CLASSIFICAÇÃO E DESCRIÇÃO DE SINAIS

Dada a sua natureza, ou seja, dados observados ao longo do tempo, representando fenômenos físicos, os **sinais** podem ser **classificados** da seguinte forma:

- Sinais
  - determinísticos
    - periódicos
      - harmônicos
      - não harmônicos
    - não periódicos
      - transitórios
      - não transitórios (permanentes)
      - *(caóticos)*
  - não determinísticos (aleatórios)
    - estacionários
    - não estacionários

SINAIS DETERMINÍSTICOS E ALEATÓRIOS

Sinal determinístico: comportamento pode ser previsto de forma exata.

→ exemplo: força $f(t) = A\text{sen}(\omega t + \phi)$, com A, ω e ϕ definidos;

→ quaisquer sinais (p. ex., vibrações, sons e excitações) expressos por funções matemáticas do tempo, com parâmetros definidos, são determinísticos.

Sinal aleatório: comportamento não pode ser previsto de forma exata.

→ mesmo quando a história passada é conhecida, é impossível saber ao certo o que ocorrerá no futuro;

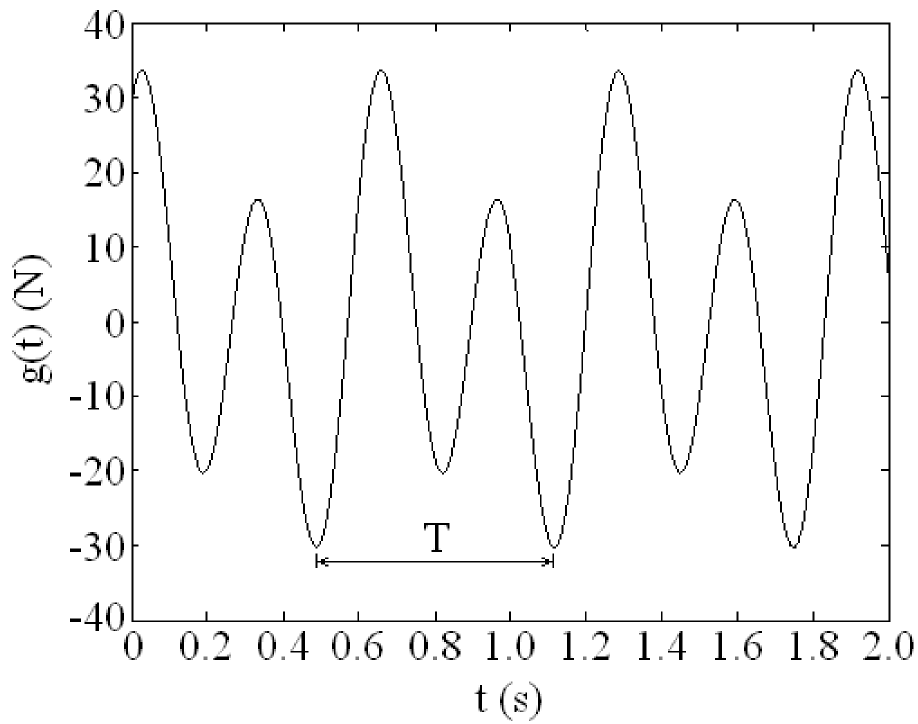
→ são requeridos métodos probabilísticos e estatísticos.

No presente curso, serão abordados **inicialmente** os **sinais determinísticos**. **Posteriormente**, serão também contemplados os **sinais aleatórios**.

SINAIS PERIÓDICOS – DEFINIÇÃO

Uma **função** g(t) é dita **periódica** quando

$$\boxed{g(t+T)=g(t), \quad t\in R^1}$$



t: variável independente (via de regra, tempo), com valores de $(-\infty,+\infty)$;

T: **menor constante** que satisfaz a definição, dita **período**.

→ g(t) pode representar uma vibração, um som ou uma excitação, como acima.

Todo múltiplo inteiro de T satisfaz a definição de periodicidade, de modo que

$$\boxed{g(t+nT)=g(t), \quad n=0,\pm1,\pm2,...} \qquad \text{(definição geral)}$$

SINAIS PERIÓDICOS – PERÍODO, FREQUÊNCIA E OCORRÊNCIA

Para uma função periódica cuja **variável independente** t é o **tempo**,

→ **período (T)**: menor tempo que a função leva para se repetir (valor finito);

→ **frequência (f)**: número de repetições da função por unidade de tempo, ou

$$\boxed{f \triangleq \frac{\text{no. de repetições}}{\text{tempo decorrido}} = \frac{n}{nT} = \frac{1}{T}}$$

Ou seja, o período T, dado em s, é o inverso da frequência f, dada em Hz.

Vibrações e excitações periódicas são muito comuns em **equipamentos que operam de forma repetitiva**, tais como

– **máquinas alternativas** (ex.: motores de combustão interna);

– **máquinas rotativas** (ex.: máquinas elétricas).

SOMA DE FUNÇÕES PERIÓDICAS

A soma de duas funções periódicas, de períodos T_1 e T_2, resulta em uma função periódica? Para que a resposta seja positiva, é necessário que

$$\boxed{T_S = n_1 T_1 = n_2 T_2}$$

onde T_S é o período da soma e n_1 e n_2 são números inteiros.

Ou seja, os períodos, ou as frequências, devem estar entre si como dois inteiros.

$$\boxed{\frac{n_1}{n_2} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{f_1}{f_2}}, \quad \text{onde } f_1 = \frac{1}{T_1} \text{ e } f_2 = \frac{1}{T_2}.$$

→ A razão n_1/n_2 deve ser reduzida à sua expressão mais simples.

Das expressões acima, resulta que a frequência da soma $\boxed{f_S = \frac{1}{T_S} = \frac{f_1}{n_1} = \frac{f_2}{n_2}}$.

SOMA DE FUNÇÕES PERIÓDICAS (cont.)

Para demonstrar que $T_S = n_1 T_1 = n_2 T_2$, tomem-se duas funções periódicas quaisquer, x(t) e y(t), de períodos T_1 e T_2 , respectivamente, de modo que

$$x(t) = x\left(t + n_1 T_1\right) \text{ e } y(t) = y\left(t + n_2 T_2\right) .$$

$\rightarrow$ Se $z(t) = x(t) + y(t)$, o que deve valer para que $z(t) = z\left(t + T_S\right)$?

Para tanto, $z(t) = x(t) + y(t) = x\left(t + T_S\right) + y\left(t + T_S\right) = z\left(t + T_S\right)$. Ocorre que

– para que $x(t) = x\left(t + T_S\right) \rightarrow T_S = n_1 T_1$ e

– para que $y(t) = y\left(t + T_S\right) \rightarrow T_S = n_2 T_2$.

Assim sendo, $T_S = n_1 T_1 = n_2 T_2$, onde n_1 e n_2 são os menores números inteiros que satisfazem as relações de interesse.

SINAIS HARMÔNICOS – DEFINIÇÃO

As **funções harmônicas** constituem a **representação fundamental** e, por isso, mais importante na **modelagem não paramétrica de sinais**.

Sua **definição** se dá por qualquer uma das seguintes **três formas equivalentes**:

$$\boxed{g(t) = A\cos\omega t + B\,\mathrm{sen}\,\omega t}$$

$$\boxed{g(t) = G\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)}$$

$$\boxed{g(t) = G\cos(\omega t + \theta)}$$

Acima, A e B são constantes não simultaneamente nulas;

G é uma constante não nula;

ω é uma constante, chamada **frequência circular** ou **angular**;

t varia de $(-\infty, +\infty)$.

SINAIS HARMÔNICOS – EQUIVALÊNCIA

A **equivalência entre** as três **expressões** anteriores pode ser exposta de imediato.

Por exemplo, da 2ª expressão para a 1ª expressão, chega-se assim:

Sabe-se que $g(t) = G\operatorname{sen}(\omega t + \phi) = G\operatorname{sen}\omega t \cos\phi + G\cos\omega t \operatorname{sen}\phi$.

Se $A = G\operatorname{sen}\phi$ e $B = G\cos\phi$, resulta que $g(t) = A\cos\omega t + B\operatorname{sen}\omega t$.

→ Verifica-se que $\boxed{G = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{e} \quad \phi = \operatorname{arctg}(A/B)}$.

Já da 2ª expressão para a 3ª expressão, chega-se da seguinte forma:

Sabe-se que $g(t) = G\operatorname{sen}(\omega t + \phi) = G\cos\left[(\pi/2) - (\omega t + \phi)\right]$.

Se $\phi = \theta + (\pi/2)$, $g(t) = G\cos\left\{(\pi/2) - \left[\omega t + \theta + (\pi/2)\right]\right\}$.

Então, $g(t) = G\cos\left[-(\omega t + \theta)\right] = G\cos(\omega t + \theta)$.

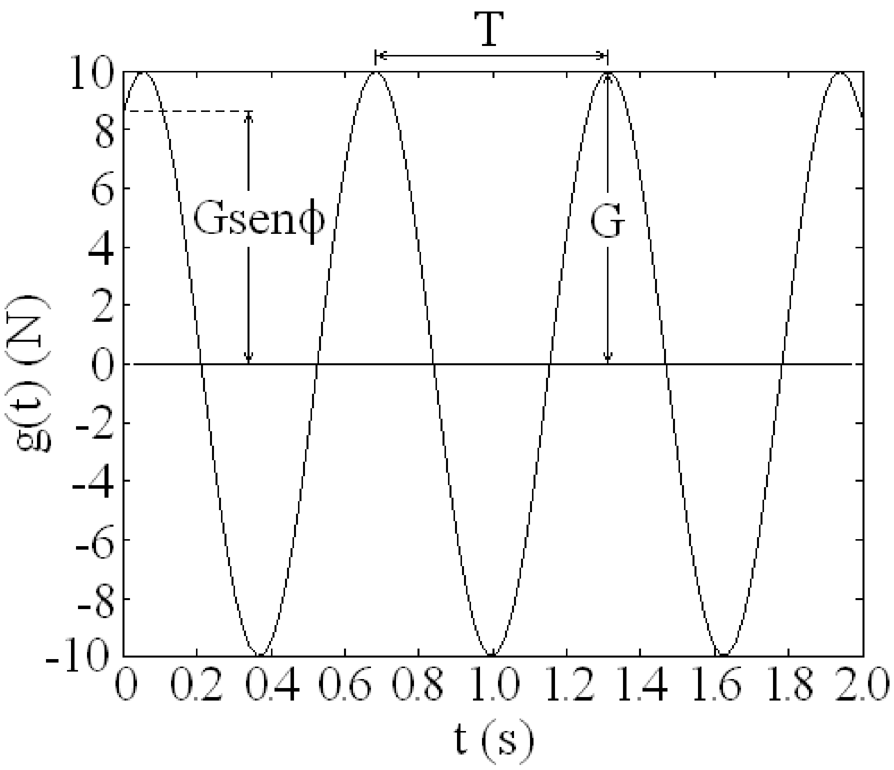
SINAIS HARMÔNICOS – INTERPRETAÇÃO

A constante G é a **amplitude**, ou o **pico**, de uma função harmônica, enquanto ϕ é o **ângulo de fase** (mesmo nome dado a θ). Tem-se, como na figura abaixo, que

→ **Amplitude**: valor máximo da função ao longo do tempo, indicando a <u>severidade do sinal</u> (vibração, som ou excitação).

→ **Ângulo de fase** (rad): deslocamento temporal ϕ / ω (ou θ/ω) da função no eixo do tempo, em relação à origem.

$$g(t) = G\text{sen}(\omega t + \phi) = G\text{sen}\left[\omega\left(t + \phi / \omega\right)\right]$$



As **diferenças de fase** são **importantes** na **composição de funções harmônicas**!

SINAIS HARMÔNICOS – PERÍODO E FREQUÊNCIA

O **período de uma função harmônica** é dado por

$$\boxed{T = 2\pi/\omega \quad (s)}, \quad \text{uma vez que}$$

$$\begin{aligned} g(t+2\pi/\omega) &= A\cos\left[\omega\left(t+2\pi/\omega\right)\right] + B\operatorname{sen}\left[\omega\left(t+2\pi/\omega\right)\right] \\ &= A\left(\cos\omega t\cos 2\pi - \operatorname{sen}\omega t\operatorname{sen}2\pi\right) + B\left(\operatorname{sen}\omega t\cos 2\pi + \cos\omega t\operatorname{sen}2\pi\right) \\ &= A\cos\omega t + B\operatorname{sen}\omega t \\ &= g(t) \end{aligned}$$

Assim, a **frequência de uma função harmônica** é, pois,

$$\boxed{f = \omega/2\pi \quad (Hz) \quad \therefore \quad \omega = 2\pi f \quad (rad/s)}$$

Essas **relações** são **importantes** e frequentemente usadas. A frequência circular (angular) ω é expressa em rad/s (face à sua interpretação geométrica/cinemática).

SINAIS HARMÔNICOS – REPRESENTAÇÃO COMPLEXA

Em algumas situações, é conveniente representar **funções harmônicas** através de **funções exponenciais complexas**. Essa representação se dá seguinte forma.

Como $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\,\mathrm{sen}(\omega t)$ e $e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\,\mathrm{sen}(\omega t)$, decorre que

$$\boxed{\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}} \quad \text{e} \quad \boxed{\mathrm{sen}(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}}\,.$$

Assim sendo,

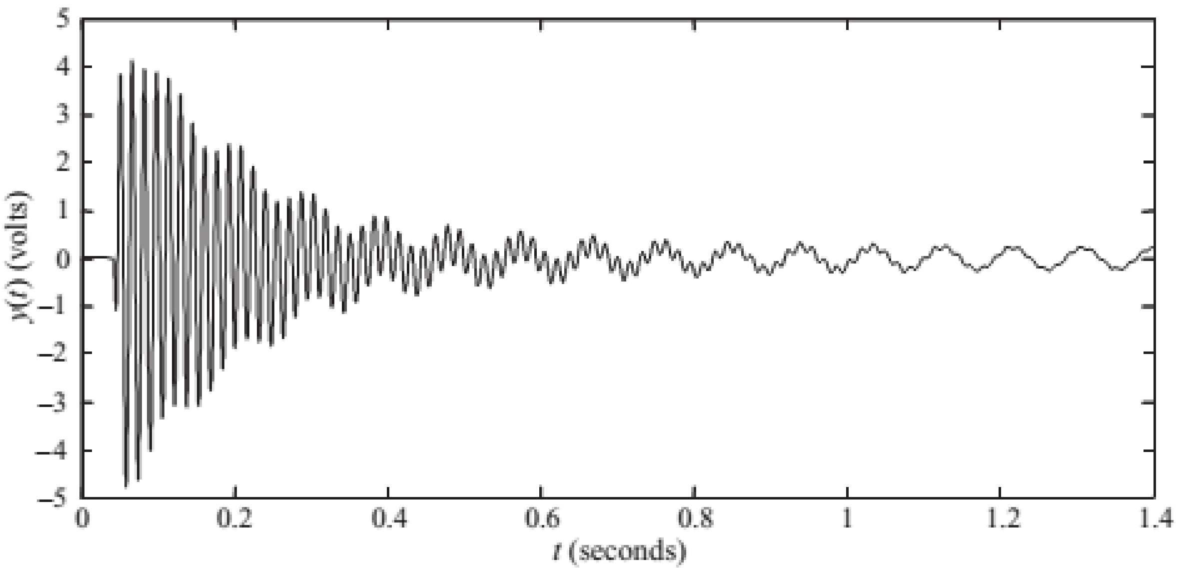
$$g(t) = A\cos\omega t + B\,\mathrm{sen}\,\omega t = A\left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}\right) + B\left(\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\right), \text{ ou}$$

$$\boxed{g(t) = \left(\frac{A - iB}{2}\right)e^{i\omega t} + \left(\frac{A + iB}{2}\right)e^{-i\omega t}}\,.$$

SINAIS NÃO PERIÓDICOS

Funções determinísticas **não periódicas** são aquelas que não satisfazem a definição de periodicidade dada antes. Se não são periódicas, não são harmônicas.

Podem ser **transitórias**, quando tem duração limitada. Dentre outros, esse pode ser o caso, por exemplo, da vibração da ponta da asa de um avião ao aterrissar.

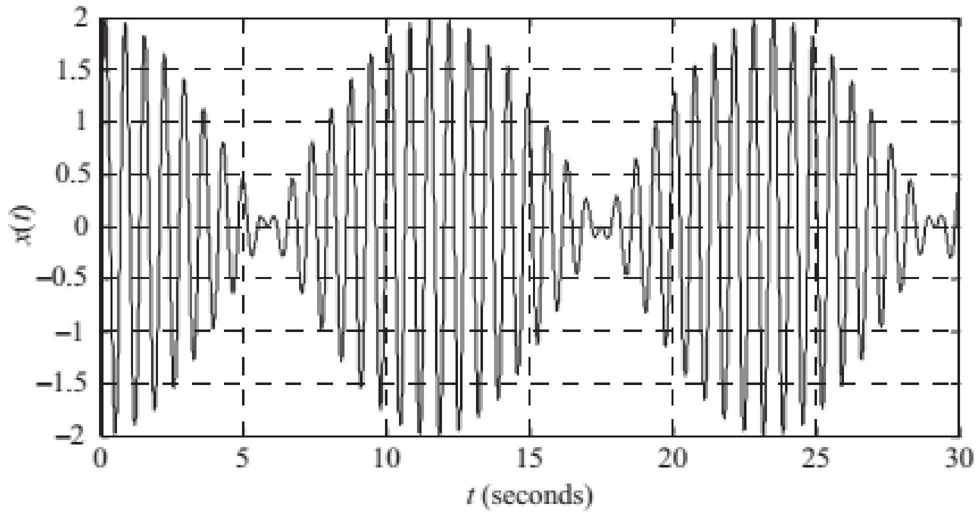


Exemplo de sinal determinístico transitório (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

SINAIS NÃO PERIÓDICOS (cont.)

Podem ser, ainda, **não transitórias** ou **permanentes**. Nesse caso, a função é um somatório de funções periódicas de frequências distintas, que não estão entre si, duas a duas, como dois inteiros. Essas funções são ditas ainda **quase periódicas**.

Vibrações quase periódicas ocorrem na prática em decorrência de **excitações independentes** (p.ex., forças de inércia geradas em máquinas independentes).

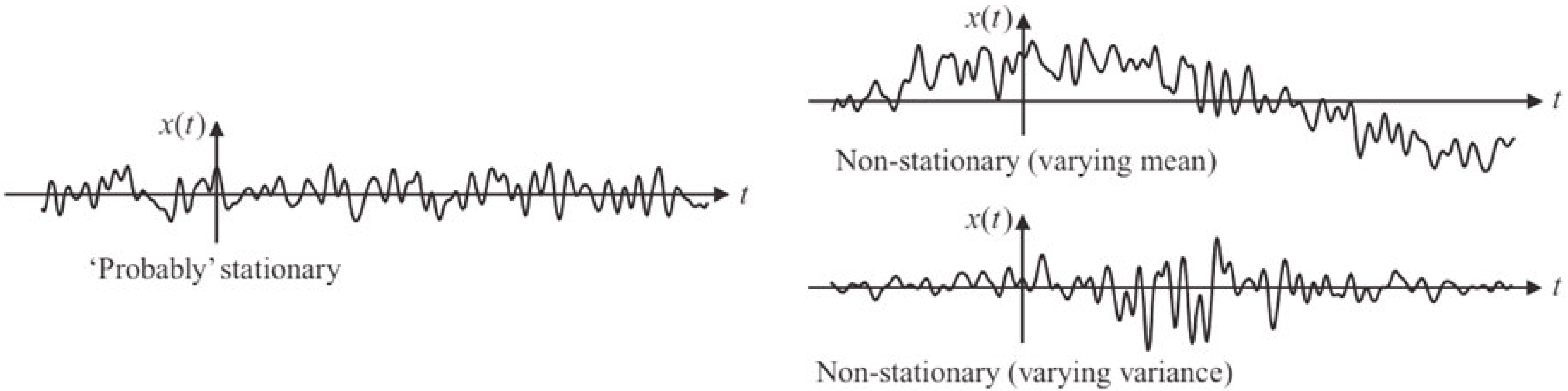


Exemplo de sinal determinístico quase periódico (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)

SINAIS ALEATÓRIOS (NÃO DETERMINÍSTICOS)

Como já exposto, o comportamento de **sinais aleatórios** não pode ser previsto de forma exata. São **exemplos**: ruídos e vibrações veiculares numa estrada, alturas de onda num mar bravio e registros de temperatura numa estação metereológica.

Os sinais aleatórios podem ser divididos em **estacionários** e **não estacionários**, conforme a variação de suas propriedades estatísticas com o tempo.



Sinais aleatórios: (e) estacionário (d) não estacionários (©Wiley, Shin&Hammond, 2008)