

SÉRIE DE FOURIER

REPRESENTAÇÃO POR SÉRIE DE FOURIER

Seja $g(t)$ uma **função periódica** de **período T**. Essa função pode, então, para todos os fins práticos, ser representada pela seguinte série:

$$g(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} [A_j \cos(\omega_j t) + B_j \text{sen}(\omega_j t)] \quad (1), \rightarrow \text{série de Fourier}$$

onde, com $j = 1, 2, 3, \dots$, tem-se que

$$\omega_1 \triangleq \frac{2\pi}{T} \quad (2),$$

$$\omega_j \triangleq j\omega_1 \quad (3),$$

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) dt \quad (4),$$

$$A_j = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \cos(\omega_j t) dt \quad (5) \quad \text{e}$$

$$B_j = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \text{sen}(\omega_j t) dt \quad (6).$$

REPRESENTAÇÃO POR SÉRIE DE FOURIER (cont.)

A função $g(t)$ também pode ser representada, de forma equivalente, por

$$g(t) = G_0 + \sum_{j=1}^{\infty} G_j \operatorname{sen}(\omega_j t + \phi_j) \quad (7), \quad \rightarrow \text{série de Fourier}$$

onde $G_0 = A_0/2$ (8), $G_j = \sqrt{(A_j^2 + B_j^2)}$ (9), $\operatorname{sen}\phi_j = A_j / G_j$ (10),

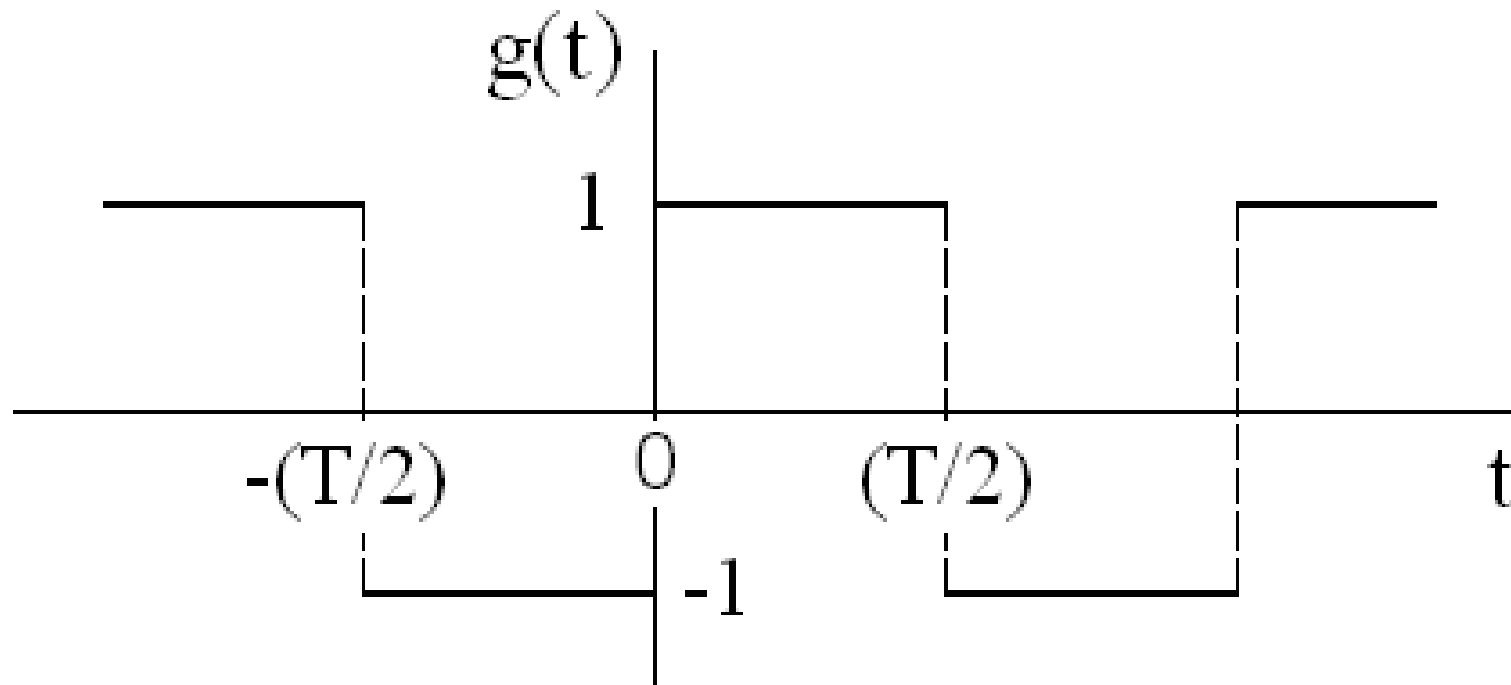
$$\operatorname{cos}\phi_j = B_j / G_j \quad (11) \quad \therefore \operatorname{tg}\phi_j = A_j / B_j \quad \text{e} \quad \phi_j = \operatorname{arctg}(A_j / B_j) \quad (12).$$

$\rightarrow A_0, A_j$ e B_j são obtidos como exposto antes, podendo as **integrações** para sua obtenção ser realizadas ao longo de **qualquer intervalo de comprimento T**.

Condições suficientes:

$g(t)$ contínua por partes no intervalo $(-T/2 \leq t \leq T/2)$ (\rightarrow saltos finitos), tendo derivadas à esquerda e à direita em cada ponto desse intervalo (Kreyszig, 2009).

EXEMPLO – ONDA QUADRADA



Como $\omega_j = j\omega_1$ e $\omega_1 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)$, tem-se que $\frac{\omega_j T}{2} = j\pi$, o que é utilizado adiante.

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^0 (-1) dt + \int_0^{T/2} (1) dt \right] = \frac{1}{T} \left(-t \Big|_{-T/2}^0 + t \Big|_0^{T/2} \right) = \frac{1}{T} \left(-\frac{T}{2} + \frac{T}{2} \right) = 0.$$

EXEMPLO – ONDA QUADRADA (cont.)

$$\begin{aligned} A_j &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \cos(\omega_j t) dt = \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 (-1) \cos(\omega_j t) dt + \int_0^{T/2} (1) \cos(\omega_j t) dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[-\frac{\text{sen}(\omega_j t)}{\omega_j} \Big|_{-T/2}^0 + \frac{\text{sen}(\omega_j t)}{\omega_j} \Big|_0^{T/2} \right] = \frac{2}{\omega_j T} \left[\text{sen}\left(-\frac{\omega_j T}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\omega_j T}{2}\right) \right] = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_j &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \text{sen}(\omega_j t) dt = \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 (-1) \text{sen}(\omega_j t) dt + \int_0^{T/2} (1) \text{sen}(\omega_j t) dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[\frac{\cos(\omega_j t)}{\omega_j} \Big|_{-T/2}^0 - \frac{\cos(\omega_j t)}{\omega_j} \Big|_0^{T/2} \right] = \frac{2}{\omega_j T} \left[1 - \cos\left(-\frac{\omega_j T}{2}\right) + 1 - \cos\left(\frac{\omega_j T}{2}\right) \right] \\ &= \frac{2}{j\pi} [1 - \cos(j\pi)]. \end{aligned}$$

EXEMPLO – ONDA QUADRADA (cont.)

Portanto,

$$\begin{aligned}g(t) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} [A_j \cos(\omega_j t) + B_j \sin(\omega_j t)] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{j\pi} [1 - \cos(j\pi)] \right\} \sin(\omega_j t) \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\sin(\omega_1 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_1 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_1 t) + \frac{1}{7} \sin(7\omega_1 t) + \dots \right]\end{aligned}$$

Na representação por série de Fourier, observa-se que

- nos **pontos de continuidade**, a **série converge** para o valor da função;
- já nas **descontinuidades**, para o **valor médio** dos limites à esquerda e à direita;
- erro significativo na vizinhança das descontinuidades: **fenômeno de Gibbs**.

FORMA COMPLEXA DA SÉRIE DE FOURIER

A **série de Fourier** de uma função periódica $g(t)$, de período $T = 2\pi/\omega_1$, é tal que

$$g(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left[A_j \cos(\omega_j t) + B_j \text{sen}(\omega_j t) \right], \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$

sendo os coeficientes da série, ditos **coeficientes de Fourier**, dados por

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) dt, \quad A_j = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \cos(\omega_j t) dt \quad \text{e} \quad B_j = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \text{sen}(\omega_j t) dt .$$

Essa série também pode ser escrita em **forma complexa**, o que, como se verá posteriormente, é bastante conveniente.

Para a representação em forma complexa, lança-se mão de que

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \left[e^{(ix)} + e^{-(ix)} \right] \quad (13); \quad \text{sen}(x) = \frac{1}{2i} \left[e^{(ix)} - e^{-(ix)} \right] = -\frac{i}{2} \left[e^{(ix)} - e^{-(ix)} \right] \quad (14).$$

FORMA COMPLEXA DA SÉRIE DE FOURIER (cont.)

Então, para $x = \omega_j t$, pode-se escrever que

$$A_j \cos(\omega_j t) + B_j \operatorname{sen}(\omega_j t) = \frac{1}{2} A_j \left[e^{i(\omega_j t)} + e^{-i(\omega_j t)} \right] - \frac{i}{2} B_j \left[e^{i(\omega_j t)} - e^{-i(\omega_j t)} \right] \quad (15).$$

Agrupando os termos exponenciais comuns, chega-se a

$$A_j \cos(\omega_j t) + B_j \operatorname{sen}(\omega_j t) = \frac{1}{2} (A_j - iB_j) e^{i(\omega_j t)} + \frac{1}{2} (A_j + iB_j) e^{-i(\omega_j t)} \quad (16).$$

Levando a expressão acima na série de Fourier de $g(t)$, tem-se que

$$g(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (A_j - iB_j) e^{i(\omega_j t)} + \frac{1}{2} (A_j + iB_j) e^{-i(\omega_j t)} \right] \quad (17).$$

Na expressão acima, já são usados termos complexos.

FORMA COMPLEXA DA SÉRIE DE FOURIER (cont.)

A expressão em questão pode ser simplificada caso se faça

$$\frac{A_0}{2} = G_0 \quad (18), \quad \frac{1}{2}(A_j - iB_j) = \bar{G}_j \quad (19) \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}(A_j + iB_j) = \bar{G}_j^* \quad (20).$$

Dessa forma, a série passa a ser dada por

$$g(t) = G_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\bar{G}_j e^{i(\omega_j t)} + \bar{G}_j^* e^{-i(\omega_j t)} \right] \quad (21).$$

Os coeficientes \bar{G}_j acima podem ser determinados via A_j e B_j , de modo que

$$\begin{aligned} \bar{G}_j &= \frac{1}{2}(A_j - iB_j) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \cos(\omega_j t) dt - i \left[\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \text{sen}(\omega_j t) dt \right] \right\} \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \left[\cos(\omega_j t) - i \text{sen}(\omega_j t) \right] dt . \end{aligned}$$

FORMA COMPLEXA DA SÉRIE DE FOURIER (cont.)

Ou seja,

$$\bar{G}_j = \frac{1}{2}(A_j - iB_j) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-i(\omega_j t)} dt \quad (22).$$

Já os coeficientes \bar{G}_j^* são tais que

$$\bar{G}_j^* = \frac{1}{2}(A_j + iB_j) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{i(\omega_j t)} dt \quad (23).$$

Introduzindo a notação $\boxed{\omega_{-j} = -\omega_j}$ (24), decorre, da Eq. (22), que

$$\bar{G}_{-j} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-i(\omega_{-j} t)} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-i(-\omega_j t)} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{i(\omega_j t)} dt = \bar{G}_j^* \quad (25).$$

Já com a definição $\boxed{\omega_0 \triangleq 0}$, nota-se que G_0 decorre de \bar{G}_j , pois $\bar{G}_0 = G_0$ (26).

FORMA COMPLEXA DA SÉRIE DE FOURIER (cont.)

Isso permite que a expressão complexa de $g(t)$ seja condensada, passando de

$$g(t) = G_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \left[\bar{G}_j e^{i(\omega_j t)} + \bar{G}_j^* e^{-i(\omega_j t)} \right] \quad (21)$$

para simplesmente

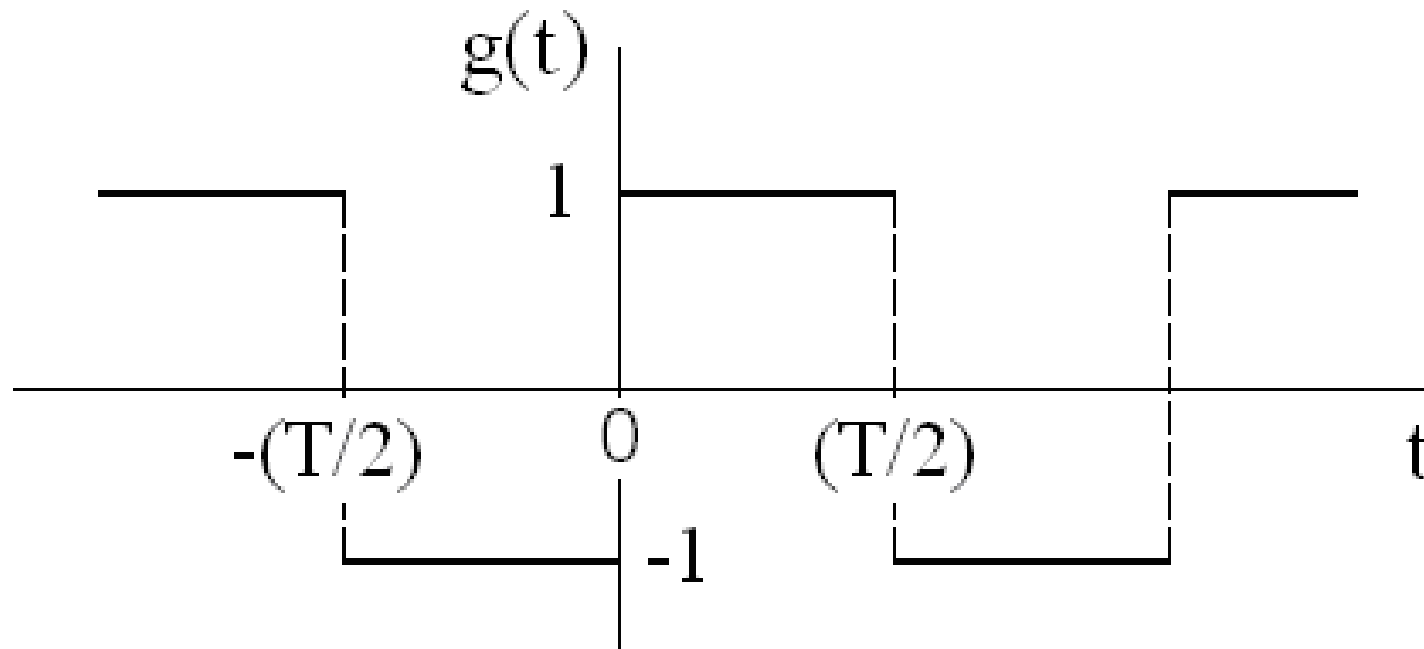
$$g(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{G}_j e^{i(\omega_j t)} \quad (27). \rightarrow \text{forma complexa da série de Fourier}$$

Todos os **coeficientes complexos de Fourier** \bar{G}_j podem ser determinados por

$$\bar{G}_j = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-i(\omega_j t)} dt \quad (28), \text{ em que } j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

→ As expressões (27) e (28) são únicas e compactas: ideais para programação.

EXEMPLO – ONDA QUADRADA (cont.)



$$\begin{aligned} \text{Para } j \neq 0, \quad \bar{G}_j &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-i(\omega_j t)} dt = \frac{1}{T} \left[\int_{-T/2}^0 (-1) e^{-i(\omega_j t)} dt + \int_0^{T/2} (1) e^{-i(\omega_j t)} dt \right] \\ &= \frac{1}{T} \left[\frac{e^{-i(\omega_j t)}}{i\omega_j} \Big|_{-T/2}^0 - \frac{e^{-i(\omega_j t)}}{i\omega_j} \Big|_0^{T/2} \right] = \frac{1}{i\omega_j T} \left[1 - e^{i\left(\frac{\omega_j T}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{\omega_j T}{2}\right)} + 1 \right] \dots \end{aligned}$$

EXEMPLO – ONDA QUADRADA (cont.)

Como $\omega_j = j\omega_1$ e $\omega_1 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)$, tem-se que $\omega_j T = j2\pi$. Assim,

$$\bar{G}_j = \frac{1}{i(j2\pi)} \left[2 - e^{i(j\pi)} - e^{-i(j\pi)} \right] = -\frac{i}{2j\pi} [2 - 2\cos(j\pi)] = -\frac{i}{j\pi} [1 - \cos(j\pi)], \quad j \neq 0,$$

o que está de acordo com o obtido anteriormente, posto que $\bar{G}_j = (A_j - iB_j)/2$.

Já para $j = 0$, tem-se, da expressão (28), que $\bar{G}_0 = 0$, o que também está de acordo com o já visto. Portanto,

$$g(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{G}_j e^{i(\omega_j t)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{i}{j\pi} [1 - \cos(j\pi)] \right\} e^{i(\omega_j t)}, \quad j \neq 0.$$

é a série de Fourier em forma complexa de $g(t)$.

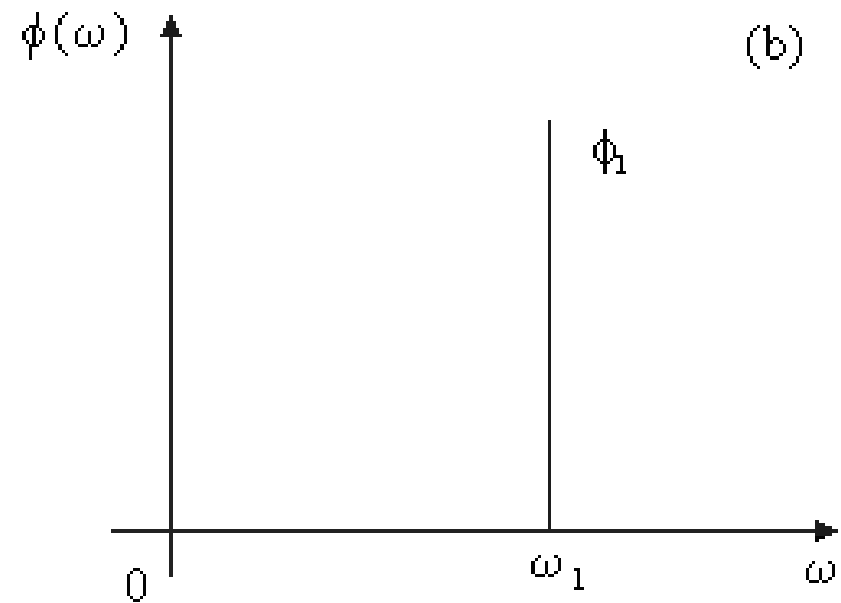
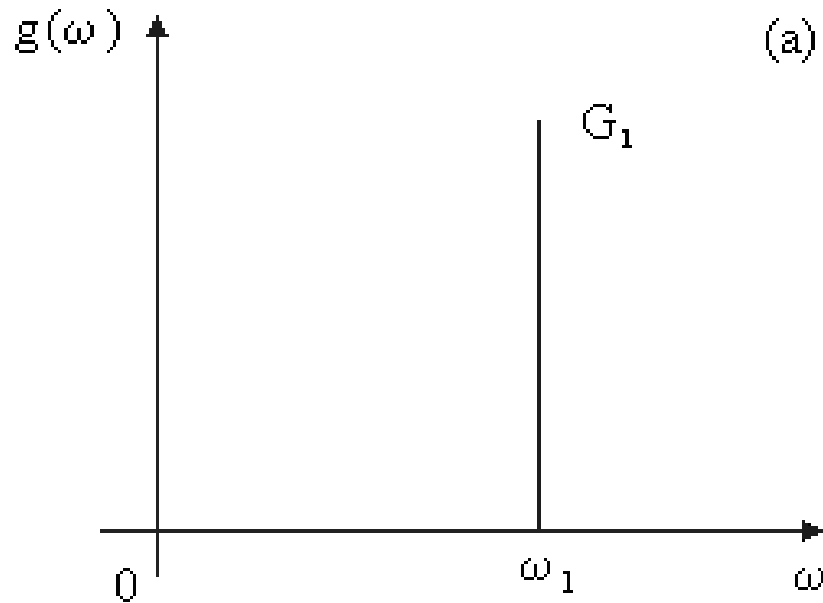
DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA – ESPECTROS DE AMPLITUDE E FASE

função harmônica no domínio do tempo: $g(t) = G_1 \text{ sen}(\omega_1 t + \phi_1)$

função harmônica
no domínio
da frequência:

$$g(\omega) = \begin{cases} G_1, & \text{se } \omega = \omega_1 \\ 0, & \text{se } \omega \neq \omega_1 \end{cases}$$

$$\phi(\omega) = \begin{cases} \phi_1, & \text{se } \omega = \omega_1 \\ 0, & \text{se } \omega \neq \omega_1 \end{cases}$$



Espectros discretos unilaterais de uma função harmônica: (a) amplitude e (b) fase.

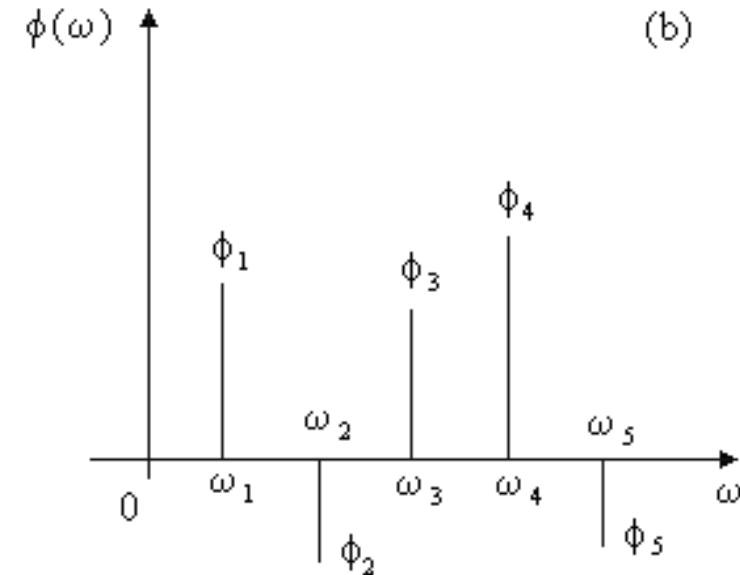
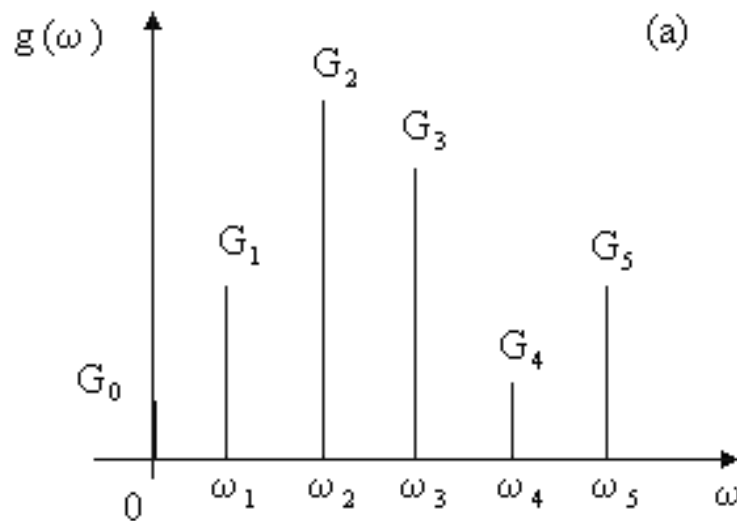
DOM. DA FREQUÊNCIA – ESPECTROS DE AMPLITUDE E FASE (cont.)

função periódica (tempo):
$$g(t) = G_0 + \sum_{j=1}^{\infty} G_j \text{sen}(\omega_j t + \phi_j)$$

função periódica (frequência):

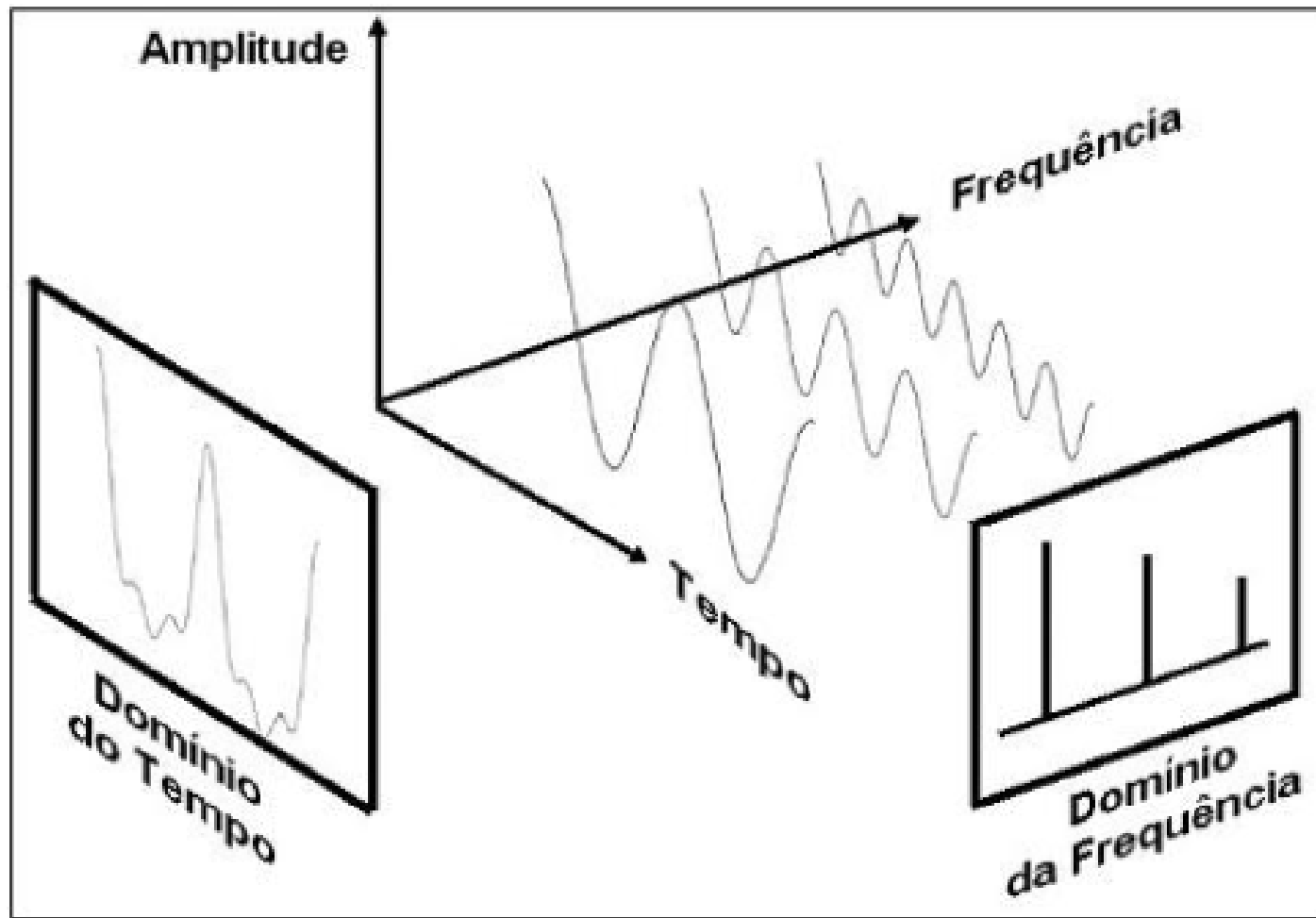
$$g(\omega) = \begin{cases} G_j, & \text{se } \omega = \omega_j \\ 0, & \text{se } \omega \neq \omega_j \end{cases}, \quad \begin{matrix} j = 0, \infty; \\ \omega_0 \triangleq 0. \end{matrix}$$

$$\phi(\omega) = \begin{cases} \phi_j, & \text{se } \omega = \omega_j \\ 0, & \text{se } \omega \neq \omega_j \end{cases}, \quad j = 1, \infty.$$



Espectros discretos unilaterais de uma função periódica: (a) amplitude e (b) fase.

REPRESENTAÇÃO NOS DOMÍNIOS DO TEMPO E DA FREQUÊNCIA

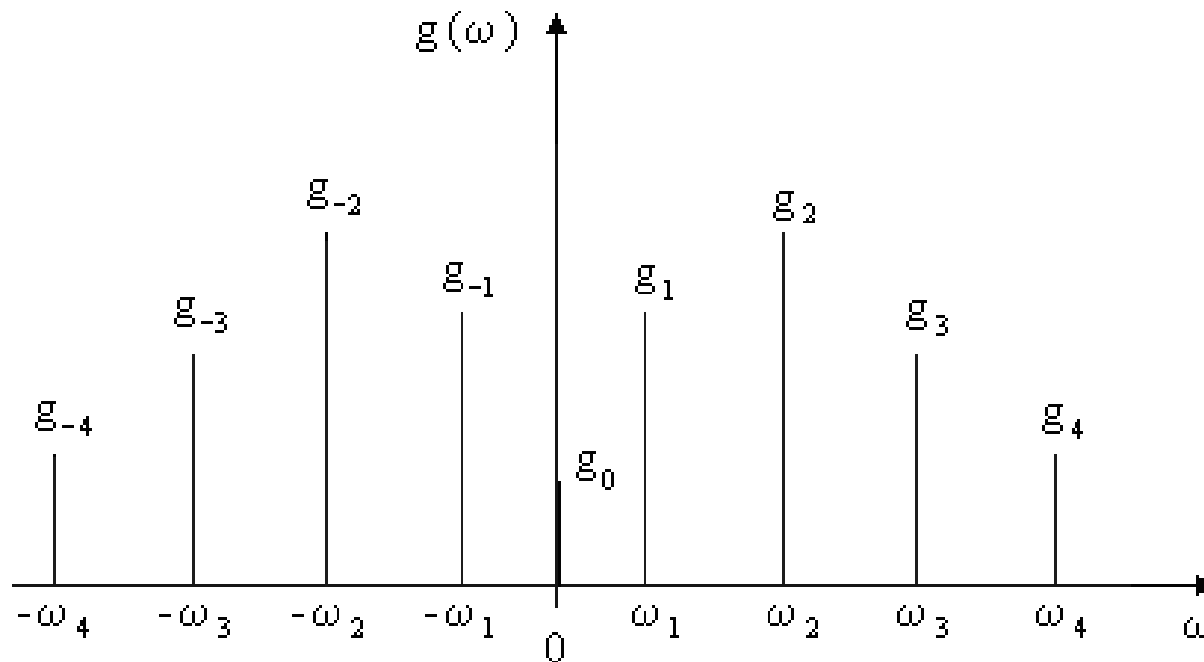


→ **Análise espectral de sinais de vibração e som**, que é empregada, por exemplo, no diagnóstico de vibrações em máquinas rotativas e alternativas.

DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA – ESPECTRO BILATERAL DE AMPLITUDE

Quando se lida com a **forma complexa da série de Fourier**, o **espectro de amplitude** corresponde ao **módulo do coeficiente** \bar{G}_j , sendo denotado por g_j .

Ele é, assim, bilateral, como ilustrado abaixo (frequências negativas ?!).



Espectro discreto bilateral de amplitude.

Verifica-se (vide eqs.) que:

(a) esse **espectro** é uma **função par** → (22)-(25)

(b) para $\omega = 0$,

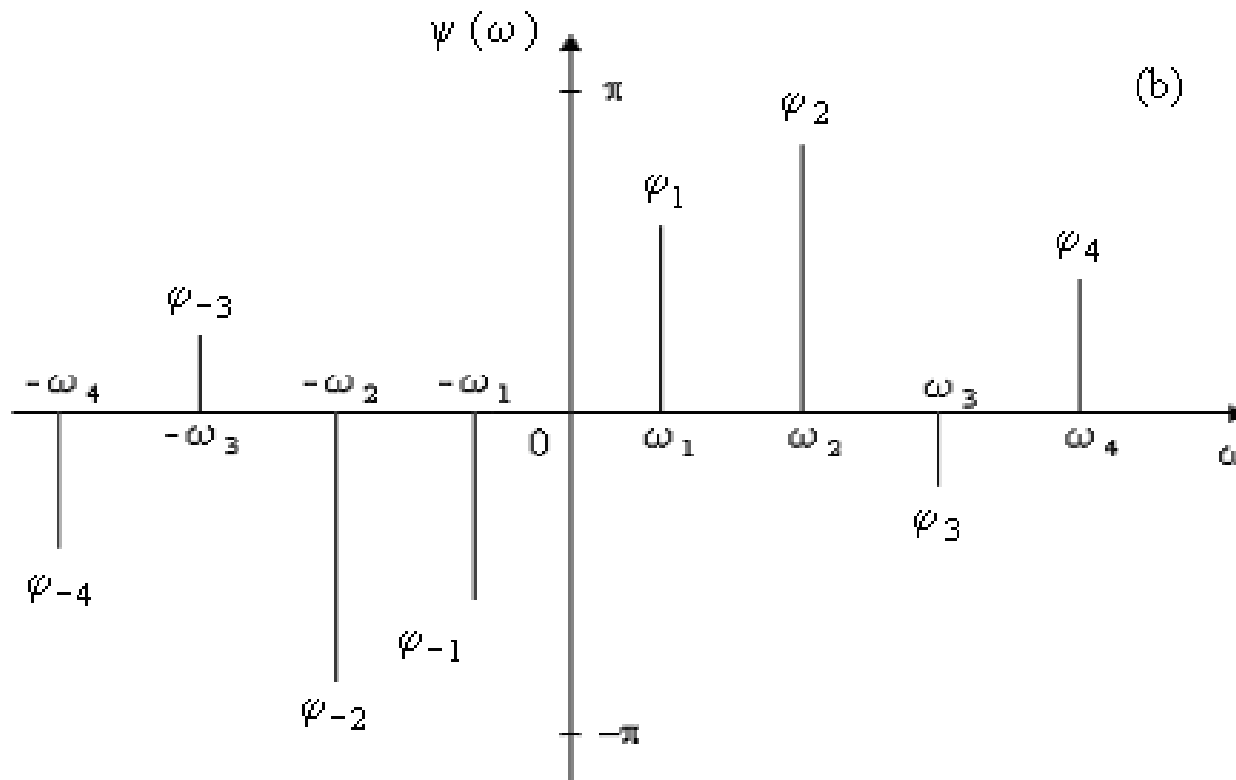
$$\boxed{g_0 = G_0}; \rightarrow (26)$$

(c) para $\omega > 0$,

$$\boxed{g_j = G_j/2}. \rightarrow (9),(22)$$

DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA – ESPECTRO BILATERAL DE FASE

Ainda na forma complexa da série de Fourier, o **espectro de fase** corresponde ao **argumento** de \bar{G}_j , sendo denotado por ψ_j . Ele também é bilateral.



Espectro discreto bilateral de fase.

Verifica-se (vide eqs.) que:

(a) esse **espectro** é uma **função ímpar**;

→ (22)-(25)

(b) para $\omega > 0$ e $g_j \neq 0$,

$$\boxed{\psi_j = \phi_j - (\pi/2)}$$

→ (10),(11),(22)

TEOREMA DE PARSEVAL E ESPECTRO DE POTÊNCIA

Seja $g(t)$ uma **tensão periódica**. Assim, a potência instantânea dissipada num resistor de 1 ohm é igual a $g^2(t)$, enquanto a **potência média dissipada** é

$$\frac{1}{T} \int_0^T g^2(t) dt \quad (29)$$

Como, da expressão (27), $g(t)$ é dada por

$$g(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{G}_j e^{i(\omega_j t)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{G}_j e^{i\left(j\frac{2\pi}{T}t\right)}$$

a tensão ao quadrado, $g^2(t)$, é tal que

$$g^2(t) = g(t) \cdot g^*(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \bar{G}_j e^{i\left(j\frac{2\pi}{T}t\right)} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{G}_k^* e^{-i\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)} .$$

TEOREMA DE PARSEVAL E ESPECTRO DE POTÊNCIA (cont.)

Assim, a potência média dissipada pode ser escrita como

$$\frac{1}{T} \int_0^T g^2(t) dt = \frac{1}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{G}_j \bar{G}_k^* \int_0^T e^{i \left[(j-k) \frac{2\pi}{T} t \right]} dt.$$

Como, por ortogonalidade,

$$\int_0^T e^{i \left[(j-k) \frac{2\pi}{T} t \right]} dt = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq k \\ T, & \text{se } j = k \end{cases},$$

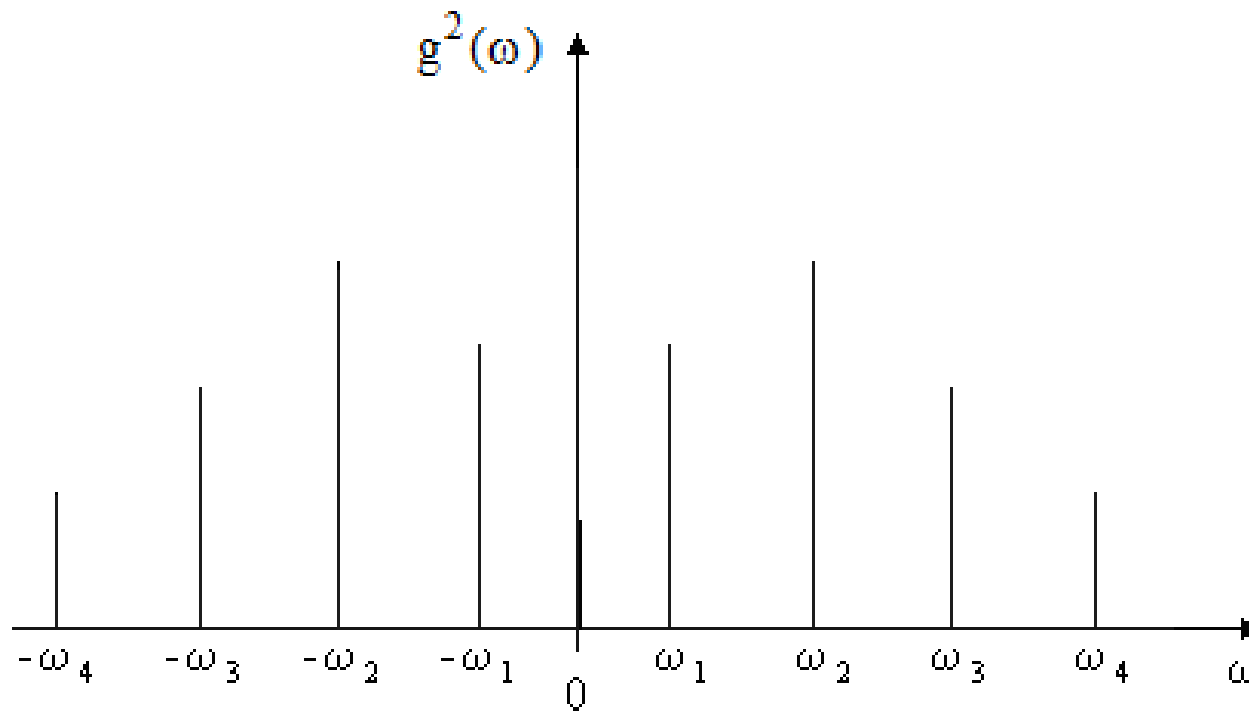
resulta que

$$\boxed{\frac{1}{T} \int_0^T g^2(t) dt = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\bar{G}_j|^2} \quad (30). \quad \rightarrow \text{Teorema de Parseval (sinais periódicos)}$$

→ potência média = soma das potências dos componentes em frequência.

TEOREMA DE PARSEVAL E ESPECTRO DE POTÊNCIA (cont.)

O gráfico de $|\bar{G}_j|^2$ (denotada por g^2) versus frequência, mostrado na figura abaixo, é denominado **espectro de potência** e revela a decomposição da potência do sinal na frequência. Esse gráfico recebe, por vezes, o nome de **periodograma**.



Espectro de potência típico.