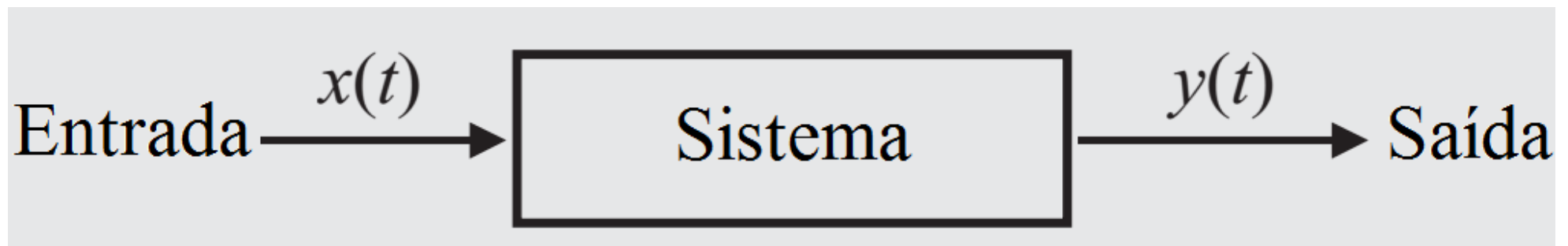


## SISTEMAS LINEARES INVARIANTES NO TEMPO E CAUSAIS

### REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Seja a **relação entrada-saída** para um **sistema linear e invariante no tempo**, representada graficamente na figura abaixo.



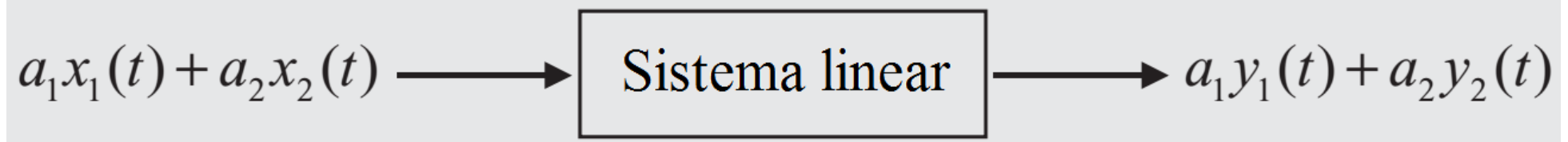
*Relação entrada-saída em um sistema (Shin & Hammond, 2008)*

O sinal (função)  $x(t)$  representa a **entrada** do sistema, ao passo que o sinal (função)  $y(t)$  representa a **saída**.

Como podem ser definidos, nessa perspectiva, linearidade e invariância no tempo?

## LINEARIDADE

Se  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  forem, respectivamente, as respostas do sistema em questão para as entradas  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , o sistema é dito **linear** se ele satisfaz a **propriedade de superposição** ilustrada abaixo.



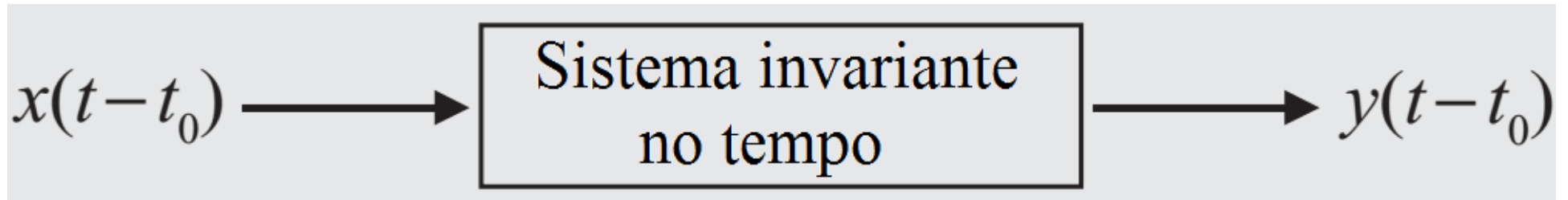
*Propriedade de superposição em um sistema linear (Shin & Hammond, 2008)*

Na representação acima,  $a_1$  e  $a_2$  são constantes arbitrárias.

Assim, para uma combinação linear arbitrária entre  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , o sistema responde com a combinação linear correspondente entre  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$ .

## INVARIÂNCIA NO TEMPO

Adicionalmente, o sistema é dito **invariante no tempo** se, para qualquer entrada deslocada no tempo  $x(t - t_0)$ , a resposta correspondente é igualmente deslocada, ou seja, tem-se  $y(t - t_0)$ , como ilustrado abaixo.



*Propriedade de invariância no tempo de um sistema (Shin & Hammond, 2008)*

As propriedades de **linearidade** e **invariância no tempo** permitem que um certo sistema de interesse, denominado **sistema LTI** (*linear time-invariant*), seja caracterizado dinamicamente, como exposto na sequência.

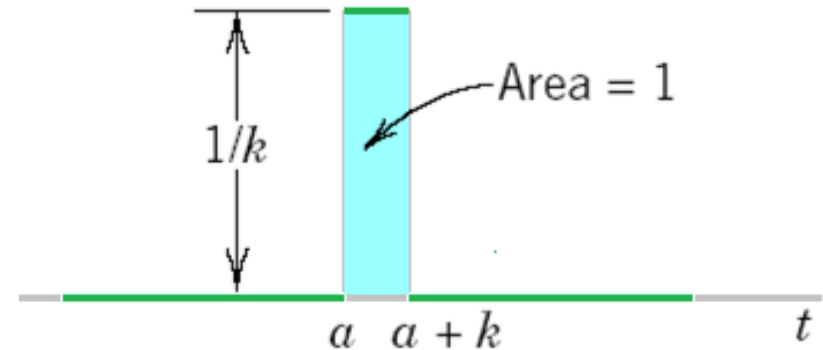
Antes, porém, requer-se uma abordagem preliminar da “função” delta de Dirac.

## FUNÇÃO DELTA DE DIRAC – ABORDAGEM PRELIMINAR

Seja a função  $f_k(t-a)$ , para  $k > 0$ , definida

de forma tal que

$$f_k(t-a) = \begin{cases} 1/k & \text{se } a \leq t \leq a+k \\ 0 & \text{em outros instantes} \end{cases}$$



Essa função é ilustrada na figura ao lado.

A integral dessa função de 0 a  $\infty$  (área do retângulo sombreado) é 1, pois

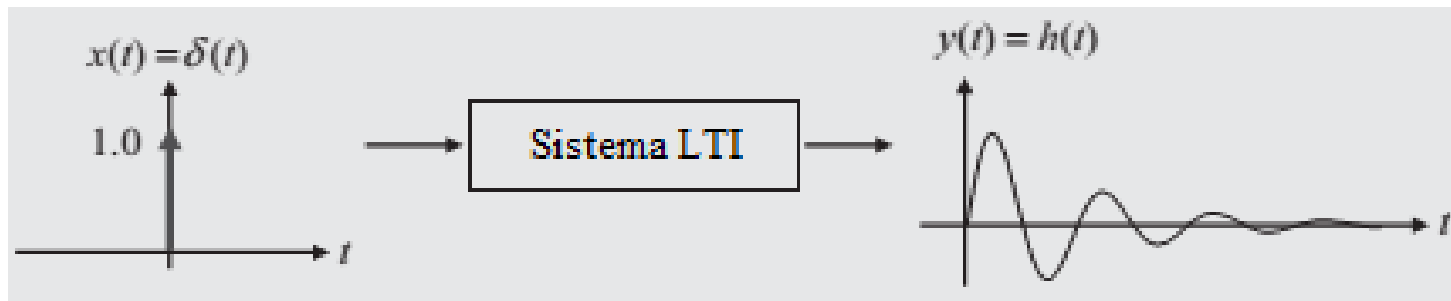
$$\int_0^{\infty} f_k(t-a) dt = \int_a^{a+k} \frac{1}{k} dt = \frac{t}{k} \Big|_a^{a+k} = \frac{(a+k) - a}{k} = 1 .$$

A **função delta de Dirac**  $\delta(t-a)$  pode ser entendida da seguinte forma:

$$\delta(t-a) = \lim_{k \rightarrow 0} f_k(t-a) .$$

## FUNÇÃO RESPOSTA AO IMPULSO E CAUSALIDADE

Considere-se que a resposta do sistema LTI de interesse à função delta de Dirac (função impulso unitário),  $\delta(t)$ , seja denotada por  $h(t)$ , como na figura abaixo.



*Resposta ao impulso de um sistema (Shin & Hammond, 2008)*

A função  $h(t)$  é conhecida como **função resposta ao impulso** do sistema.

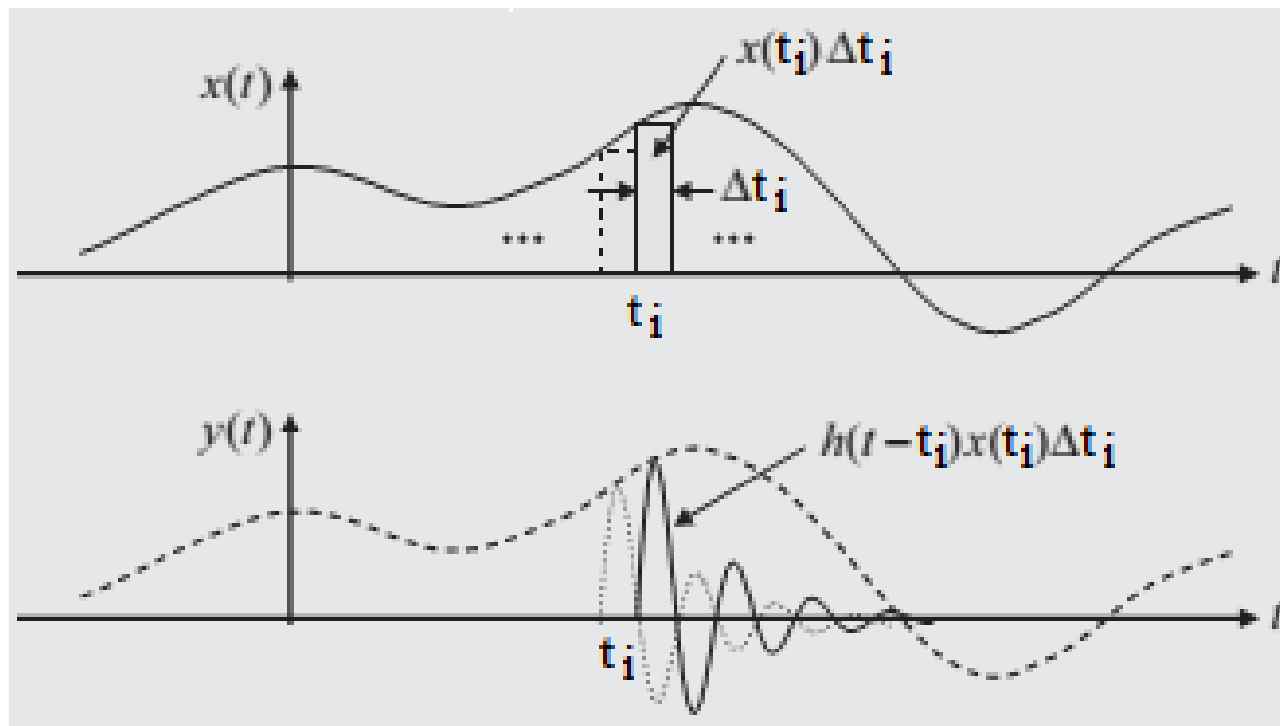
Na figura acima, nota-se que o sistema só responde após a ocorrência da entrada, ou seja,  $h(t) = 0$  para  $t < 0$ . Um **sistema** que se comporta assim é dito **causal**.

Para um sistema causal, a saída  $y(t_1)$  num dado instante  $t_1$  só depende dos valores passados e presente da entrada  $x(t)$ . Ou seja, de  $x(t)$  para  $t \leq t_1$ .

## RESPOSTA DE UM SISTEMA LTI CAUSAL

Para um sistema LTI causal, a resposta a uma entrada  $\delta(t - t_0)$  será  $h(t - t_0)$ .

Seja agora um sinal arbitrário de entrada  $x(t)$ , representado por uma sequência de impulsos elementares, como mostrado abaixo.



*Resposta ao impulso de um sistema (Shin & Hammond, 2008)*

## RESPOSTA DE UM SISTEMA LTI CAUSAL (cont.)

Dessa forma, o impulso elementar num tempo arbitrário  $t_i$  pode ser dado por

$$x(t_i)\Delta t_i\delta(t-t_i) \quad (1)$$

ao passo que a resposta correspondente a tal impulso é

$$x(t_i)\Delta t_i h(t-t_i) \quad (2)$$

Assim sendo, a resposta total  $y(t_j)$  num tempo  $t_j \geq t_i$  será tal que

$$y(t_j) = \sum_{i=1}^j x(t_i)h(t-t_i)\Delta t_i \quad (3)$$

Se  $\Delta t_i \rightarrow d\tau$ ,  $t_i \rightarrow \tau$ . Então, para  $t_j = t$ , tem-se que

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (4)$$

## RESPOSTA DE UM SISTEMA LTI CAUSAL (cont.)

Se a entrada  $x(t) = 0$  para  $t < 0$ , a resposta  $y(t)$  será, da Eq. (4), dada por

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (5)$$

Fazendo a substituição de variável  $\sigma = t - \tau$ , decorre que  $d\sigma = -d\tau$ . Então,

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau = -\int_t^0 x(t - \sigma) h(\sigma) d\sigma = \int_0^t h(\sigma) x(t - \sigma) d\sigma \quad (6)$$

de modo que, no domínio do tempo, de forma comutativa,

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)} \quad (7) \rightarrow (* : \text{convolução})$$

→ A resposta  $y(t)$  a uma entrada  $x(t)$  para um sistema LTI causal é igual à **convolução** da entrada com a função resposta ao impulso  $h(t)$  do sistema.



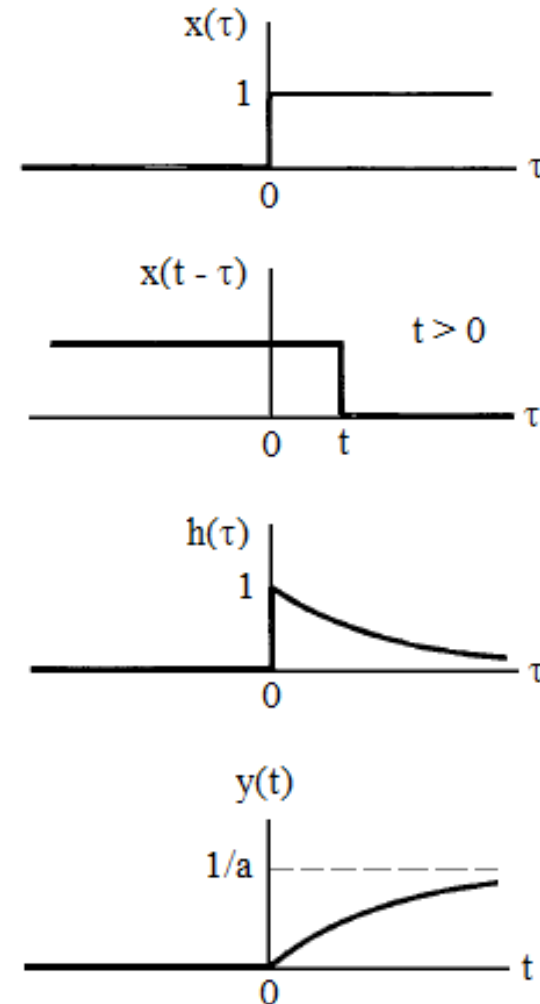
## EXEMPLO DE RESPOSTA POR CONVOLUÇÃO

Seja, por exemplo, a resposta de um sistema LTI causal em que  $x(t) = u(t)$  (função degrau unitário) e  $h(t) = e^{-at}u(t)$ , com  $a > 0$ .

De (6), tem-se que

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_0^t e^{-a\tau}(1)d\tau \\ &= -\frac{1}{a}e^{-a\tau}\Big|_0^t = \frac{1}{a}(1 - e^{-at}), \quad t > 0 \end{aligned}$$

A representação gráfica dessa operação é ilustrada na figura ao lado.



*Operação de convolução (Jackson, 1991)*

## CONVOLUÇÃO – DEFINIÇÃO GERAL

A **convolução** entre duas funções  $f(t)$  e  $g(t)$  pode ser definida, de forma geral, por

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)f(t - \tau)d\tau = (g * f)(t) \quad (8)$$

Nas integrações acima, uma das funções permanece como está enquanto a outra é deslocada e invertida (nessa ordem).

A convolução, além de **comutativa**, também é **associativa**, de modo que, para três funções  $f(t)$ ,  $g(t)$  e  $v(t)$ , tem-se que

$$[(f * g) * v](t) = [f * (g * v)](t)$$

Sendo  $f(t) = x(t)$  e  $g(t) = h(t)$ , chega-se da Eq. (8) às Eqs. (5) e (6) pela aplicação das restrições impostas antes para  $x(t)$  e  $h(t)$  (  $\rightarrow x(t) = 0$  e  $h(t) = 0$ , para  $t < 0$  ).

## FUNÇÃO RESPOSTA EM FREQUÊNCIA (FRF)

No domínio da frequência, tem-se que a Eq. (7),  $y(t) = h(t) * x(t)$ , torna-se

$$\boxed{\bar{Y}(\omega) = \bar{H}(\omega)\bar{X}(\omega)} \quad (9)$$

onde

$$\bar{Y}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-i\omega t} dt \text{ é a transformada de Fourier de } y(t);$$

$$\bar{H}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt \text{ é a transformada de Fourier de } h(t);$$

$$\bar{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \text{ é a transformada de Fourier de } x(t).$$

A função  $\bar{H}(\omega)$  é denominada **função resposta em frequência**, ou apenas **FRF**.

## CONVOLUÇÃO E TRANSFORMADA DE FOURIER

Chega-se da Eq. (7) à Eq. (9) da seguinte forma:

$$\bar{Y}(\omega) = \text{TF}\{y(t)\} = \text{TF}\{h(t) * x(t)\}$$

Portanto,

$$\bar{Y}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \right) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau) e^{-i\omega t} d\tau dt .$$

Fazendo  $\sigma = t - \tau$ , tem-se que  $d\sigma = dt$  e que

$$\bar{Y}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(\sigma) e^{-i\omega(\tau+\sigma)} d\tau d\sigma = \left( \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} x(\sigma)e^{-i\omega\sigma} d\sigma \right) .$$

Ou seja,

$$\bar{Y}(\omega) = \bar{H}(\omega)\bar{X}(\omega) .$$

## SISTEMA LTI SOB ENTRADA HARMÔNICA

Se o **signal de entrada** em um sistema LTI for **harmônico**, de frequência  $\omega$ , então o **signal de saída** também será **harmônico**, de **mesma frequência**, após quaisquer transientes já terem cessado. A prova dessa afirmação segue.

Sejam  $x(t) = \text{sen}(\omega t)$  o sinal de entrada e  $y(t)$  o sinal de saída.

Se  $x(t) \rightarrow y(t)$ , então, para um sistema LTI,  $\dot{x}(t) \rightarrow \dot{y}(t)$ , uma vez que

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \rightarrow \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} .$$

Assim, no limite, quando  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\dot{x}(t) \rightarrow \dot{y}(t)$ . Similarmente,  $\ddot{x}(t) \rightarrow \ddot{y}(t)$ .

Pode-se escrever também que  $x_1(t) + \omega^2 x_2(t) \rightarrow y_1(t) + \omega^2 y_2(t)$ . Fazendo, então,

$$x_1(t) = \ddot{x}(t) \text{ e } x_2(t) = x(t) \quad \text{decorre que} \quad \ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) \rightarrow \ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) .$$

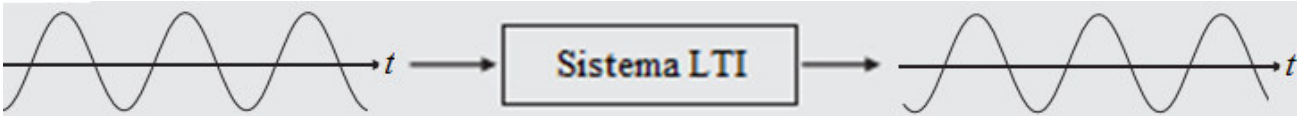
## SISTEMA LTI SOB ENTRADA HARMÔNICA (cont.)

Para  $x(t) = \text{sen}(\omega t)$ ,  $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$ .

Como, em regime estacionário, uma entrada nula em um sistema LTI resulta em uma saída igualmente nula, tem-se, de

$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) \rightarrow \ddot{y}(t) + \omega^2 y(t)$  e  $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0$  que  $\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0$ .

A solução geral da equação para  $y(t)$ , que é uma equação diferencial ordinária linear, com coeficientes constantes e homogênea, é dada por

$$y(t) = A \text{sen}(\omega t - \phi)$$


The diagram shows a block labeled "Sistema LTI" with a sinusoidal wave entering from the left and another sinusoidal wave exiting to the right. Both waves are plotted against a horizontal axis labeled 't'.

o que prova (*Hugh Goyder, via G. Tomlinson e K. Worden, 2001*) a afirmação feita.

→ Um  **sinal harmônico não sofre distorção ao passar por um sistema LTI !**

## SISTEMA TI SOB ENTRADA PERIÓDICA

Se o **signal de entrada** em um sistema TI for **periódico**, de período  $T$ , então o **signal de saída** também será **periódico**, após o término de quaisquer transientes.

Para provar essa afirmação, considerem-se o sinal de entrada periódico  $x(t)$  e o sinal de saída  $y(t)$ . Tem-se, então, que

$$x(t) = x(t + T) \quad \text{e} \quad x(t) \rightarrow y(t) .$$

Como o sistema é invariante no tempo,

$$x(t + T) \rightarrow y(t + T) .$$

Assim sendo, e face às relações anteriores, decorre que (*Espíndola, 1986*)

$$x(t + T) = x(t) \rightarrow y(t + T) = y(t) .$$

Embora se prove que  $y(t)$  é periódica, não se obtém seu período (contido em  $T!$ ).

Há casos em que os períodos de  $x(t)$  e  $y(t)$  são distintos ( $\rightarrow$  sistemas não lineares).

## EXEMPLO – SISTEMA AMORTECIDO COM 1 GDL

Seja um sistema mecânico com um grau de liberdade e amortecimento viscoso sob excitação arbitrária, cuja equação de movimento é

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (10)$$

Essa equação pode ser manipulada, resultando em (verificar!)

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = \frac{1}{m}f(t) \quad (11)$$

onde

$$\omega_n = \sqrt{k/m} \quad (12) \quad \text{e} \quad \zeta = c/(2m\omega_n) \quad (13).$$

Para  $f(t) = \delta(t)$ , a função resposta ao impulso desse sistema virá de

$$\ddot{h}(t) + 2\zeta\omega_n\dot{h}(t) + \omega_n^2h(t) = \frac{1}{m}\delta(t) \quad (14)$$



## EXEMPLO – SISTEMA AMORTECIDO COM 1 GDL (cont.)

Para um sistema subamortecido, em que  $0 < \zeta < 1$ , tem-se que

$$h(t) = \frac{1}{m\nu} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\nu t) \quad (15)$$

onde  $\nu = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  (16).

Essa função, que pode ser obtida via transformada de Laplace, é ilustrada abaixo.



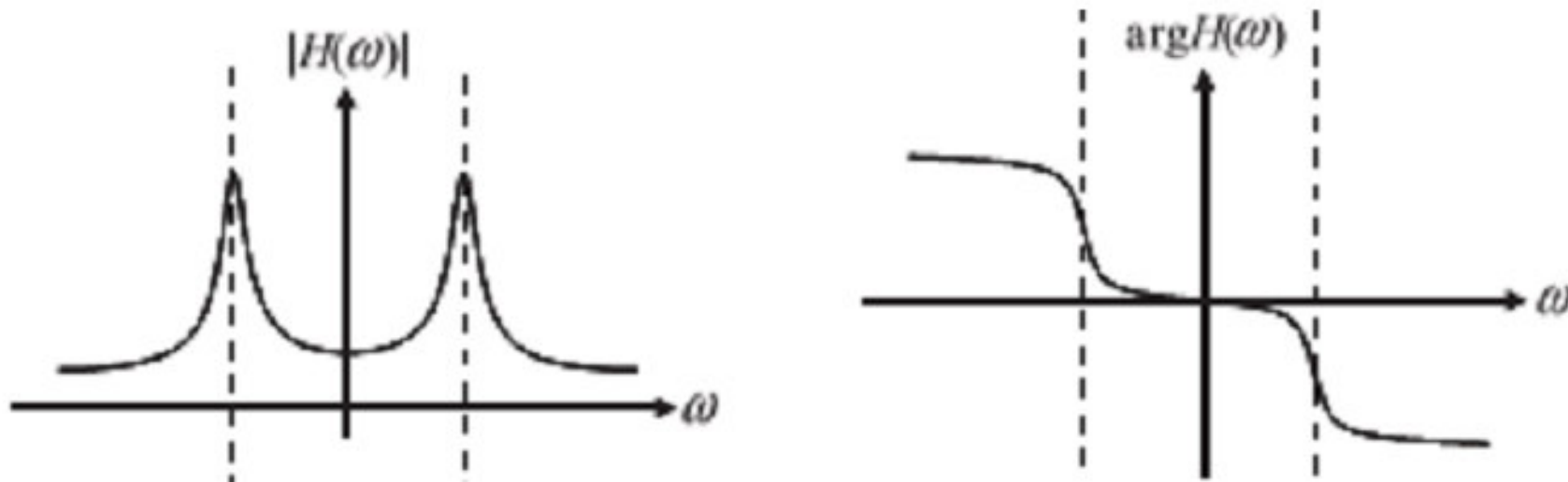
*Função resposta ao impulso de sistema com 1 gdl (Shin & Hammond, 2008)*

## EXEMPLO – SISTEMA AMORTECIDO COM 1 GDL (cont.)

Aplicando a transformada de Fourier em ambos os lados da Eq. (14), obtém-se a função resposta em frequência correspondente, que é dada por

$$\bar{H}(\omega) = \frac{1}{m} \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega^2) + i2\zeta\omega_n\omega} \quad (17)$$

Os espectros de amplitude e fase dessa função são ilustrados na figura abaixo.



*Função resposta em frequência de sistema com 1 gdl (Shin & Hammond, 2008)*

## IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMA COM 1 GDL

Em um experimento ideal, sob ruído desprezável, pode-se obter a FRF

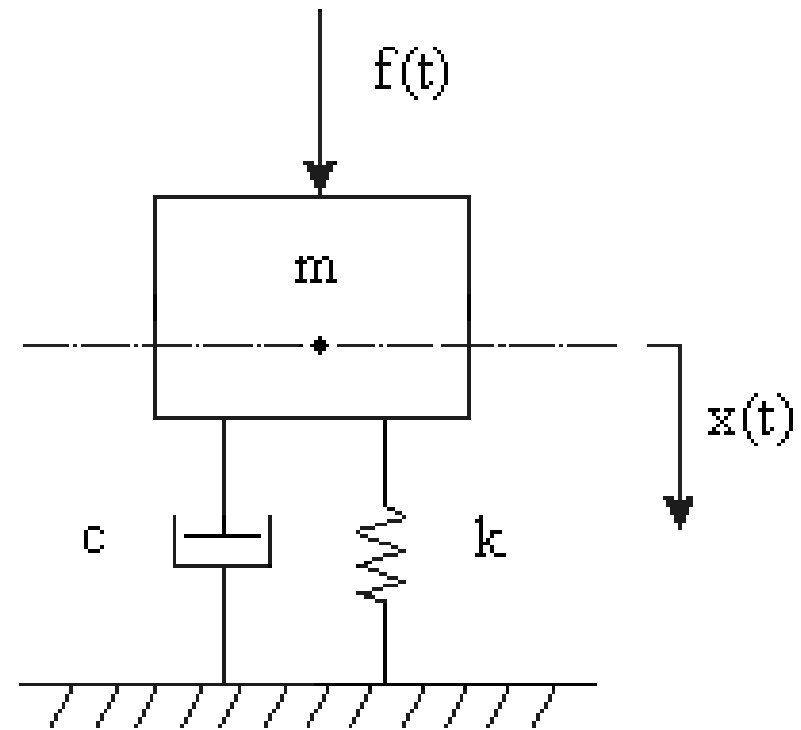
$$\bar{H}(\omega) = \frac{\bar{X}(\omega)}{\bar{F}(\omega)} \quad (18)$$

a partir dos sinais medidos  $x(t)$  e  $f(t)$ .

A curva teórica dada pela Eq. (17) pode ser ajustada aos pontos experimentais correspondentes à FRF da Eq. (18).

Nesse ajuste, **parâmetros do sistema**, tais como  $\omega_n$  e  $\zeta$ , podem ser **identificados**.

→ Os sinais  $x(t)$  e  $f(t)$  podem ser obtidos via acelerômetro e martelo de impacto.



*Sistema mecânico com 1 gdl*