ANÁLISE DE SINAIS ALEATÓRIOS (CORRELAÇÕES E DENSIDADES)

AUTOCORRELAÇÃO

Um processo estocástico atribui a cada resultado de um experimento aleatório uma função do tempo. Assim, cada **sinal aleatório** é **realização de um processo**.

A função **autocorrelação** para um **processo estocástico** X(t) é dada por

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E\left[X(t_1)X(t_2)\right] \quad (1)$$

Essa função mede o **grau de associação de um processo**, no tempo t_1, **com ele próprio**, no tempo t_2. Trata-se, pois, de uma **medida** de associação **direta**.

Para **processos** (fracamente) **estacionários**, em que as propriedades estatísticas se mantêm constantes sob um deslocamento de tempo, a função **autocorrelação** é

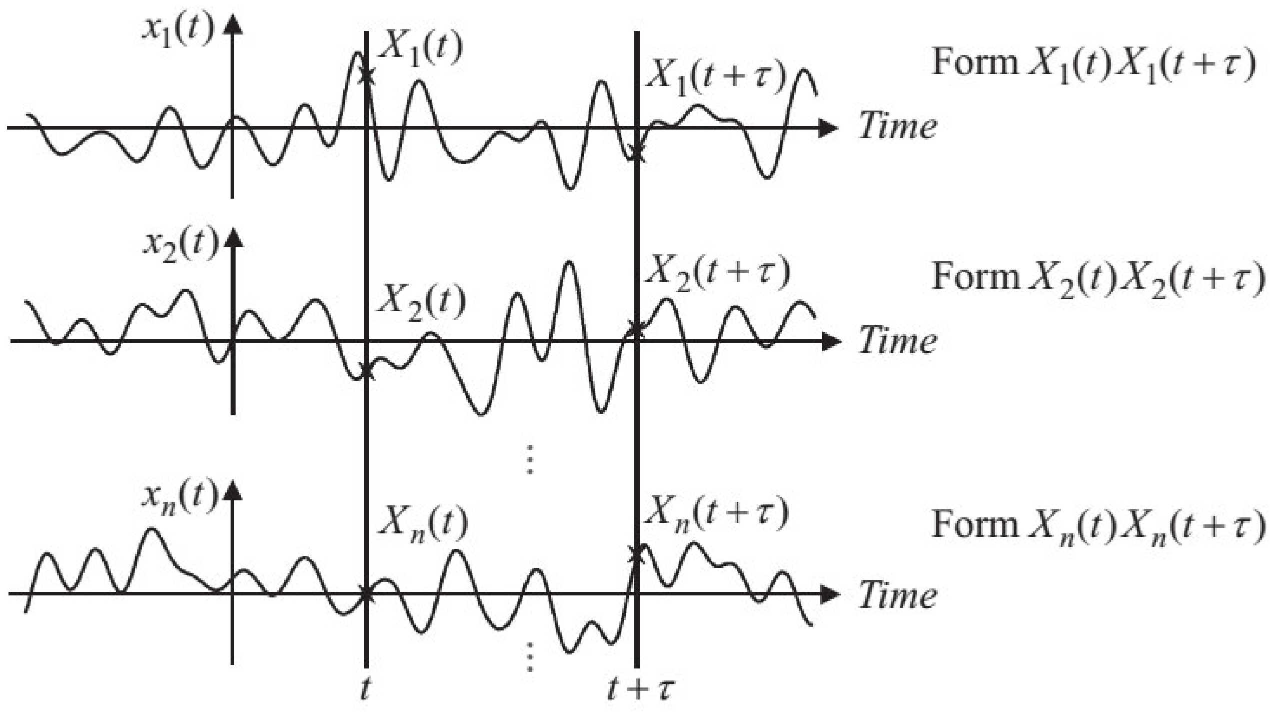
$$R_{xx}(\tau) = E\left[X(t)X(t+\tau)\right] \quad (2)$$

onde $\tau = t_2 - t_1$. Ou seja, a **autocorrelação** é **função** só da **diferença de tempo**.

AUTOCORRELAÇÃO (cont.)

Cabe a seguinte **interpretação da autocorrelação** em **processos estacionários**.

Para cada n-ésimo registro, forma-se o produto $X_n(t)X_n(t+\tau)$, como mostrado abaixo. Toma-se, a seguir, a média desses produtos ao longo de todos os registros.



Média de conjunto para a função autocorrelação (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

AUTOCORRELAÇÃO (cont.)

Dessa forma, pode-se escrever que

$$R_{xx}(\tau) = E\left[X(t)X(t+\tau)\right] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\left[\sum_{n=1}^{N} X_n(t)X_n(t+\tau)\right] \quad (3)$$

Pode-se, pois, interpretar a autocorrelação como uma média de produtos tomados ao longo do conjunto de realizações, em que se obtém

→ grau de associação de um sinal com ele próprio em dois instantes de tempo.

A <u>autocorrelação</u> é uma forma de <u>descrição do processo estocástico no tempo</u>.

→ exemplo: sinais aleatórios de entrada ou de saída num sistema de interesse.

Mostra-se que a autocorrelação é uma <u>função par</u> da diferença de tempo τ, pois

$$E\left[X(t)X(t+\tau)\right] = E\left[X(t-\tau)X(t)\right] \quad (4)$$

CORRELAÇÃO CRUZADA

Se dois processos estocásticos X(t) e Y(t) distintos são considerados simultaneamente, pode-se definir a função **correlação cruzada** como

$$R_{xy}(t_1, t_2) = E\left[X(t_1)\,Y(t_2)\right] \quad (5)$$

Essa função mede o **grau de associação entre um processo** no tempo t_1 **e** o **outro processo** no tempo t_2, ou seja, é uma **medida** de associação **cruzada**.

→ exemplo: sinais aleatórios de entrada e saída num sistema de interesse.

Caso se assuma que ambos os **processos** são **estacionários**, tem-se então que

$$R_{xy}(\tau) = E\left[X(t)\,Y(t+\tau)\right] \quad (6)$$

sendo a **correlação cruzada** uma **função** da **diferença de tempo** $\tau = t_2 - t_1$.

CORRELAÇÃO CRUZADA (cont.)

A **interpretação da correlação cruzada**, em processos estacionários, pode ser feita em termos de média de conjunto da seguinte forma:

$$R_{xy}(\tau) = E\left[X(t)\,Y(t+\tau)\right] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\left[\sum_{n=1}^{N} X_n(t)\,Y_n(t+\tau)\right] \quad (7)$$

Portanto, pode-se obter

→ grau de associação entre dois sinais distintos em dois instantes de tempo.

A <u>correlação cruzada</u> relaciona <u>processos estocásticos no domínio do tempo</u>.

Prova-se, para a correlação cruzada, que

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau) \quad (8)$$

em que a igualdade requer inversão dos processos e da variável independente.

CORRELAÇÃO E ERGODICIDADE

Na consideração de **ergodicidade**, as **médias de conjunto** são **substituídas** pelas **médias temporais**. Assim, a função correlação cruzada seria dada por

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt \quad (9)$$

Essa estimativa, contudo, é tendenciosa, como se vê em Shin & Hammond, 2008.

→ uma estatística é dita uma estimativa tendenciosa quando se pode mostrar que a média da distribuição amostral da estatística não é igual ao parâmetro que está sendo estimado (por exemplo, média amostral e média populacional).

A **estimativa não tendenciosa** da função **correlação cruzada** é

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x(t)y(t+\tau)dt \qquad 0 \le \tau < T \quad (10)$$

CORRELAÇÃO E ERGODICIDADE (cont.)

A **versão digital** correspondente para a **correlação cruzada** é

$$\hat{R}_{xy}(m\Delta) = \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1} x\left(n\Delta t\right) y\left[(n+m)\Delta t\right] \quad 0 \le m \le N-1 \quad (11)$$

onde n e m são índices e Δt é o intervalo de amostragem.

As Eqs. (9) a (11), apresentadas acima, podem ser alteradas para o caso da autocorrelação pela simples troca de y por x.

Assim sendo, para a **autocorrelação**, em **versão digital**, tem-se que

$$\hat{R}_{xx}(m\Delta) = \frac{1}{N-m}\sum_{n=0}^{N-m-1} x\left(n\Delta t\right) x\left[(n+m)\Delta t\right] \quad 0 \le m \le N-1 \quad (12)$$

→ Ressalta-se que essas relações são aplicadas em sinais amostrados.

DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA E AUTOCORRELAÇÃO

Anteriormente, foram expostas **descrições** de processos estocásticos no **domínio do tempo**. Agora, serão consideradas **descrições** no **domínio da frequência**.

Pode-se definir a **densidade espectral de potência** S_{xx} via **autocorrelação** R_{xx}, de modo que, para a frequência em rad/s, tem-se que

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (13) \qquad \therefore \qquad R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (14)$$

De modo equivalente, para a frequência em Hz, tem-se que

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad (15) \qquad \therefore \qquad R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) e^{i2\pi f\tau} df \quad (16)$$

Essas relações entre <u>autocorrelação</u> e <u>densidade espectral de potência</u>, por vezes referenciadas como **teorema de Wiener-Khinchine**, são <u>pares de Fourier</u>.

RUÍDO BRANCO

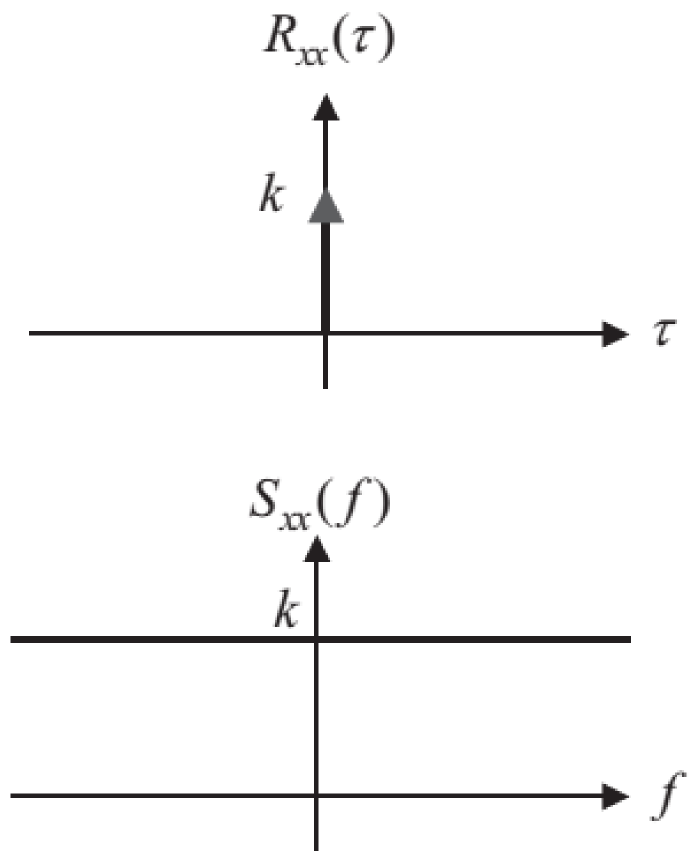
Um conceito teórico muito útil é o conceito de um processo estocástico estacionário ‘completamente errático’, cuja autocorrelação é uma função delta de Dirac, tal que

$$R_{xx}(\tau) = k\delta(\tau)\ , \quad k > 0 \qquad (17)$$

O processo que apresenta essa característica é denominado **ruído branco**.

A função densidade espectral de potência correspondente é

$$S_{xx}(f) = k \qquad (18)$$



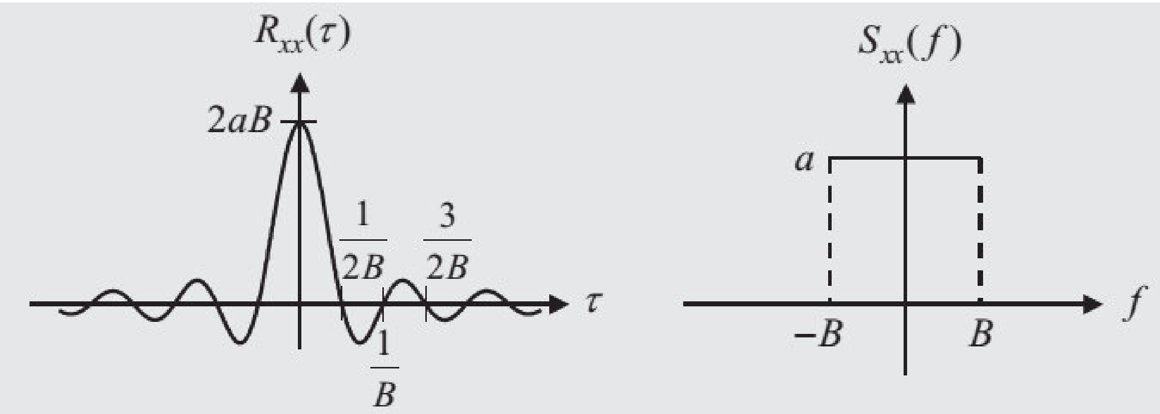
Densidade espectral de potência de um ruído branco (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

RUÍDO BRANCO (cont.)

O processo acima não ocorre na prática e pode ser apenas aproximado. Dessa forma, considera-se frequentemente um **ruído branco em banda**, cuja densidade espectral de potência é constante dentro da banda. Se isso ocorre, tem-se que

$$S_{xx}(f) = \begin{cases} a, & -B < f < B \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (19) \qquad \text{e} \qquad R_{xx}(\tau) = 2aB\frac{\text{sen}(2\pi B\tau)}{2\pi B\tau} \quad (20)$$

A ilustração correspondente é mostrada abaixo.



Densidade espectral de potência de um ruído branco em banda (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

DENSIDADE ESPECTRAL CRUZADA E CORRELAÇÃO CRUZADA

Já a **densidade espectral cruzada** $\overline{S}_{xy}$ pode ser definida a partir da **correlação cruzada** R_{xy}, de modo que, para a frequência em rad/s, tem-se que

$$\overline{S}_{xy}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \quad (21) \qquad \text{e} \qquad R_{xy}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{S}_{xy}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega \quad (22)$$

De modo equivalente, quando se considera a frequência em Hz, tem-se que

$$\overline{S}_{xy}(f)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau \quad (23) \qquad \text{e} \qquad R_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} \overline{S}_{xy}(f)e^{i2\pi f\tau}df \quad (24)$$

<u>Correlação cruzada</u> e <u>densidade espectral cruzada</u> também são um <u>par de Fourier</u>.

Historicamente, as densidades espectrais de potência e cruzada são definidas, respectivamente, via autocorrelação e correlação cruzada, como exposto acima.

PROPRIEDADES DE DENSIDADES ESPECTRAIS

Prova-se que a **densidade espectral de potência**, além de ser sempre uma **função real**, é também uma **função par** da frequência, ou seja,

$$S_{xx}(f) = S_{xx}(-f) \quad (25)$$

Já a **densidade espectral cruzada**, em geral uma **função complexa**, é tal que

$$\overline{S}_{xy}(f) = \overline{S}^{*}_{yx}(f) \quad (26)$$

o que decorre do fato da correlação cruzada apresentar a relação

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau),$$

como expresso na Eq. (8).

Essas propriedades são provadas em Bendat & Piersol, 2000.

DENSIDADES ESPECTRAIS VIA TRANSFORMADAS DE FOURIER

Um **segundo método** para **definição das funções de densidade espectral** baseia-se nas transformadas de Fourier finitas dos registros temporais originais.

Considere-se, para tanto, um par de realizações associadas $x_k(t)$ e $y_k(t)$, correspondentes a processos estocásticos estacionários.

Para um intervalo finito de tempo $0 \le t \le T$, defina-se

$$\boxed{\bar{S}_{xy}(f,T,k) = \frac{1}{T}\bar{X}_k^*(f,T)\bar{Y}_k(f,T)} \quad (27)$$

onde $\bar{X}_k(f,T)$ e $\bar{Y}_k(f,T)$ são transformadas de Fourier finitas, tais que

$$\boxed{\bar{X}_k(f,T) = \int_0^T x_k(t)e^{-i2\pi ft}dt} \quad (28) \quad \text{e} \quad \boxed{\bar{Y}_k(f,T) = \int_0^T y_k(t)e^{-i2\pi ft}dt} \quad (29)$$

Além disso, tem-se que $\bar{X}_k^*(f,T)$ é o complexo conjugado de $\bar{X}_k(f,T)$.

DENSIDADES ESPECTRAIS VIA TRANSFORMADAS DE FOURIER (cont.)

As transformadas de Fourier finitas das Eqs. (28) e (29) existirão para registros estacionários gerais, ainda que as transformadas de Fourier "infinitas" não existam, posto que sinais estacionários persistem indefinidamente.

A **densidade espectral cruzada** $\overline{S}_{xy}(f)$ é, então, definida por

$$\boxed{\overline{S}_{xy}(f) = \lim_{T\to\infty} E\left[\overline{S}_{xy}(f,T,k)\right]} \quad (30)$$

onde $E\left[\overline{S}_{xy}(f,T,k)\right]$ é a operação de valor esperado ao longo do conjunto de realizações, indicada de forma genérica pelo índice k. Essa operação sempre será feita apenas sobre um conjunto finito, pois é o que se pode realizar na prática.

Prova-se que as definições de densidade espectral cruzada das Eqs. (23) e (30) são equivalentes (vide Bendat & Piersol, 2000).

DENSIDADES ESPECTRAIS VIA TRANSFORMADAS DE FOURIER (cont.)

Decorre que as **densidades espectrais de potência** $S_{xx}(f)$ e $S_{yy}(f)$ são **casos especiais** da Eq. (30). Assim sendo, para

$$S_{xx}(f,T,k) = \frac{1}{T}\bar{X}_k^*(f,T)\,\bar{X}_k(f,T) = \frac{1}{T}\left|\bar{X}_k(f,T)\right|^2 \quad (31)$$

e $$S_{yy}(f,T,k) = \frac{1}{T}\bar{Y}_k^*(f,T)\,\bar{Y}_k(f,T) = \frac{1}{T}\left|\bar{Y}_k(f,T)\right|^2 \quad (32)$$

tem-se que

$$\boxed{S_{xx}(f) = \lim_{T\to\infty} E\left[S_{xx}(f,T,k)\right]} \quad (33) \quad \text{e} \quad \boxed{S_{yy}(f) = \lim_{T\to\infty} E\left[S_{yy}(f,T,k)\right]} \quad (34)$$

A definição expressa pela Eq. (30), que engloba as Eqs. (33) e (34), indica como computar as densidades espectrais via FFT. Na prática, o tempo T será sempre finito, pois o caso limite em $T \to \infty$ não pode ser realizado.

DENSIDADES ESPECTRAIS VIA TRANSFORMADAS DE FOURIER (cont.)

A função real **densidade espectral de potência** $S_{xx}(f)$, definida por

$$S_{xx}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{E\left[\left|\bar{X}(f,T)\right|^2\right]}{T} \quad (35)$$

descreve a **potência média de um processo** no **domínio da frequência**.

Já a função complexa **densidade espectral cruzada**, definida por

$$\bar{S}_{xy}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{E\left[\bar{X}^*(f,T)\,\bar{Y}(f,T)\right]}{T} \quad (36)$$

mede a **associação de amplitude** (espectro de amplitude) e a **diferença de fase** (espectro de fase) entre dois sinais numa **mesma frequência**.

→ Se x(t) e y(t) estão em V, $S_{xx}(f)$, $S_{yy}(f)$ e $\bar{S}_{xy}(f)$ são dadas em V^2/Hz.

EXEMPLO 1 – AUTOCORRELAÇÃO

Seja x(t) o sinal no microfone.

Se o sinal s(t) é de banda larga, $R_{ss}(\tau)$ é estreita.

Fazendo $\Delta = \Delta_2 - \Delta_1$,

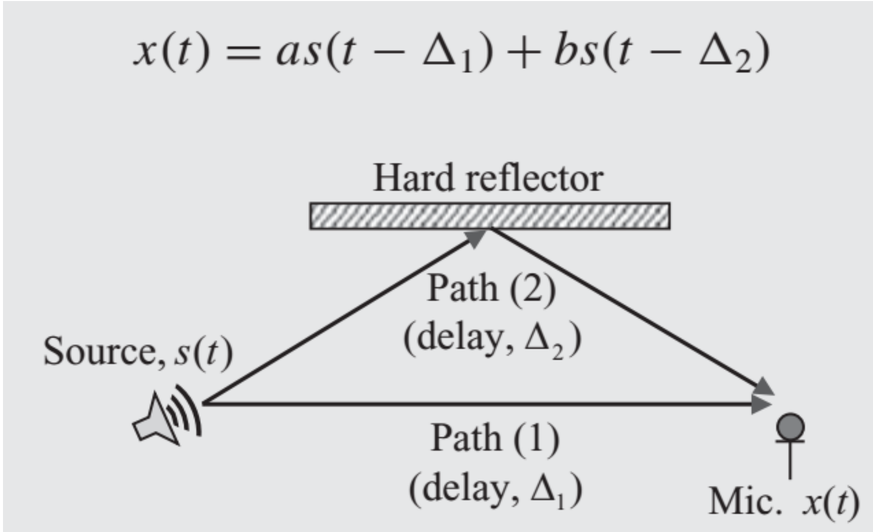
$$R_{xx}(\tau) = E\left[x(t)x(t+\tau)\right]$$

$$= (a^2 + b^2)R_{ss}(\tau) + abR_{ss}(\tau - \Delta)$$

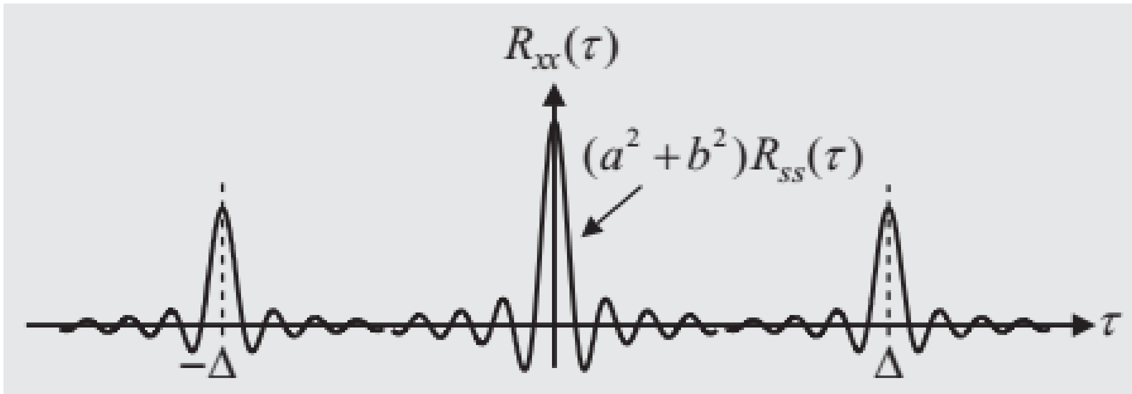
$$+ abR_{ss}(\tau + \Delta)$$

→ $R_{ss}(\tau)$ s/c deslocamento!

→ identificação de atraso e distância relativos.



Exemplo acústico simples (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)



Autocorrelação em atraso temporal (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

EXEMPLO 2 – AUTOCORRELAÇÃO E CORRELAÇÃO CRUZADA

Sejam duas funções dadas por

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta_x) + B \qquad \text{e} \qquad y(t) = C\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta_y) + D\,\mathrm{sen}(n\omega t + \phi)$$

Formando a correlação cruzada pela média temporal, tem-se que

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t+\tau)dt = \frac{1}{2} AC\cos\left[\omega\tau - (\theta_x - \theta_y)\right]$$

Comparando a função acima com as autocorrelações de x(t) e y(t), dadas por

$$R_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau) + B^2 \qquad \text{e} \qquad R_{yy}(\tau) = \frac{C^2}{2}\cos(\omega\tau) + \frac{D^2}{2}\cos(n\,\omega\tau)$$

nota-se que a correlação cruzada encontra o componente em y(t) que se associa com o componente correspondente em x(t), preservando a fase relativa.

EXEMPLO 3 – AUTOCORRELAÇÃO E CORRELAÇÃO CRUZADA

Seja um sinal s(t), imerso em ruído.

Tem-se y(t) = s(t) + n(t), onde s(t) é o sinal de interesse e n(t) é o ruído.

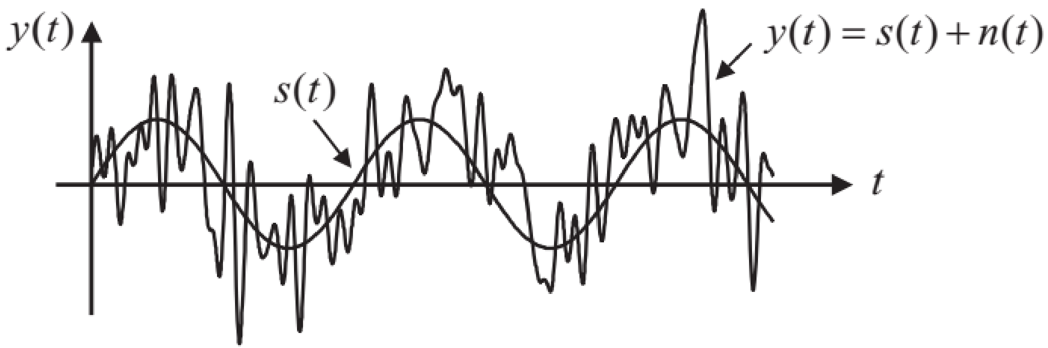
Assume-se que sinal e ruído não são correlacionados, com $R_{sn}(\tau) = \mu_s \mu_n$.

Assumindo valores médios nulos,

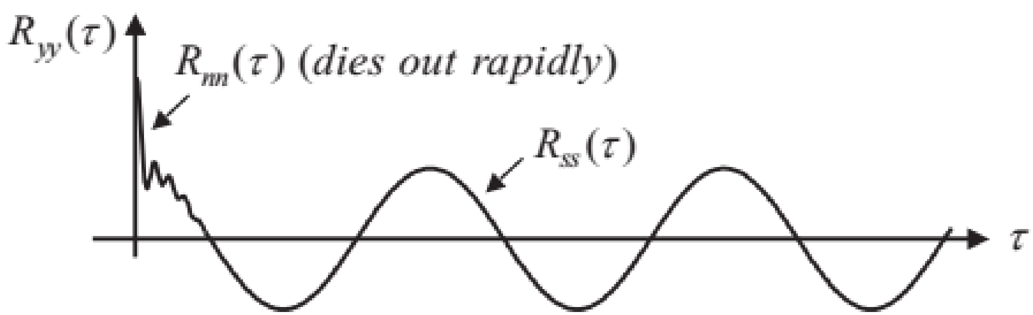
$$R_{yy}(\tau) = R_{ss}(\tau) + R_{nn}(\tau).$$

$R_{nn}(\tau)$ decai muito rapidamente e $R_{ss}(\tau)$ domina o resultado.

→ sinais harmônicos em ruído!



Sinal harmônico imerso em ruído
(©Wiley, Shin&Hammond, 2008)



Sinal harmônico imerso em ruído
(©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

EXEMPLO 4 – CORRELAÇÕES E DENSIDADES ESPECTRAIS

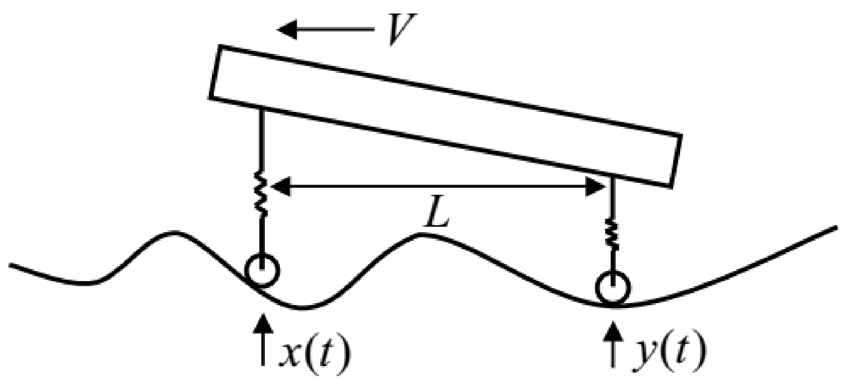
Seja um veículo num terreno irregular, como ilustrado ao lado. O perfil de pista experimentado pela roda dianteira será dado por x(t) e pela traseira por y(t).

Assumindo que o veículo se move com velocidade constante V, $y(t) = x(t - \Delta)$, onde $\Delta = L/V$, sendo L como mostrado.

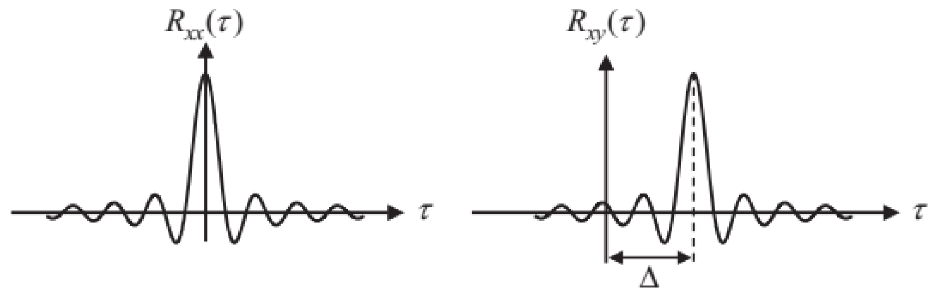
Assim sendo, $R_{xy}(\tau) = R_{xx}(\tau - \Delta)$:

$\rightarrow R_{xy}(\tau)$ é versão atrasada de $R_{xx}(\tau)$.

Detecção de atraso é útil na busca de falhas mecânicas e vazamentos em dutos.



Veículo com rodas movendo-se em terreno irregular
(©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

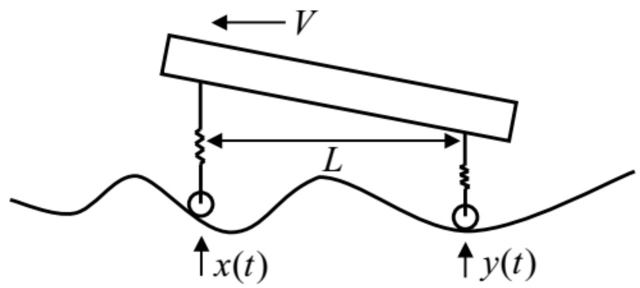


Autocorrelação e correlação cruzada em atraso
(©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

EXEMPLO 4 – CORRELAÇÕES E DENSIDADES ESPECTRAIS (cont.)

Em termos de densidades espectrais, como $R_{xy}(\tau) = R_{xx}(\tau - \Delta)$, tem-se que

$$\bar{S}_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau - \Delta) e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$



Fazendo $u = \tau - \Delta$ e, portanto, $du = d\tau$, decorre que

$$\bar{S}_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(u) e^{-i2\pi f(u+\Delta)} du = e^{-i2\pi f\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(u) e^{-i2\pi fu} du$$

Ou seja,

$$\bar{S}_{xy}(f) = e^{-i2\pi f\Delta} S_{xx}(f) \ .$$

Isso mostra que o componente em frequência f no sinal y(t) está em atraso em relação ao mesmo componente em x(t) por um ângulo de fase $2\pi f\Delta$.