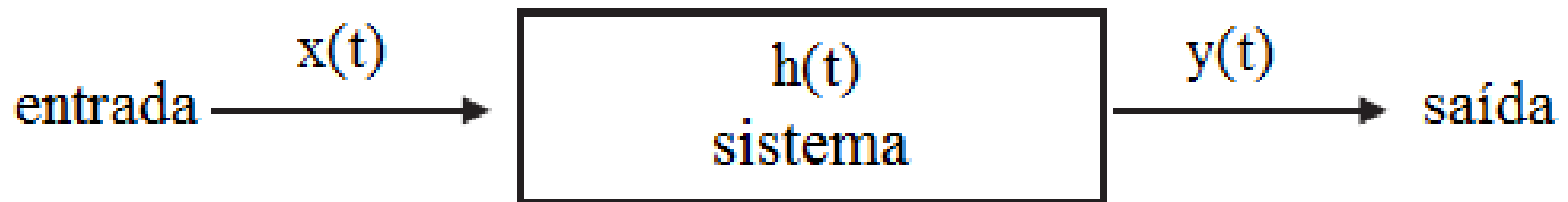


SISTEMA LTI SOB ENTRADA E SAÍDA ALEATÓRIAS

CONTEXTO GERAL

A abordagem a ser exposta a seguir será restrita a **sistemas lineares, invariantes no tempo e causais, com uma entrada e uma saída (SISO)**. Todos os **sinais** serão descritos por **processos estocásticos (fracamente) estacionários**.

A figura abaixo ilustra a situação a ser considerada.



Sistema com uma entrada e uma saída (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

Os desenvolvimentos completos, relativos aos resultados apresentados na sequência, são encontrados em Shin & Hammond (2008).

VALORES MÉDIOS

Para um **sistema estável**, cuja resposta à **entrada aleatória estacionária** $x(t)$ já alcançou o **regime permanente**, a **saída** $y(t)$ **também é estacionária**.

Essa saída, num sistema com resposta ao impulso $h(t)$, é dada por

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(t - \sigma)x(\sigma)d\sigma = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \quad (1)$$

Se o **valor médio de** $x(t)$ é μ_x , prova-se então que o **valor médio de** $y(t)$, μ_y , é

$$\mu_y = \mu_x \int_0^{\infty} h(\tau)d\tau \quad \left[= \mu_x \bar{H}(0) \right] \quad (2)$$

Doravante, será **assumido**, por conveniência, que os sinais de interesse têm **valores médios iguais a zero**.

AUTOCORRELAÇÕES E DENSIDADES ESPECTRAIS DE POTÊNCIA

Se $\mathbf{x}(t)$ possui **autocorrelação** $R_{xx}(\tau)$, a **autocorrelação** $R_{yy}(\tau)$ de $\mathbf{y}(t)$ é

$$R_{yy}(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_{xx}(\tau + \tau_1 - \tau_2)d\tau_1d\tau_2 \quad (3)$$

Tomando a transformada de Fourier da equação acima, obtém-se

$$S_{yy}(f) = |\bar{H}(f)|^2 S_{xx}(f) \quad (4)$$

onde $S_{xx}(f)$ e $S_{yy}(f)$ são, respectivamente, as **densidades espectrais de potência de $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$** e $\bar{H}(f)$ é a **função resposta em frequência (FRF)**, dada por

$$\bar{H}(f) = \int_0^{\infty} h(\tau)e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad (5)$$

A Eq. (4), embora interessante, só contém informações acerca sobre $|\bar{H}(f)|$.

CORRELAÇÃO CRUZADA E DENSIDADE ESPECTRAL CRUZADA

Já a **correlação cruzada** $R_{xy}(\tau)$ entre $x(t)$ e $y(t)$ é dada por

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} h(\tau_1) R_{xx}(\tau - \tau_1) d\tau_1 \quad (6)$$

Pela transformada de Fourier, decorre a **densidade espectral cruzada**, qual seja

$$\boxed{\bar{S}_{xy}(f) = \bar{H}(f) S_{xx}(f)} \quad (7)$$

A **Eq. (7)** contém todas as informações acerca da FRF $\bar{H}(f)$ e é, desta forma, frequentemente **usada** como base **na identificação de sistemas**.

Se, de forma particular e ideal, a **entrada** $x(t)$ é um **ruído branco**, em que

$$R_{xx}(\tau) = k\delta(\tau) \quad \text{e} \quad S_{xx}(f) = k$$

então a densidade espectral cruzada é uma versão escalonada de $\bar{H}(f)$.

CORRELAÇÃO CRUZADA E DENSIDADE ESPECTRAL CRUZADA (cont.)

Da Eq. (7), decorre que

$$S_{xx}(f) = \bar{S}_{xy}(f) / \bar{H}(f)$$

Assim, da Eq. (4) e da expressão acima, resulta sucessivamente que

$$S_{yy}(f) = |\bar{H}(f)|^2 S_{xx}(f) = \bar{H}^*(f) \bar{H}(f) \frac{\bar{S}_{xy}(f)}{\bar{H}(f)} = \bar{H}^*(f) \bar{S}_{xy}(f)$$

Como $\bar{S}_{xy}(f) = \bar{S}_{yx}^*(f)$, pois $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$ (vide módulo anterior), tem-se que

$$S_{yy}(f) = \bar{H}^*(f) \bar{S}_{yx}^*(f)$$

Tomando o complexo conjugado, obtém-se **outra expressão** para $\bar{H}(f)$, qual seja,

$$\boxed{S_{yy}(f) = \bar{H}(f) \bar{S}_{yx}(f)} \quad (8)$$

RESPOSTA DE UM SISTEMA COM 1 GDL A UM RUÍDO BRANCO

Seja um sistema mecânico amortecido com um grau de liberdade, tal que

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = x(t) \quad (9)$$

onde $x(t)$ é a excitação (força) e $y(t)$ a vibração (deslocamento).

Para esse sistema, com $t \geq 0$ e $0 < \zeta < 1$, tem-se que

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t) \quad (10) \quad \text{e} \quad \bar{H}(f) = \frac{1}{\left[k - m(2\pi f)^2 + ic(2\pi f) \right]} \quad (11)$$

onde

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \quad (12); \quad \zeta = c/(2m\omega_n) \quad (13); \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (14).$$

Se $x(t)$ for um ruído branco, decorre que

$$R_{xx}(\tau) = \sigma_x^2 \delta(\tau) \quad (15)$$

RESPOSTA DE UM SISTEMA COM 1 GDL A UM RUÍDO BRANCO (cont.)

Então, das Eqs. (4) e (7), quais sejam,

$$S_{yy}(f) = |\bar{H}(f)|^2 S_{xx}(f) \quad (4) \quad \text{e} \quad \bar{S}_{xy}(f) = \bar{H}(f)S_{xx}(f) \quad (7)$$

tem-se, respectivamente, que as **densidades espectrais** são dadas por

$$S_{yy}(f) = \frac{\sigma_x^2}{\left[k - m(2\pi f)^2 \right]^2 + [c(2\pi f)]^2} \quad (16) \quad \text{e} \quad \bar{S}_{xy}(f) = \frac{\sigma_x^2}{\left[k - m(2\pi f)^2 + ic(2\pi f) \right]} \quad (17)$$

ao passo que a **correlação cruzada**, pela transformada inversa, é dada por

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{S}_{xy}(f) e^{i2\pi f\tau} df = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{H}(f) \sigma_x^2 e^{i2\pi f\tau} df = \begin{cases} \sigma_x^2 h(\tau), & \tau \geq 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases} \quad (18)$$

Observa-se, a partir desses desenvolvimentos, que o **ruído branco** se apresenta como a **excitação aleatória ideal** para a **identificação de sistemas**.

DENSIDADES ESPECTRAIS – FREQUÊNCIAS NÃO NEGATIVAS

Por razão de ordem prática, as **definições de densidade espectral de potência e densidade espectral cruzada** podem ser restringidas para **frequências não negativas**, ou seja, para $f \geq 0$ (representação unilateral), da seguinte forma:

$$G_{xx}(f) = \begin{cases} 2S_{xx}(f), & f > 0 \\ S_{xx}(f), & f = 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} \quad (19)$$

$$G_{yy}(f) = \begin{cases} 2S_{yy}(f), & f > 0 \\ S_{yy}(f), & f = 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} \quad (20)$$

$$\bar{G}_{xy}(f) = \begin{cases} 2\bar{S}_{xy}(f), & f > 0 \\ \bar{S}_{xy}(f), & f = 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} \quad (21)$$

$$\bar{G}_{yx}(f) = \begin{cases} 2\bar{S}_{yx}(f), & f > 0 \\ \bar{S}_{yx}(f), & f = 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} \quad (22)$$

DENSIDADES ESPECTRAIS – FREQUÊNCIAS NÃO NEGATIVAS (cont.)

Assim sendo, têm-se, em decorrência dos resultados anteriores, que

$$\boxed{G_{yy}(f) = |\bar{H}(f)|^2 G_{xx}(f)} \quad (23);$$

$$\boxed{\bar{G}_{xy}(f) = \bar{H}(f) G_{xx}(f)} \quad (24);$$

$$\boxed{G_{yy}(f) = \bar{H}(f) \bar{G}_{yx}(f)} \quad (25).$$

→ Essas equações correspondem às Eqs. (4), (7) e (8), quando $f \geq 0$.

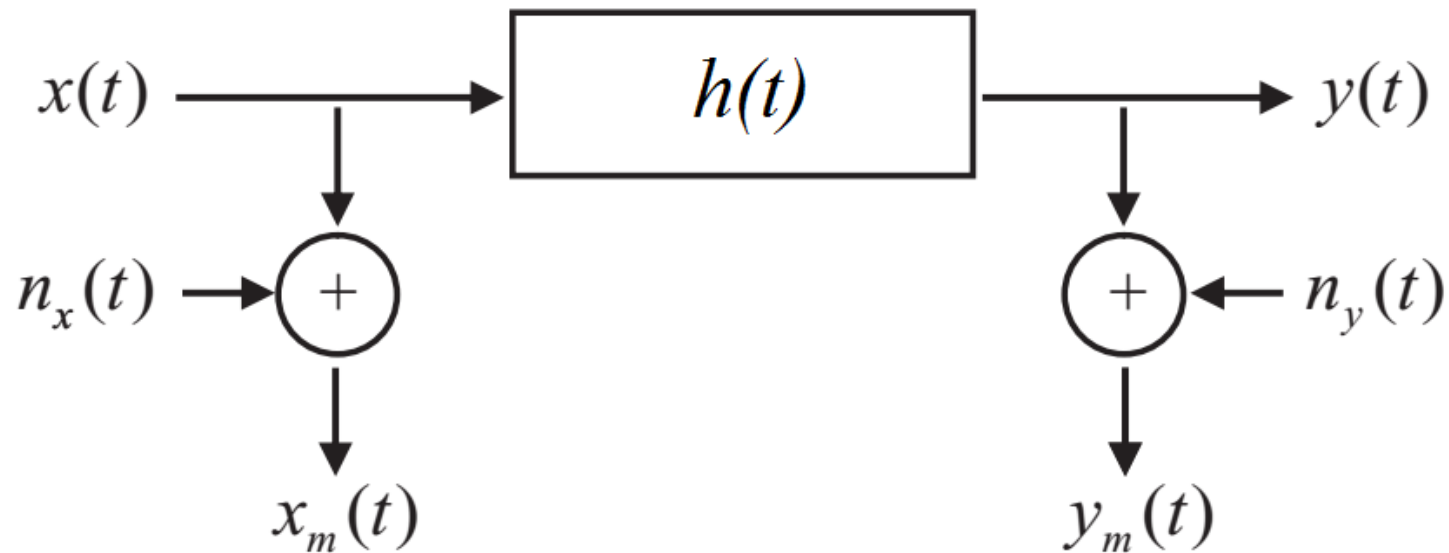
As **Eqs. (24) e (25)** podem ser usadas na **identificação de sistemas**, pois contêm todas as informações acerca da FRF $\bar{H}(f)$ (amplitude e fase).

Na sequência, serão usadas as seguintes **siglas**:

DEP: densidade espectral de potência; **DEC**: densidade espectral cruzada.

EFEITO DO RUÍDO DE MEDIÇÃO

Considere-se agora a **presença de ruídos nas medições**, como ilustrado abaixo.



Efeito de ruídos de medição em entrada e saída (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

Sabe-se que $y(t)$ é linearmente relacionado com $x(t)$. Porém, assume-se que:

- (a) os sinais $x(t)$ e $y(t)$ não são correlacionados com os ruídos $n_x(t)$ e $n_y(t)$;
- (b) os ruídos $n_x(t)$ e $n_y(t)$ não são correlacionados entre si.

IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS – ESTIMADORES

O objetivo é (ainda) **estimar a função resposta em frequência de um sistema LTI causal**, quando a entrada é um processo aleatório estacionário.

Dois estimadores são bastante utilizados. O primeiro é o estimador $\tilde{H}_1(f)$, provavelmente o mais usado, que é definido por

$$\boxed{\tilde{H}_1(f) = \frac{\tilde{S}_{x_m y_m}(f)}{\tilde{S}_{x_m x_m}(f)}} \quad (26) \quad \left[\rightarrow \bar{H}(f) = \frac{\bar{S}_{xy}(f)}{S_{xx}(f)} \quad (7) \right], \quad \text{onde}$$

$$\tilde{S}_{x_m x_m}(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|\bar{X}_{mi}(f)|^2}{T} \quad (27) \quad \rightarrow \text{estimador para DEP de } x_m(t)$$

$$\tilde{S}_{x_m y_m}(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\bar{X}_{mi}^*(f) \bar{Y}_{mi}(f)}{T} \quad (28) \quad \rightarrow \text{estimador para DEC entre } x_m(t) \text{ e } y_m(t)$$

IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS – ESTIMADORES (cont.)

O segundo estimador empregado é o **estimador** $\tilde{H}_2(f)$, que é definido por

$$\tilde{H}_2(f) = \frac{\tilde{S}_{y_m y_m}(f)}{\tilde{S}_{y_m x_m}(f)} \quad (29) \quad \left[\rightarrow \bar{H}(f) = \frac{S_{yy}(f)}{S_{yx}(f)} \quad (8) \right], \quad \text{onde}$$

$$\tilde{S}_{y_m y_m}(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|\bar{Y}_{mi}(f)|^2}{T} \quad (30) \quad \rightarrow \text{estimador para DEP de } y_m(t)$$

$$\tilde{S}_{y_m x_m}(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\bar{Y}_{mi}^*(f) \bar{X}_{mi}(f)}{T} \quad (31) \quad \rightarrow \text{estimador para DEC entre } y_m(t) \text{ e } x_m(t)$$

Para cálculo dos estimadores acima, assume-se que se dispõe de um conjunto de realizações (resultados de medição) $\bar{X}_{mi}(f)$ e $\bar{Y}_{mi}(f)$. O índice i refere-se a cada realização, ou seja, a cada amostra de sinal com duração T .

IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS – VERSÕES TEÓRICAS

As **versões teóricas** dos **estimadores** $\tilde{H}_1(f)$ e $\tilde{H}_2(f)$ são, respectivamente,

$$\bar{H}_1(f) = \frac{\bar{S}_{x_m y_m}(f)}{S_{x_m x_m}(f)} \quad (32) \quad \text{e} \quad \bar{H}_2(f) = \frac{S_{y_m y_m}(f)}{\bar{S}_{y_m x_m}(f)} \quad (33)$$

em que as **densidades espectrais** seriam, **por definição**, dadas por

$$\bar{S}_{x_m y_m}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E \left[X_m^*(f, T) Y_m(f, T) \right]}{T} \quad (34) \quad S_{x_m x_m}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E \left[|X_m(f, T)|^2 \right]}{T} \quad (35)$$

$$S_{y_m y_m}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E \left[|Y_m(f, T)|^2 \right]}{T} \quad (36) \quad \bar{S}_{y_m x_m}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E \left[Y_m^*(f, T) X_m(f, T) \right]}{T} \quad (37)$$

Estimam-se os casos limites das Eqs. (34) a (37) pelas Eqs. (27), (28), (30) e (31).

IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS – VERSÕES TEÓRICAS (cont.)

Sabe-se que a densidade espectral de potência pode ser definida a partir da autocorrelação, ao passo que a densidade espectral cruzada pode ser definida via correlação cruzada, posto que são pares de Fourier.

Assim sendo, têm-se as seguintes expressões:

$$S_{x_m x_m}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{x_m x_m}(t) e^{-i2\pi ft} dt ; \quad S_{y_m y_m}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{y_m y_m}(t) e^{-i2\pi ft} dt ;$$

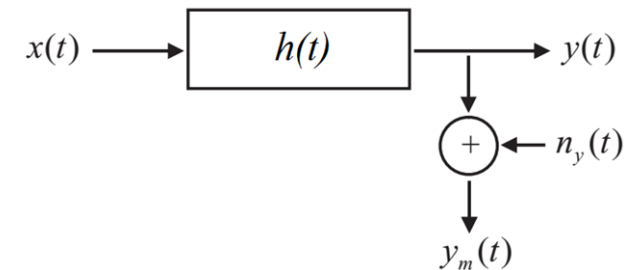
$$\bar{S}_{x_m y_m}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{x_m y_m}(t) e^{-i2\pi ft} dt ; \quad S_{y_m x_m}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{y_m x_m}(t) e^{-i2\pi ft} dt .$$

Essas definições são convenientes quando da interpretação e manipulação das expressões decorrentes da adição de ruídos.

PRESENÇA DE RUÍDO NA SAÍDA

Na análise de comportamento das versões teóricas de cada um dos estimadores, considere-se, a princípio, apenas a **presença de ruído na saída**. Nesse caso,

$$\bar{H}_1(f) = \frac{\bar{S}_{xy_m}(f)}{S_{xx}(f)} = \frac{\bar{S}_{xy}(f) + \bar{S}_{xn_y}(f)}{S_{xx}(f)} = \frac{\bar{S}_{xy}(f)}{S_{xx}(f)} = \bar{H}(f) \quad (38)$$



Portanto, $\bar{H}_1(f)$ é **não tendencioso** na presença de ruído na saída. Por outro lado,

$$\bar{H}_2(f) = \frac{S_{y_m y_m}(f)}{\bar{S}_{y_m x}(f)} = \frac{S_{yy}(f) + S_{n_y n_y}(f)}{\bar{S}_{yx}(f)} = \frac{S_{yy}(f)}{\bar{S}_{yx}(f)} \left[1 + \frac{S_{n_y n_y}(f)}{S_{yy}(f)} \right] = \bar{H}(f) \left[1 + \frac{S_{n_y n_y}(f)}{S_{yy}(f)} \right] \quad (39)$$

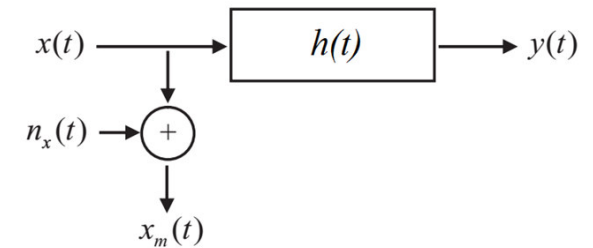
O estimador $\bar{H}_2(f)$ é **tendencioso** e superestima $\bar{H}(f)$ na presença de ruído na saída, dependendo da razão sinal-ruído do sinal de saída.

PRESENÇA DE RUÍDO NA ENTRADA

Considere-se, agora, a **presença de ruído na entrada**. Nesse caso,

$$\bar{H}_1(f) = \frac{\bar{S}_{x_m y}(f)}{S_{x_m x_m}(f)} = \frac{\bar{S}_{xy}(f)}{S_{xx}(f) + S_{n_x n_x}(f)} = \frac{\bar{S}_{xy}(f)}{S_{xx}(f)} \left[\frac{1}{1 + \frac{S_{n_x n_x}(f)}{S_{xx}(f)}} \right] = \frac{\bar{H}(f)}{1 + \frac{S_{n_x n_x}(f)}{S_{xx}(f)}} \quad (40)$$

$$\bar{H}_2(f) = \frac{S_{yy}(f)}{\bar{S}_{y x_m}(f)} = \frac{S_{yy}(f)}{\bar{S}_{yx}(f) + S_{y n_x}(f)} = \frac{S_{yy}(f)}{\bar{S}_{yx}(f)} = \bar{H}(f) \quad (41)$$



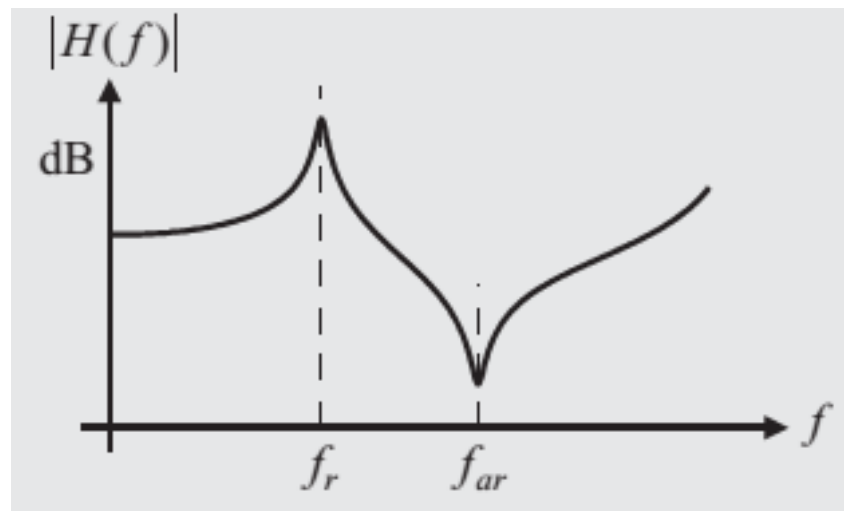
Ou seja, o estimador $\bar{H}_1(f)$ é **tendencioso** e subestima $\bar{H}(f)$, sendo que o desvio desse estimador está associado à relação sinal-ruído do sinal de entrada.

Já o estimador $\bar{H}_2(f)$ é **não tendencioso** na presença de ruído na entrada.

ESTIMADORES, RESSONÂNCIAS E ANTIRESSONÂNCIAS

Na execução de experimentos de vibração em sistemas mecânicos, sabe-se que, não raro, $\tilde{H}_1(f)$ geralmente subestima as FRFs nas ressonâncias mas fornece melhores estimativas nas antiressonâncias, em relação a $\tilde{H}_2(f)$. Por quê?

Já $\tilde{H}_2(f)$ fornece melhores estimativas nas ressonâncias mas, por vezes, superestima significativamente as FRFs nas antiressonâncias. Por quê?



Sistema com ressonância e antiressonância (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

PRESENÇA DE RUÍDO NA ENTRADA E NA SAÍDA

Quando há **ruído significativo tanto na entrada quanto na saída**, recomenda-se o **estimador de máxima verossimilhança** $\tilde{H}_W(f)$, dado por

$$\tilde{H}_W(f) = \frac{\tilde{S}_{y_m y_m}(f) - \kappa(f)\tilde{S}_{x_m x_m}(f) + \sqrt{\left[\tilde{S}_{x_m x_m}(f)\kappa(f) - \tilde{S}_{y_m y_m}(f)\right]^2 + 4\left|\tilde{S}_{x_m y_m}(f)\right|^2 \kappa(f)}}{2\tilde{S}_{y_m x_m}(f)} \quad (42)$$

onde $\kappa(f)$ é a razão entre os espectros dos ruídos, ou seja, $S_{n_y n_y}(f)/S_{n_x n_x}(f)$.

Na prática, pode ser difícil obter essa razão. Assumindo que ela seja igual a 1, obtém-se o chamado **estimador de mínimos quadrados total**, $\tilde{H}_T(f)$, dado por

$$\tilde{H}_T(f) = \frac{\tilde{S}_{y_m y_m}(f) - \tilde{S}_{x_m x_m}(f) + \sqrt{\left[\tilde{S}_{x_m x_m}(f) - \tilde{S}_{y_m y_m}(f)\right]^2 + 4\left|\tilde{S}_{x_m y_m}(f)\right|^2}}{2\tilde{S}_{y_m x_m}(f)} \quad (43)$$

FUNÇÃO COERÊNCIA

Como **medida do grau de associação linear** entre dois sinais, no **domínio da frequência**, utiliza-se largamente a função **coerência**.

Essa função é definida por

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|\bar{S}_{xy}(f)|^2}{S_{xx}(f)S_{yy}(f)} = \frac{|\bar{G}_{xy}(f)|^2}{G_{xx}(f)G_{yy}(f)} \quad (44)$$

sendo que $0 \leq \gamma_{xy}^2(f) \leq 1$ (o que pode ser provado).

Quando $S_{yy}(f) = |\bar{H}(f)|^2 S_{xx}(f)$ e $\bar{S}_{xy}(f) = \bar{H}(f)S_{xx}(f)$, tem-se que $\gamma_{xy}^2(f) = 1$.

Ou seja, a **coerência é 1** quando $x(t)$ e $y(t)$ são **linearmente relacionados**.

Caso os **sinais não sejam correlacionados** ($\bar{S}_{xy}(f) = 0$), então a **coerência é 0**.

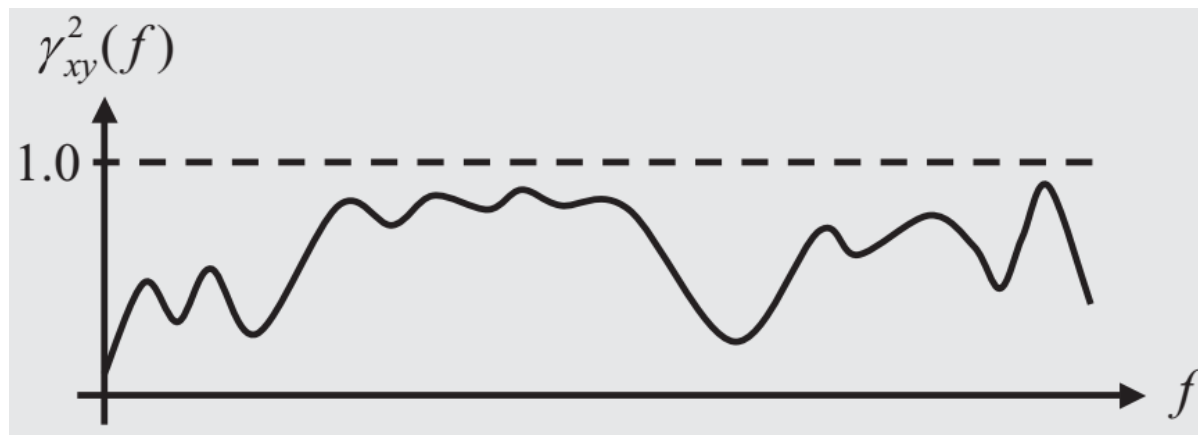
FUNÇÃO COERÊNCIA (cont.)

Se a função coerência for maior do que zero porém menor do que um, então

→ $x(t)$ e $y(t)$ apresentam uma relação parcialmente linear.

Possíveis desvios da relação linear entre $x(t)$ e $y(t)$ são explicados por

- presença de ruído em $x(t)$ e/ou em $y(t)$;
- $x(t)$ e $y(t)$ também serem relacionados de forma não linear;
- $y(t)$ não ser resultante apenas de $x(t)$.



Exemplo de função coerência (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

FUNÇÃO COERÊNCIA (cont.)

Em presença de **ruído nas medições**, tem-se que

$$\gamma_{x_m y_m}^2(f) = \frac{|\overline{S}_{x_m y_m}(f)|^2}{S_{x_m x_m}(f) S_{y_m y_m}(f)}$$

$$\therefore \gamma_{x_m y_m}^2(f) = \frac{1}{1 + \frac{S_{n_x n_x}(f)}{S_{xx}(f)} + \frac{S_{n_y n_y}(f)}{S_{yy}(f)} + \frac{S_{n_x n_x}(f)}{S_{xx}(f)} \cdot \frac{S_{n_y n_y}(f)}{S_{yy}(f)}} \quad (45)$$

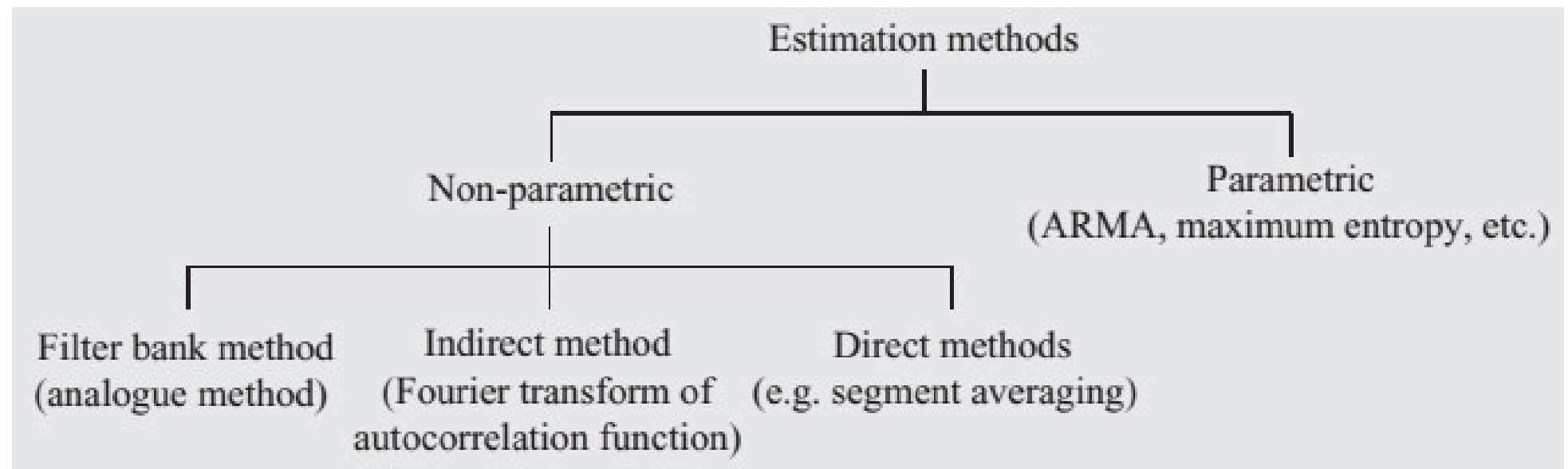
Na expressão acima, $S_{xx}(f)/S_{n_x n_x}(f)$ e $S_{yy}(f)/S_{n_y n_y}(f)$ são **relações sinal-ruído**.

Face à sua definição, a função **coerência** é empregada para se avaliar se **funções resposta em frequência** estão sendo bem estimadas.

APÊNDICE – ESTIMAÇÃO DE DEP E DEC

ABORDAGENS PRINCIPAIS

Como mostrado abaixo, há duas **abordagens principais** para a estimação da densidade espectral de potência (DEP) e da densidade espectral cruzada (DEC). São elas as abordagens **não paramétrica e paramétrica** (mais recente).

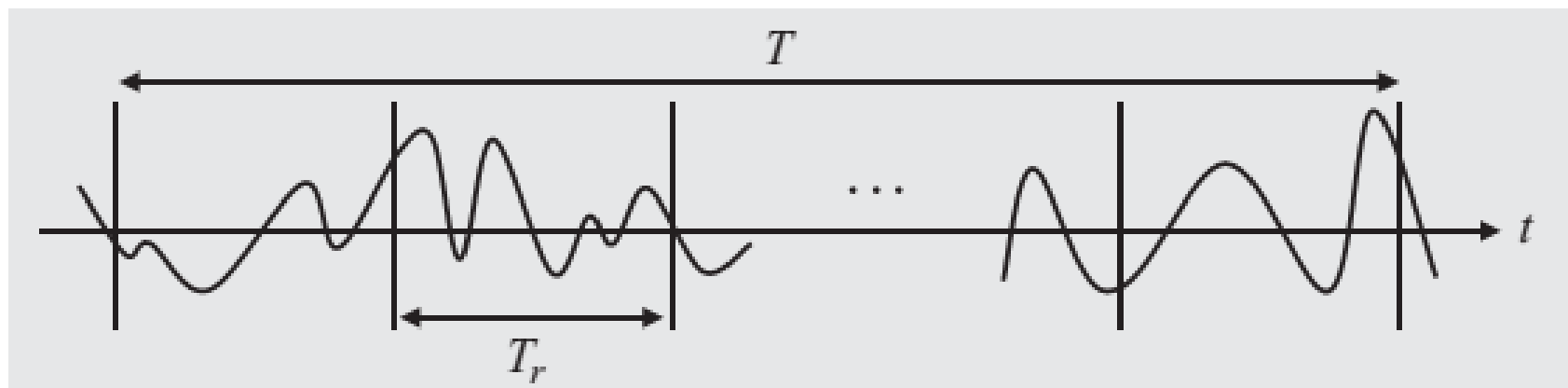


Classificação dos métodos de estimação (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

MÉTODOS DIRETOS

Os **métodos diretos** são os mais **largamente usados** pois são os mais rápidos, face ao uso da FFT. Nesses métodos, as **estimativas das densidades espectrais** são **formadas diretamente**, sem antes formar as funções de autocorrelação.

A ideia básica inicial é **dividir** os **dados originais** integrais, de **comprimento T** , em **K segmentos temporais** separados. Cada segmento possui comprimento T_r , como se vê abaixo, de modo que, se não houver sobreposição, $T = KT_r$.



Segmentação dos dados (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

MÉTODO DE BARTLETT

No método básico de Bartlett, a **densidade espectral de potência bruta** (também dita periodograma bruto) é calculada para cada segmento de comprimento T_r por

$$\left(\hat{S}_{xx}\right)_i(f) = \frac{1}{T_r} \left| \left(\bar{X}\right)_i(f) \right|^2, \text{ para } i = 1, 2, \dots, K \quad (\text{A1})$$

Almeja-se que, pelo cômputo do **valor médio** das sucessivas densidades espectrais de potência brutas, feito por

$$\tilde{S}_{xx}(f) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left(\hat{S}_{xx}\right)_i(f) \quad (\text{A2})$$

a flutuação (variância) seja progressivamente reduzida e a densidade espectral de potência desejada seja estimada satisfatoriamente.

MÉTODO DE BARTLETT (cont.)

Analogamente, pode-se obter a **densidade espectral cruzada bruta**, qual seja,

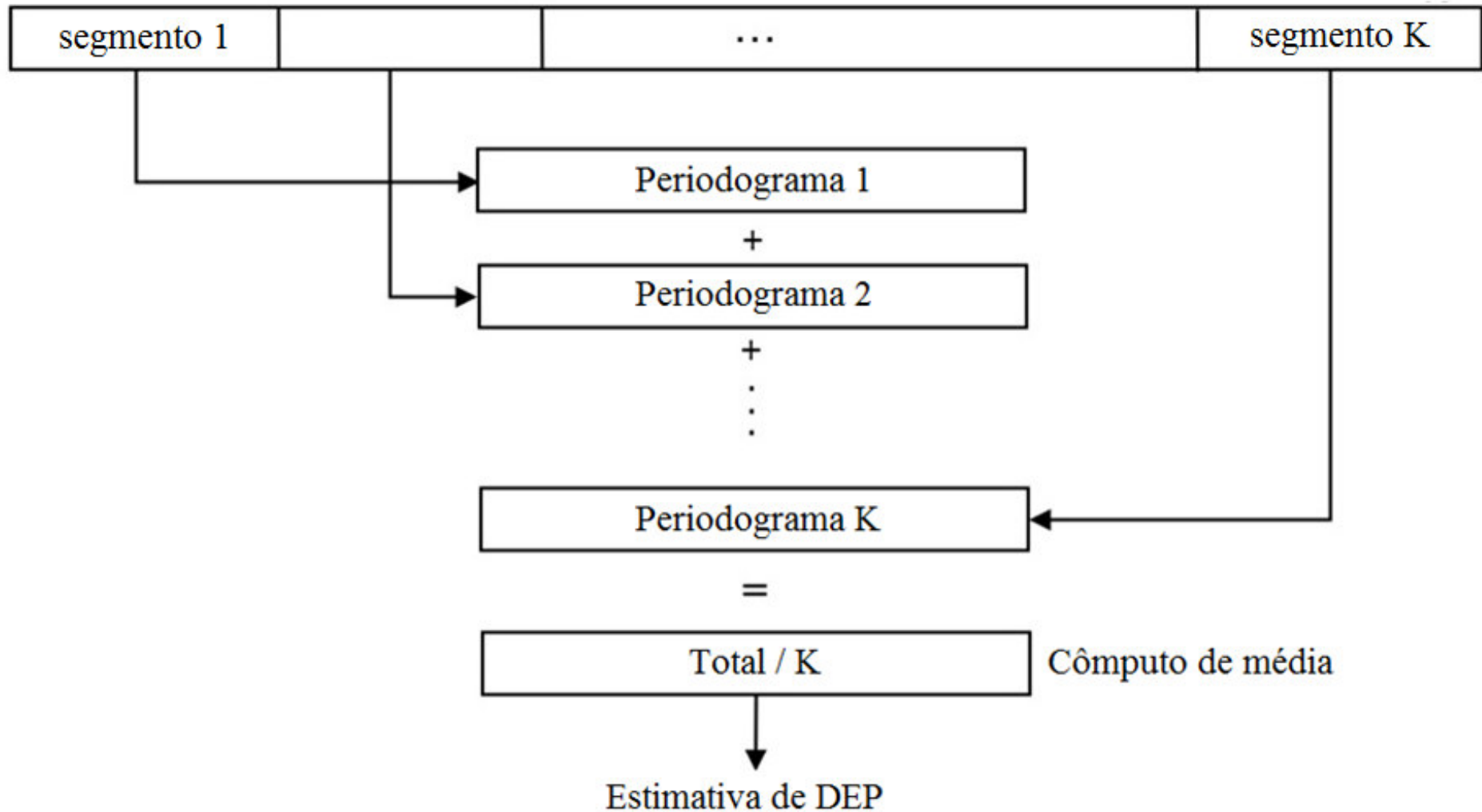
$$\left(\hat{S}_{xy}\right)_i(f) = \frac{1}{T_r} \left[\left(\bar{X}^*\right)_i(f) \left(\bar{Y}\right)_i(f) \right], \text{ para } i = 1, 2, \dots, K \quad (\text{A3})$$

bem como o correspondente valor médio, dado por

$$\tilde{S}_{xy}(f) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \left(\hat{S}_{xy}\right)_i(f) \quad (\text{A4})$$

O método de Bartlett é ilustrado na sequência, para a estimação de densidade espectral de potência (DEP). Para a densidade espectral cruzada (DEC), são considerados os segmentos correspondentes dos sinais de interesse.

MÉTODO DE BARTLETT (cont.)



Método de Bartlett – DEP (©Poularikas&Ramadan, 2006)

MÉTODO DE WELCH

As modificações propostas por Welch no método de Bartlett foram as seguintes:

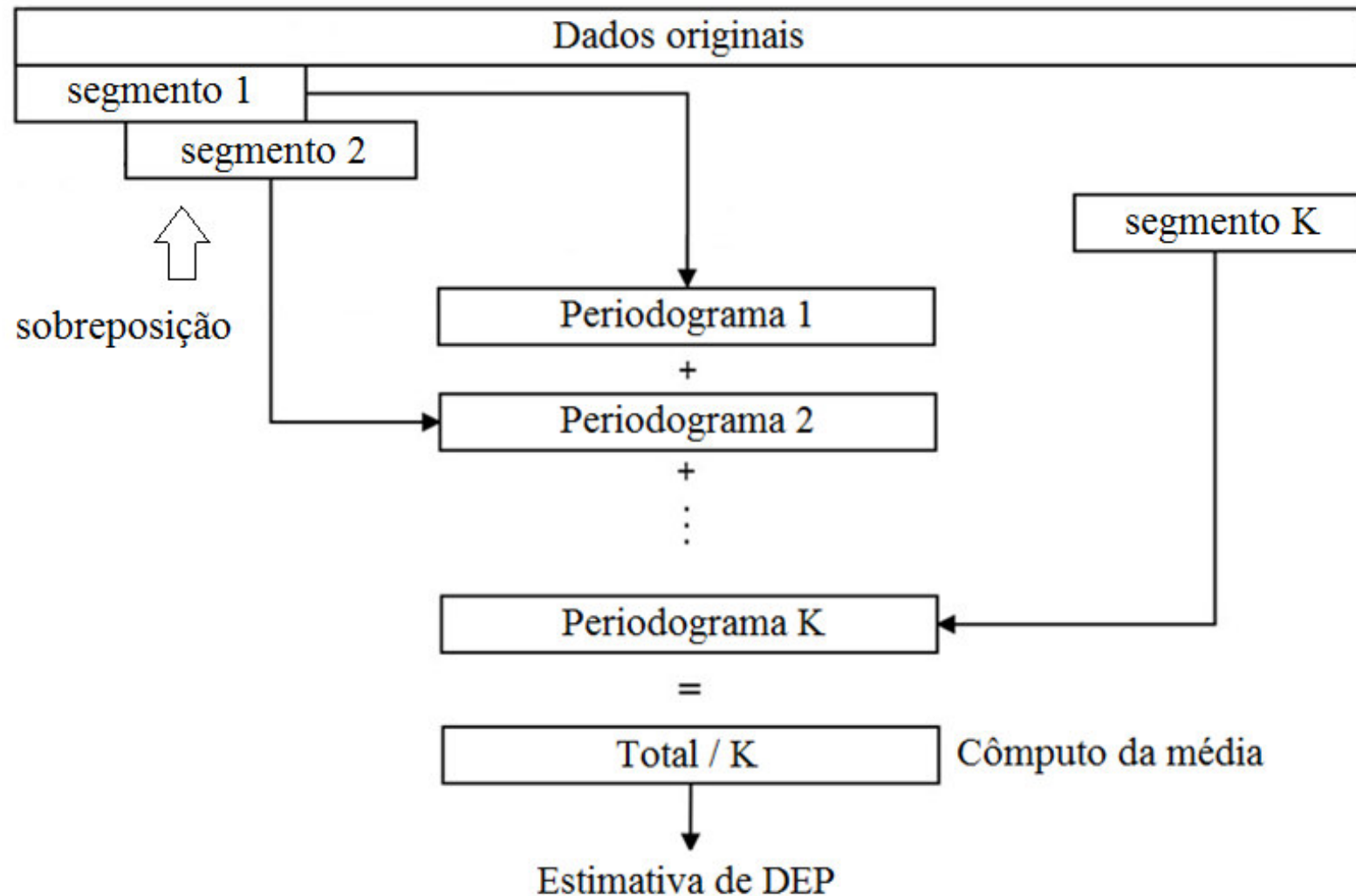
- os **segmentos** de dados **podem se sobrepor**;
- **cada segmento é janelado** antes do cálculo das densidades espectrais brutas.

Com a aplicação de **janelas não retangulares**, há **diminuição do vazamento**. Por outro lado, os **valores** obtidos para as densidades espectrais brutas **têm que ser corrigidos**, face à redução de potência decorrente desse janelamento.

Os segmentos em sobreposição compensam, em alguma medida, o que se descarta no janelamento. Não é fácil, contudo, estabelecer essa medida.

Neste método, ilustrado a seguir para DEP, há que cuidar, como no anterior, do **comprimento dos segmentos**, pois isso irá definir a **resolução em frequência**.

MÉTODO DE WELCH (cont.)



Método de Welch – DEP (©Poulikas&Ramadan, 2006)