<u>**ANÁLISE DE SINAIS ALEATÓRIOS**</u> (MÉDIAS E VARIÂNCIA)

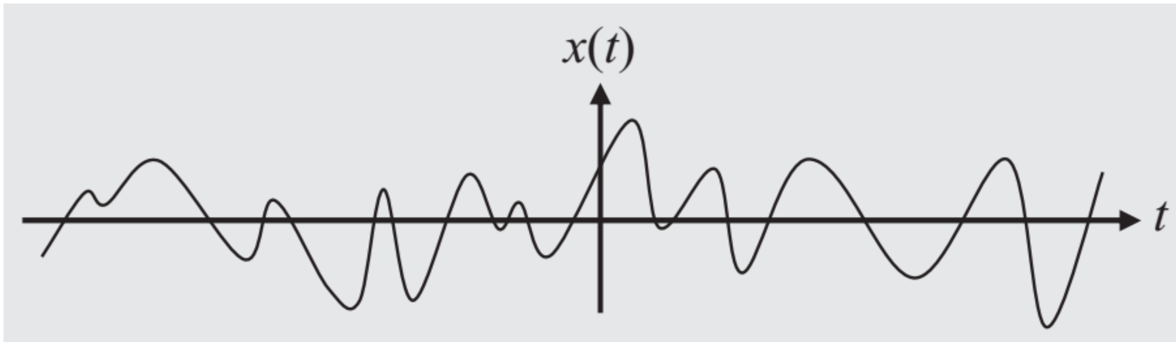
INTRODUÇÃO

Um **sinal aleatório**, ou não determinístico, é um sinal cuja **história temporal não pode ser predita** (antecipada) **de forma exata**. São exemplos de sinais aleatórios:

– a vibração num ponto de um chassi de veículo ao longo de uma estrada;

– a pressão acústica num dado ponto de um auditório em um show.

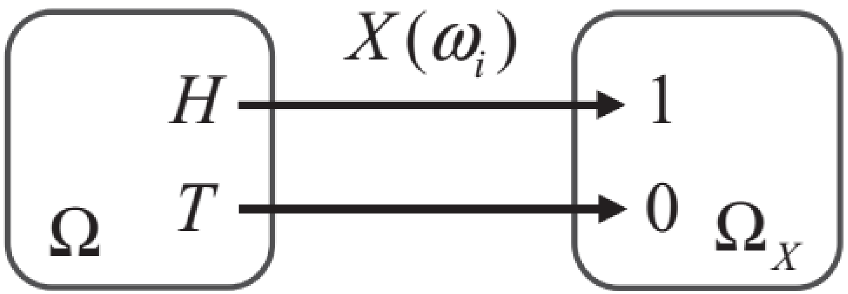
A **abordagem** dos sinais aleatórios se dá pela **teoria da probabilidade**, em especial através dos conceitos de **variáveis aleatórias** e **processos estocásticos**.



Amostra de sinal não determinístico (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Uma **variável aleatória** é uma função que atribui um **número real** a cada resultado de um experimento aleatório, como, por exemplo, o lançamento de uma moeda ou a medição do tempo de vida útil de uma lâmpada.



Variável aleatória X no lançamento de um moeda (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

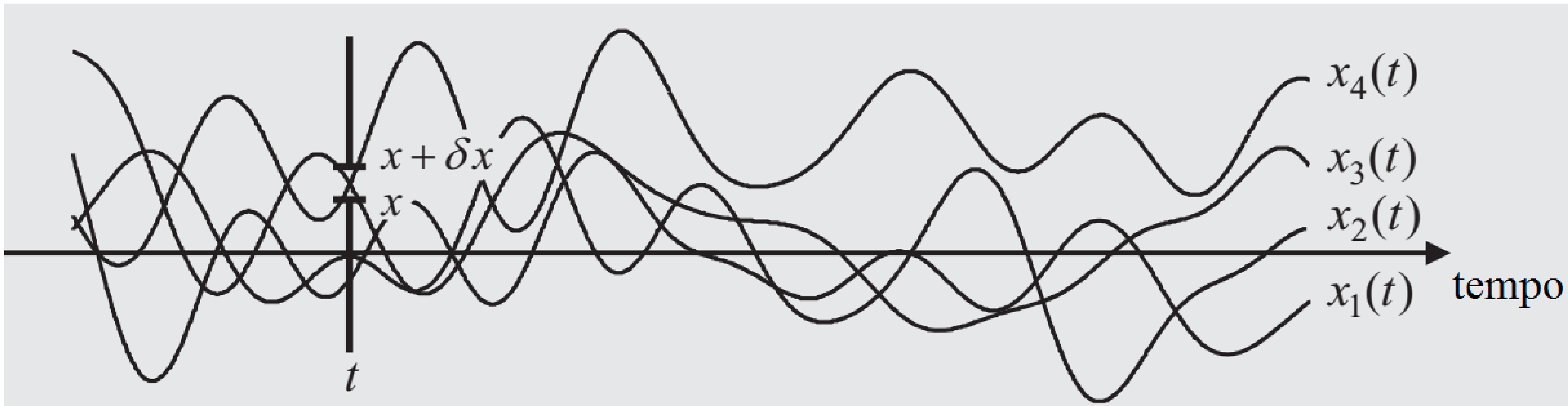
Já um **processo estocástico** é uma função que atribui a cada resultado de um experimento aleatório uma **função do tempo**. Ele gera, assim, uma **família de funções temporais aleatórias**, cada uma delas associada a um resultado.

→ Processo estocástico: coleção de variáveis aleatórias indexadas pelo tempo.

SINAIS ALEATÓRIOS E PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Nessa abordagem, cada **sinal aleatório** individual é considerado como um **resultado simples de um experimento**, ou, formalmente, uma **realização de um processo estocástico**. O sinal pode ser finito ou infinito ($-\infty < t < \infty$).

O caráter aleatório introduz a necessidade de se produzir realizações adicionais, que podem ser concebidas como resultados de experimentos idênticos realizados em paralelo. Um **conjunto de realizações** é dito, em inglês, um ***ensemble***.



Conjunto de realizações (→ v.a. a cada t) (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

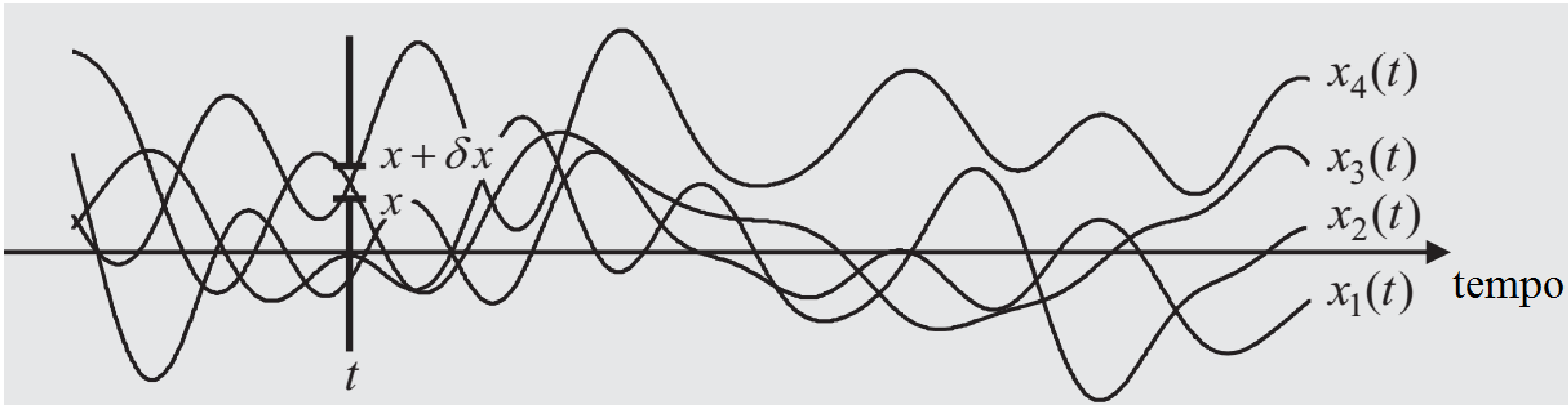
FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE

A **função distribuição de probabilidade** num certo tempo t para um processo estocástico X(t) é definida como

$$F(x,t) = P\left[X(t) \le x\right] \quad (1)$$

onde x é um particular valor de X(t). Portanto,

$$P\left[x < X(t) \le x + \delta x\right] = F(x+\delta x, t) - F(x,t) \quad (2)$$



Conjunto de realizações (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

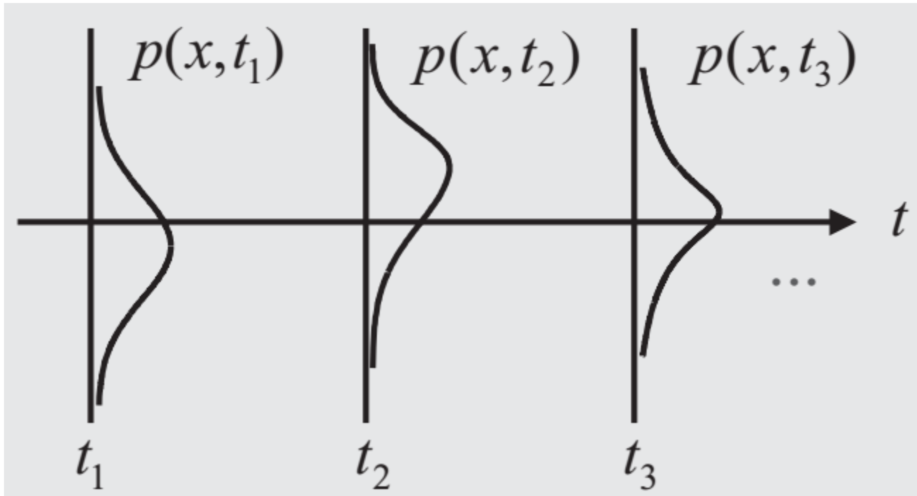
FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE

Já a **função densidade de probabilidade** correspondente é definida por

$$p(x,t) = \frac{dF(x,t)}{dx} \quad (3)$$

Observa-se que a função densidade de probabilidade p(x,t), para um dado processo estocástico, também **depende do tempo**, como ilustrado ao lado.

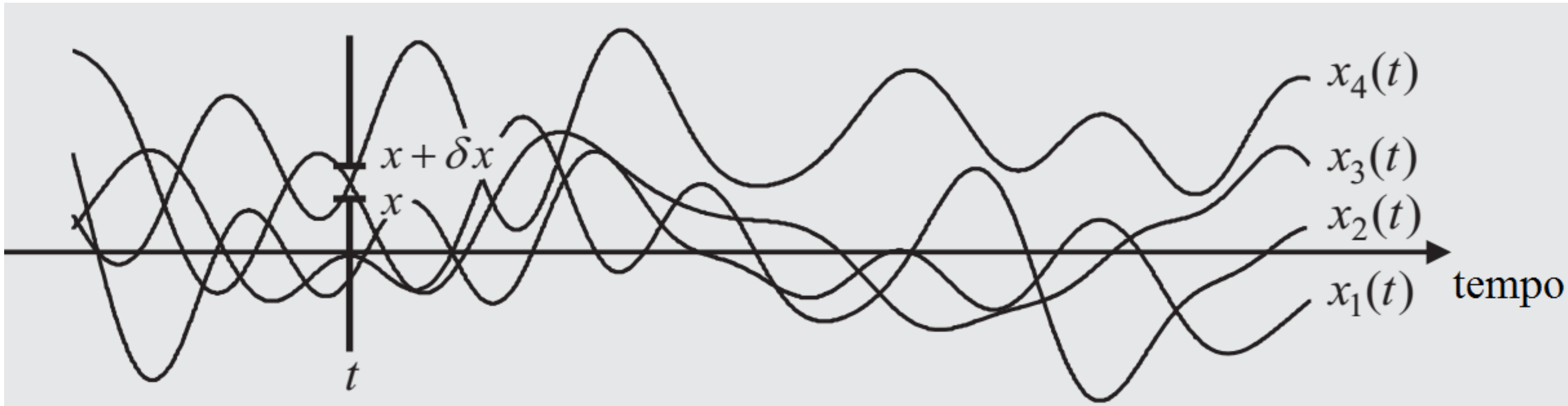
Das Eqs. (1) a (3), nota-se que a **probabilidade de um evento** pode ser obtida pela **integração da função densidade de probabilidade** associada.



Função densidade de probabilidade de um processo estocástico (©Wiley, Shin & Hammond, 2008)

DISTRIBUIÇÃO E DENSIDADE DE PROBABILIDADE – INTERPRETAÇÃO

Uma forma de se interpretar as funções definidas anteriormente é a seguinte. Reúna-se todo o conjunto de realizações obtidas num único diagrama e construa-se um canal num certo tempo t qualquer, como ilustrado abaixo.



Conjunto de realizações (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

Conta-se, então, o número de sinais que passa pelo canal (diga-se, k), bem como o número total de sinais (diga-se, N).

Então, a **frequência relativa de ocorrência** de X(t) naquele canal é k/N.

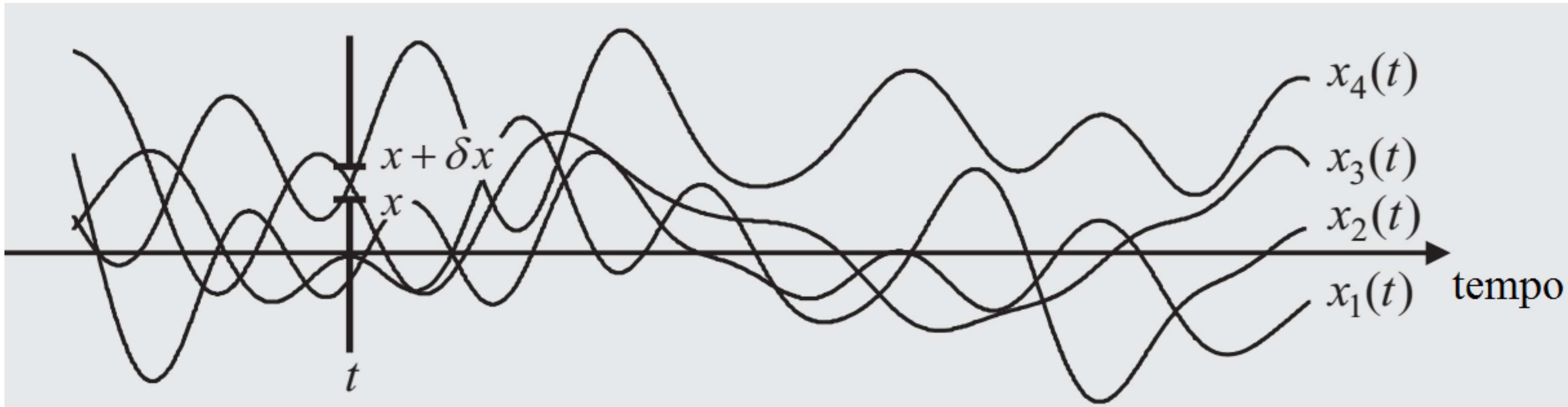
DIST. E DENSIDADE DE PROBABILIDADE – INTERPRETAÇÃO (cont.)

Assim, à medida que N cresce (tendendo a infinito), pode-se dizer que

$$\rightarrow \text{probabilidade} \quad P\left[x < X(t) \le x + \delta x\right] \quad \text{é estimada por} \quad k/N \ .$$

Em correspondência, face à definição, tem-se que

$$\rightarrow \quad p(x,t) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{P\left[x < X(t) \le x + \delta x\right]}{\delta x} = \lim_{\substack{\delta x \to 0 \\ N \to \infty}} \left(\frac{k}{\delta x \ N} \right) .$$



Conjunto de realizações (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

VALOR MÉDIO, MÉDIA QUADRÁTICA E VARIÂNCIA

Para **processos estocásticos**, a partir da função densidade de probabilidade, são definidas, via integração, as seguintes funções:

a) **Valor médio**

$$\mu_x(t) = E\left[X(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x,t) dx \quad (4)$$

b) **Média quadrática**

$$E\left[X^2(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x,t) dx \quad (5)$$

c) **Variância**

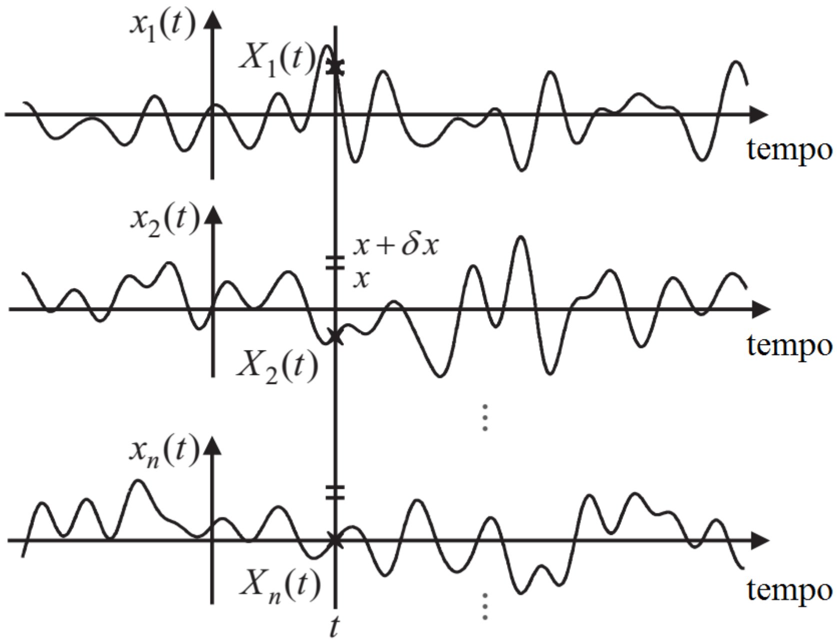
$$\mathrm{Var}\big(X(t)\big) = \sigma_x^2(t) = E\left\{\left[X(t) - \mu_x(t)\right]^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x - \mu_x(t)\right]^2 p(x,t) dx \quad (6)$$

→ Prova-se que $\sigma_x^2(t) = E\left[X^2(t)\right] - \mu_x^2(t) \quad (7)$.

OPERADOR VALOR ESPERADO E VALOR MÉDIO

O **operador valor esperado** (esperança) **E[...]**, indicado nas Eqs. (4) a (6), pode ser interpretado como uma **média no conjunto de realizações**. Assim, tem-se que

- valor médio $$\mu_x(t) = E\left[X(t)\right] = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}X_n(t) \quad (8)$$



Exemplo de valor médio de conjunto (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

OPERADOR VALOR ESPERADO, MÉDIA QUADRÁTICA E VARIÂNCIA

Já para a média quadrática e a variância, cabem as seguintes interpretações:

- média quadrática

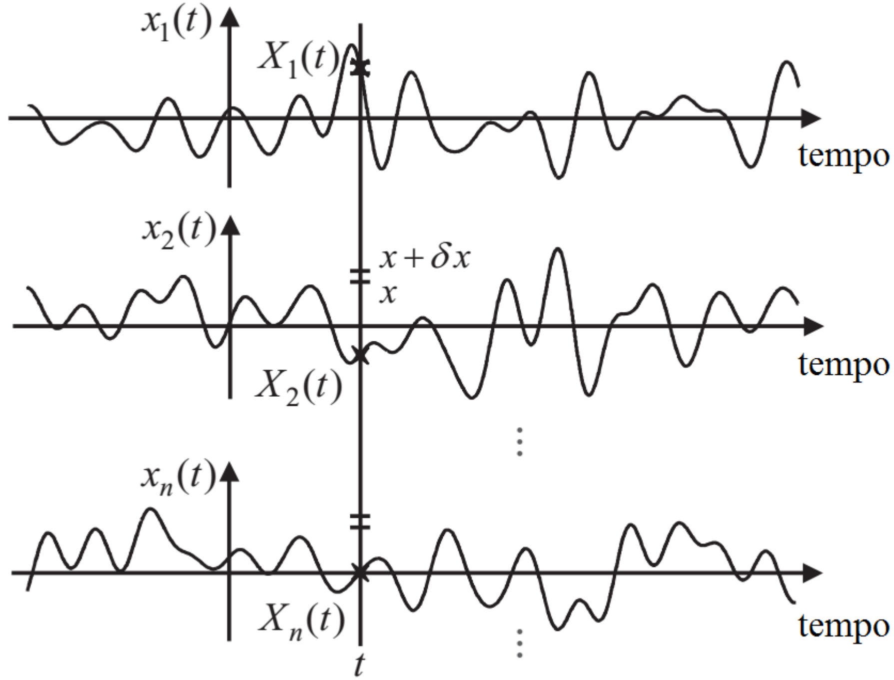
$$E\left[X^2(t)\right] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n^2(t) \quad (9)$$

- variância

$$\sigma_x^2(t) = E\left\{\left[X(t)-\mu_x(t)\right]^2\right\}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}\left[X_n(t)-\mu_x(t)\right]^2 \quad (10)$$

onde $\mu_x(t)$ é dada pela Eq. (8).



Exemplo de média de conjunto
(©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

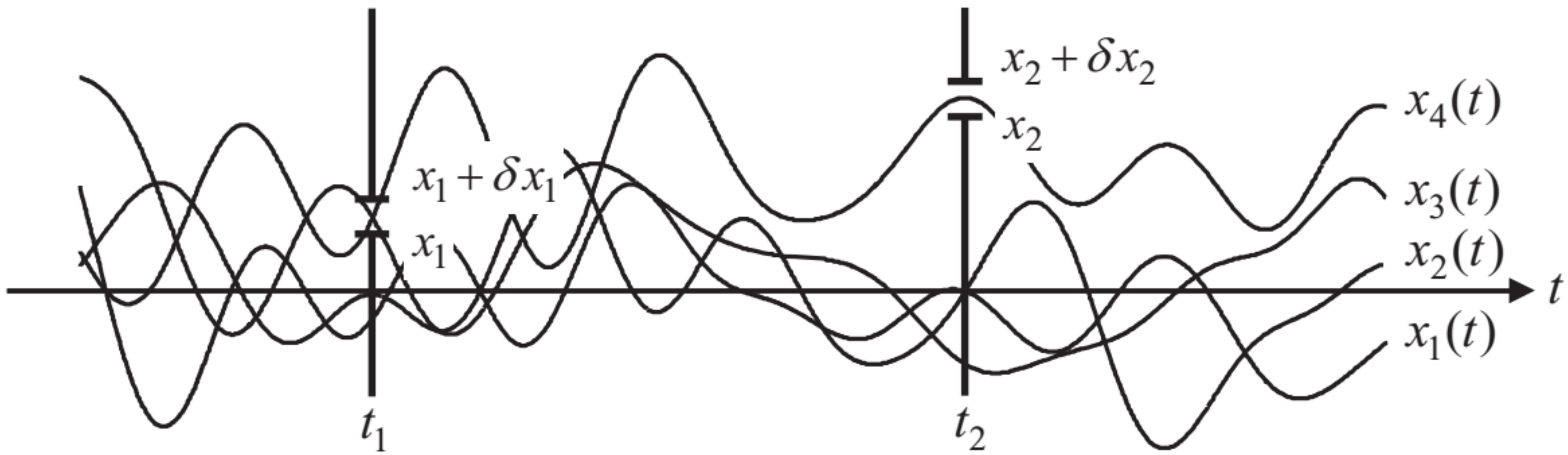
Como já exposto, $\sigma_x^2(t) = E[X^2(t)] - \mu_x^2(t)$ ($\rightarrow$ relação com os valores médios).

FUNÇÕES PROBABILÍSTICAS CONJUNTAS

É relevante descrever **como um processo se altera à medida que o tempo passa**, ou como um processo se associa consigo mesmo em distintos instantes de tempo.

Isso se dá pela definição das **funções distribuição de probabilidade conjunta e densidade de probabilidade conjunta**, associadas a intervalos específicos.

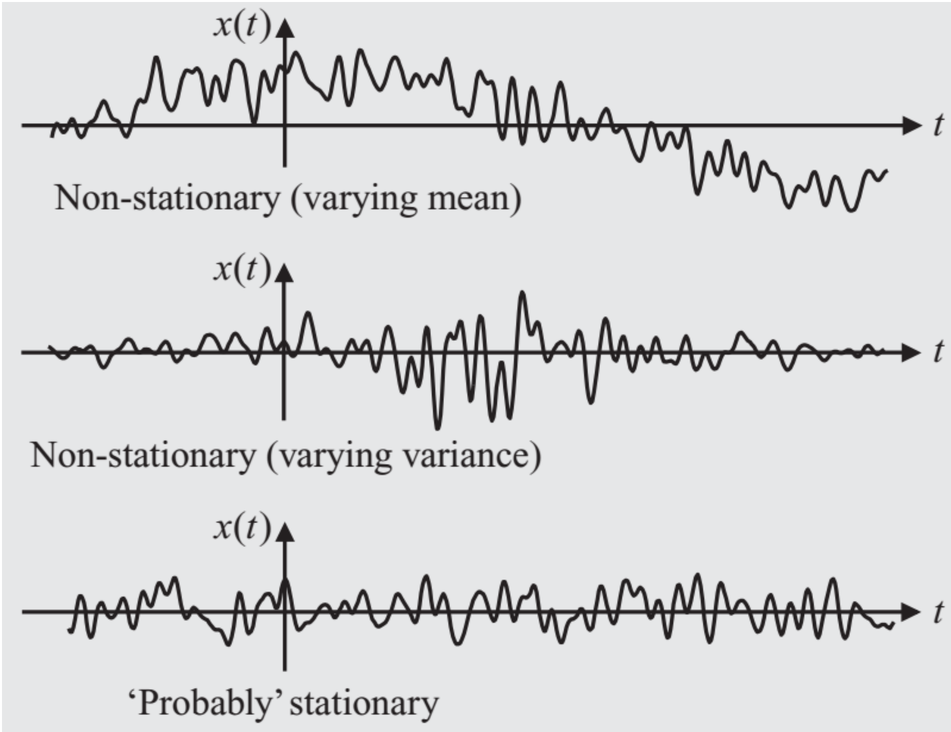
Na figura abaixo, são representados, por exemplo, dois intervalos, em t_1 e t_2 .



Visão de função densidade de probabilidade conjunta (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

ESTACIONARIEDADE

Em geral, as propriedades probabilísticas de um processo estocástico, como, por exemplo, média e variância, dependem do tempo, como ilustrado abaixo.



Amostras de processos estacionário e não estacionário (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

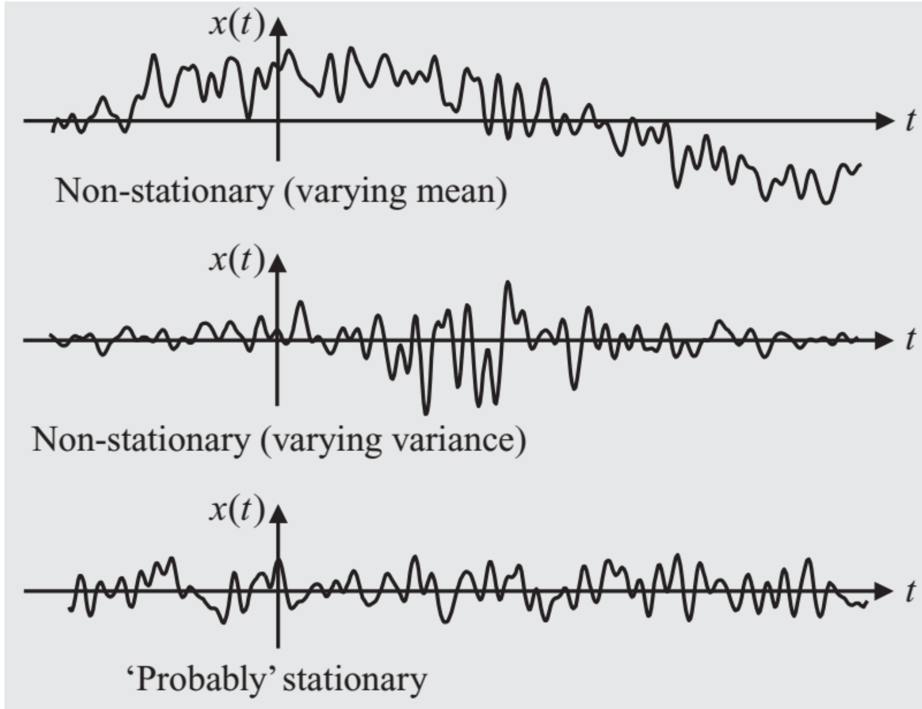
Porém, por conveniência, de forma frequente, assumem-se simplificações.

ESTACIONARIEDADE (cont.)

Se as hipóteses simplificadoras são menos restritas quanto à dependência no tempo, o **processo** é dito **fracamente estacionário**, ou apenas **estacionário**.

Se as restrições são mais amplas, como se verá doravante, diz-se que o processo é **totalmente estacionário**.

Via de regra, os **processos de interesse prático** são **não estacionários**.



Amostras de processos estacionário e não estacionário (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

Ocorre que a **hipótese de estacionariedade fraca** fornece uma **aproximação suficientemente próxima** em vários casos. Isso, então, será considerado adiante.

HIPÓTESES DE ESTACIONARIEDADE

As hipóteses de estacionariedade dizem respeito à dependência temporal das funções densidade de probabilidade. Pode-se considerar que:

a) densidade de probabilidade p(x,t) = p(x). Isso significa que $\mu_x(t) = \mu_x$ e $\sigma_x^2(t) = \sigma_x^2$, ou seja, <u>a média e a variância são constantes</u>;

b) densidade conjunta $p(x_1, t_1; x_2, t_2) = p(x_1, t_1 + T; x_2, t_2 + T)$, ou seja, tem-se uma <u>função da diferença de tempo</u> $(t_2 - t_1)$, e não dos tempos individuais t_2 e t_1.

c) $p(x_1, t_1; x_2, t_2; \ldots; x_k, t_k) = p(x_1, t_1 + T; x_2, t_2 + T; \ldots; x_k, t_k + T)$ para todo k.

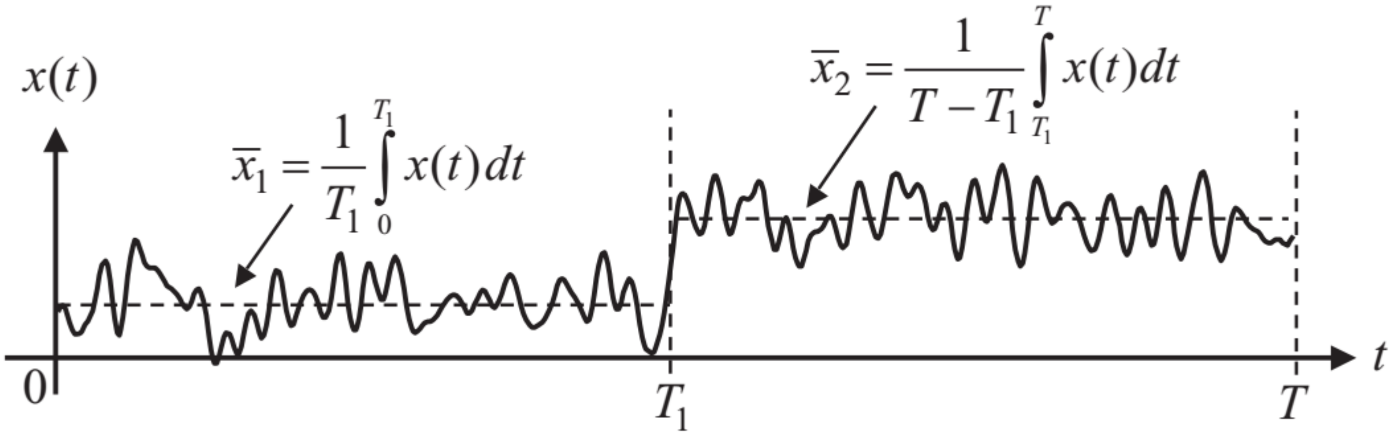
Um processo é dito **fracamente estacionário**, ou só **estacionário**, se ele atende as condições (a) e (b), e **totalmente estacionário** se atende também a condição (c).

MÉDIAS TEMPORAIS

Não raro também, há um **único registro temporal do fenômeno de interesse**, ao invés de um conjunto de registros. Nesses casos, as médias não podem ser efetuadas ao longo das realizações e devem ser tomadas ao longo do tempo.

→ São, portanto, **médias temporais**, **e não médias de conjunto**.

Implicitamente, a **estacionariedade** é uma **condição necessária** para que as médias temporais sejam significativas. Caso contrário, não são (vide abaixo).



Valor médio variável de um sinal não estacionário (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

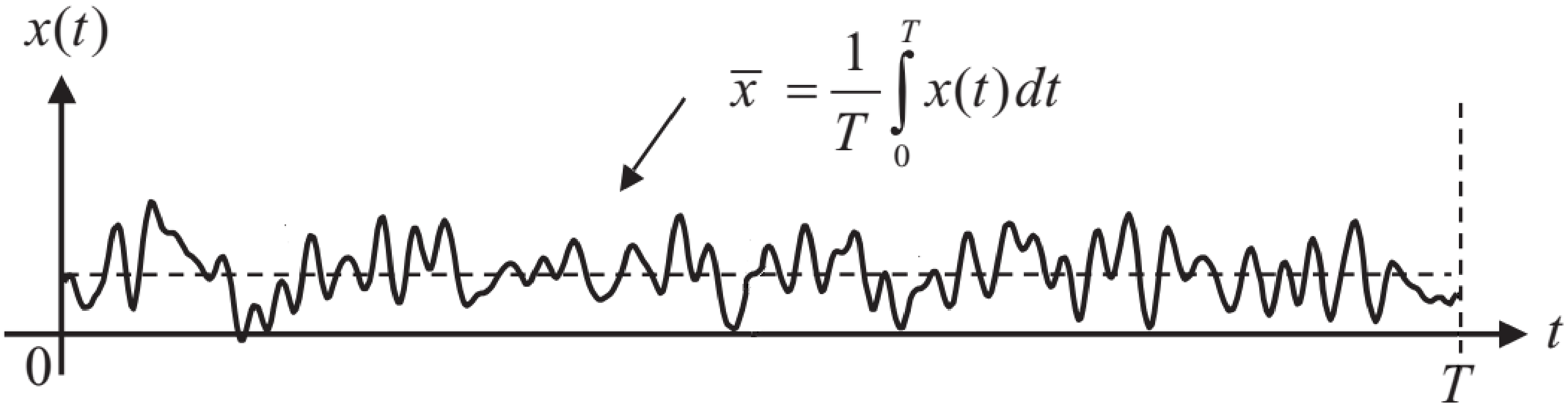
ERGODICIDADE

A **pergunta crucial** é a seguinte:

→ Médias temporais, obtidas a partir de um único registro do fenômeno, fornecem os mesmos resultados que médias de conjunto?

A **resposta** é: Algumas vezes. Quando isso ocorre, as **médias** são ditas **ergódicas**.

Um processo não pode ser simplesmente dito ergódico. A **ergodicidade** tem que estar **diretamente relacionada com o valor esperado** (média) **em questão**.



Valor médio temporal de um dado sinal (adap. de Shin & Hammond, 2008, ©Wiley)

ERGODICIDADE E VALOR MÉDIO

Com base no exposto acima, o **valor médio temporal** pode ser escrito como

$$\mu_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \quad (11) \quad \text{(ao longo de uma única história temporal)}$$

→ valor médio temporal (numericamente!) = valor médio de conjunto E[X(t)].

Se um **sinal de comprimento finito** T é considerado, então

a **estimativa do valor médio temporal** pode ser obtida de

$$\hat{\mu}_x = \overline{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \quad (12)$$

Para um **sinal amostrado**, com N amostras obtidas em intervalos de Δt, tem-se

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n\Delta t) \quad (13)$$

ERGODICIDADE, MÉDIA QUADRÁTICA E VALOR RMS

Ainda para um sinal de comprimento finito T,

a **estimativa da média quadrática temporal** é dada por

$$\hat{\psi}_x^2 = \overline{x^2} = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt \quad (14)$$

Já para um **sinal amostrado** correspondente, tem-se

$$\overline{x^2} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n\Delta t) \quad (15)$$

O valor da raiz da média quadrática, ou **valor rms** ("root mean square"), é a raiz quadrada positiva do valor obtido através das Eqs. (14) e (15) acima.

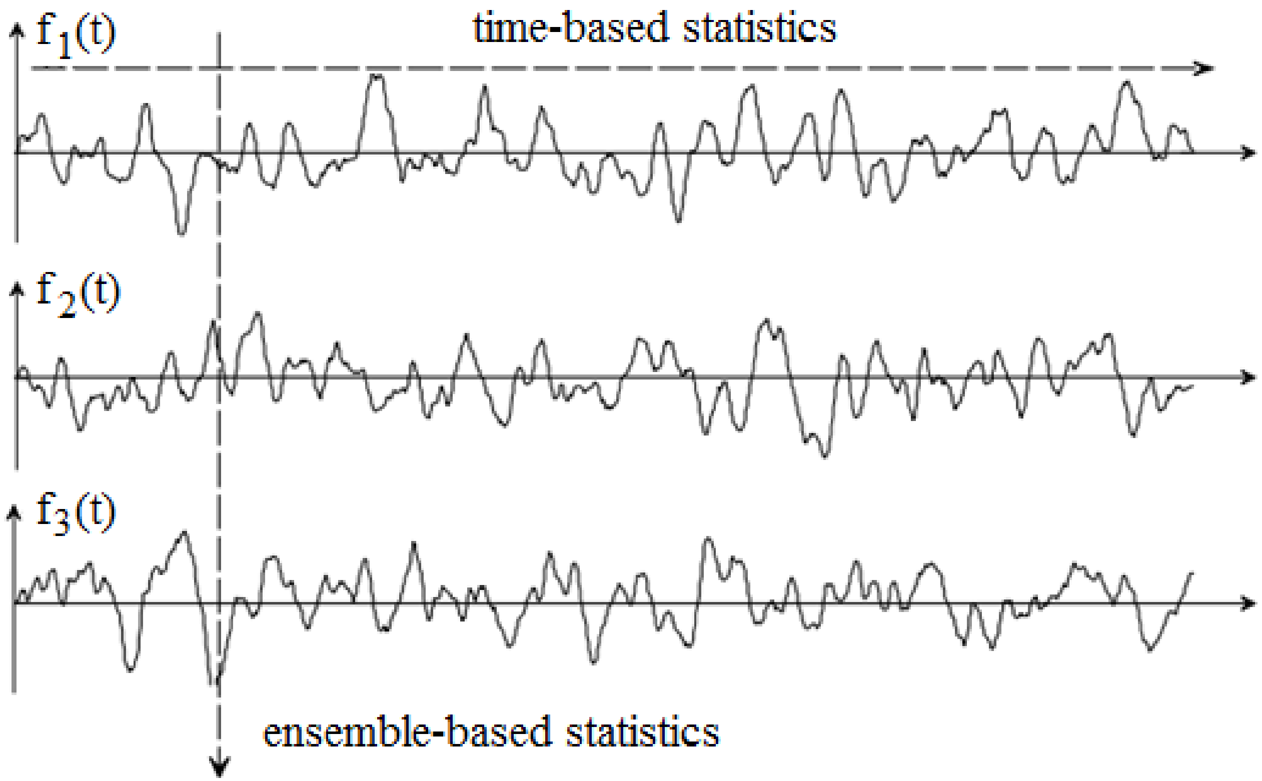
→ O **valor rms** é **frequentemente empregado em normas de vibrações**, para especificação de valores de referência (condição satisfatória ou não).

GRANDEZAS DE CONJUNTO E TEMPORAIS

Nota-se que as grandezas estatísticas de interesse podem ser calculadas ao longo de um conjunto de realizações ou via uma única realização, como visto abaixo.

→ processo estacionário: há grandezas estatísticas independentes do tempo;

→ processo ergódico: grandezas temporais e de conjunto são idênticas.



Abordagens de conjunto e temporal (© D.Rowell, 2008)