \qquad \text{e} \qquad \boxed{\bar{G}(\omega) = \bar{F}(\omega)\bar{H}(\omega)} \quad (17)$$

IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMA LTI (cont.)

Da Eq. (17), em que $\bar{G}(\omega) = \bar{F}(\omega)\bar{H}(\omega)$, tem-se que

$$\bar{G}(\omega)\bar{G}^*(\omega) = \bar{F}(\omega)\bar{H}(\omega)\bar{F}^*(\omega)\bar{H}^*(\omega) = \bar{F}(\omega)\bar{F}^*(\omega)\bar{H}(\omega)\bar{H}^*(\omega)$$

Decorre, portanto, que

$$E_{gg}(\omega) = E_{ff}(\omega)\left|\bar{H}(\omega)\right|^2 \quad (18) \qquad \text{e} \qquad R_{gg}(t) = R_{ff}(t) * h(t) * h(-t) \quad (19)$$

Também da Eq. (17), tem-se que

$$\bar{F}^*(\omega)\bar{G}(\omega) = \bar{F}^*(\omega)\bar{F}(\omega)\bar{H}(\omega)$$

Portanto,

$$\bar{E}_{fg}(\omega) = E_{ff}(\omega)\bar{H}(\omega) \quad (20) \qquad \text{e} \qquad R_{fg}(t) = R_{ff}(t) * h(t) \quad (21)$$

→ De (20): **FRF do sistema** $\boxed{\bar{H}(\omega) = \bar{E}_{fg}(\omega) \big/ E_{ff}(\omega)}$ (22) (alternativa 1)

IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMA LTI (cont.)

Alternativamente, ainda da Eq. (17), em que $\overline{G}(\omega)=\overline{F}(\omega)\overline{H}(\omega)$, constata-se que

$$\overline{G}^*(\omega)\overline{G}(\omega)=\overline{G}^*(\omega)\overline{F}(\omega)\overline{H}(\omega)$$

Resulta, pois, que

$$E_{gg}(\omega)=\overline{E}_{gf}(\omega)\overline{H}(\omega) \quad (23) \qquad \text{e} \qquad R_{gg}(t)=R_{gf}(t)*h(t) \quad (24)$$

→ De (23): **FRF do sistema** $\boxed{\overline{H}(\omega)=E_{gg}(\omega)/\overline{E}_{gf}(\omega)}$ (25) (alternativa 2)

Embora válidas para sinais determinísticos, as Eqs. (22) e (25) realmente desempenham papel proeminente na análise de sinais aleatórios, quando são empregadas em associação com a teoria da probabilidade.

A exposição acima firma bases e lança conexões para desenvolvimentos futuros.

TEOREMA DE PARSEVAL E DENSIDADE ESPECTRAL DE ENERGIA

Seja agora um sinal de energia f(t). Sua energia total, cf. Eq. (1), é dada por

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt \quad (26)$$

Sua densidade espectral de energia, denotada por $E_{ff}(\omega)$, é, cf. Eq. (4), dada por

$$E_{ff}(\omega) = \left|\overline{F}(\omega)\right|^2 = \overline{F}(\omega)\overline{F}^*(\omega) \quad (27)$$

Prova-se, das Eqs. (26) e (27), que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E_{ff}(\omega)d\omega} \quad (28) \quad \rightarrow E_{ff}(\omega) \text{ é } \textbf{densidade}!$$

Esse resultado, demonstrado a seguir, é conhecido como **teorema de Parseval**.

TEOREMA DE PARSEVAL E DENS. ESPECTRAL DE ENERGIA (cont.)

A Eq. (28) decorre de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)f^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{F}(\omega)e^{i\omega t}d\omega\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{F}^*(\Omega)e^{-i\Omega t}d\Omega\right]dt$$

Manipulando a expressão acima, obtém-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{F}(\omega)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{F}^*(\Omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-i\Omega t}e^{i\omega t}\right)dt\right]d\Omega\right\}d\omega$$

Aplicando acima tanto a descrição alternativa quanto a propriedade de deslocamento da função delta de Dirac, resulta que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{F}(\omega)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{F}^*(\Omega)\left[2\pi\delta(\Omega-\omega)\right]d\Omega\right\}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{F}(\omega)\overline{F}^*(\omega)d\omega$$

TEOREMA DE PARSEVAL E DENS. ESPECTRAL DE ENERGIA (cont.)

Portanto, do desenvolvimento anterior, tem-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{F}(\omega)\overline{F}^*(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\overline{F}(\omega)\right|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E_{ff}(\omega)d\omega$$

como se havia antecipado.

Do teorema de Parseval, observa-se que a grandeza $E_{ff}(\omega)$ é mesmo uma **densidade espectral de energia**, posto que ela deve ser integrada ao longo da frequência (variável independente) para fornecer a energia total.

A densidade espectral de energia é, dessa forma, uma **medida da decomposição da energia do sinal ao longo da frequência**.

Tal como exposto antes, os desenvolvimentos análogos podem ser formulados para sinais de potência com a introdução do divisor T.

APÊNDICE – AUTOCORRELAÇÃO E CORRELAÇÃO CRUZADA

CARACTERÍSTICAS DA AUTOCORRELAÇÃO

A **autocorrelação** é uma função **par**, tal que $R_{ff}(t) = R_{ff}(-t)$. Por definição,

$$R_{ff}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)f(t+\sigma)d\sigma \quad \therefore \quad R_{ff}(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)f(\sigma-t)d\sigma$$

Fazendo $\tau = \sigma - t$, obtém-se $d\tau = d\sigma$ e $\sigma = \tau + t$. Substituindo acima, tem-se que

$$R_{ff}(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)f(\sigma-t)d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau+t)f(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)f(\tau+t)d\tau = R_{ff}(t)\ .$$

Observa-se que, para t = 0, tem-se que

$$R_{ff}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\sigma)d\sigma$$

ou seja, o **valor da autocorrelação em t = 0** é **igual à energia do sinal** associado.

CARACTERÍSTICAS DA CORRELAÇÃO CRUZADA

Já a **correlação cruzada** é tal que $R_{fg}(-t) = R_{gf}(t)$. Isso decorre de que, se

$$R_{fg}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)\,g(t+\sigma)d\sigma \;, \quad R_{fg}(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)\,g(\sigma-t)d\sigma$$

Fazendo $\tau = \sigma - t$, obtém-se $d\tau = d\sigma$ e $\sigma = \tau + t$. Substituindo acima, tem-se que

$$R_{fg}(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)\,g(\sigma-t)d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau+t)\,g(\tau)d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(\tau+t)d\sigma = R_{gf}(t) \;.$$

Se a **correlação cruzada** $R_{fg}(t)$ é **nula** para todo t, diz-se, então, que os **sinais** f(t) e g(t) são **não correlacionados**.

A correlação cruzada é frequentemente utilizada na estimação de tempos de atraso, como, por exemplo, em sistemas de radar e sonar.